

Transmission suivant deux trajets à évanouissement de Rayleigh : récepteurs optimaux

Georges TZIRITAS *

Analyse

L'auteur étudie la propagation simultanée suivant deux trajets dispersifs distincts et stables de distance temporelle connue. On supposera que les paramètres aléatoires de la propagation sont tels que le module du signal reçu suit la loi de Rayleigh et que sa phase suit la loi uniforme, ceci pour les deux trajets. L'auteur décrit la structure du récepteur optimal pour la détection simple et pour la transmission binaire et il en évalue les caractéristiques telles que les probabilités d'erreur instantanées ainsi que d'autres indices mesurant la qualité de la transmission.

Mots clés : Propagation onde, Propagation trajet multiple, Evanouissement Rayleigh, Canal avec bruit, Canal dispersif, Récepteur optimal, Détection signal, Détection binaire, Qualité transmission.

TRANSMISSION OVER TWO PATHS WITH RAYLEIGH FADING : OPTIMAL RECEIVERS

Abstract

Propagation over two paths dispersive channel is investigated. The time delay between the two paths is supposed stable and known. The channel is a random one following two statistical laws for the independent two paths : a Rayleigh law for the modulus of the received signal, and a uniform law for the phasis. The structure of the optimal receiver is given either for the simple detection or the transmission of binary data. The probability of instantaneous error as well as other parameters related with the quality of transmission are also evaluated.

Key words : Wave propagation, Multipath propagation, Rayleigh fading, Noisy channel, Dispersive channel, Optimal receiver, Signal detection, Binary detection, Transmission performance.

Sommaire

Introduction.

1. Modèle de la voie de transmission et position du problème.

2. Détection simple.

3. Transmission binaire.

Conclusion.

Annexes.

Bibliographie (11 réf.).

INTRODUCTION

Dans de nombreux cas de propagation (ondes électromagnétiques dans l'ionosphère ou l'atmosphère, ondes acoustiques en milieu aérien ou sous-marin), le signal reçu peut avoir suivi différents trajets de propagation. Nous étudions dans cet article le cas de propagation à deux trajets. Par exemple en propagation ionosphérique, l'onde qui est le support physique du signal, peut être diffusée et réfléchiée par deux couches situées à des altitudes différentes (Fig. 1).

Etant donné que la réflexion sur les couches ionosphériques est due à un grand nombre de diffuseurs en mouvement d'agitation « thermique », pratiquement indépendants entre eux, le signal reçu est considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire qui sera considéré comme gaussien parce que le théorème central limite est applicable.

Pour certaines transmissions, la moyenne du processus aléatoire décrivant le signal reçu, est nulle, ce qui veut dire que l'évanouissement suit la loi de Rayleigh. Cette hypothèse est justifiée par les résultats d'expériences effectuées en propagation ionosphérique, en propagation troposphérique (sans visibilité directe

* CEPHAG - ENSIFG. Domaine universitaire, B.P. 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères.

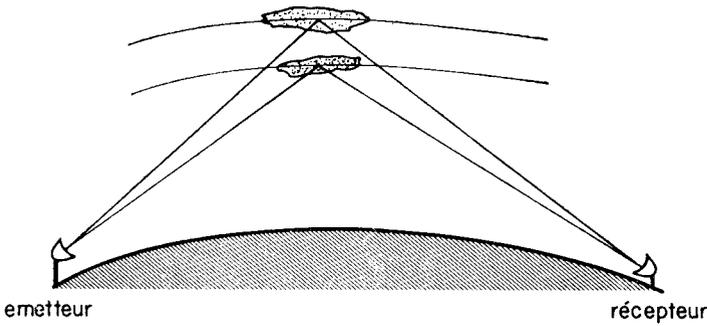


FIG. 1. — Exemple de propagation ionosphérique suivant deux trajets.

2-path propagation via ionosphere.

entre émetteur et récepteur) et en acoustique sous-marine [11].

La distance temporelle entre les deux trajets est supposée constante et connue avec une précision au moins égale à l'inverse de la largeur de bande du signal émis. En pratique, cette distance peut varier. Si elle fluctue dans l'intervalle de la précision admise, les récepteurs proposés ne sont plus optimaux mais ils sont acceptables. Si les fluctuations dépassent de cet intervalle, le récepteur doit être adaptatif.

La synthèse du dispositif d'adaptation déborde le cadre de notre étude. Mais il est évident que si le récepteur s'adapte aux variations de la distance entre trajets, l'évaluation des performances reste valable, avec la précision de l'adaptation.

Le sujet principal de notre étude est la description et l'évaluation de la qualité des récepteurs optimaux en détection simple et en transmission binaire. Les résultats sont donnés par les équations (20), (24) et (44), (45), (47), (48), (50) ainsi que par les figures 4 et 5.

Dans [1], on trouvera un développement plus complet de l'étude de la réception optimale dans le cas de trajets dispersifs et plus particulièrement dans le cas de trajets multiples.

1. MODÈLE DE LA VOIE DE TRANSMISSION ET POSITION DU PROBLÈME

Nous allons décrire les caractéristiques du signal transmis, la dispersion et l'évanouissement perturbant le signal et le bruit additif. Le signal transmis est supposé à bande étroite autour de la fréquence porteuse f_0 , et nul en dehors de l'intervalle de temps $[0, T]$

$$(1) \quad f(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\tilde{f}(t) e^{j2\pi f_0 t}], \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $\tilde{f}(t)$ est l'enveloppe complexe du signal et le facteur $\sqrt{2}$ sert à la normalisation de l'énergie, i.e.

$$E_t = \int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T |\tilde{f}(t)|^2 dt,$$

E_t désignant l'énergie transmise.

L'enveloppe complexe $\tilde{f}(t)$ s'écrit :

$$\tilde{f}(t) = f_c(t) - j f_s(t).$$

Donc le signal réel transmis est :

$$f(t) = \sqrt{2} [f_c(t) \cos 2\pi f_0 t + f_s(t) \sin 2\pi f_0 t].$$

Le signal transmis emprunte deux trajets en subissant un affaiblissement et un déphasage aléatoires sur chacun d'eux (Fig. 2). Ces deux évanouissements sont

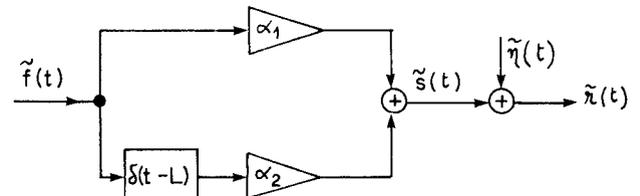


FIG. 2. — Modèle de la voie de transmission.

Channel model.

supposés indépendants statistiquement et leurs caractéristiques changent assez lentement pour que l'on puisse considérer que, pendant la durée T de la transmission, ils restent constants.

Le signal reçu est :

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{2} a_1 [f_c(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_1) + f_s(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_1)] + \\ &+ \sqrt{2} a_2 [f_c(t-L) \cos(2\pi f_0 t + \theta_2) + f_s(t-L) \sin(2\pi f_0 t + \theta_2)], \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re}[(a_1 e^{j\theta_1} \tilde{f}(t) + a_2 e^{j\theta_2} \tilde{f}(t-L)) e^{j2\pi f_0 t}], \end{aligned}$$

où L est la distance entre les deux trajets, supposée constante. L'enveloppe complexe du signal reçu est ainsi :

$$(2) \quad \tilde{s}(t) = \alpha_1 \tilde{f}(t) + \alpha_2 \tilde{f}(t-L), \quad 0 \leq t \leq T+L.$$

En supposant que les évanouissements a_1 et a_2 suivent la loi de Rayleigh, que les phases θ_1 et θ_2 sont uniformément réparties dans un intervalle de durée 2π , et que a_1 , a_2 , θ_1 et θ_2 sont indépendants entre eux, on obtient des variables aléatoires complexes α_1 et α_2 gaussiennes, centrées et indépendantes.

Leur densité de probabilité est donnée par

$$(3) \quad p(\alpha_k) = \frac{1}{\pi q_k} e^{-|\alpha_k|^2/q_k},$$

$$-\infty < \operatorname{Re}(\alpha_k), \operatorname{Im}(\alpha_k) < \infty; \quad k = 1, 2,$$

$$q_k = \operatorname{var}\{\alpha_k\}.$$

La moyenne de l'énergie reçue est :

$$(4) \quad \bar{E}_r = E \left\{ \int_0^{T+L} |s(t)|^2 dt \right\} = (q_1 + q_2) E_t.$$

Après traversée du milieu dispersif, le signal subit une perturbation additive provoquée par un bruit supposé blanc et gaussien de densité spectrale N_0 . Nous désignons par $\tilde{n}(t)$ son amplitude complexe relative à f_0 , et nous écrivons formellement sa covariance complexe (voir [4])

$$(5) \quad E\{\tilde{n}(t) \tilde{n}^*(t - \tau)\} = N_0 \delta(\tau).$$

Nous allons étudier la structure et les performances des récepteurs optimaux relativement à deux types de problèmes. Le premier est celui de la détection simple ou décision sur la présence ou non d'un signal. Le deuxième est, pour une transmission binaire, celui du choix entre deux signaux d'énergie égale. Le critère d'optimalité choisi est la minimisation de la probabilité d'erreur à la réception.

2. DÉTECTION SIMPLE

Nous testons l'hypothèse H_1 de présence du signal $f(t)$ contre l'hypothèse H_0 de bruit seul :

$$H_1 : \tilde{r}(t) = \tilde{s}(t) + \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T + L,$$

$$H_0 : \tilde{r}(t) = \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T + L.$$

Pour que la description du problème soit complète, nous définissons un coefficient d'autocorrélation du signal transmis.

$$(6) \quad \mu = \frac{1}{E_r} \int_0^{T+L} \tilde{f}(t) \tilde{f}^*(t - L) dt.$$

2.1. Structure du récepteur optimal.

Le récepteur optimal est du type *filtre adapté* suivi par un circuit à réponse quadratique (7). Si $\tilde{y}(t)$ est la sortie du filtre adapté à $f(t)/N_0$, l'information nécessaire et suffisante pour la décision optimale est contenue dans le vecteur \tilde{r} des échantillons :

$$(7) \quad \tilde{r} = \begin{bmatrix} \tilde{y}(T) \\ \tilde{y}(T + L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 \\ \tilde{r}_2 \end{bmatrix},$$

où

$$(8) \quad \tilde{r}_1 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{r}(t) \tilde{f}^*(t) dt,$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{r}(t) \tilde{f}^*(t - L) dt.$$

Ainsi définies, les variables \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2 sont complexes, aléatoires et suivent une loi gaussienne.

On définit aussi le vecteur \tilde{n} :

$$(9) \quad \tilde{n}_1 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{n}(t) \tilde{f}^*(t) dt,$$

$$\tilde{n}_2 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{n}(t) \tilde{f}^*(t - L) dt.$$

Dans l'hypothèse H_1 , après transmission du signal $\tilde{f}(t)$, le vecteur \tilde{r} s'écrit :

$$(10) \quad \tilde{r}_1 = \alpha_1 \gamma + \alpha_2 \mu^* \gamma + \tilde{n}_1,$$

$$\tilde{r}_2 = \alpha_2 \mu \gamma + \alpha_2 \gamma + \tilde{n}_2,$$

où $\gamma = E_t/N_0$ est le rapport de l'énergie transmise à l'énergie du bruit de réception.

Dans l'hypothèse H_0 de non-transmission, on a :

$$(11) \quad \tilde{r}_1 = \tilde{n}_1,$$

$$\tilde{r}_2 = \tilde{n}_2.$$

Une statistique suffisante pour la décision optimale est :

$$(12) \quad l = \tilde{r}^+ (K_0^{-1} - K_1^{-1}) \tilde{r},$$

où K_0 et K_1 sont les matrices de covariance du vecteur \tilde{r} conditionnellement aux hypothèses H_0 et H_1 respectivement.

Cette forme de statistique pour des variables aléatoires réelles gaussiennes est donnée dans [7]

$$(13) \quad K_0 = \begin{bmatrix} 1 & \mu^* \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \gamma,$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} (q_1 + q_2 |\mu|^2) \gamma + 1 & ((q_1 + q_2) \gamma + 1) \mu^* \\ ((q_1 + q_2) \gamma + 1) \mu & (q_1 |\mu|^2 + q_2) \gamma + 1 \end{bmatrix} \gamma.$$

Alors la statistique suffisante devient :

$$(14) \quad l = \frac{1}{\Delta} [q_1(1 + q_2 \gamma) |\tilde{r}_1|^2 + q_2(1 + q_1 \gamma) |\tilde{r}_2|^2 - 2 q_1 q_2 \gamma \operatorname{Re}[\tilde{r}_1 \tilde{r}_2^* \mu]],$$

où :

$$\Delta = q_1 q_2 (1 - |\mu|^2) \gamma^2 + q_1 q_2 \gamma + 1.$$

La figure 3 donne le schéma du récepteur optimal. La fonction de transfert du filtre adapté est $(1/N_0) \tilde{F}(j\omega) e^{-j\omega T}$ où $\tilde{F}(j\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(t)$.

Les termes croisés disparaissent si $\mu = 0$ i.e. si le support de la fonction de corrélation du signal est inférieur à L , distance entre les deux trajets. Remarquons aussi que toutes les pondérations font intervenir le rapport signal sur bruit. Or pratiquement on ne connaît pas souvent très bien ce rapport. Si l'on peut considérer qu'il est suffisamment petit pour que le rapport signal sur bruit sur chaque trajet soit encore petit devant 1, on pourra négliger $q_i \gamma$ dans les pondérations et utiliser la statistique $l_1 = q_1 |\tilde{r}_1|^2 + q_2 |\tilde{r}_2|^2$. Si l'on peut considérer que ce rapport est assez grand, on pourra utiliser la statistique $l_2 = |\tilde{r}_1|^2 + |\tilde{r}_2|^2 - 2 \operatorname{Re}[\tilde{r}_1 \tilde{r}_2^* \mu]$. Dans tous les cas, ces deux statistiques sont sous-optimales du point de vue de la probabilité d'erreur.

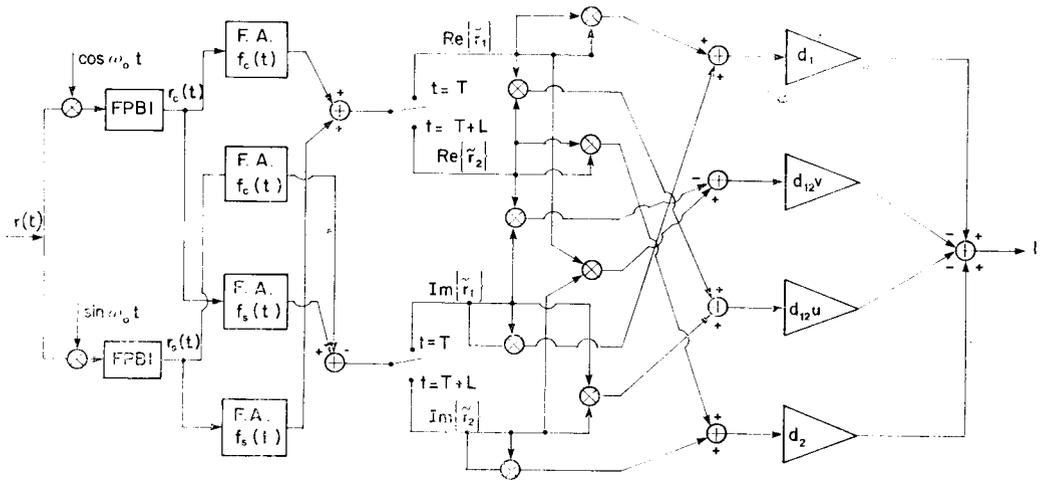


FIG. 3. — Récepteur optimal pour la détection simple.

FPBI : filtre passe-bas idéal,

FA : filtre adapté,

$\mu = u + jv$,

$$d_1 = \frac{q_1(1 + q_2 \gamma)}{\Delta}, \quad d_2 = \frac{q_2(1 + q_1 \gamma)}{\Delta}, \quad d_{12} = \frac{2 q_1 q_2 \gamma}{\Delta}.$$

Optimum receiver, simple detection.

2.2. Calcul des caractéristiques de qualité.

Dans la suite, on étudie les performances du récepteur optimal. Comme indice de qualité, on considère la probabilité d'erreur, et une mesure du rapport signal sur bruit à la sortie du récepteur définie par

$$(15) \quad J = \frac{|E\{I|H_1\} - E\{I|H_0\}|^2}{\text{var}\{I|H_0\}}.$$

L'indice de performance est présenté en [10].

2.2.1. Probabilité d'erreur.

On utilise pour l'évaluation de la probabilité d'erreur, la méthode de la fonction caractéristique. Soit $\theta_1(ju)$ et $\theta_0(ju)$ les fonctions caractéristiques de I conditionnellement aux hypothèses H_1 et H_0 respectivement.

Pour le récepteur optimal, on obtient (voir annexe A) :

$$(16) \quad \theta_1(ju) = 1/\det[I - ju(K_1 K_0^{-1} - I)],$$

$$\theta_0(ju) = 1/\det[I - ju(I - K_0 K_1^{-1})],$$

où les matrices K_0 et K_1 sont définies par (13) et I est la matrice identité. Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice $K_1 K_0^{-1} - I$, ces fonctions caractéristiques deviennent :

$$(17) \quad \theta_1(ju) = 1/(1 - ju \lambda_1)(1 - ju \lambda_2),$$

$$\theta_0(ju) = 1/(1 - ju \lambda_1/(1 + \lambda_1))(1 - ju \lambda_2/(1 + \lambda_2)).$$

On peut calculer :

$$(18) \quad \lambda_1 = \frac{q_1 + q_2 + \sqrt{(q_1 + q_2)^2 - 4 q_1 q_2 (1 - |\mu|^2)}}{2} \gamma,$$

$$\lambda_2 = \frac{q_1 + q_2 - \sqrt{(q_1 + q_2)^2 - 4 q_1 q_2 (1 - |\mu|^2)}}{2} \gamma,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (q_1 + q_2) \gamma.$$

Donc les distributions de probabilité de I sous les deux hypothèses sont obtenues en utilisant la transformée de Fourier (17). Pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$(19a) \quad P_{I|H_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-x/\lambda_1} - e^{-x/\lambda_2}), & x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0, \end{cases}$$

$$(19b) \quad P_{I|H_0}(x) = \begin{cases} \frac{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \times \\ (e^{-x(1+\lambda_1)/\lambda_1} - e^{-x(1+\lambda_2)/\lambda_2}), & x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Ayant les fonctions caractéristiques de I , il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir les probabilités de détection P_D et de fausse alarme P_F :

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} P_D &= \Pr\{I > \eta | H_1\} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \times \\ &\quad (\lambda_1 e^{-\eta/\lambda_1} - \lambda_2 e^{-\eta/\lambda_2}), \\ P_F &= \Pr\{I < \eta | H_0\} = \frac{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \times \\ &\quad \left(\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} e^{-\eta(1+\lambda_1)/\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2} e^{-\eta(1+\lambda_2)/\lambda_2} \right), \end{aligned} \right.$$

Si les deux hypothèses sont équiprobables, le seuil η doit être :

$$(21) \quad \eta = \ln \det[K_1 K_0^{-1}] = \ln(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2).$$

Cas particulier.

Quand les deux trajets sont de même énergie

moyenne et non corrélés, les valeurs caractéristiques sont les suivantes :

$$(22) \quad \lambda = q\gamma, \quad q_1 = q_2 = q.$$

Les densités de probabilité de l sont donc :

$$(23 a) \quad P_{l|H_1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\lambda^2} e^{-x/\lambda}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$(23 b) \quad P_{l|H_0}(x) = \begin{cases} \frac{(1 + \lambda)^2 x}{\lambda^2} e^{-x(1+\lambda)/\lambda}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

et les probabilités de détection et de fausse alarme :

$$(24) \quad P_D = (1 + \eta/\lambda) e^{-\eta/\lambda}, \\ P_F = (1 + \eta(1 + \lambda)/\lambda) e^{-\eta(1+\lambda)/\lambda}.$$

On donne à la figure 4 les courbes opérationnelles de la réception $P_D(P_F)$ pour $\mu = 0$, $q_1 = q_2$ et $q_1/q_2 = 10$ et pour diverses valeurs du rapport signal sur bruit ($\bar{E}_r/N_0 = 1, 2, 5, 10, 20, 50$).

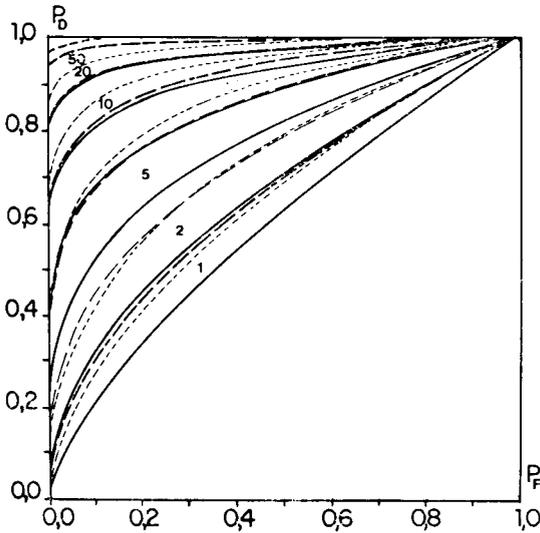


FIG. 4. — Courbe opérationnelle de la réception $P_D(P_F)$ pour une voie de Rayleigh à deux trajets. Les valeurs indiquées sont celles du rapport signal sur bruit.

- $q_1 = q_2$ optimal,
- $q_1 = q_2$ sous-optimal
- · - · $q_1/q_2 = 10$ optimal.

Receiver operating characteristic, 2-path fading channel.

Quand le rapport signal sur bruit est petit et que l'un des deux trajets est prépondérant, le résultat est meilleur que dans le cas d'une voie à deux trajets équipuissants. Si le rapport signal sur bruit dépasse une certaine valeur (~ 3), c'est l'inverse qui est vrai. Nous représentons à la figure 4 la courbe obtenue avec un récepteur sous-optimal qui n'utilise qu'un seul trajet sur deux trajets équipuissants.

2.2.2. Indice de qualité J .

Pour exprimer l'indice J , nous utilisons les expressions calculées en annexe A.

$$E\{l|H_1\} = \text{tr}[K_1 K_0^{-1} - I] = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$E\{l|H_0\} = \text{tr}[I - K_0 K_1^{-1}] = \lambda_1/(1 + \lambda_1) + \lambda_2/(1 + \lambda_2),$$

$$\text{var}\{l|H_0\} = \text{tr}[(I - K_0 K_1^{-1})^2] =$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2}\right)^2.$$

Donc, en fonction des valeurs propres, J s'écrit de la façon suivante :

$$(25) \quad J = \frac{\left(\frac{\lambda_1^2}{1 + \lambda_1} + \frac{\lambda_2^2}{1 + \lambda_2}\right)^2}{\left(\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2}\right)^2} = \frac{[\lambda_1^2(1 + \lambda_2) + \lambda_2^2(1 + \lambda_1)]^2}{\lambda_1^2(1 + \lambda_2)^2 + \lambda_2^2(1 + \lambda_1)^2}.$$

En fonction des paramètres directs du canal q_1, q_2 , du rapport γ et du coefficient μ , J s'écrit aussi :

$$(26) \quad J = [q_1^2 + q_2^2 + 2 q_1 q_2 |\mu|^2 + q_1 q_2 (q_1 + q_2) (1 - |\mu|^2) \gamma]^2 \gamma^2 / [q_1^2 + q_2^2 + 2 q_1 q_2 |\mu|^2 + 2 q_1 q_2 (q_1 + q_2) (1 - |\mu|^2) \gamma + 2 q_1^2 q_2^2 (1 - |\mu|^2)^2 \gamma^2].$$

L'indice J , pour un rapport signal sur bruit donné, i.e. pour $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{constante}$, prend sa valeur maximale pour $\lambda_2 = 0$ et sa valeur minimale pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Pour $\lambda_2 = 0, \quad J = \gamma_r^2.$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2, \quad J = \gamma_r^2/2,$

où $\gamma_r = (q_1 + q_2) \gamma$ est le rapport signal sur bruit à la réception.

On donne en figure 5 les variations de J en fonction du rapport signal sur bruit dans l'intervalle $[0, 50]$,

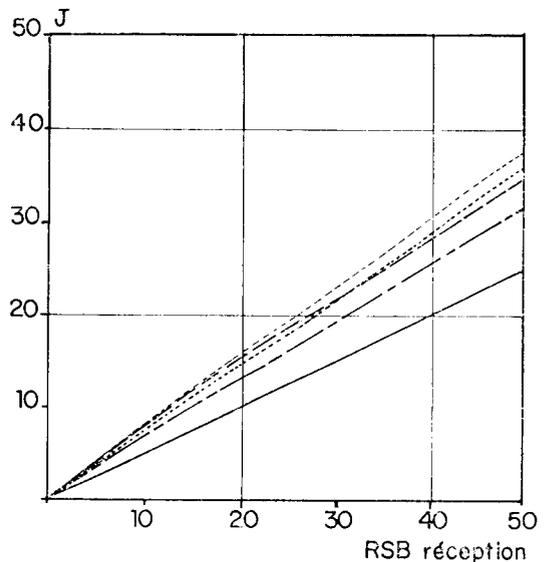


FIG. 5. — Indice de qualité J en fonction du rapport signal sur bruit (RSB).

- $q_1 = q_2$, sous optimal,
- $q_1 = q_2, \quad |\mu| = 0$,
- · - · $q_1 = q_2, \quad |\mu| = 0,5$,
- $q_1/q_2 = 10, \quad |\mu| = 0$,
- · - · $q_1/q_2 = 10, \quad |\mu| = 0,5$.

Performance coefficient 2-path fading channel.

pour $q_1 = q_2$ et $q_1/q_2 = 10$ et pour $\mu = 0$ et $|\mu| = 0,5$. L'indice de qualité J fait apparaître un meilleur résultat quand un des trajets est prépondérant et aussi quand les deux signaux correspondant aux deux trajets sont non corrélés. Ceci confirme les résultats déjà obtenus pour des rapports signal sur bruit petits, en prenant pour indice de qualité la probabilité d'erreur.

On donne aussi les variations de J pour un récepteur sous-optimal qui n'utilise que l'un des deux trajets équipouvants. On constate que l'on perd en indice de qualité J à peu près 1,6 dB avec le récepteur sous-optimal.

3. TRANSMISSION BINAIRE

Nous testons maintenant l'hypothèse de présence du signal $\tilde{f}_1(t)$ contre l'hypothèse de présence de $\tilde{f}_2(t)$:

$$H_1 : \tilde{r}(t) = \tilde{s}_1(t) + \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T + L,$$

$$H_2 : \tilde{r}(t) = \tilde{s}_2(t) + \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T + L.$$

Les enveloppes complexes $\tilde{s}_1(t)$ et $\tilde{s}_2(t)$ des signaux reçus sont données par (2). Nous supposons que les deux signaux ont la même énergie. Le cas du paragraphe 2 (détection simple) ne peut donc se déduire de celui-ci. Nous définissons les coefficients de corrélation qui interviennent dans ce problème :

$$(28 a) \quad \rho = \frac{1}{E_t} \int_0^{T+L} \tilde{f}_1(t) \tilde{f}_2^*(t) dt,$$

$$(28 b) \quad \mu_{ik} = \frac{1}{E_t} \int_0^{T+L} \tilde{f}_i(t) \tilde{f}_k^*(t-L) dt; \quad i, k = 1, 2.$$

3.1. Le récepteur optimal.

Comme le récepteur optimal de la détection simple, le récepteur optimal comprend deux filtres adaptés aux deux signaux émis, et suivis par un circuit à réponse quadratique. L'information nécessaire et suffisante pour la décision optimale, qui minimise la probabilité d'erreur, est contenue dans un vecteur \tilde{r} des échantillons des sorties des filtres :

$$(29) \quad \tilde{r} = \begin{cases} \tilde{r}_1 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{r}(t) \tilde{f}_1^*(t) dt, \\ \tilde{r}_2 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{r}(t) \tilde{f}_1^*(t-L) dt, \\ \tilde{r}_3 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{r}(t) \tilde{f}_2^*(t) dt, \\ \tilde{r}_4 = \frac{1}{N_0} \int_0^{T+L} \tilde{r}(t) \tilde{f}_2^*(t-L) dt. \end{cases}$$

On définit le vecteur \tilde{n} en mettant $\tilde{n}(t)$ à la place de $\tilde{r}(t)$ dans (29).

Dans l'hypothèse H_1 de transmission du signal $\tilde{f}_1(t)$, le vecteur \tilde{r} est :

$$(30) \quad \tilde{r} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & \mu_{11}^* \\ \mu_{11} & 1 \\ \rho & \mu_{21}^* \\ \mu_{12} & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + n.$$

Dans l'hypothèse H_2 de transmission du signal $\tilde{f}_2(t)$,

$$(31) \quad \tilde{r} = \gamma \begin{bmatrix} \rho^* & \mu_{12}^* \\ \mu_{21} & \rho^* \\ 1 & \mu_{22}^* \\ \mu_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + n.$$

Soient M_{ik} les matrices suivantes

$$(32) \quad M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_{11}^* \\ \mu_{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_{22}^* \\ \mu_{22} & 1 \end{bmatrix}, \\ M_{12} = \begin{bmatrix} \rho & \mu_{21}^* \\ \mu_{12} & \rho \end{bmatrix}.$$

La statistique suffisante pour la décision optimale est toujours :

$$(33) \quad l = \tilde{r}^+ + (K_1^{-1} - K_2^{-1}) \tilde{r}$$

où K_1 et K_2 sont les matrices de covariance de $\tilde{r}|H_1$ et $\tilde{r}|H_2$.

En adoptant la notation (32), nous pouvons calculer K_1 et K_2 :

$$(34) \quad K_1 = \gamma \begin{bmatrix} M_{11} Q M_{11} + M_{11} & M_{11} Q M_{12}^+ + M_{12}^+ \\ M_{12} Q M_{11} + M_{12} & M_{12} Q M_{12}^+ + M_{22} \end{bmatrix},$$

$$(35) \quad K_2 = \gamma \begin{bmatrix} M_{12}^+ Q M_{12} + M_{11} & M_{12}^+ Q M_{22} + M_{12}^+ \\ M_{22} Q M_{12} + M_{12} & M_{22} Q M_{22} + M_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\text{où} \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \gamma.$$

L'inversion des matrices K_1 et K_2 faite en annexe B nous donne :

$$(36) \quad K_1^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}^+ \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} (M_{11} Q M_{11} + M_{11})^{-1} - M_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_2^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}^+ \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (M_{22} Q M_{22} + M_{22})^{-1} - M_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

et

$$(37) \quad K_1^{-1} - K_2^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} (M_{11} Q M_{11} + M_{11})^{-1} - M_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & M_{22}^{-1} - (M_{22} Q M_{22} + M_{22})^{-1} \end{bmatrix}.$$

D'autre part

$$(38) \quad M_{kk}^{-1} - (M_{kk} Q M_{kk} + M_{kk})^{-1} = \begin{bmatrix} q_1(1 + q_2\gamma) & -q_1 q_2 \gamma \mu_{kk}^* \\ -q_1 q_2 \gamma \mu_{kk} & q_2(1 + q_1\gamma) \end{bmatrix} \frac{\gamma}{\Delta_{kk}}; \quad k = 1, 2,$$

où

$$\Delta_{kk} = q_1 q_2 (1 - |\mu_{kk}|^2) \gamma^2 + (q_1 + q_2) \gamma + 1.$$

Nous observons que la structure du récepteur optimal ne dépend pas de la corrélation ρ entre les deux signaux. Il comprend deux branches, chacune correspondant au récepteur optimal pour la détection simple du signal concerné (voir Fig. 6). Quant à la

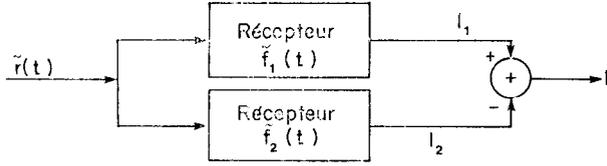


FIG. 6. - Récepteur optimal - transmission binaire.

Optimum receiver, binary transmission.

performance, elle dépend de toutes les corrélations entre les deux signaux exprimés par les paramètres ρ, μ_{12}, μ_{21} .

Les observations faites pour la détection simple (paragraphe 2.1.) et concernant le récepteur optimal sont encore valables.

3.2. Calcul des caractéristiques de qualité.

On a prouvé en annexe A que la matrice $K_2 K_1^{-1} - I$ contient tous les paramètres permettant d'évaluer la qualité. Dans le cas présent :

$$(39) \quad K_2 K_1^{-1} - I = \begin{bmatrix} (M_{12}^+ Q M_{12} + M_{11}) \times [(M_{11} Q M_{11} + M_{11})^{-1} - M_{11}^{-1}] & M_{12}^+ Q \\ (M_{22} Q M_{12} + M_{12}) \times [(M_{11} Q M_{11} + M_{11})^{-1} - M_{11}^{-1}] & M_{22} Q \end{bmatrix}.$$

Nous allons évaluer la probabilité d'erreur pour le cas $M_{12} = 0$ disons d'orthogonalité (signaux f_1 et f_2 orthogonaux et non corrélés à retard L) par la méthode décrite en annexe A et déjà utilisée pour la détection simple.

Quand $M_{12} = 0$, la matrice $K_2 K_1^{-1} - I$ devient

$$(39 a) \quad K_2 K_1^{-1} - I = \begin{bmatrix} M_{11} (M_{11} Q M_{11} + M_{11})^{-1} - M_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & M_{22} Q \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 de $M_{11} (M_{11} Q M_{11} + M_{11})^{-1} - M_{11}^{-1}$ et de $M_{22} Q$ sont aussi valeurs propres de $K_2 K_1^{-1} - I$.

$$(40) \quad \lambda_1 = \frac{q_1 + q_2 + \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + 4 q_1 q_2 |\mu_{22}|^2}}{2} \gamma,$$

$$\lambda_2 = \frac{q_1 + q_2 - \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + 4 q_1 q_2 |\mu_{22}|^2}}{2} \gamma,$$

$$\lambda_3 = -\frac{\gamma}{\Delta_{11}} \left[\frac{q_1 + q_2 - \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + 4 q_1 q_2 |\mu_{11}|^2}}{2} + q_1 q_2 \gamma (1 - |\mu_{11}|^2) \right],$$

$$\lambda_4 = -\frac{\gamma}{\Delta_{11}} \left[\frac{q_1 + q_2 + \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + 4 q_1 q_2 |\mu_{11}|^2}}{2} + q_1 q_2 \gamma (1 - |\mu_{11}|^2) \right].$$

On peut constater que :

$$(q_1 + q_2) \gamma \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \frac{1 - \Delta_{11}}{\Delta_{11}} \geq -1.$$

Le seuil η doit être :

$$(41) \quad \eta = \ln \prod_{i=1}^4 (1 + \lambda_i),$$

pour que la probabilité d'erreur soit minimale quand les deux hypothèses sont équiprobables.

$$\text{Or} \quad (1 + \lambda_1) (1 + \lambda_2) = \Delta_{22},$$

$$(1 + \lambda_3) (1 + \lambda_4) = 1/\Delta_{11},$$

et avec (41), on devra donc choisir le seuil :

$$\eta = \ln \Delta_{22}/\Delta_{11}.$$

Ceci veut dire que pour $|\mu_{22}| \leq |\mu_{11}|$, on a $\eta \geq 0$. Dans ce qui suit nous présentons les densités de probabilités et les probabilités d'erreur pour divers cas. La probabilité d'erreur totale est :

$$(42) \quad \text{Pr} \{ \varepsilon \} = \frac{1}{2} (\text{Pr} \{ l < \eta | H_2 \} + \text{Pr} \{ l > \eta | H_1 \}) = \frac{1}{2} (P_{e2} + P_{e1}).$$

a) Si $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4, q_1 \neq q_2$ et/ou $\mu_{11} \neq 0, \mu_{22} \neq 0$, les densités de probabilités de l conditionnellement aux hypothèses H_2 et H_1 sont :

$$(43 a) \quad P_{l|H_2}(x) = \frac{\lambda_1^2 e^{-x/\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{\lambda_2^2 e^{-x/\lambda_2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}, \quad x \geq 0,$$

$$\frac{\lambda_3^2 e^{-x/\lambda_3}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} - \frac{\lambda_4^2 e^{-x/\lambda_4}}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)}, \quad x \leq 0,$$

$$(43 b) \quad P_{l|H_1}(x) = \prod_{i=1}^4 (1 + \lambda_i) \left[\frac{\lambda_1^2 e^{-(1+\lambda_1)x/\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{\lambda_2^2 e^{-(1+\lambda_2)x/\lambda_2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \right], \quad x \geq 0,$$

$$\prod_{i=1}^4 (1 + \lambda_i) \left[\frac{\lambda_3^2 e^{-(1+\lambda_3)x/\lambda_3}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} - \frac{\lambda_4^2 e^{-(1+\lambda_4)x/\lambda_4}}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right], \quad x \leq 0.$$

Quand $\eta \geq 0$, i.e. $|\mu_{11}| = |\mu_{22}|$,

$$(44) \quad P_{e_1} = \prod_{i=1}^4 (1 + \lambda_i) \left[\frac{\lambda_1^3 e^{-(1+\lambda_1)\eta/\lambda_1}}{(1+\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} - \frac{\lambda_2^3 e^{-(1+\lambda_2)\eta/\lambda_2}}{(1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)} \right],$$

$$P_{e_2} = - \frac{\lambda_3^3}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_4)} + \frac{\lambda_4^3}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)} + \frac{\lambda_1^3(1 - e^{-\eta/\lambda_1})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} - \frac{\lambda_2^3(1 - e^{-\eta/\lambda_2})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}.$$

Quand $\eta \leq 0$, i.e. $|\mu_{11}| \leq |\mu_{22}|$,

$$(45) \quad P_{e_1} = \prod_{i=1}^4 (1 + \lambda_i) \left[\frac{\lambda_1^3}{(1+\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} - \frac{\lambda_2^3}{(1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)} \right] + \prod_{i=1}^4 (1 + \lambda_i) \left[- \frac{\lambda_3^3(1 - e^{-(1+\lambda_3)\eta/\lambda_3})}{(1+\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_4)} + \frac{\lambda_4^3(1 - e^{-(1+\lambda_4)\eta/\lambda_4})}{(1+\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)} \right],$$

$$P_{e_2} = - \frac{\lambda_3^3 e^{-\eta/\lambda_3}}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_4)} + \frac{\lambda_4^3 e^{-\eta/\lambda_4}}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}.$$

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$; on est dans le cas :

$$q_1 = q_2 = q, \quad \mu_{22} = 0, \quad \mu_{11} \neq 0;$$

alors,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = q\gamma,$$

$$\lambda_3 = - \frac{q\gamma(1 - |\mu_{11}|)}{1 + q\gamma(1 - |\mu_{11}|)},$$

$$\lambda_4 = - \frac{q\gamma(1 + |\mu_{11}|)}{1 + q\gamma(1 + |\mu_{11}|)}.$$

On a aussi, $\eta > 0$.

Les densités de probabilité de l conditionnellement aux hypothèses H_2 et H_1 sont :

$$(46 a) \quad P_{l|H_2}(x) = \begin{cases} \frac{x - [\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4] e^{-x/\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} e^{-x/\lambda_1}, & x \geq 0, \\ \frac{\lambda_3^2 e^{-x/\lambda_3} - \lambda_4^2 e^{-x/\lambda_4}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)}, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$(46 b) \quad P_{l|H_1}(x) = \begin{cases} (1 + \lambda_1) [(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_3)(1 + \lambda_4)x - [\lambda_1\lambda_3(1 + \lambda_4) + \lambda_1\lambda_4(1 + \lambda_3) + \lambda_3\lambda_4(1 + \lambda_1)]] \times e^{-x(1+\lambda_1)/\lambda_1} / (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4), & x \geq 0, \\ \frac{\lambda_3^2(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} e^{-x(1+\lambda_3)/\lambda_3} - \frac{\lambda_4^2(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} e^{-x(1+\lambda_4)/\lambda_4}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Les probabilités d'erreur sont :

$$(47) \quad P_{e_1} = \left[\frac{\lambda_1^2(1 + \lambda_3)(1 + \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \left(1 + \frac{\eta(1 + \lambda_1)}{\lambda_1} \right) - \frac{\lambda_1[\lambda_1\lambda_3(1 + \lambda_4) + \lambda_1\lambda_4(1 + \lambda_3) + \lambda_3\lambda_4(1 + \lambda_1)]}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \right] \times e^{-(1+\lambda_1)\eta/\lambda_1},$$

$$P_{e_2} = \frac{\lambda_3^3}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)} - \frac{\lambda_4^3}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} + \frac{\lambda_1^2(1 + \eta/\lambda_1) - \lambda_1[\lambda_4(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4]}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} e^{-\eta/\lambda_1}.$$

c) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, c'est-à-dire que :

$$q_1 = q_2 = q, \quad \mu_{11} = 0, \quad \mu_{22} \neq 0,$$

le cas est symétrique du précédent, donc la probabilité d'erreur totale est la même.

d) Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, on est dans une situation limite où $q_2 = 0$ donc on a un seul trajet.

$$\lambda_1 = q_1\gamma, \quad \lambda_4 = - \frac{q_1\gamma}{1 + q_1\gamma}, \quad \eta = 0.$$

Le résultat est bien connu

$$(48) \quad \text{Pr}\{\epsilon\} = 1/(2 + q_1\gamma).$$

e) Si $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$; alors :

$$q_1 = q_2 = q, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = 0.$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = q\gamma,$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = - \frac{q\gamma}{1 + q\gamma}.$$

Cette fois encore $\eta = 0$.

La densité de probabilité de l conditionné à H_2 est

$$(49) \quad P_{l|H_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2} \left(x - \frac{2\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} \right) e^{-x/\lambda_1}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2} \left(\frac{2\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} - x \right) e^{-x/\lambda_3}, & x \leq 0. \end{cases}$$

A cause de la symétrie,

$$(50) \quad \text{Pr}\{\epsilon\} = P_{e_2} = \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2} \left(1 + \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3} \right) = \frac{4 + 3q\gamma}{(2 + q\gamma)^3}.$$

Ceci confirme le résultat de J. Pierce et G. Turin [8, 9] pour des récepteurs utilisant le principe de la diversité (ici diversité 2). La comparaison des deux derniers cas de propagation d) et e) indique que pour des rapports signal sur bruit inférieurs à $4\sqrt{2}$ la transmission à un trajet ($q_2 = 0$) est meilleure que celle à deux trajets.

Nous donnons en figure 7, l'évolution de la probabilité d'erreur en fonction du rapport signal sur bruit (de 1 à 100), pour la transmission à un seul trajet, pour la transmission à un trajet prépondérant

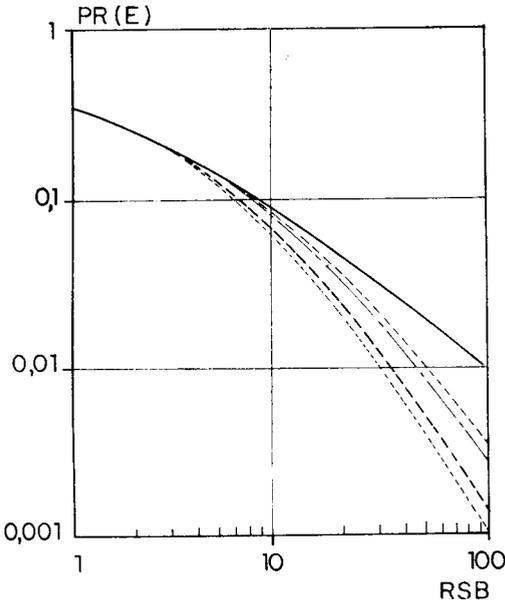


FIG. 7. — Probabilité d'erreur pour une transmission suivant 2 trajets Rayleigh à modulation par déplacement de fréquence (FSK).

— $q_1/q_2 = 0, |\mu| = 0$.
 - - - $q_1/q_2 = 0, |\mu| = 0,5$
 - · - $q_1/q_2 = 10, |\mu| = 0$.
 · · · $q_1/q_2 = 10, |\mu| = 0,5$

Error probability, 2-path fading channel FSK transmission.

($q_1/q_2 = 10$) et pour la transmission à deux trajets équipuissants ($q_1 = q_2$). Nous avons pris $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$ (indiqué $|\mu|$ à la figure). C'est le cas par exemple des transmissions FSK, quand les signaux $f_1(t), f_2(t)$ ont le même spectre, mais décalés en fréquence de façon que les spectres ne se recouvrent pas.

Nous représentons les courbes pour deux valeurs de $|\mu|$ (0 et 0,5). Nous constatons que la propagation à deux trajets améliore la qualité de la transmission dès que l'on dépasse un certain rapport signal sur bruit, qui dépend du rapport des puissances des trajets (pour deux trajets équipuissants, ce seuil se trouve à peu près à 3). Nous constatons aussi que si le coefficient de corrélation $|\mu|$ est nul et pour un rapport signal sur bruit dépassant une certaine valeur (~ 3), le récepteur est plus performant que celui avec $|\mu| \neq 0$.

CONCLUSION

Nous avons étudié le problème de la détection simple et de la transmission binaire suivant une voie à deux trajets dont la distance temporelle est supposée stable et connue, avec une précision au moins égale à l'inverse de la largeur de bande du signal transmis. Le récepteur optimal procède à un traitement quadratique de la sortie d'un filtre adapté au signal transmis. La qualité de ce récepteur est mesurée d'une part avec la probabilité d'erreur et d'autre part avec le rapport signal sur bruit et les résultats sont donnés, pour la détection simple, en figures 4

et 5. Les résultats nous permettent de mieux choisir le signal à transmettre par cette voie.

Pour un rapport signal sur bruit donné, les performances ne dépendent que du coefficient de corrélation μ pour la détection simple et les divers coefficients $\mu_{ik}(i = 1, 2), \rho$ pour la communication binaire. Les expressions données permettent de chercher les valeurs optimales pour ces coefficients. Pour l'exemple de la transmission binaire symétrique (Fig. 7), on constate que, pour des rapports signal sur bruit élevés ($> \sim 3$), les performances sont meilleures si le coefficient de corrélation est nul, i.e. si on élimine l'effet de la corrélation entre trajets.

ANNEXE A

Test de covariance de 2 vecteurs complexes gaussiens

Nous étudions le problème de la distinction entre deux vecteurs à variables complexes gaussiennes dont les matrices de covariance sont K_1 et K_2 et sont de moyenne nulle. Nous supposons que ces matrices sont non singulières. Nous rappelons l'expression de la densité de probabilité d'un vecteur complexe gaussien \tilde{r} , de dimension N [4].

$$(A-1) \quad p(\tilde{r}) = \frac{1}{\pi^N \det K} \exp(-\tilde{r}^+ K^{-1} \tilde{r}),$$

où \tilde{r}^+ symbolise le vecteur transposé conjugué de \tilde{r} . Le test bayésien, quand les deux hypothèses sont équiprobables, nous donne :

$$(A-2) \quad l = \tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_0^{-1}) \tilde{r} \underset{H_1}{\overset{H_2}{\geq}} \ln \det K_2 K_1^{-1}.$$

Nous allons chercher la fonction caractéristique de l et sa densité de probabilité ainsi que sa valeur moyenne et sa variance sous les deux hypothèses.

Si $\theta_1(ju)$ est la fonction caractéristique de l sous l'hypothèse que la matrice de covariance de \tilde{r} est K_1 , nous avons

$$(A-3 a) \quad \theta_1(ju) = E\{e^{ju l} | H_1\} = E\{e^{ju \tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1}) \tilde{r}} | H_1\},$$

$$= \frac{1}{\pi^N \det K_1} \int e^{ju \tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1}) \tilde{r} - \tilde{r}^+ K_1^{-1} \tilde{r}} d\tilde{r},$$

$$= \frac{1}{\pi^N \det K_1} \frac{\pi^N}{\det [K_1^{-1} - ju(K_1^{-1} - K_2^{-1})]},$$

$$\theta_1(ju) = \frac{1}{\det [I - ju(I - K_1 K_2^{-1})]}.$$

On peut de la même façon montrer que

$$(A-3 b) \quad \theta_2(ju) = \frac{1}{\det [I - ju(-K_2 K_1^{-1} I)]}.$$

Si les valeurs propres de la matrice $(K_2 K_1^{-1} - I)$ sont $\lambda_i (i = 1 \dots, N)$, nous avons

$$(A-4 a) \quad \theta_1(ju) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N \left(1 - ju \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)},$$

$$(A-4 b) \quad \theta_2(\mathbf{j}u) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N (1 - \mathbf{j}u\lambda_i)}$$

Pour pouvoir donner une expression de la densité de probabilité nous devons transformer les $\theta_i(\mathbf{j}u)$ en somme, comme nous l'avons fait pour $N = 2$.

La moyenne de l sous les deux hypothèses s'exprime comme suit :

$$(A-5 a) \quad \begin{aligned} E\{l|H_1\} &= E\{\tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1})\tilde{r} | H_1\}, \\ &= E\{\text{tr}[\tilde{r}\tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1})] | H_1\}, \\ &= \text{tr}[E\{\tilde{r}\tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1}) | H_1\}], \\ &= \text{tr}[I - K_1 K_2^{-1}], \end{aligned}$$

$$(A-5 b) \quad \begin{aligned} E\{l|H_2\} &= \text{tr}[E\{\tilde{r}\tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1}) | H_2\}], \\ &= \text{tr}[K_2 K_1^{-1} - I]. \end{aligned}$$

Donc :

$$(A-6 a) \quad E\{l|H_1\} = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i},$$

$$(A-6 b) \quad E\{l|H_2\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i.$$

La variance de l s'exprime comme suit :

$$\text{var}\{l|H_1\} = E\{\tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1})\tilde{r}\tilde{r}^+(K_1^{-1} - K_2^{-1})\tilde{r} | H_1\} - (E\{l|H_1\})^2,$$

soit Γ une matrice telle que

$$K_1^{-1} - K_2^{-1} = \Gamma + \Gamma$$

et

$$\tilde{v} = \Gamma \tilde{r},$$

alors

$$E\{\tilde{v}\tilde{v}^+ | H_1\} = \Gamma K_1 \Gamma^+ = A$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}\{l|H_1\} &= E\{\tilde{v}^+ \tilde{v} \tilde{v}^+ \tilde{v} | H_1\} - (E\{l|H_1\})^2, \\ &= \text{tr}[E\{\tilde{v}\tilde{v}^+ \tilde{v}\tilde{v}^+ | H_1\}] - (E\{l|H_1\})^2, \end{aligned}$$

l'élément de la matrice $\tilde{v}\tilde{v}^+ \tilde{v}\tilde{v}^+$ est :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^N \tilde{v}_i \tilde{v}_k^* \tilde{v}_k \tilde{v}_j^*,$$

$$E\{b_{ij} | H_1\} = \sum_{k=1}^N (a_{ik} a_{kj} + a_{ij} a_{kk}).$$

Donc

$$E\{B|H_1\} = A^2 + A \text{tr}A$$

et la variance devient

$$\text{var}\{l|H_1\} = \text{tr}A^2 + (\text{tr}A)^2 - (\text{tr}A)^2,$$

$$\text{tr}A = \text{tr}(\Gamma K_1 \Gamma^+) = \text{tr}(K_1 \Gamma^+ \Gamma) = \text{tr}(I - K_1 K_2^{-1}),$$

finalement

$$(A-7 a) \quad \text{var}\{l|H_1\} = \text{tr}(I - K_1 K_2^{-1})^2,$$

$$(A-7 b) \quad \text{var}\{l|H_2\} = \text{tr}(K_2 K_1^{-1} - I)^2.$$

En tenant compte de ce que les valeurs propres du carré d'une matrice sont les carrés des valeurs propres de la matrice, nous avons :

$$(A-8 a) \quad \text{var}\{l|H_1\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \right)^2,$$

$$(A-8 b) \quad \text{var}\{l|H_2\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2.$$

ANNEXE B

Inversion d'une matrice hermitienne $2 M \times 2 M$

Soit A une matrice hermitienne de dimensions $2 M \times 2 M$. Nous la partitionnons en matrices $M \times M$ comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^+ & A_{22} \end{bmatrix}.$$

La matrice inverse aura une structure identique, i.e.

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^+ & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Les B_{ik} s'expriment en fonction de A_{ik} d'après les formules suivantes

$$(B-1) \quad \begin{cases} B_{22} = (A_{22} - A_{12}^+ A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}, \\ B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} B_{22}, \\ B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} B_{22} A_{12}^+ A_{11}^{-1}, \end{cases}$$

ou

$$(B-2) \quad \begin{cases} B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{12}^+)^{-1}, \\ B_{12} = -B_{11} A_{12} A_{22}^{-1}, \\ B_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{12}^+ B_{11} A_{12} A_{22}^{-1}. \end{cases}$$

Pour la matrice K_1 (34), nous appliquons les formules (B-1) et pour la matrice K_2 (35), les formules (B-2).

Manuscrit reçu le 27 novembre 1980,
accepté le 22 avril 1981.

BIBLIOGRAPHIE

- JOURDAIN (G.), TZIRITAS (G.). Optimal receivers over randomly time and frequency dispersive channels-multipath case. *European Signal Proc. Conf.*, Lausanne. North-Holland, Amsterdam (1980).
- TZIRITAS (G.). Détection et communication optimales à travers un canal de propagation à deux trajets. Rapport CEPHAG n° 33, Fr. (1979).
- TURIN (G.). Communication through noisy, random-multipath channels. *IRE Nat. Conv. Rec.*, USA (1956), pt 4, pp. 154-166.
- VAN TREES (H.). Detection, estimation and modulation theory. Part III Radar-sonar processing and gaussian signals in noise. *Wiley*, New York (1971).
- KENNEDY (R.). Fading dispersive communications channels. *Wiley*, New York (1969).
- FAURE (B.). Estimation de la fonction de diffusion d'un milieu réel. Rapport CEPHAG 24, Fr. (1979).
- VAN TREES (H.). Detection, estimation and modulation theory. Part I. *Wiley*, New York (1968).
- TURIN (G.). On optimal diversity reception. *IRE Trans. CS, USA* (March 1962), 10, pp. 22-31.
- PIERCE (J.). Theoretical diversity improvement in frequency Shift Keying. *Proc. IRE, USA* (May 1958), 46, pp. 903-910.
- VENETSANOPOULOS (A.), TUTEUR (F.). Transmitter receiver optimization for active signaling over undersea acoustic channels. *IEEE Trans. COM, USA* (oct. 1971), 19, n° 5, pp. 649-659.
- JOURDAIN (J. Y.), LAMBERT (P.). Transmission acoustique des signaux monochromatiques. *Rev. CETHEDEC, Fr.* (2^e trimestre 1980), NS 80-1.