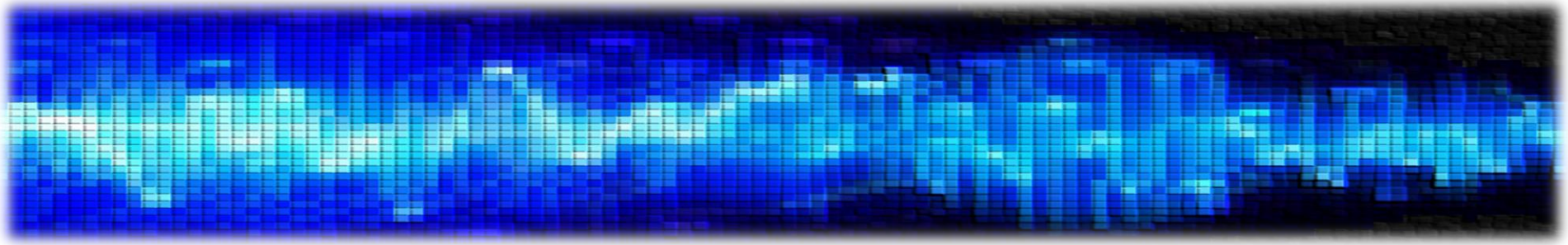
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η



- Δειγματοληψία (reminder)
- Βασικά Σήματα και Ιδιότητες

- ***Ως τώρα…***
- Σειρές Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Μετασχ. Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Μετασχ. Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- ΓΧΑ συστήματα:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$Y(s) = X(s) H(s)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist*:**

Ακριβής και τέλεια ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ τέτοιο ώστε:

$$|X(f)| = 0, \qquad |f| > f_{max}$$

με f_{max} τη μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

2. Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα f_{max}

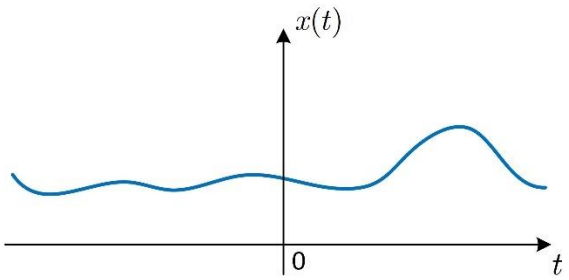
$$f_s > 2f_{max}$$

- Η συχνότητα f_{max} ονομάζεται **συχνότητα Nyqu**ist και η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**

- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος $X(f)$ ανά f_s Hz στο πεδίο της συχνότητας

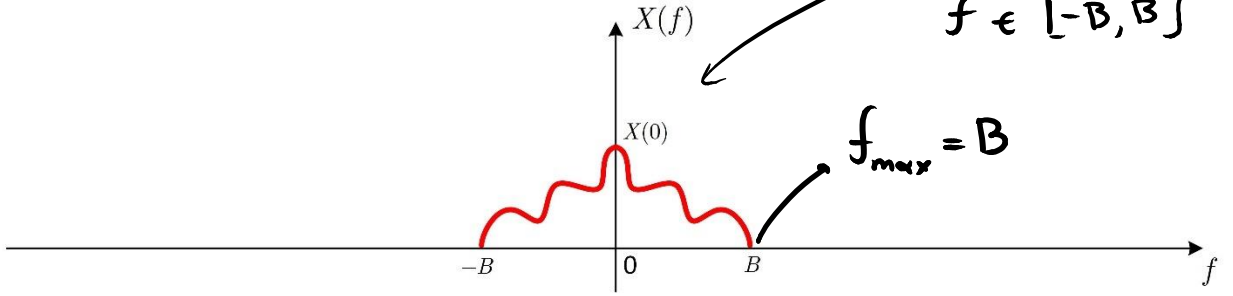
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

ΧΡΟΝΟΣ



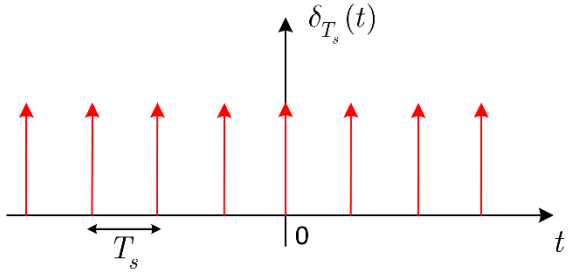
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

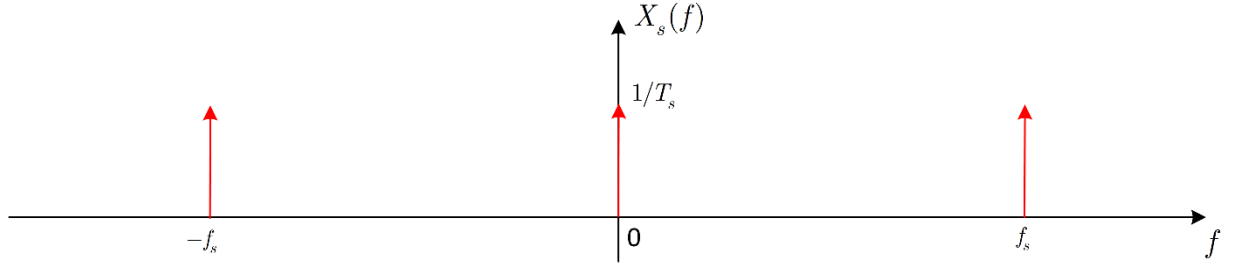
$X(f) \neq 0$ για $f \in [-B, B]$



●

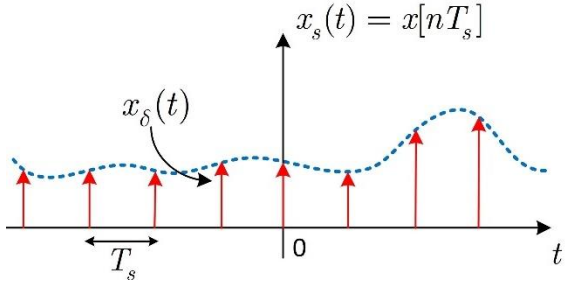
★ (Συνέλιξη)

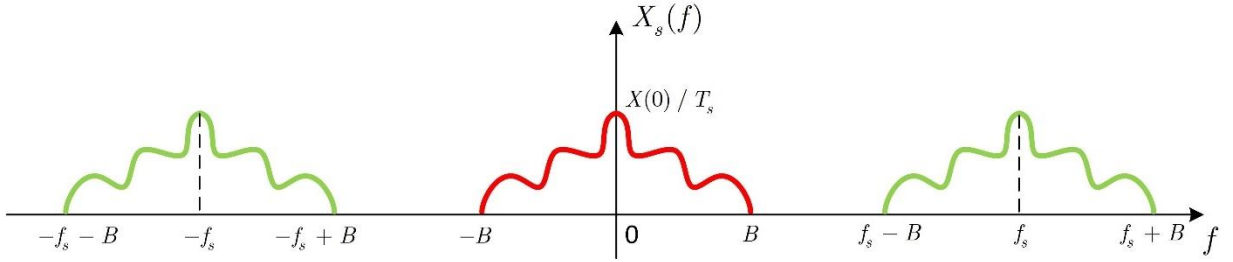




=

=





© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist*:**

Πώς γίνεται η ανακατασκευή;

1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα $X_s(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x(nT_s)$ με ένα τετραγωνικό παράθυρο – ή αλλιώς, χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H_{lp}(f) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

δηλ.

$$X_{rec}(f) = X_s(f)H_{lp}(f) = X(f)$$

ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφά» του

2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος $x(nT_s)$ του δειγματοληπτημένου σήματος με μετατοπισμένες συναρτήσεις $\text{sinc}(.)$ και άθροισμα όλων των τελευταίων

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

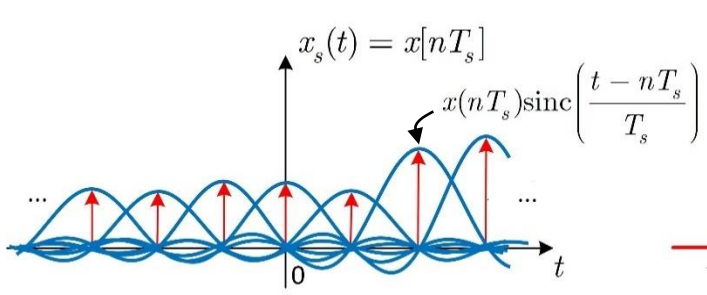
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

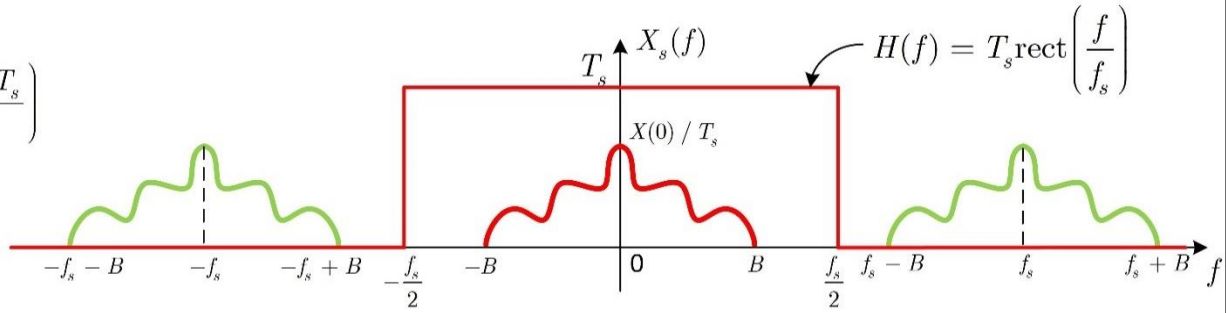
- Δηλαδή:

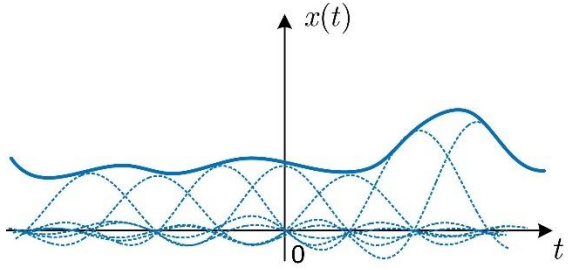
$$x_{rec}(t) = x_s(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

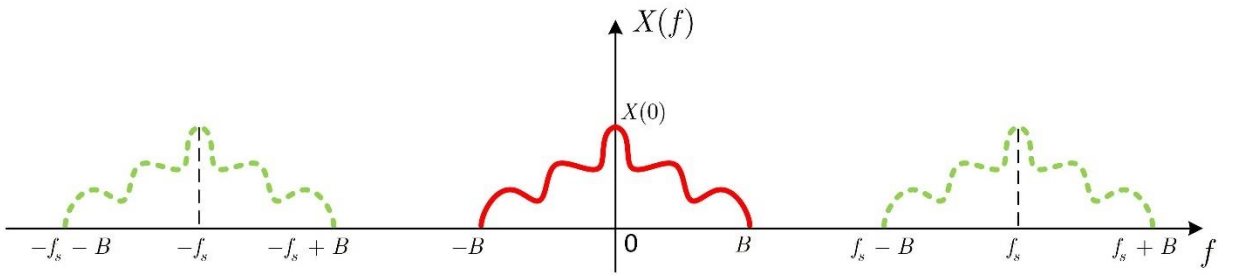
$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

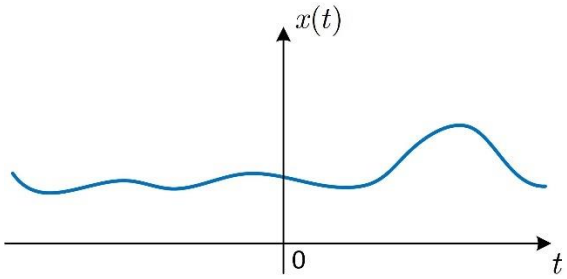


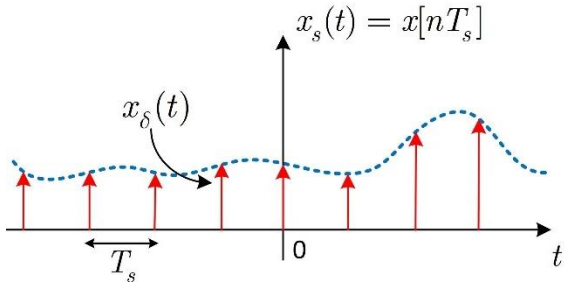




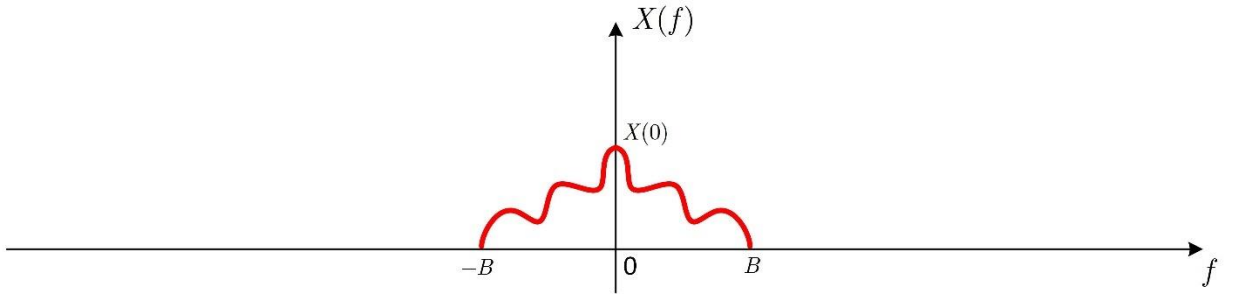


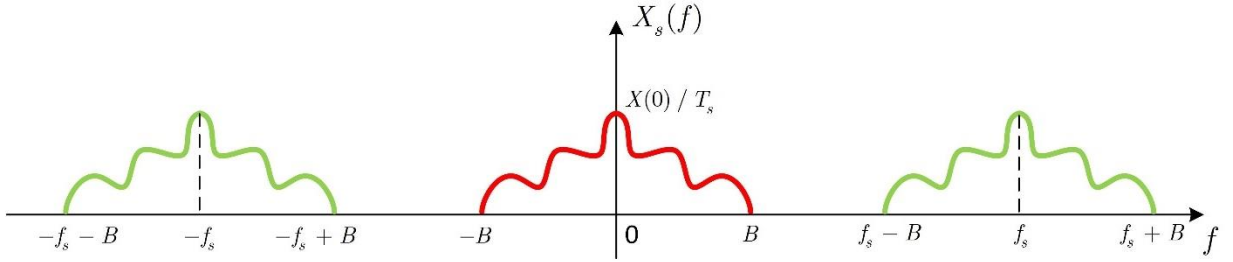
ΧΡΟΝΟΣ

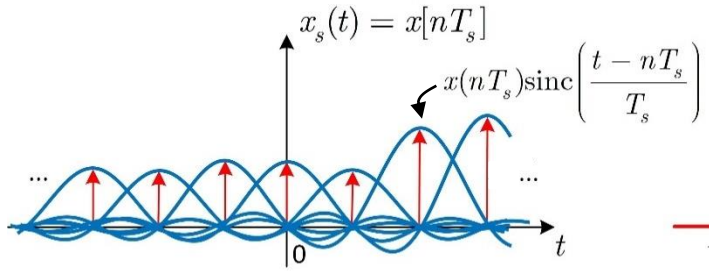


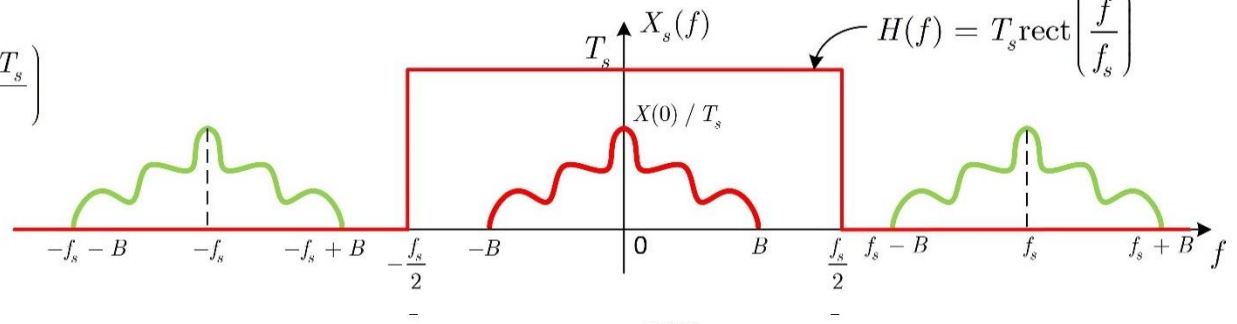


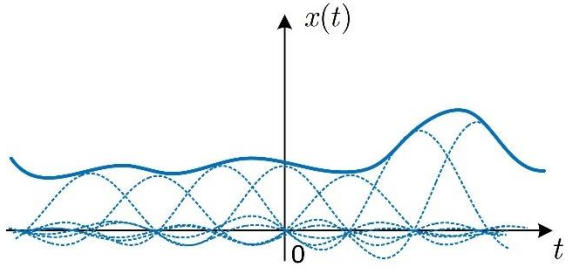
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

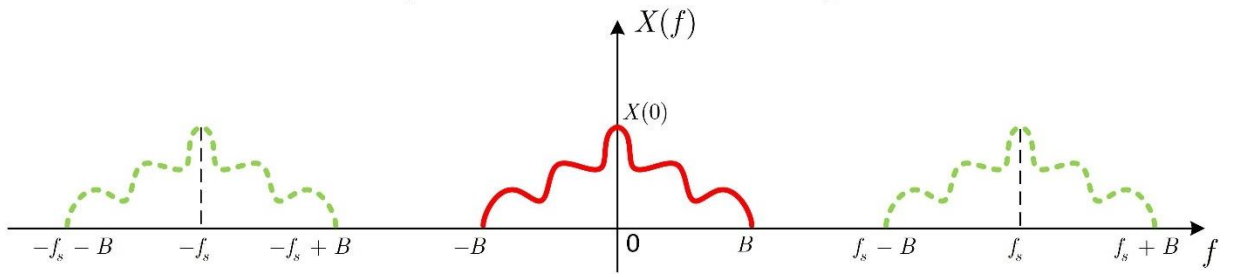












© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Παράδειγμα:
  - Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας f_s και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.

Θέτω $t := nT_s = \frac{n}{f_s}$, γιατί $T_s = \frac{1}{f_s}$

Είναι $x(nT_s) = A\cos(2\pi f_0 n T_s) = A\cos\left(\frac{2\pi f_0 n}{f_s}\right) = x[n]$ (ω_0)

$= A\cos(\omega_0 n)$

με $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}}$ Σχέση ω_0, f_0, και f_s !

Π.χ. για $x(t) = 2\cos(2\pi 100 t)$ και $f_s = 8000$ Hz

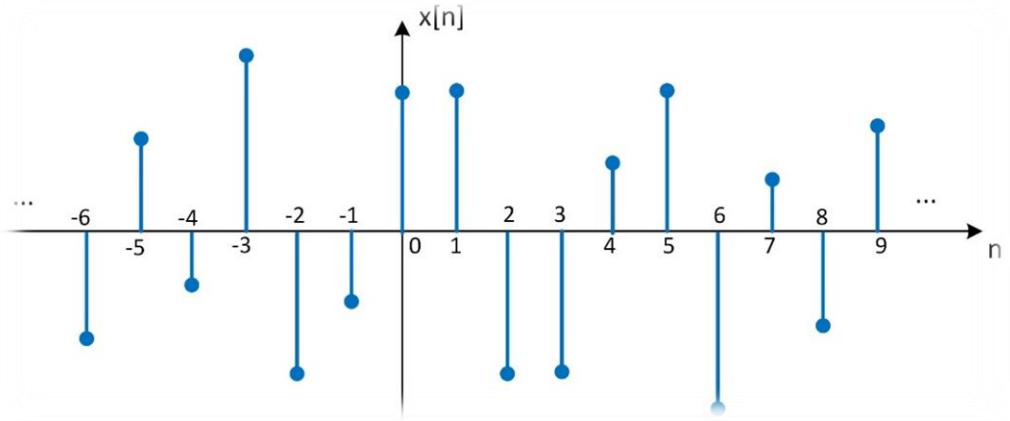
θα έχαμε $x[n] = 2\cos\left(\frac{2\pi 100}{8000} n\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{40} n\right)$,

με $\omega_0 = \frac{\pi}{40}$ rad.

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Σήμα διακριτού χρόνου



- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \mathrm{Re}\{x[n]\} + j\mathrm{Im}\{x[n]\}$$

$$= |x[n]|\, e^{j\phi_x[n]}$$

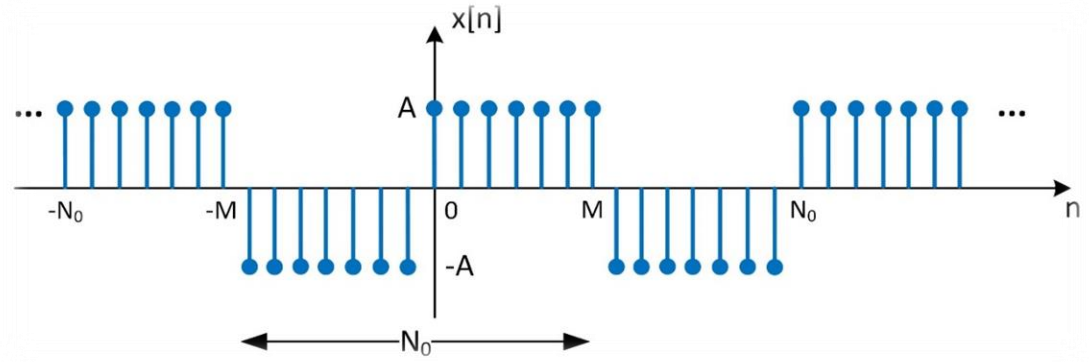
- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

$$|x[n]| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{x[n]\} + \mathrm{Im}^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{x[n]\}}{\mathrm{Re}\{x[n]\}} \in (-\pi, \pi]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Περιοδικά σήματα



- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε

$$x[n] = x[n+N]$$

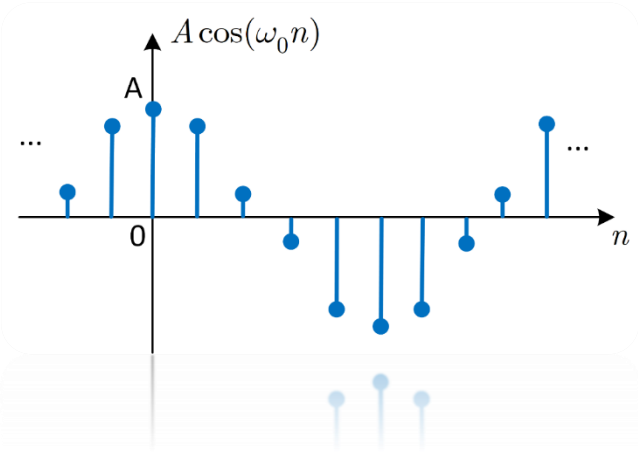
- Ο μικρότερος αριθμός N που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται ***περίοδος*** του σήματος.

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, με περιόδους N_1, N_2, τότε η περίοδος του σήματος $y[n]$ είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ημίτονα**
- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος N, τότε θα ικανοποιεί τη σχέση



$$x[n] = x[n+N]$$

- Άρα

$$A\cos(\omega_0 n) = A\cos(\omega_0(n+N))$$
$$A\cos(\omega_0 n) = A\cos(\omega_0 n + \underbrace{\omega_0 N}_{?})$$

$\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$

- Πρέπει να ισχύει

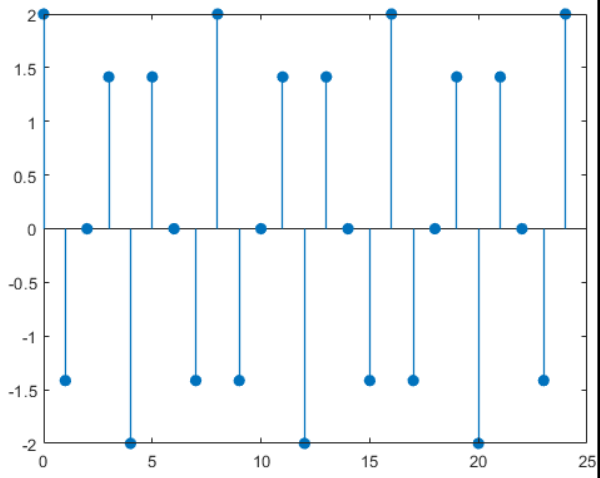
$$\omega_0 N = 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}, \qquad N, k \in \mathbb{Z}$$

Θέλουμε το μικρότερο k που να δίνει ακέραιο N!

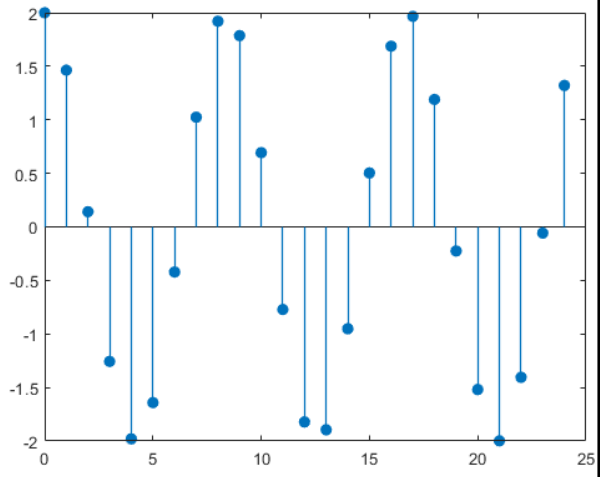
- **Ημίτονα**
- Παραδείγματα:
  - $x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$



Είναι $N = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}k = \frac{8\pi}{3\pi}k = \frac{8}{3}k$

Για $k=3$, $N=8$, άρα η περίοδος είναι 8 δείγματα.

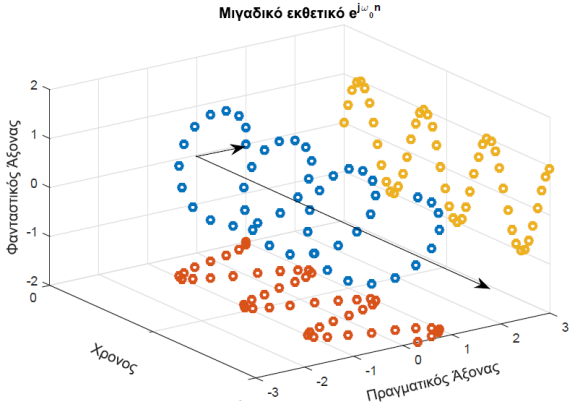
  - $x[n] = 2\cos\left(\frac{3}{4}n\right)$



Είναι $N = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}}k = \frac{8\pi}{3}k$

Δεν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$: το N να είναι ακέραιος αριθμός. Άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

- **Ημίτονα**
- Περιοδικότητα στη συχνότητα (!!)
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler



$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \mathrm{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- Στο διακριτό χρόνο

$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j\varphi n}$$

- Αν $\varphi = 2\pi\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$, τότε

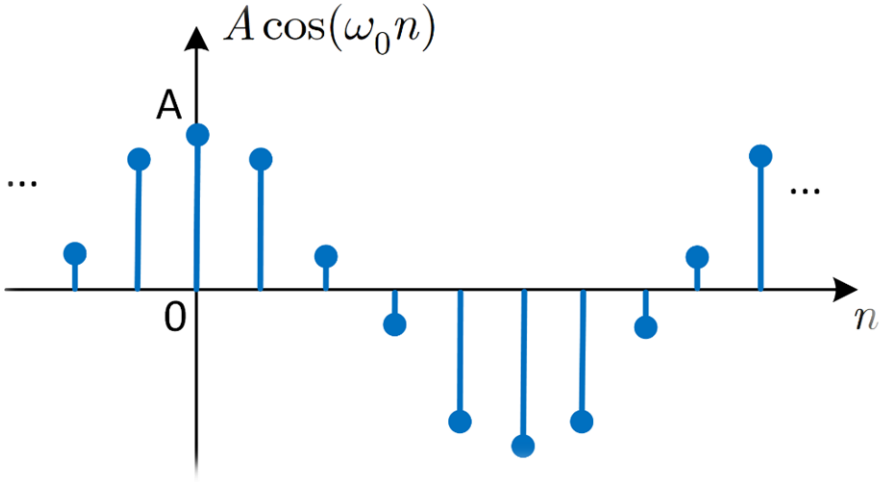
$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j\varphi n} = e^{j2\pi\lambda n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$ (!!!!!!!!!)

Γιατί? $\lambda \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, άρα $u = n\lambda \in \mathbb{Z}$, οπότε $e^{j2\pi u} = 1$, $u \in \mathbb{Z}$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με 2π!!
  - Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα (από τη σχέση του Euler)!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ημίτονα**
- Σύνοψη:





Περιοδικό?
Εξαρτάται από το ω_0!

Περιοδικό?
Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με 2π

- **Ημίτονα**

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις

- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
  - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο και από την καθημερινή εμπειρία μας

- Όμως…

$$x_1[n] = 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2[n] = 4\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) = 4\cos\left(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right) \quad *$$

$$= 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}\,(!!!)$$

- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!
  - Άρα εν τέλει είναι ίδιες!

$* \cos(2\pi k - \vartheta) = \cos(\vartheta)$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

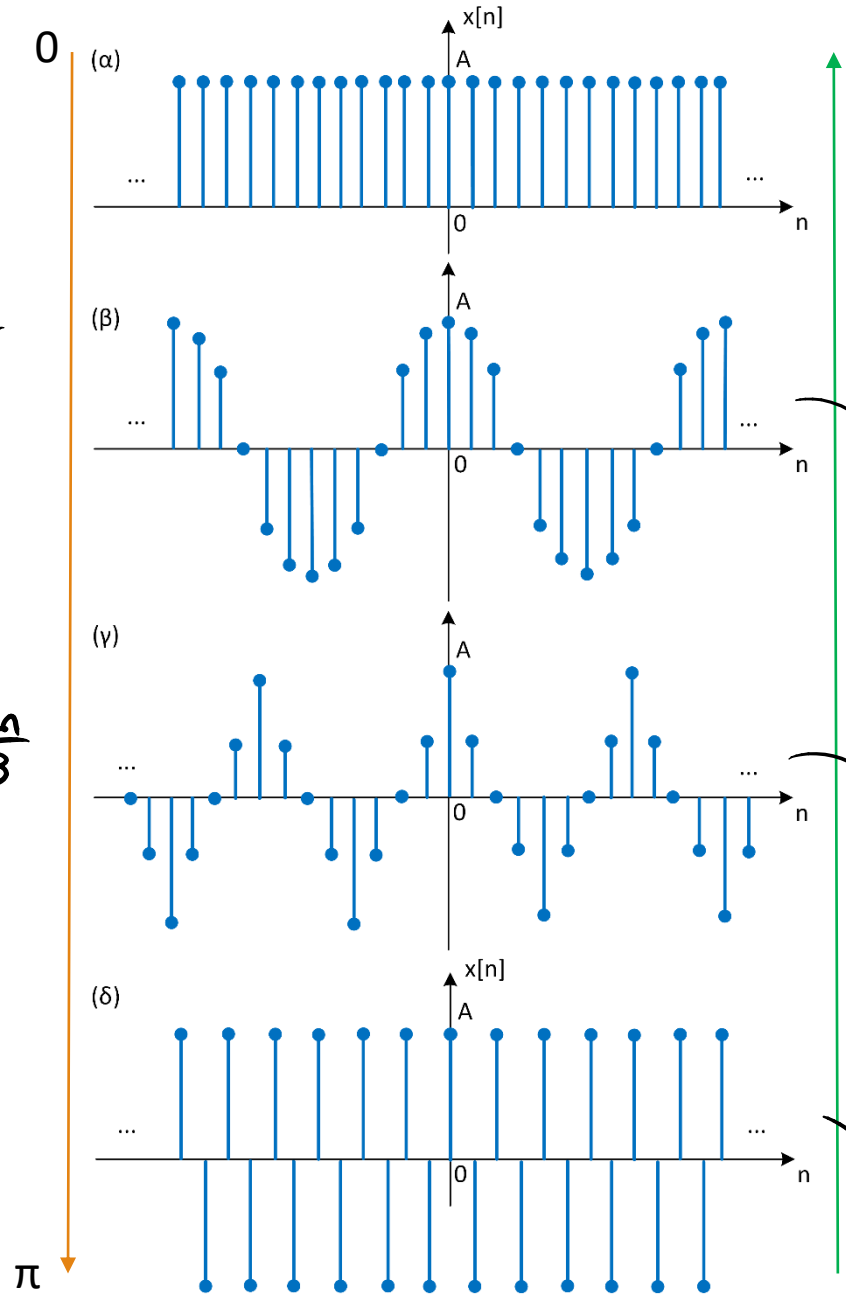
- **Ημίτονα**

$\omega_0 = 0$

π.χ. $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$

π.χ. $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$\omega_0 = \pi$



- Στο [0,π], η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το ω_0

π.χ. $\omega_0 =$

- Στο (π, 2π], η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το ω_0!!

π.χ. $\omega_0 = \frac{4\pi}{3}$

- Συχνότητες γύρω από το $\omega = 0 \rightarrow$ χαμηλές

- Συχνότητες γύρω από το $\omega = \pi \rightarrow$ υψηλές

$\omega_0 = \pi$

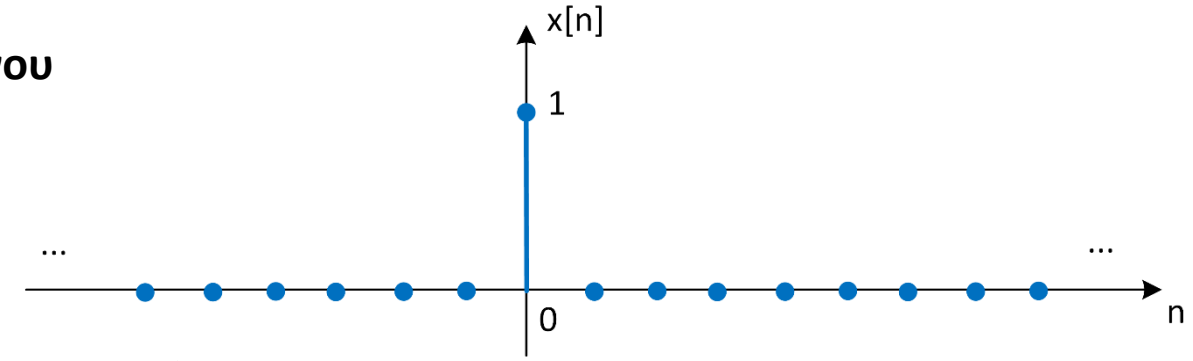
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.

- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

- **Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου**



Ορισμός:

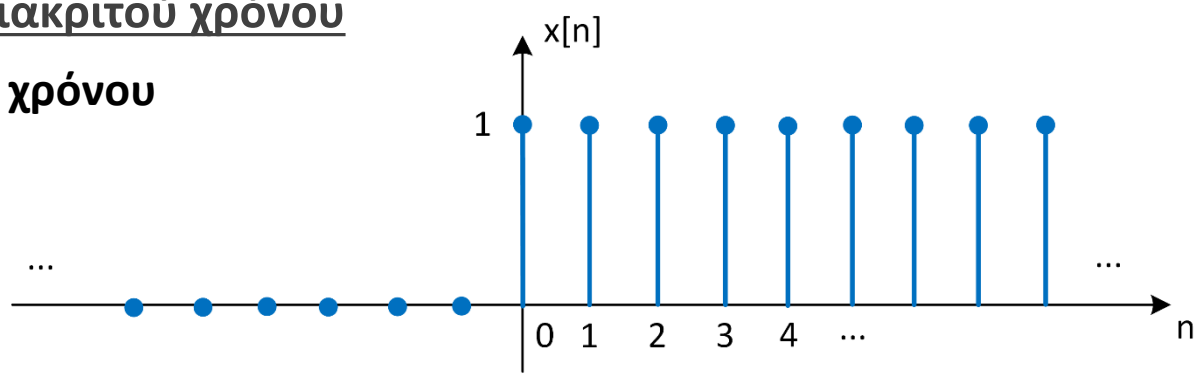
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**
- **Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου**



Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

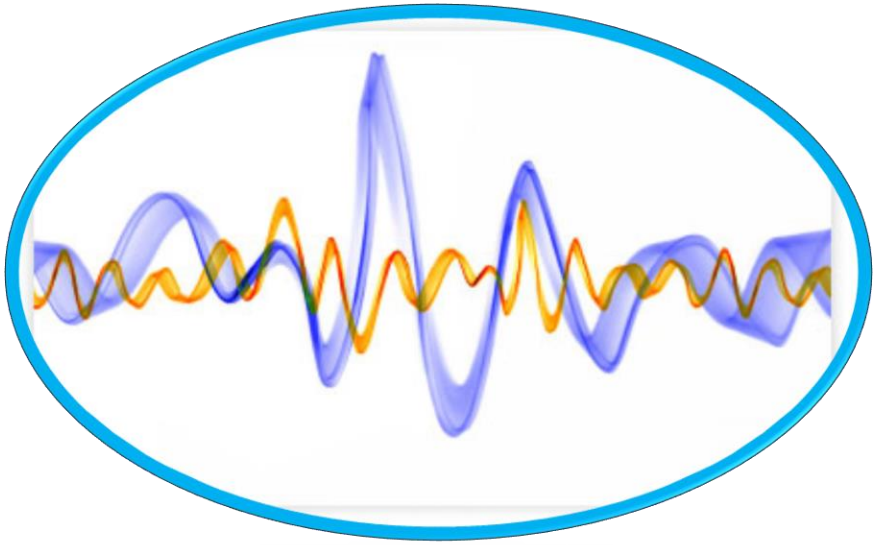
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

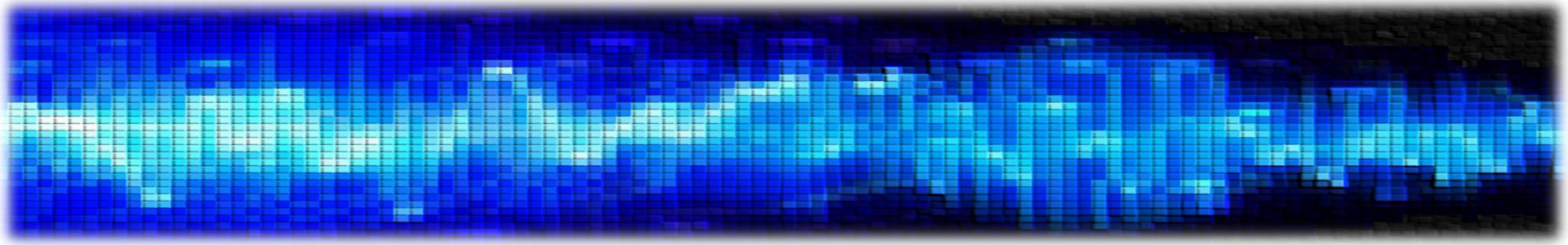
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

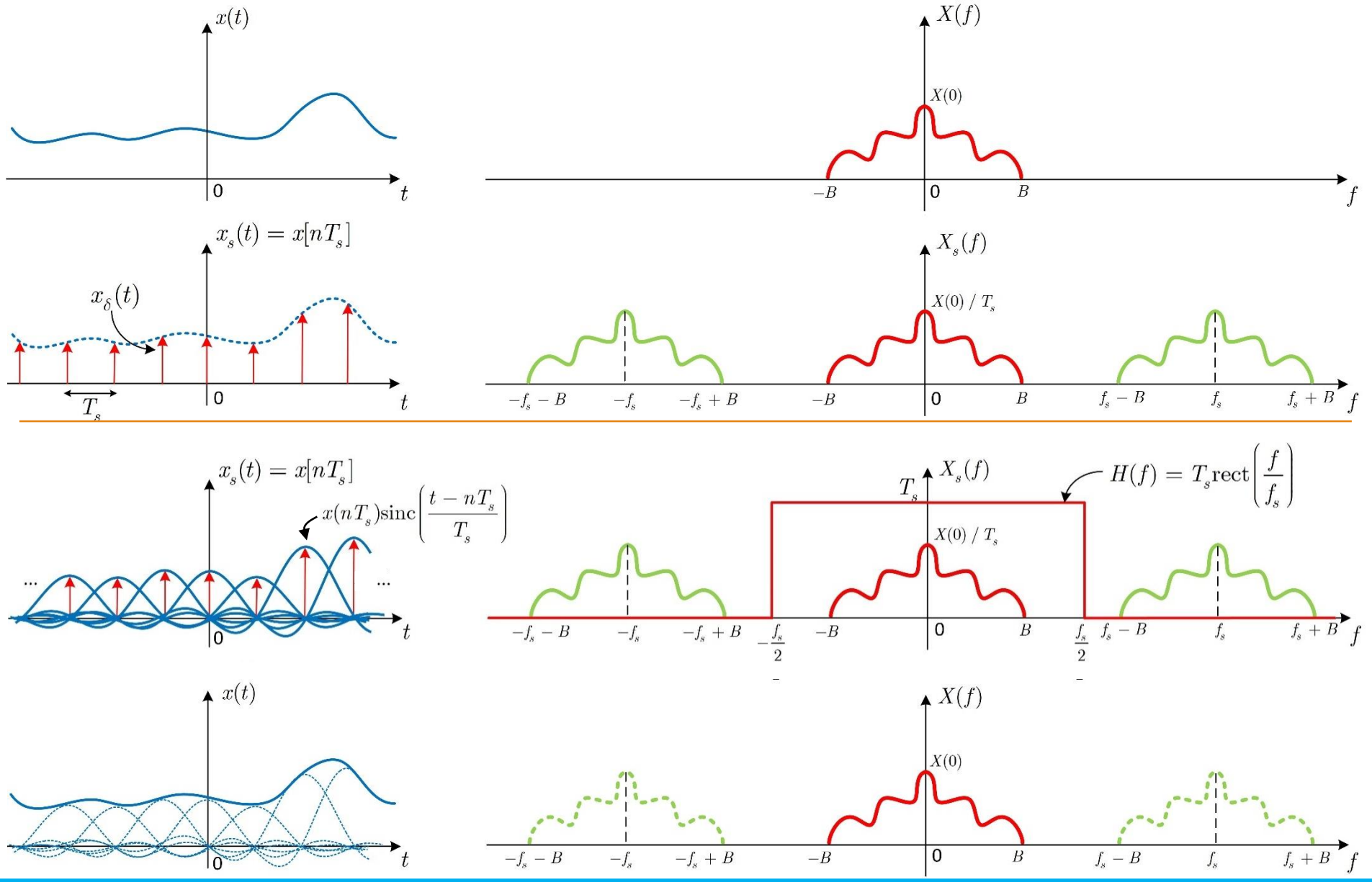
ΔΙΑΛΕΞΗ 2Η



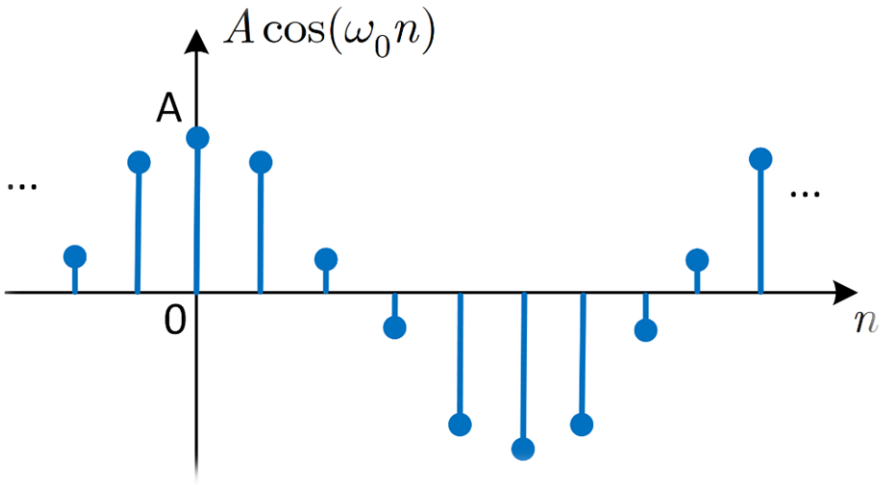
- Βασικά Σήματα και ιδιότητες
- Συστήματα και ιδιότητες

Review:

ΧΡΟΝΟΣ | **ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**



- **Ημίτονα (Review)**
- Σύνοψη:





Περιοδικό?
Εξαρτάται από το ω_0!

Περιοδικό?
Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με 2π

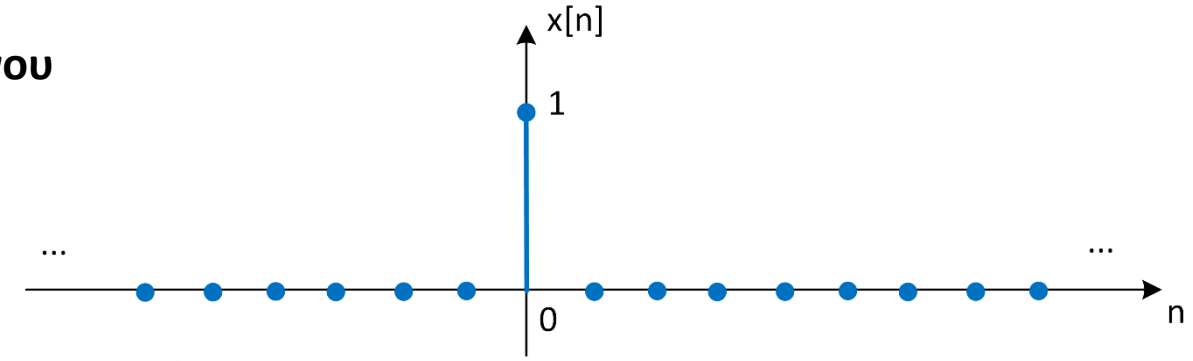
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.

- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

- **Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου**



Ορισμός:

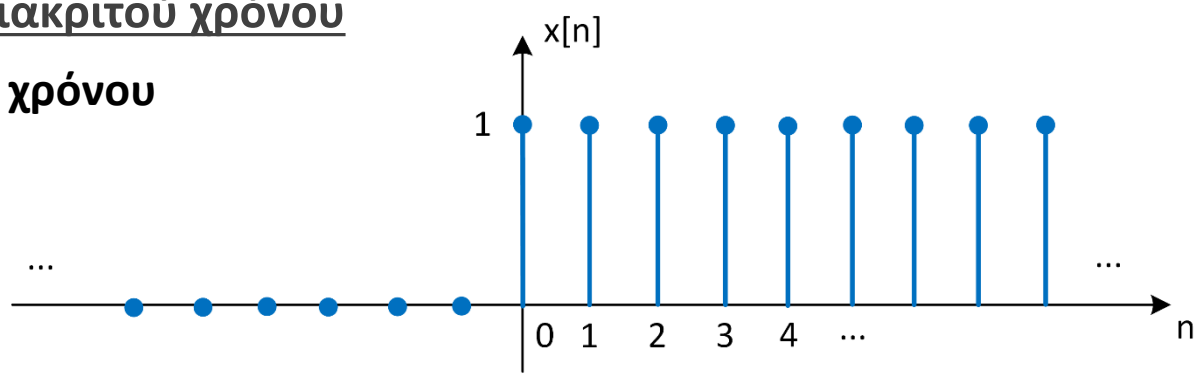
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**
- **Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου**



Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

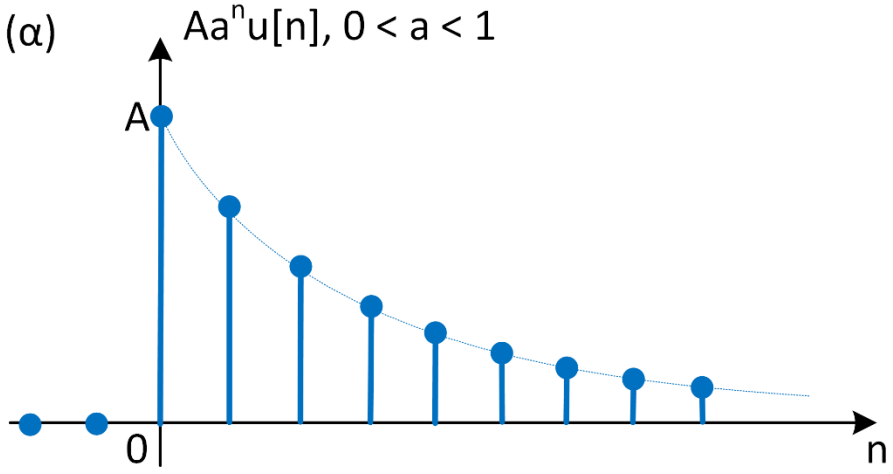
- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**

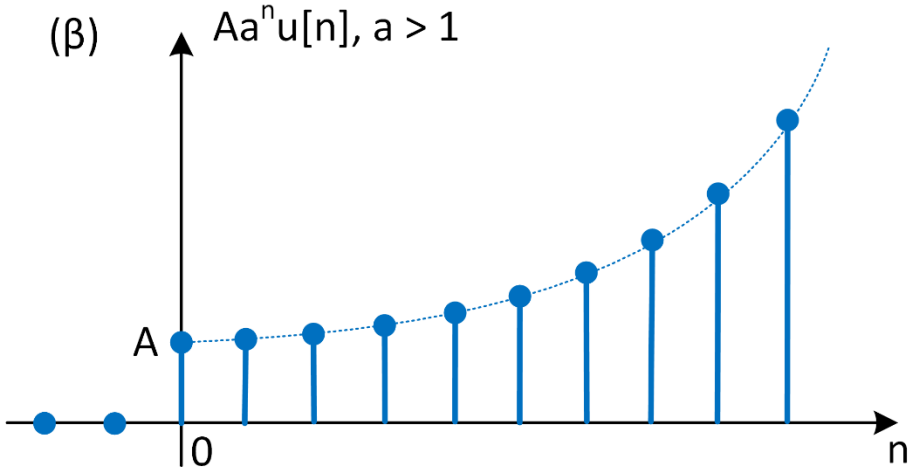
- **Εκθετική μιγαδική συνάρτηση διακριτού χρόνου**

$$x[n] = a^n, \qquad a \in C$$

- Περισσότερο χρήσιμες είναι οι «εκδόσεις» γινομένου με τη βηματική συνάρτηση

$$x[n] = a^n u[n], \ 0 < a < 1 \text{ ή } a > 1$$

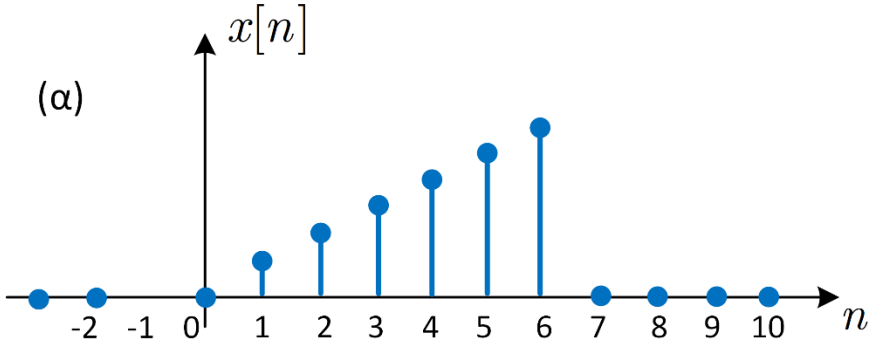




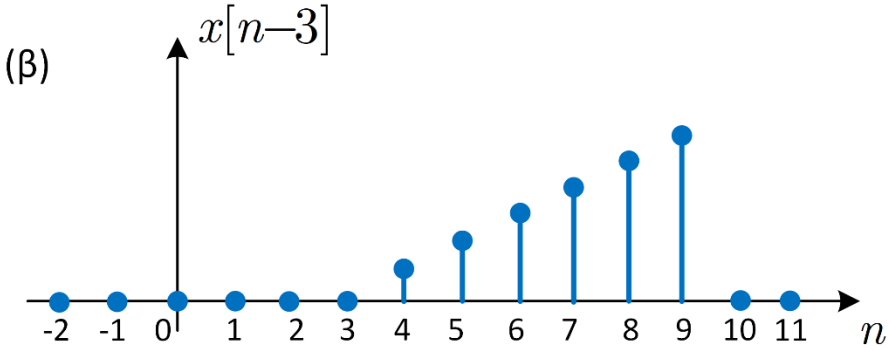
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

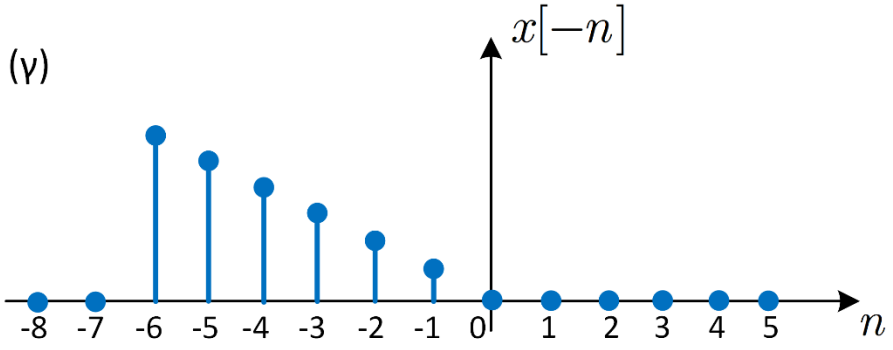
(α)



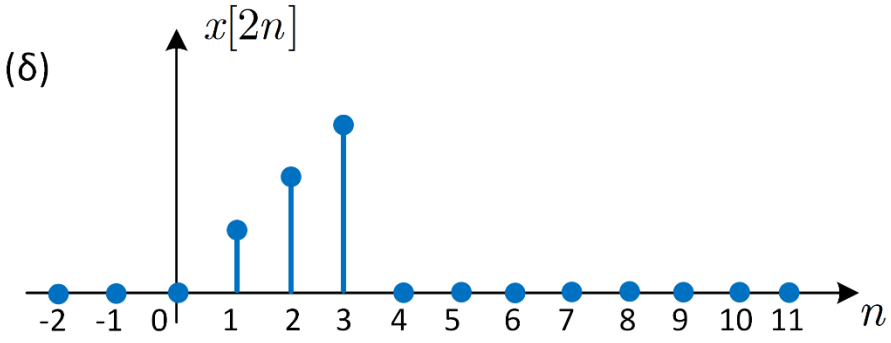
(β)



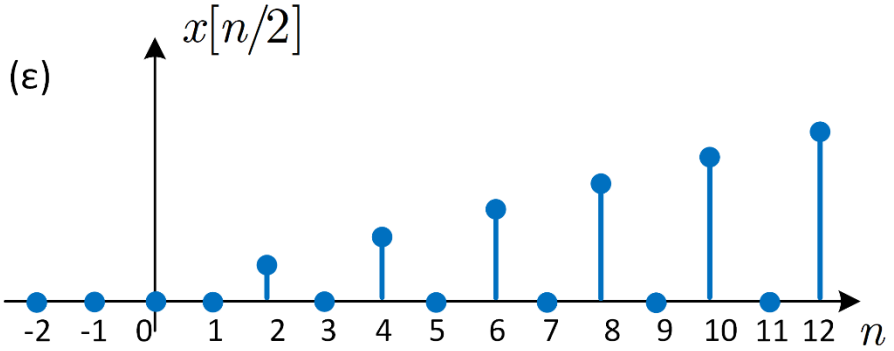
(γ)



(δ)

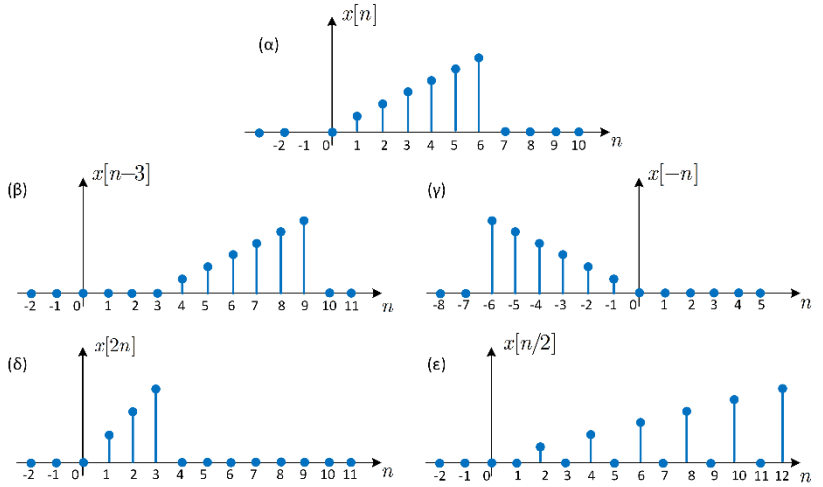


(ε)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμοί σημάτων**



Έστω ότι: $x[n] = \begin{cases} n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(β) $x[n-3]$? $= \begin{cases} n-3, & 0 \le n-3 \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$= \begin{cases} n-3, & 3 \le n \le 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(γ) $x[-n]$? $= \begin{cases} -n, & 0 \le -n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} =$

$= \begin{cases} -n, & 0 \ge n \ge -6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -n, & -6 \le n \le 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(δ) $x[2n]$? $= \begin{cases} 2n, & 0 \le 2n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$= \begin{cases} 2n, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(ε) $x[n/2]$? $= \begin{cases} n/2, & 0 \le n/2 \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} =$

$= \begin{cases} n/2, & n = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ανάλυση σήματος**

- Κάθε σήμα διακριτού χρόνο μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

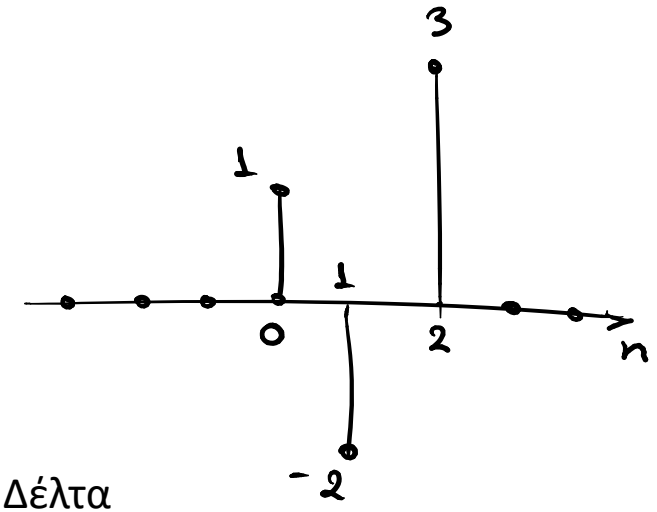
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση Δέλτα έχει πλάτος την αντίστοιχη τιμή του σήματος $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n = k$

- Σκεφτείτε το ανάλογο του συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Παράδειγμα:



  - Γράψτε το σήμα $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ με χρήση συναρτήσεων Δέλτα

$$x[n] = 1 \cdot \delta[n] - 2 \cdot \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**

- Χρειαζόμαστε μια μετρική που να απεικονίζει το «μέγεθος» ενός σήματος
- Μια τέτοια είναι η **ενέργεια** ενός σήματος

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

- Σήματα για τα οποία $0 < E < +\infty$ ονομάζονται **σήματα ενέργειας**
  - **Όλα** τα σήματα στη φύση ή στο εργαστήριο είναι σήματα ενέργειας
- Κάποια ενδιαφέροντα σήματα (από θεωρητικής πλευράς) έχουν άπειρη ενέργεια
- Μια πιο κατάλληλη μετρική είναι η **ισχύς** ενός σήματος

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

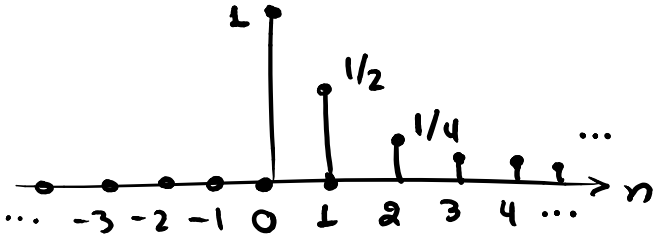
- Ένα σήμα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δυο!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**
- Hints:
- Σήμα με:
  - Πεπερασμένη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$ → **πιθανότατα σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που **δε** φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$ → **σήμα ισχύος**
  - **Περιοδικό** σήμα με πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ισχύος**
- Από μαθηματικής σκοπιάς, μπορεί να υπάρχουν σήματα που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες αλλά να μην είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος
  - Αλλά αυτά είναι μαθηματικές κατασκευές, δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν στο εργαστήριο, δεν υπάρχουν στη φύση, και δε μας ενδιαφέρουν από πρακτικής σκοπιάς

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**
- Παραδείγματα:
  - Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$



Είναι $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right]^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \underbrace{u^2[n]}_{u[n]} =$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u[n] \Big| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

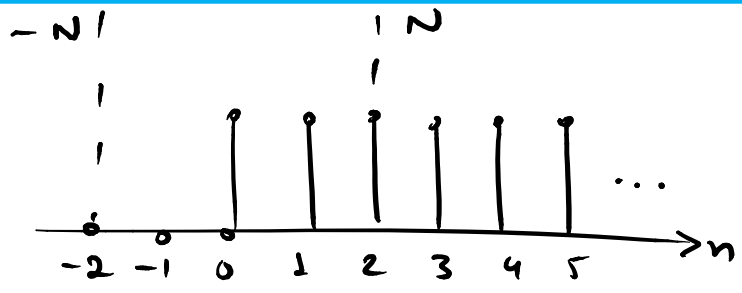
$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

Άρα είναι πράγματι σήμα ενέργειας.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**

- Παραδείγματα:
  - Υπολογίστε την ισχύ του σήματος $x[n] = u[n]$



$$P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{u^2[n]}_{u[n]} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2}^{N} u[n] =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} (N-0+1) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N+1}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{N(1+1/N)}{N(2+1/N)} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2} = P$$

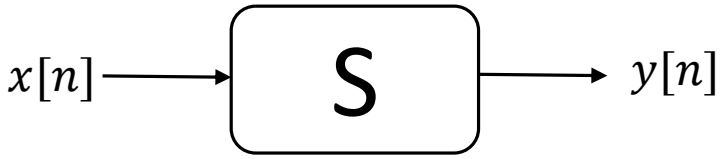
$$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = (N_2 - N_1 + 1) \cdot c$$

Άρα πράγματι είναι σήμα ισχύος.

- Τα σήματα φέρουν χρήσιμη πληροφορία που μπορεί να εξαχθεί μέσω των **συστημάτων**

- Ένα σύστημα δεν είναι τίποτε άλλο από μια οποιαδήποτε διαδικασία παράγει μια **έξοδο** όταν διεγερθεί από μια **είσοδο**
  - Το σύστημα διεγείρεται από ένα **σήμα εισόδου** και παράγει ως απόκριση ένα **σήμα εξόδου**
  - Το σύστημα μπορεί να υλοποιείται σε υλικό, λογισμικό, ή να υπάρχει στη φύση

- Η πιο γενική απεικόνιση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη



- Το σήμα εισόδου συμβολίζεται με $x[n]$

- Το σήμα εξόδου συμβολίζεται με $\mathrm{y}[n]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Το σύστημα πραγματοποιεί μια λειτουργία επάνω στο σήμα εισόδου με σκοπό να εξάγει κάποια πληροφορία από αυτό

- Μια διαφορετική αναπαράσταση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

με $T\{\cdot\}$ να αναπαριστά έναν τελεστή (πράξη) που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος $x[n]$ ώστε να παραχθεί η έξοδος $y[n]$

- Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα αναπαριστά μια **σχέση εισόδου-εξόδου**

- Παραδείγματα συστημάτων:

$$y[n] = 2x[n]$$
$$y[n] = 3x^2[n-1]$$
$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

- Γενικότερα, ένα σύστημα αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια **εξίσωση διαφορών**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Τα συστήματα διακρίνονται σε 5 (για τους σκοπούς μας) κατηγορίες:

1. Δυναμικά ή Στατικά
2. Γραμμικά ή μη γραμμικά
3. Χρονικά μεταβλητά ή αμετάβλητα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά
5. Ευσταθή και ασταθή

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε ότι ένα σύστημα με είσοδο $x[n]$ θα δίνει έξοδο $y[n]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Δυναμικά ή Στατικά**
  - Αλλιώς, ονομάζονται συστήματα **με μνήμη ή χωρίς μνήμη**
  - **Δυναμικά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή n_0
  - **Στατικά** ονομάζονται αυτά που δεν έχουν αυτήν την απαίτηση, δηλ. για τον υπολογισμό της εξόδου τη στιγμή n_0 απαιτείται η είσοδος την ίδια χρονική στιγμή και μόνο
  - Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n-2] \quad \text{Δυν.}$$
$$y[n] = x[n+1] - 2x[n-1] \quad \text{Δυν.}$$
$$y[n] = \log|x[n]| \quad \text{Στατ.}$$
$$y[n] = x^2[n] \quad \text{Στατ.}$$

  - **Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?**

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - **Γραμμικό** λέγεται ένα σύστημα ικανοποιεί δυο ιδιότητες:
  - Την ιδιότητα της **ομογένειας**
  - Την ιδιότητα της **αθροιστικότητας**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

$x[n] \longrightarrow y[n]$

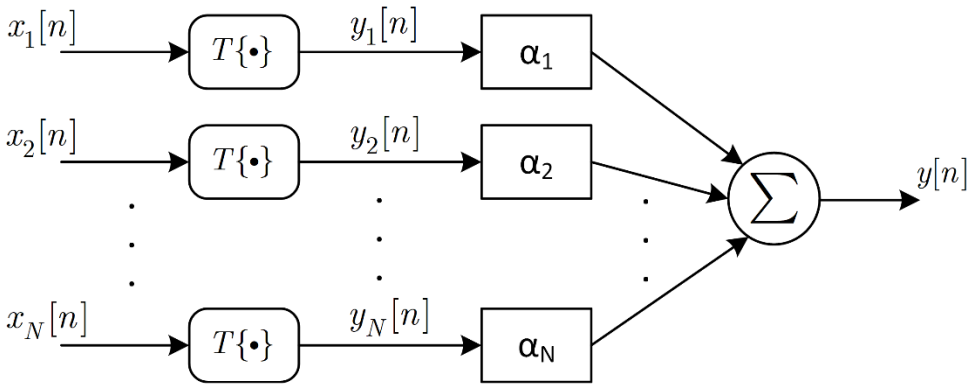
$cx[n] \longrightarrow cy[n]$

  - **Ομογένεια**: αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $cx[n]$ τότε στην έξοδο θα εμφανίζεται το σήμα $cy[n]$
    - Π.χ. $y[n] = 2x[n-1], \quad y[n] = x[n+3] - x[n], \quad y[n] = 3x[-n] + 2x[n^2]$
    - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n], \;\; y[n] = \frac{1}{x[n]}, \;\; y[n] = \sqrt{|x[n]|}$
  - **Αθροιστικότητα**: αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $x_1[n] + x_2[n]$ τότε στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα $y_1[n] + y_2[n]$, με $y_1[n]$ και $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ αντίστοιχα.
    - Π.χ. $y[n] = 2x[n-1] + x[n], \;\; y[n] = nx[-n] - 5x[n+1], \;\; y[n] = 3x[-n-1] + 2[n+1]$
    - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n], \;\; y[n] = \frac{1}{x[n]}, \;\; y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

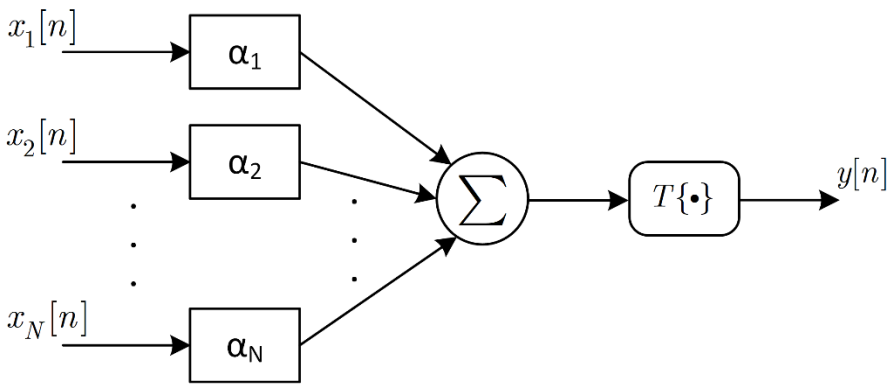
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

  - Για τους οπτικούς τύπους ☺ η γραμμικότητα ισχύει αν οι δυο παρακάτω διατάξεις πραγματοποιούν την ίδια έξοδο



(α)



(β)

  - Με μαθηματικά, αν

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} =$$
$$= T\{ax_1[n]\} + T\{bx_2[n]\}$$
$$= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$
$$= ay_1[n] + by_2[n]$$

με $y_1[n]$, $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$, $x_2[n]$ αντίστοιχα, τότε το σύστημα είναι γραμμικό.

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n]$$

είναι γραμμικό.

Ομογένεια: για είσοδο $x[n]$, η έξοδος είναι $y[n] = 2x[n-1] + x[n]$

—"— $cx[n]$, —"— $2cx[n-1] + cx[n]$

$= c(\underbrace{2x[n-1] + x[n]}_{y[n]})$

$= cy[n]$. ✓

Αθροιστικότητα: για είσοδο $x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n]$

—"— $x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = 2x_2[n-1] + x_2[n]$

—"— $x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow 2(x_1[n-1] + x_2[n-1]) +$

$+ x_1[n] + x_2[n] =$

$= \underbrace{2x_1[n-1] + x_1[n]}_{y_1[n]} + \underbrace{2x_2[n-1] + x_2[n]}_{y_2[n]} = y_1[n] + y_2[n]$ ✓

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι γραμμικό.

Ομογένεια: $x[n] \longrightarrow y[n] = x^2[n]$

$$cx[n] \longrightarrow (cx[n])^2 = c^2x^2[n] \neq cx^2[n] = cy[n]$$

✗

Αθροιστικότητα: $x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = x_1^2[n]$

$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = x_2^2[n]$$

$$x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow (x_1[n] + x_2[n])^2 \neq x_1^2[n] + x_2^2[n]$$

$$= y_1[n] + y_2[n]$$

✗

• Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Η χρονική (α)μεταβλητότητα έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του συστήματος όταν η είσοδος καθυστερεί κατά κάποια δείγματα

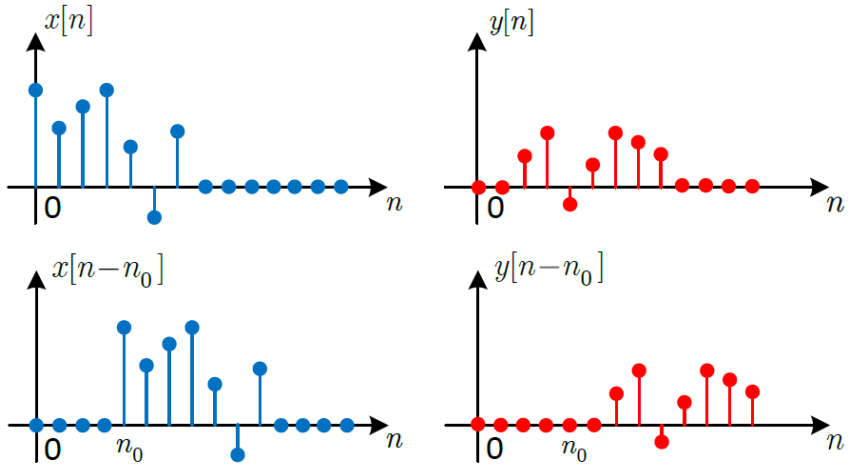
- Έστω $x[n]$ η είσοδος σε ένα **χρονικά αμετάβλητο** (ΧΑ) σύστημα, και έστω $y[n]$ η έξοδος. Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0 δείγματα, δηλ.

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

τότε η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

- Ένα σύστημα που δεν ικανοποιεί τα παραπάνω ονομάζεται **χρονικά μεταβλητό**. Ένα χρονικά μεταβλητό σύστημα αποκρίνεται διαφορετικά σε κάθε καθυστέρηση της εισόδου
  - Η διαφορά μπορεί να έγκειται στην καθυστέρηση της εξόδου, στο πλάτος της, ακόμα και στη γραφική παράσταση του σήματος εξόδου!



- **Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Για είσοδο $x[n] \longrightarrow y[n] = x^2[n]$

— η — $x[n-n_0] \longrightarrow y'[n] = x^2[n-n_0]$ ①

Αν βρω το $y[n-n_0] = x^2[n-n_0] =$ ① ✓

Άρα το σύστημα είναι Χ.Α.

- **Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = nx^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Για είσοδο $x[n] \longrightarrow y[n] = nx^2[n]$

— η — $x[n-n_0] \longrightarrow y'[n] = nx^2[n-n_0]$ (1)

Καθυστεραίμε την έξοδο κατά n_0: $y[n-n_0] = (n-n_0)x^2[n-n_0]$ (2)

Άρα το σύστημα είναι Χ.Μ. γιατί (1) ≠ (2)

- **Αιτιατά και μη αιτιατά**

  - Αιτιατό λέγεται ένα σύστημα που **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογίσει μια τιμή της εξόδου του

  - Κάθε φυσικό σύστημα είναι αιτιατό

  - Μη αιτιατά συστήματα είναι υλοποιήσιμα όταν η είσοδος βρίσκεται διαθέσιμη ολόκληρη από πριν
    - Καταγεγραμμένη σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο

  - Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n-2] \quad \text{Αιτ.}$$
$$y[n] = x^2[n+1] - 2\sin(x[n-1]) \quad \text{Μη αιτ.}$$
$$y[n] = \log|x[n+1]| \quad \text{Μη αιτ.}$$
$$y[n] = \sqrt{x[n-1]} \quad \text{Αιτ.}$$

  - **Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?**

- **Ευσταθή και ασταθή**

  - Ένα σύστημα ονομάζεται **Φραγμένης-Εισόδου-Φραγμένης-Εξόδου (Bounded-Input-Bounded-Output – BIBO) ευσταθές** αν

$$|x[n]| < B_x, \qquad B_x \in \Re$$

  συνεπάγεται ότι

$$|y[n]| < B_y, \qquad B_y \in \Re$$

  - Η ευστάθεια ουσιαστικά απαιτεί για απολύτως φραγμένη είσοδο, η έξοδος να είναι επίσης απολύτως φραγμένη

  - Κάθε σύστημα που υπάρχει στη φύση είναι ευσταθές
  - Αλλά…
    - Ένας πύραυλος που εκτοξεύεται είναι εκ φύσεως ασταθές σύστημα
    - Ένα μαχητικό εν πτήσει είναι εκ φύσεως ασταθές σύστημα
    - Ένα πρόγραμμα που παράγει τους αριθμούς Fibonacci μοντελοποιεί ένα ασταθές σύστημα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ευσταθή και ασταθή**
  - Παράδειγμα:
    - Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$\alpha) \quad y[n] = \frac{1}{x[n]}$$

$$\beta) \quad y[n] = x^2[n-2]$$

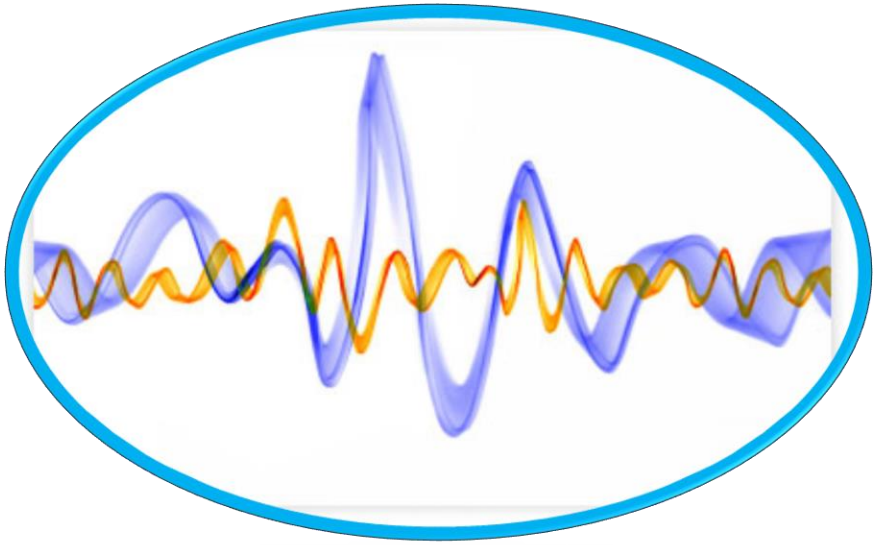
είναι ευσταθή.

α) Έστω $|x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = \frac{1}{|x[n]|}$, το οποίο απειρίζεται αν $x[n_0] = 0$ για κάποιο n_0. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

β) Έστω $|x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = |x^2[n-2]| = |x[n-2]|^2 < B_x^2$, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

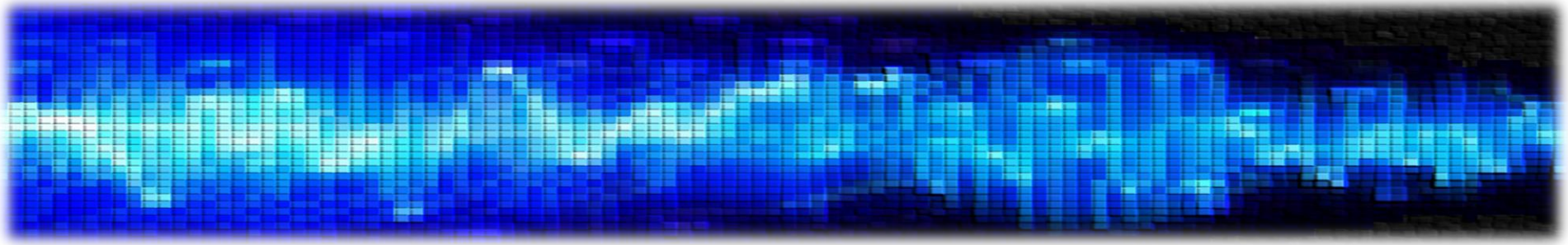
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 3Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

ένα σύστημα μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου όσο και της εξόδου

  - Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

  - Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1], y[-2]$

  - Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

  ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

  - Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος

  - Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση

  - Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
    - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
    - Ένα σύστημα που δε βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?

- Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
  - Της απόκρισης μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$ (zero input response)
  - Της απόκρισης μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Η απόκριση μηδενικής εισόδου αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο των αρχικών συνθηκών
  - Εύκολα καταλαβαίνετε ότι αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν

- Η απόκριση μηδενικής κατάστασης αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
  - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

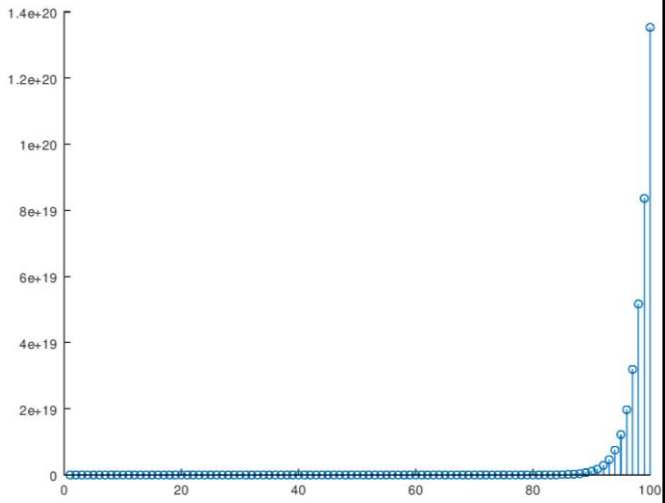
- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$
$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$
$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$
$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$



  - Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

  - Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου (οι οποίες μάλιστα μεγαλώνουν εκθετικά)!
    - Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \; \forall \; n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0$$

  - Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**

  - Μπορεί να δειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \qquad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

  - Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \; c\gamma^n \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Δηλ. πρέπει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

  - Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1}\gamma^{-N+1} + \cdots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N}(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0$$

  - Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το θέσουμε ίσο με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

  - Παραγοντοποιώντας

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \ldots (\gamma - \gamma_{\mathrm{N}}) = 0$$

με $\gamma_i, = 1, \ldots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

  - Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \qquad c_2\gamma_2^n, \qquad c_3\gamma_3^n, \qquad \dots, \qquad c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Μπορεί να δειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \cdots + c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i\gamma_i^n, \qquad n \geq 0$$

  - Και τα c_i?

  - Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1.$

Ομογενής εξίσωση: $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + 5\gamma + 6$

Χαρακτ. εξίσωση: $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = -2,\ \gamma_2 = -3}$

Χαρακτ. ρίζες

Άρα:

$$y_{zi}[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n$$

$$= c_1(-2)^n + c_2(-3)^n, \quad n \geq 0.$$

Από τις αρχ. συνθήκες:

$$y[-2] = 0 = c_1(-2)^{-2} + c_2(-3)^{-2} = c_1\frac{1}{4} + c_2\frac{1}{9} = 0 \quad (1)$$

$$y[-1] = 1 = c_1(-2)^{-1} + c_2(-3)^{-1} = -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{3} = 1 \quad (2)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $c_1 = 4$, $c_2 = -9$.

Άρα

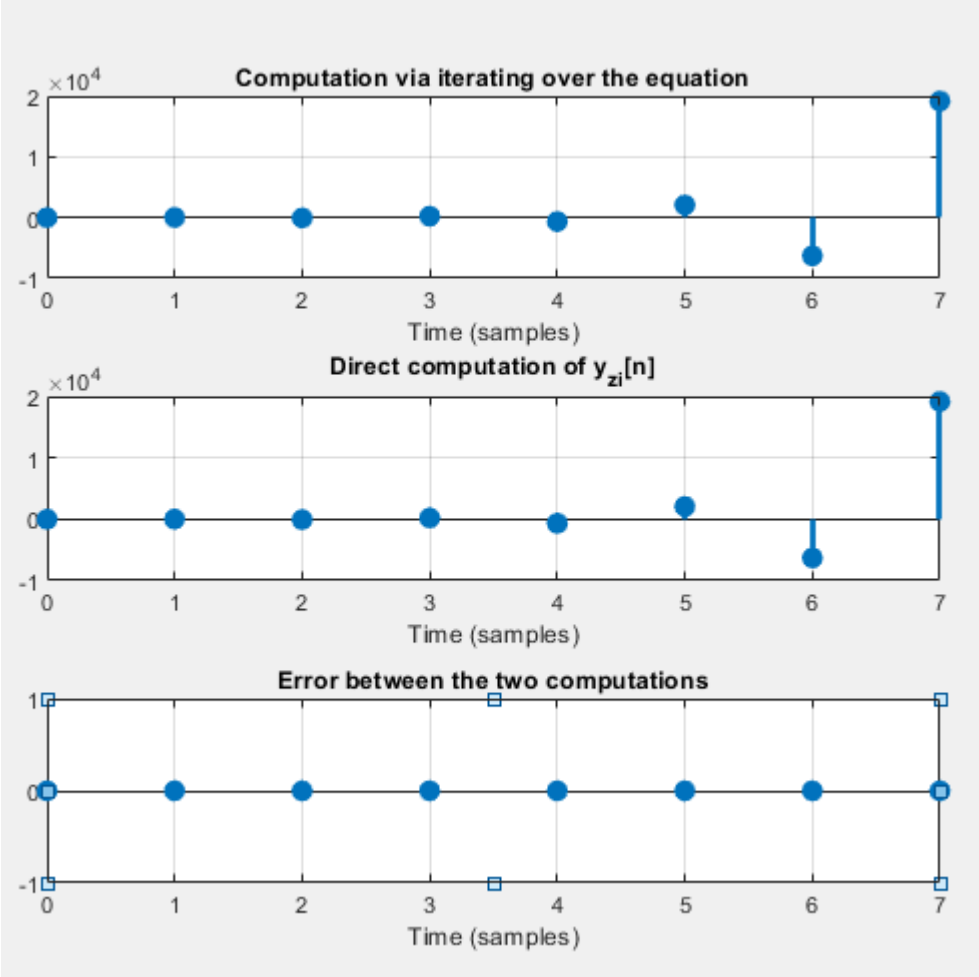
$$y_{zi}[n] = 4(-2)^n - 9(-3)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[4(-2)^n - 9(-3)^n \right] u[n].$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - MATLAB:

```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω?
N = 10;

% Αρχικοποίηση
y = zeros(1,N);

% Αρχικές συνθήκες y[-2] = 0, y[-1] = 1
y(1) = 0;
y(2) = 1;

% Μετράω από n=3 θεωρώντας ότ το y(3) είναι το y[0]
for n=3:N
y(n) = -5*y(n-1) - 6*y(n-2);
end

% Προβολή
figure; subplot(311);
stem(0:N-3, y(3:end));
title('Computation via iterating over the equation');
xlabel('Time (samples)');

n = 0:7;
yzi = 4*(-2).^n - 9*(-3).^n;
subplot(312); stem(n, yzi);
title('Direct computation of y_{zi}[n]');
xlabel('Time (samples)');

error = yzi - y(3:end);
subplot(313); stem(n, error);
title('Error between the two computations');
xlabel('Time (samples)');
```



- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0$.

Ομογενής εξίσωση: $y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 0$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12}$

— " — εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = -\frac{1}{4}, \gamma_2 = -\frac{1}{3}}$

Χαρακτ. ρίζες

Άρα $y_{zi}[n] = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$

Από αρχικές συνθήκες:

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

$$y[-2] = 1 = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = 1 \quad (1)$$

$$y[-1] = 0 = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = 0 \quad (2)$$

Έχουμε, λύνοντας το σύστημα, ότι: $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$

Οπότε:

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] u[n].$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (έστω πολλαπλότητας $r \geq 2$), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

Αν

$$(\gamma - \gamma_1)^r(\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \dots (\gamma - \gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i n^{i-1} \gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{N} c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \qquad n \geq 0$$

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**

  - Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος

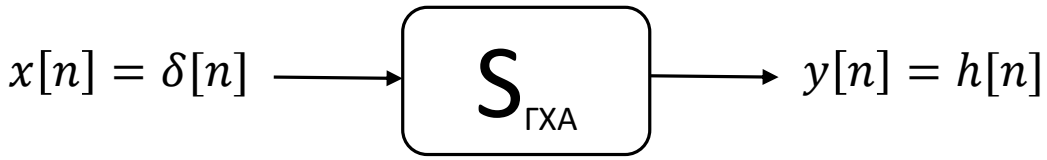
  - Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
    - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία

  - Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
    - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα

  - Ποιό είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
    - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
    - Έχει "νόημα": η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
    - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$



  - Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

  - Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα

  - Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα "θεωρήσουμε" ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$

  - Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

  - Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

  - Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1$$

$$a_0 h[0] + a_1 \cdot 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] = 1 \;\Leftrightarrow\; h[0] = \frac{1}{a_0}$$

  - Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!

  - Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \qquad n > 0$$

  - Ξέρουμε ότι

$$h[n] = c\gamma^n, \qquad n \geq 0$$

  - Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0\gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

  - Οπότε

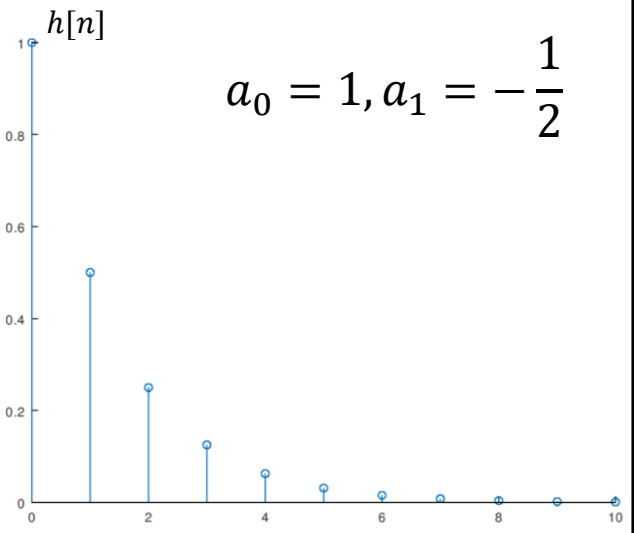
$$h[n] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

  - Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^0 = c = \frac{1}{a_0}$$

  - Άρα

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$



$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Θα μπορούσαμε να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών, ανεξαρτήτως τάξης

  - Όμως σίγουρα κάτι τέτοιο είναι αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό
    - Υπάρχει κάποια ευκολότερη μέθοδος;

  - Με άλλα λόγια, αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  τότε τι κάνουμε για να βρούμε την κρουστική απόκριση εύκολα και γρήγορα?

  - Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απάντηση

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$S_b: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$$

    με κρουστική απόκριση $h_b[n]$

  - Τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n]$$

    θα είναι $h_0[n] = b_0 h_b[n]$

  - Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0^-: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n-l]$$

    θα είναι $h_0^-[n] = b_0 h_b[n-l]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Ακολουθώντας την ίδια λογική, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

θα είναι

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_b[n-l]$$

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (ομογένεια) μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, ενώ η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το δεύτερο στο τρίτο

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (αθροιστικότητα) μας επέτρεψε ξανά να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα

  - Και οι δυο ιδιότητες (ΓΧΑ) μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενικότερη απάντηση που βλέπετε παραπάνω

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

Θέταμε $x[n] = \delta[n]$, οπότε έχαμε $h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n]$.

Για $n=0$: $h[0] + \frac{5}{6}\underbrace{h[-1]}_{0} + \frac{1}{6}\underbrace{h[-2]}_{0} = \delta[0] = 1 \Rightarrow \boxed{h[0] = 1}$ (1)

Για $n=1$: $h[1] + \frac{5}{6}\underbrace{h[0]}_{1} + \frac{1}{6}\underbrace{h[-1]}_{0} = \delta[1] = 0 \Rightarrow \boxed{h[1] = -\frac{5}{6}}$ (2)

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6}$

Χαρακτ. εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = -\frac{1}{3},\ \gamma_2 = -\frac{1}{2}}$

Χαρ. ρίζες

Είναι

$$h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ n \geq 0$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Από "ψευδο" - αρχικές συνθήκες:

$$h[0] = 1 = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = \boxed{c_1 + c_2 = 1} \quad (3)$$

$$h[1] = -\frac{5}{6} = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = \boxed{-\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = -\frac{5}{6}} \quad (4)$$

Από (3), (4), έχουμε $c_1 = -2$, $c_2 = 3$.

Άρα η κρουστική απόκριση θα είναι:

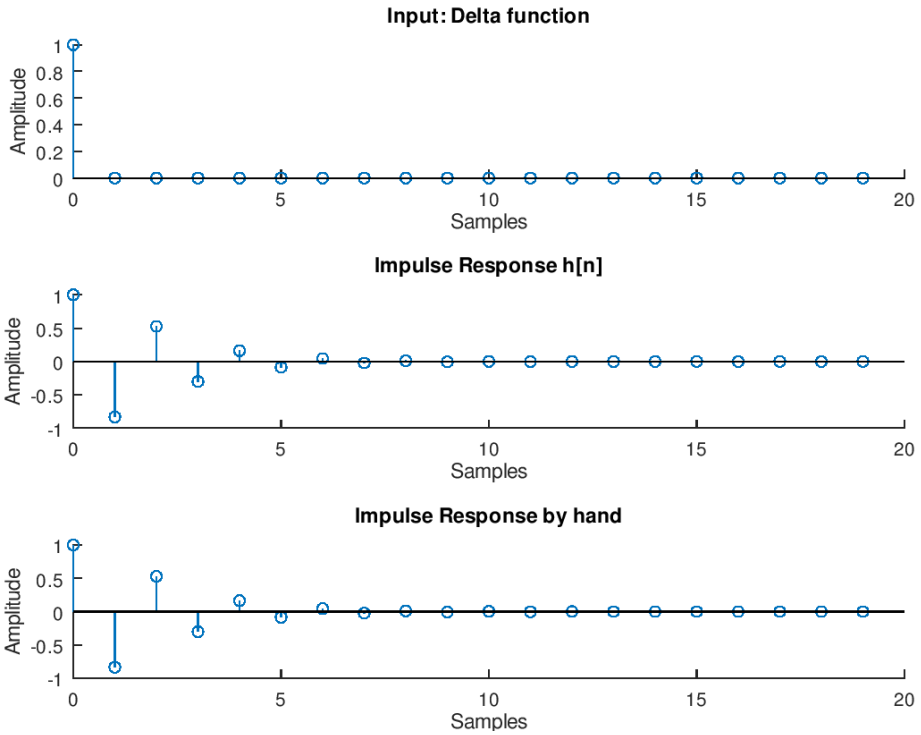
$$h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n].$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - MATLAB:

```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω;
N = 20;

% Αρχικοποίηση
h = zeros(1, N);

% "Ψευδοαρχικές" συνθήκες
h(1) = 1;
h(2) = -5/6;

% Είσοδος: συνάρτηση Δέλτα
x = [1, zeros(1,N-1)];

% Μετράω από n=3
for n=3:N
  h(n) = -5/6*h(n-1) - 1/6*h(n-2); % το x[n] δε χρειάζεται εδώ (είναι πάντα 0)
end

% Γραφήματα
figure; subplot(311);
stem(0:N-1, x); title('Input: Delta function');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

subplot(312); stem(0:N-1, h); title('Impulse Response h[n]');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

n = 0:N-1;
h_hand = -2*(-1/3).^n + 3*(-1/2).^n;
subplot(313); stem(n, h_hand); title('Impulse Response by hand');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');
```



- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Παρατηρήσεις:

1. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 2x[n]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 2h[n] = 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

2. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 4x[n] - 2x[n-2]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 4h[n] - 2h[n-2]$$

$$= 4\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] - 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]u[n-2]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$y[n]+\frac{2}{3}y[n-1]+\frac{1}{9}y[n-2]=x[n]+2x[n-1] \quad : \quad S$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση.

Θεωρούμε το απλό σύστημα: $S_0: y[n]+\frac{2}{3}y[n-1]+\frac{1}{9}y[n-2]=x[n]$

Θέτω $x[n]=\delta[n] \longrightarrow y[n]=h_0[n]$, οπότε:

$h_0[n]+\frac{2}{3}h_0[n-1]+\frac{1}{9}h_0[n-2]=\delta[n]$. Για $n=0$:

$h_0[0]+\frac{2}{3}\underbrace{h_0[-1]}_{0}+\frac{1}{9}\underbrace{h_0[-2]}_{0}=\delta[0]=1 \Rightarrow \boxed{h[0]=1}$. Για $n=1$:

$h_0[1]+\frac{2}{3}\underbrace{h_0[0]}_{1}+\frac{1}{9}\underbrace{h_0[-1]}_{0}=\delta[1]=0 \Rightarrow \boxed{h[1]=-\frac{2}{3}}$

διπλή ρίζα

Χαρακτ. εξίσωση: $\gamma^2+\frac{2}{3}\gamma+\frac{1}{9}=0 \Rightarrow \left(\gamma+\frac{1}{3}\right)^2=0 \Rightarrow \gamma_1=-\frac{1}{3}$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Άρα $h_0[n] = (c_0 + n c_1)\gamma_1^n, \quad n \geq 0$

Τέλος, $h_0[0] = 1 = c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 1}$

$h_0[1] = -\frac{2}{3} = (c_0 + c_1 \cdot 1)\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

Άρα η κρουστική απόκριση $h_0[n]$ θα είναι:

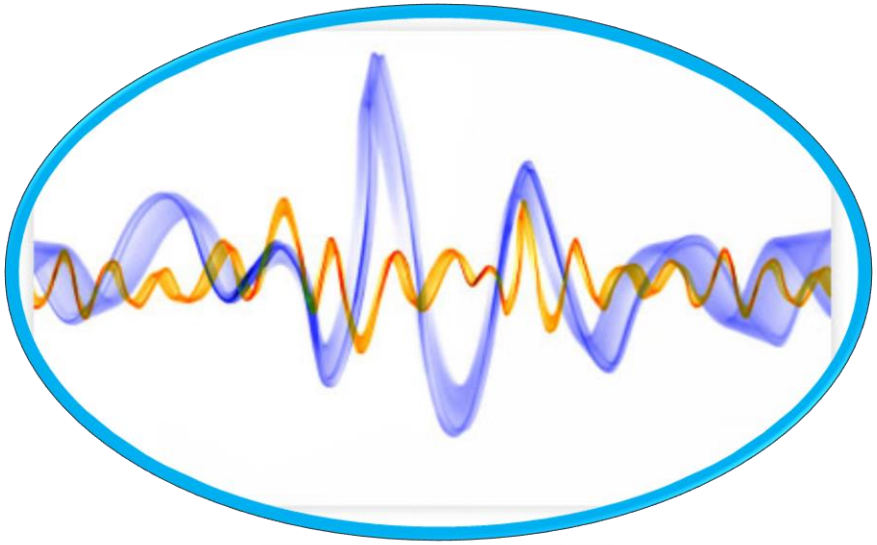
$$h_0[n] = (1+n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Έτσι, η κρουστική απόκριση του συστήματος S θα είναι:

$$h[n] = h_0[n] + 2h_0[n-1]$$
$$= (1+n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1].$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

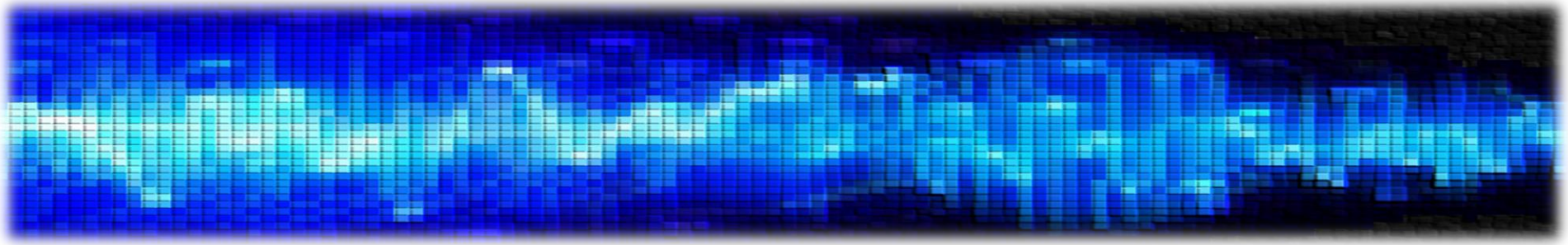
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$
- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)

- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα
- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$

- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]$$

- Η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ σύστημα

- Ας δούμε γιατί…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**

  - Παρ' όλο που βρήκαμε την κρουστική απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?

  - Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  - Άρα

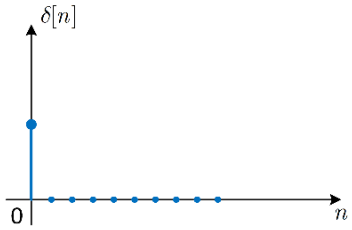
$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= T\{x[n]\} \\ &= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

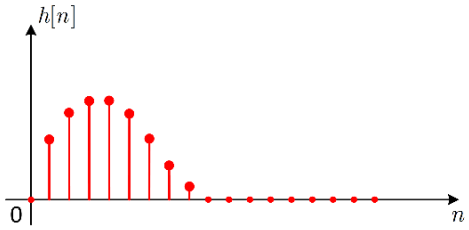
Γραμμικότητα (αθροιστικότητα)

Γραμμικότητα (ομογένεια)

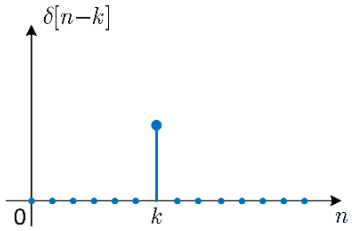
Χρον. Αμεταβλητότητα

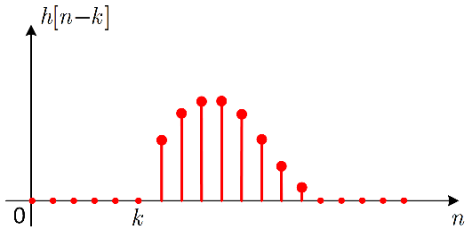
(α)





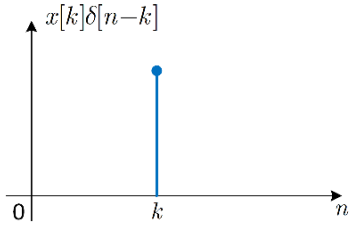
(β)

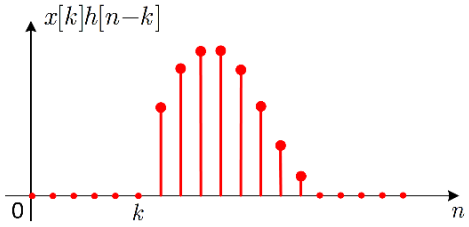




Χρον. Αμεταβλητότητα

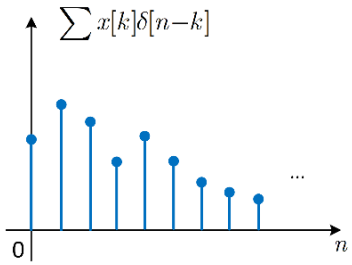
(γ)

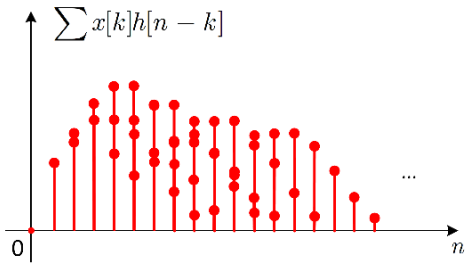




Γραμμικότητα (ομογένεια)

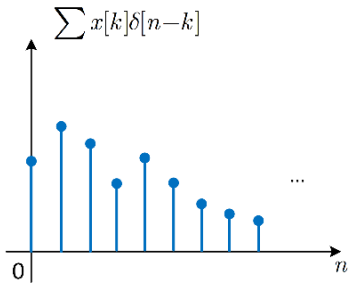
(δ)

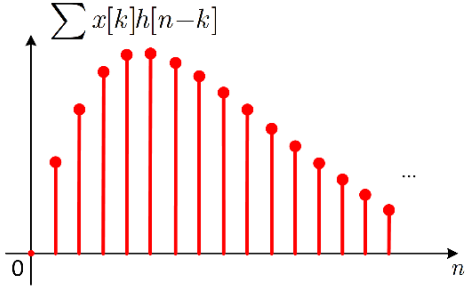




Γραμμικότητα

(ε)





Γραμμικότητα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**

  - Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι εξαιρετικά σημαντικό

  - Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

  - Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων

  - Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n], y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

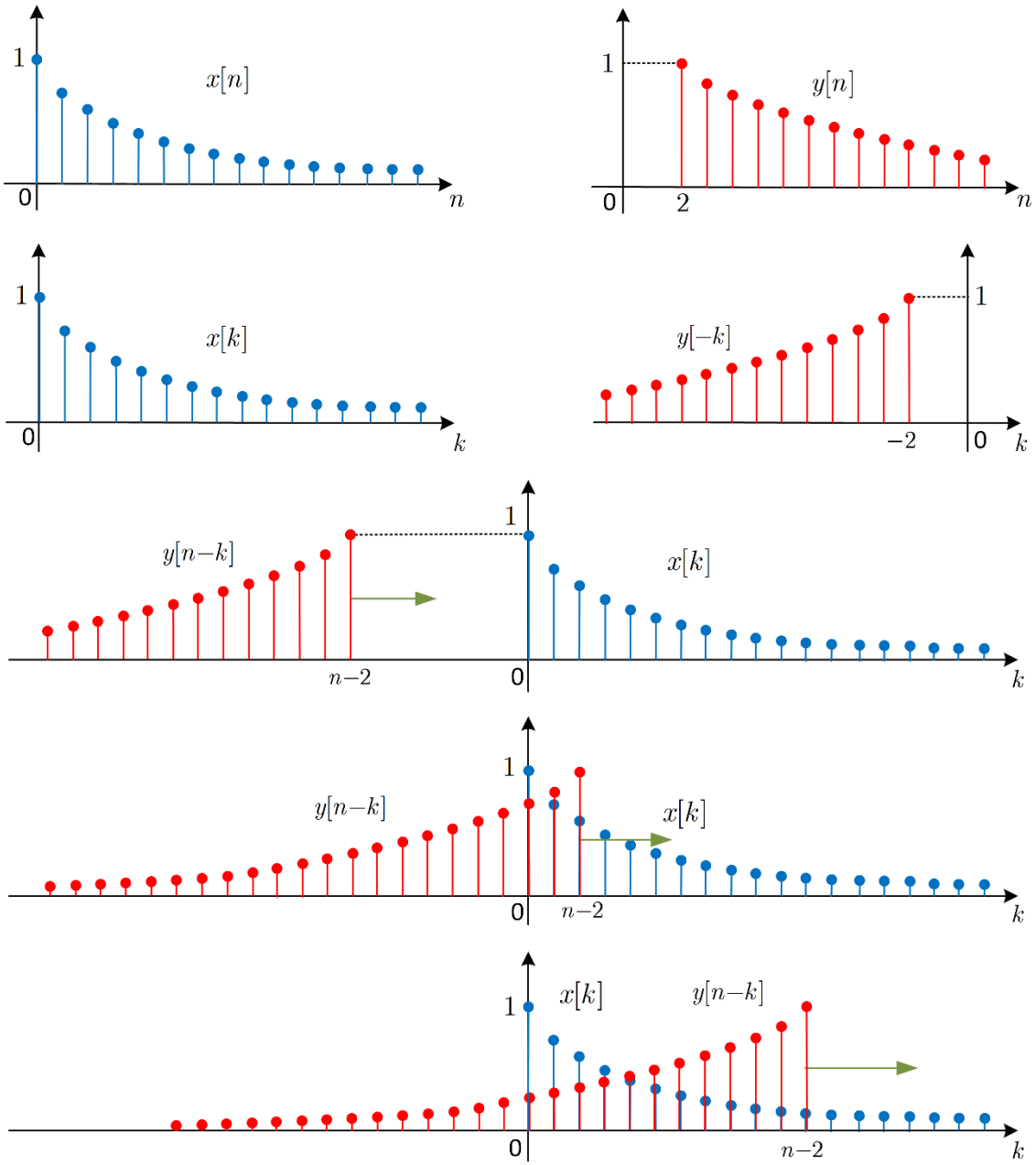
Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \Re \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \Re \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$

$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1]$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

- **Συνέλιξη**
  - Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $y[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n. Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n-k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ''ολισθαίνουμε'' πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.
- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n-k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο μέσα στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.

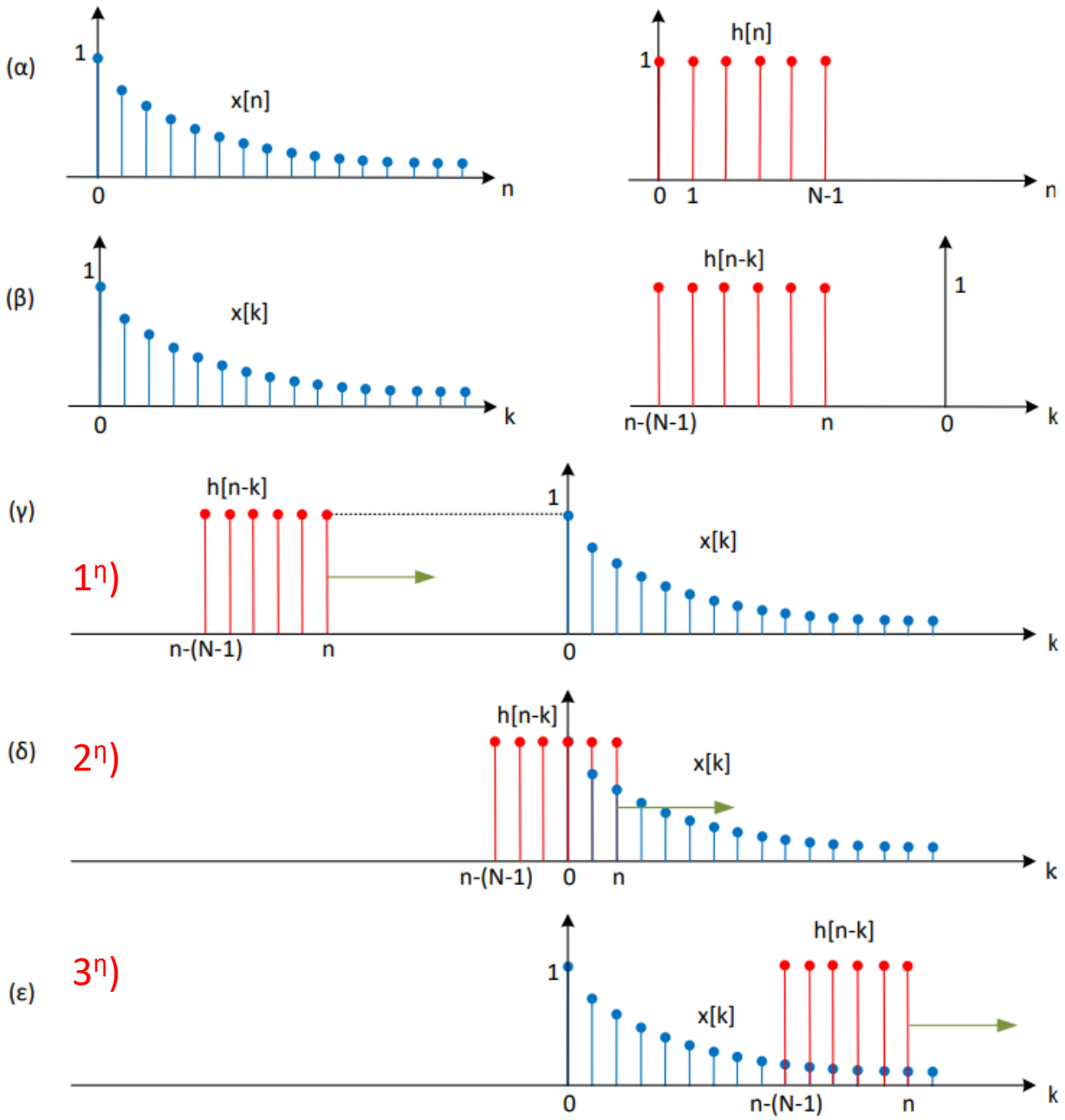


- **Συνέλιξη**

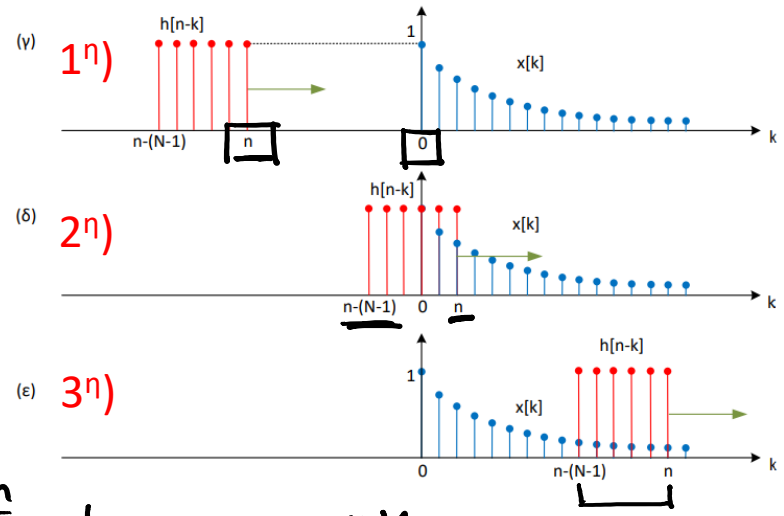
Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k, και "σύρουμε" το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα "συνυπάρχουν", δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n-N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1.$



- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:



1η περίπτωση: για $n<0$ ή $n\le -1$,

$$C_{xh}[n] = x[n] * h[n] = 0.$$

2η περίπτωση: για $n\ge 0$ ΚΑΙ $n-(N-1)\le -1$

$$C_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

3η περίπτωση: για $n-(N-1)\ge 0$

$$C_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}.$$

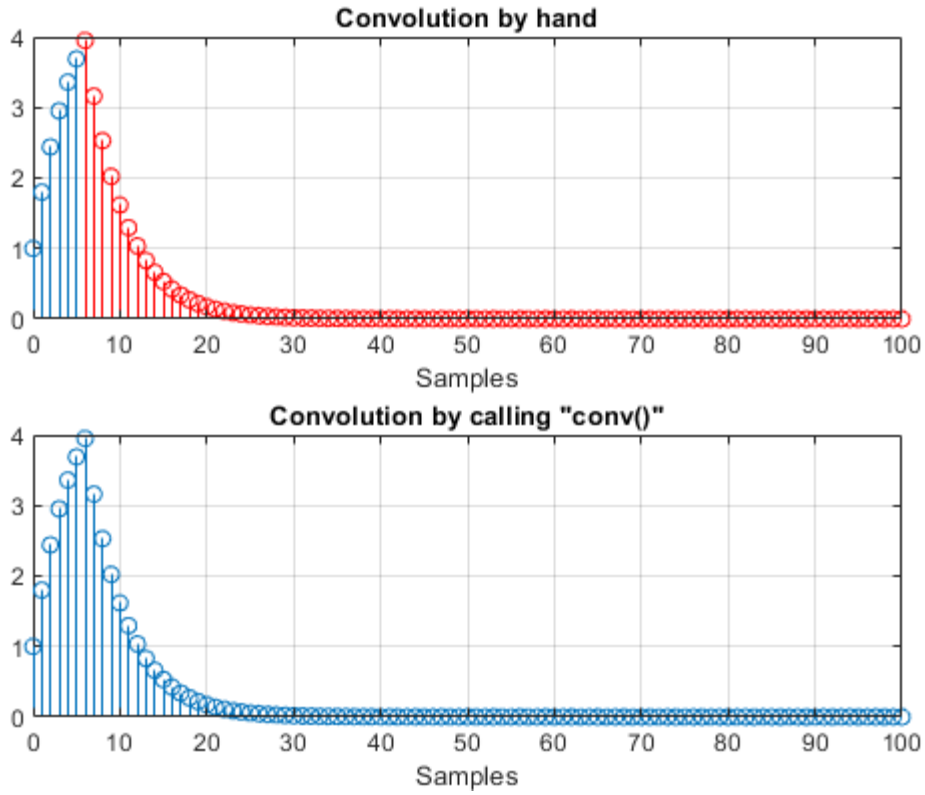
Συνολικά:

$$C_{xh}[n] = \begin{cases} 0, & n\le -1 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0\le n\le N-2 \\ \dfrac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}, & n\ge N-1 \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

```
% Ορισμός διάρκειας
Nx = 7;

% Σήματα
x = ones(1,Nx);
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;

% Convolution by hand
c1 = (1 - alpha.^(1:(Nx-1)))./(1-alpha);
c2 = (alpha.^([Nx-1:Nh] - (Nx-1)) ...
    - alpha.^(Nx-1+1:Nh+1))./(1-alpha);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(0:Nx-2, c1); hold on;
stem(Nx-1:Nh, c2, 'r'); grid; hold off;
title('Convolution by hand'); xlabel('Samples');
subplot(212); stem(0:Nh, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"'); xlabel('Samples');
```



$$\sum_{N_1}^{N_2} c = c\,(N_2 - N_1 + 1)$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = h[n]$.

Είναι $c_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]\, a^{n-k} u[n-k]$

$= a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^k \cdot a^{-k}}_{1} u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k]$ (1)

Είναι $u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και $u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

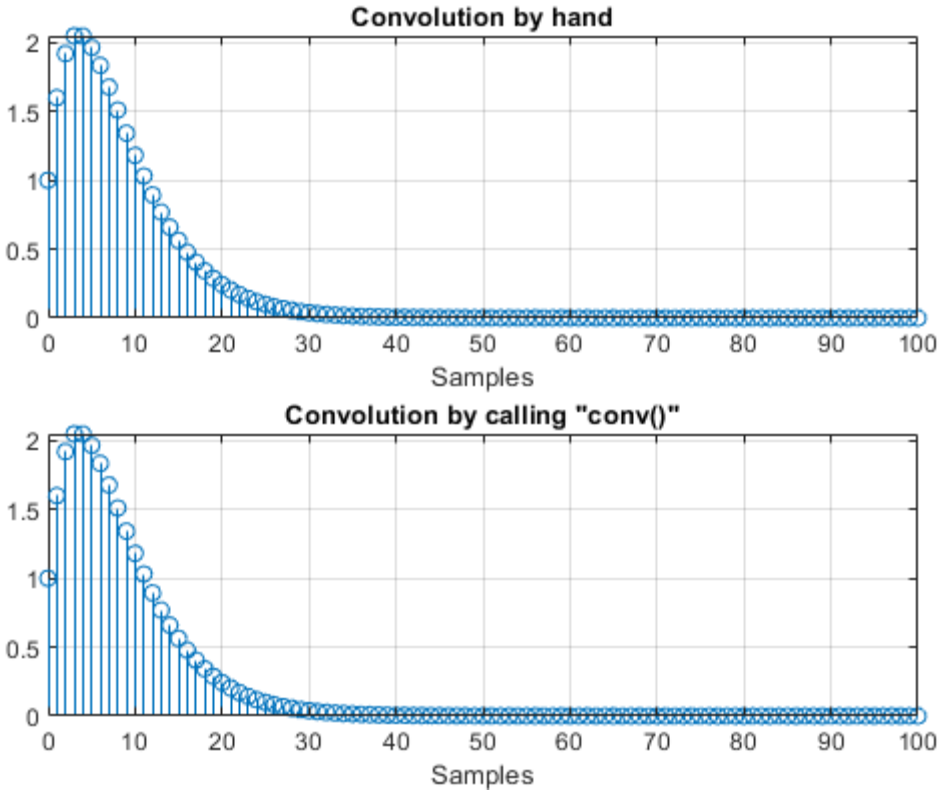
Οπότε $u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$. Άρα η (1) γράφεται ως:

$c_{xh}[n] = a^n \sum_{k=0}^{n} 1 = a^n (n-0+1) = (n+1)a^n$, $n \geq 0$, δηλ. $c_{xh}[n] = (n+1)a^n u[n]$.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

```
% Σήματα
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;
x = h;

% Convolution by hand
chx = alpha.^n .* (n+1);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(n, chx);
title('Convolution by hand'); grid;
xlabel('Samples');
subplot(212); stem(n, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"');
xlabel('Samples');
```



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**

  - Η γραφική ή η αλγεβρική μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη όταν ένα τουλάχιστον εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι άπειρης διάρκειας

  - Τι συμβαίνει όμως αν και τα δυο σήματα είναι πεπερασμένης (και συνήθως μικρής) διάρκειας?

  - Τότε βολικότερη είναι η μέθοδος της **ολισθαίνουσας ταινίας (sliding tape)**

  - Έστω ότι έχουμε δυο σήματα

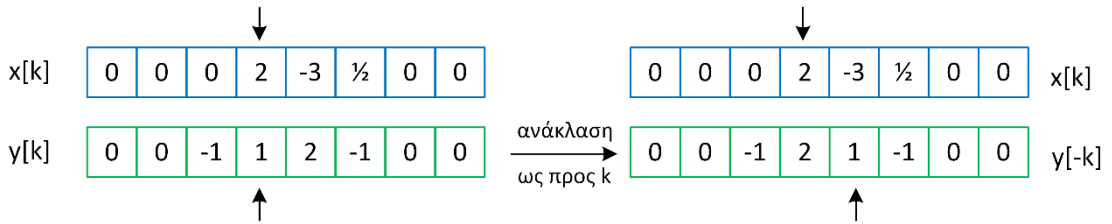
$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

$$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

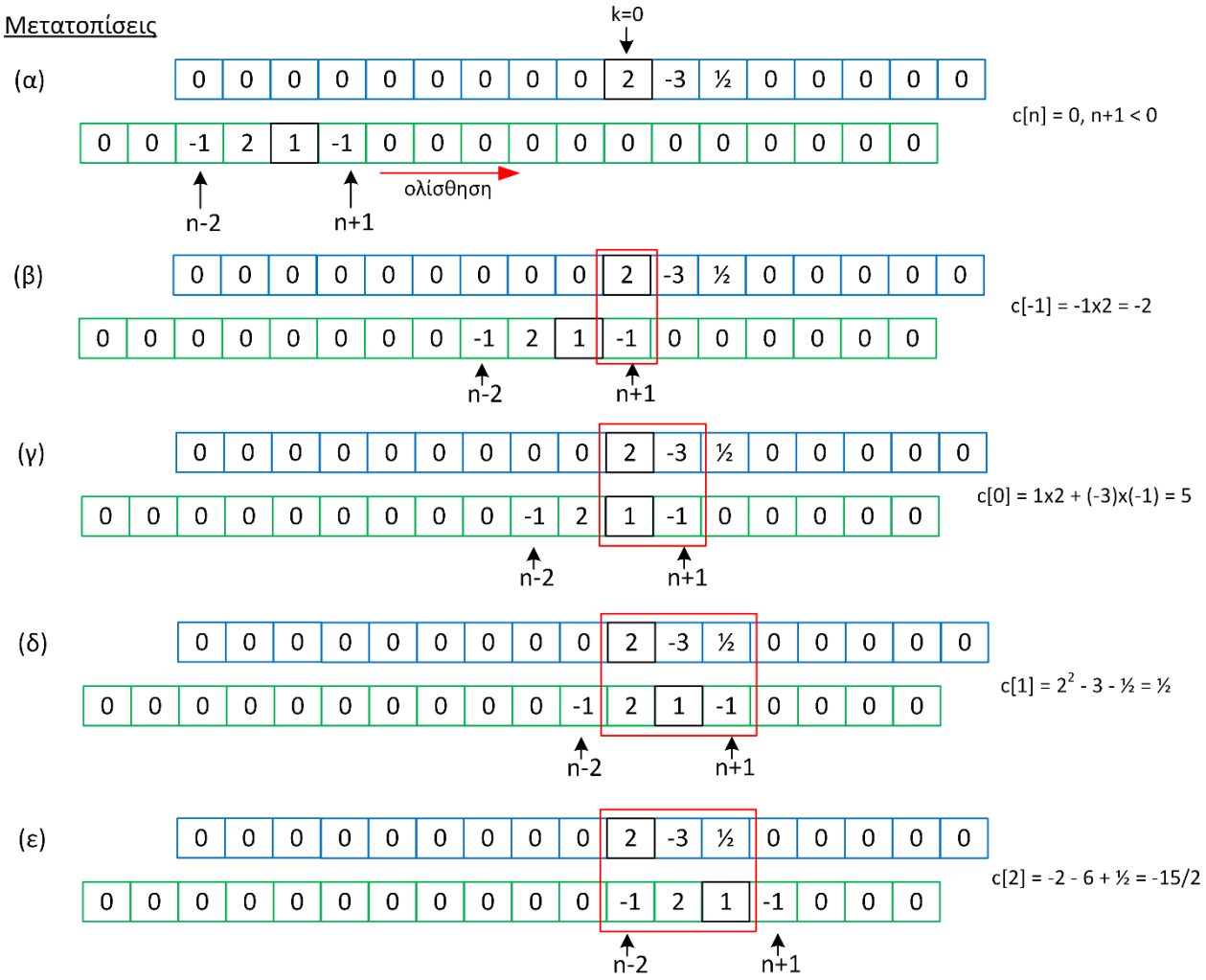
  - Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία, απλά χωρίς σχήματα αυτή τη φορά

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**

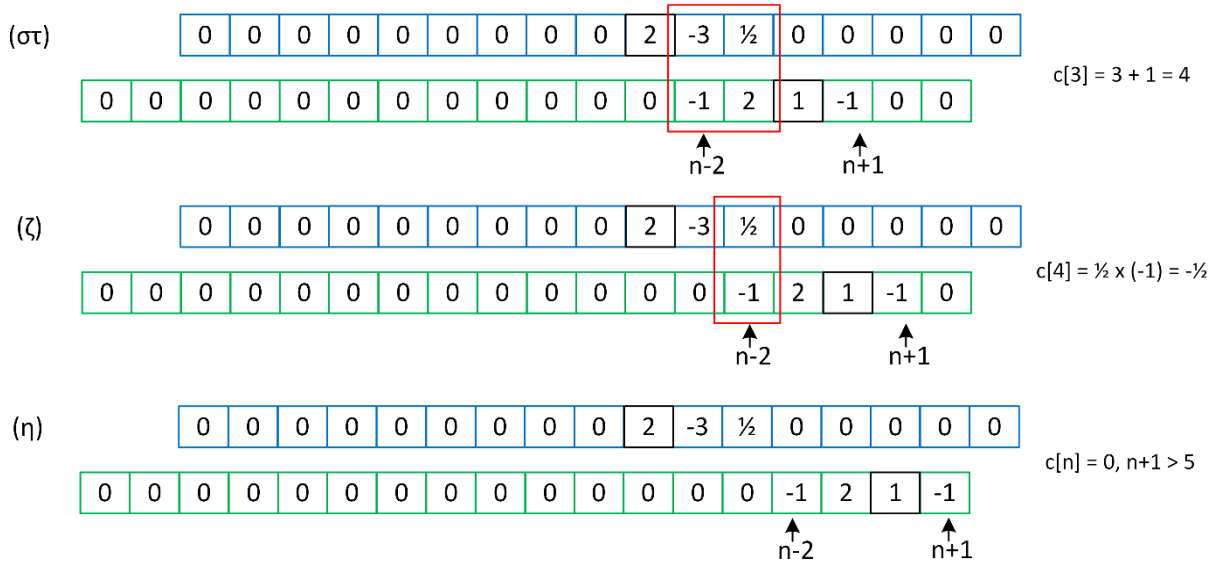


Μετατοπίσεις



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**



- Το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4]$$

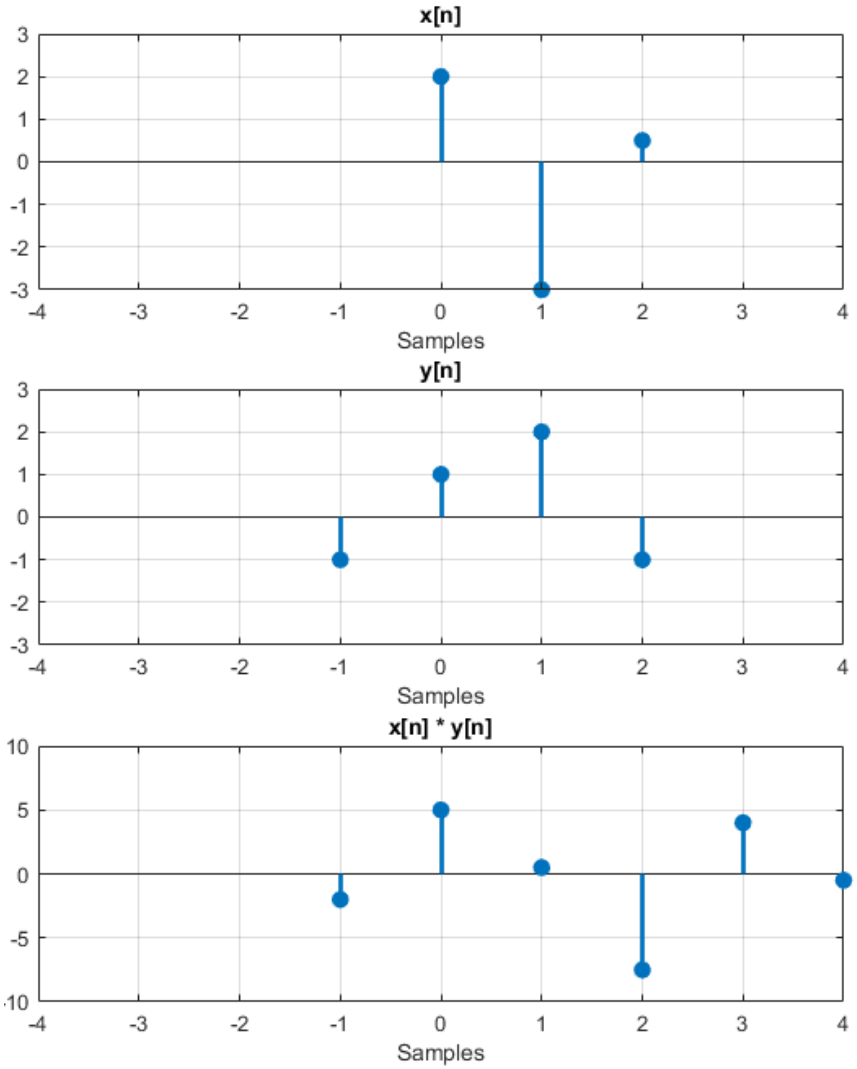
- Η ιδιότητα του εύρους προβλέπει σωστά τη διάρκεια του παραπάνω σήματος?

- Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση ιδιοτήτων συνέλιξης?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνέλιξη**

```
% Σήματα
x = [2 -3 1/2];
nx = [0 1 2];

y = [-1 1 2 -1];
ny = [-1 0 1 2];

% Συνέλιξη
cxy = conv(x, y);
n_c = [-1 0 1 2 3 4];

% Σχήματα
figure; subplot(311); stem(nx, x);
xlabel('Samples'); title('x[n]');
subplot(312); stem(ny, y);
xlabel('Samples'); title('y[n]');
subplot(313); stem(n_c, cxy);
xlabel('Samples'); title('x[n] * y[n]');
```



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συνολική έξοδος συστήματος**

  - Η συνολική έξοδος ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ δίνεται ως

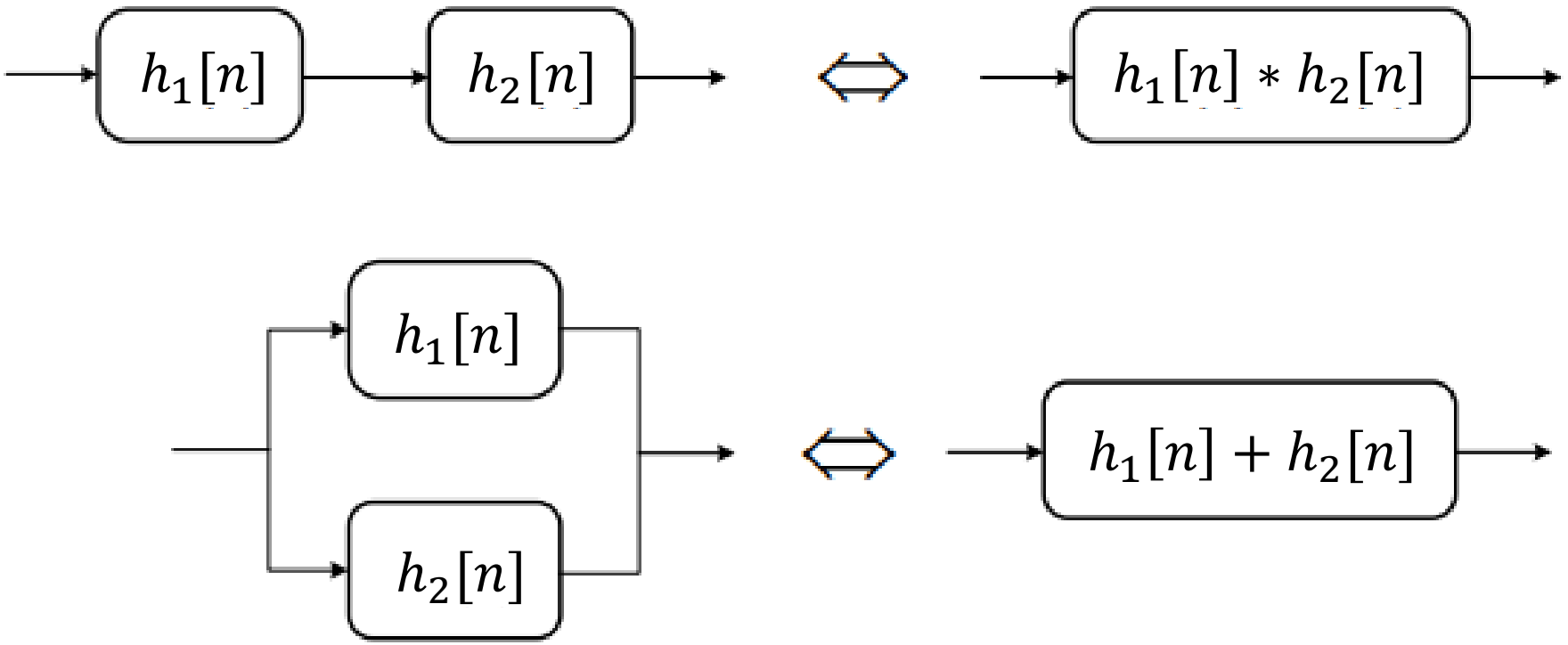
$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i \gamma_i^n u[n] + x[n] * h[n]$$

  - Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα ΓΧΑ συστήματα, δηλ. τέτοια ώστε

$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

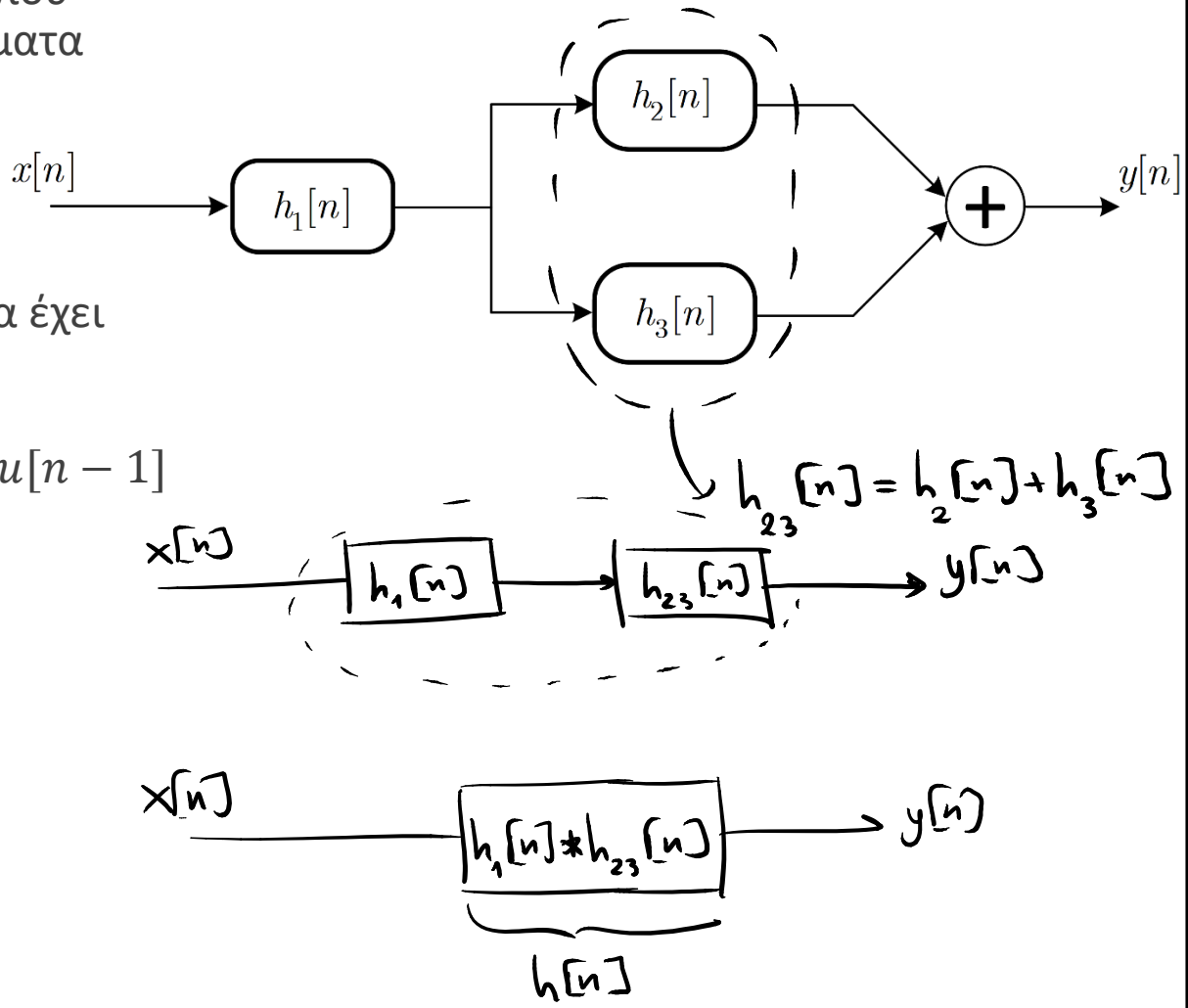
$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το σύστημα της εικόνας, που αποτελείται από τα υποσυστήματα

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα έχει κρουστική απόκριση

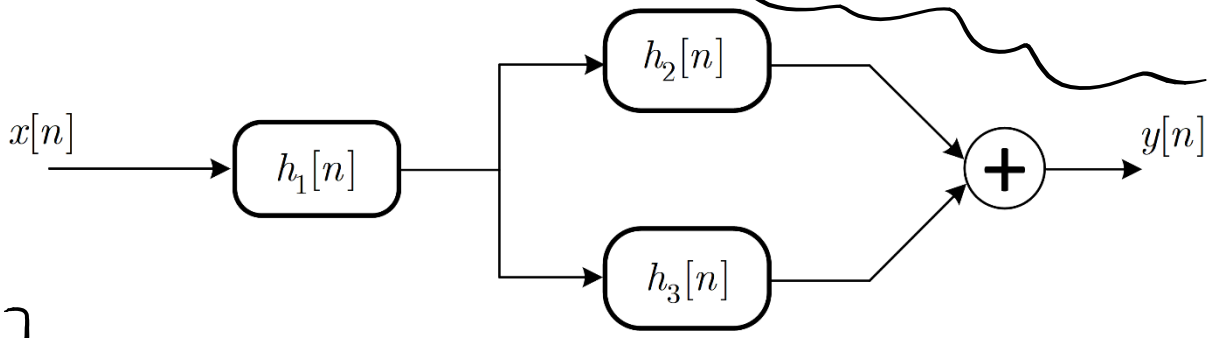
$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)u[n-1]$$



$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1]$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



Είναι $h[n] = h_1[n] * h_{23}[n]$

Είναι $h_{23}[n] = h_2[n] + h_3[n] = nu[n] + \delta[n+1]$, οπότε θα είναι:

$$h[n] = u[n-1] * \left(nu[n] + \delta[n+1] \right) = \underbrace{u[n-1] * nu[n]}_{①} + \underbrace{u[n-1] * \delta[n+1]}_{②}$$

② : $u[n-1] * \delta[n+1] = u[n-1+1] = u[n]$ ③

① : $u[n-1] * nu[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,u[k]\,u[n-k-1] = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k$

$k \geq 0$, $k \leq n-1$, $0 \leq k \leq n-1$

$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \quad n \geq 1$

$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,u[n-1]$ ④ . Από ③, ④ προκύπτει το ζητούμενο.

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Έχουμε συζητήσει για την έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος

$$|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re$$

- Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Άρα θα πρέπει

$$|y[n]| < B_y \Rightarrow |x[n] * h[n]| < B_y \Rightarrow \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| < B_y$$

- Ξέρουμε ότι $|x[n]| < B_x, \quad \forall\, n$, οπότε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| < B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < B_y$$

- Η τελευταία σχέση ισχύει αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Η σχέση

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

Κρουστική απόκριση απολύτως αθροίσιμη

και η οποία αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ευστάθεια** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Δεν αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα εδώ

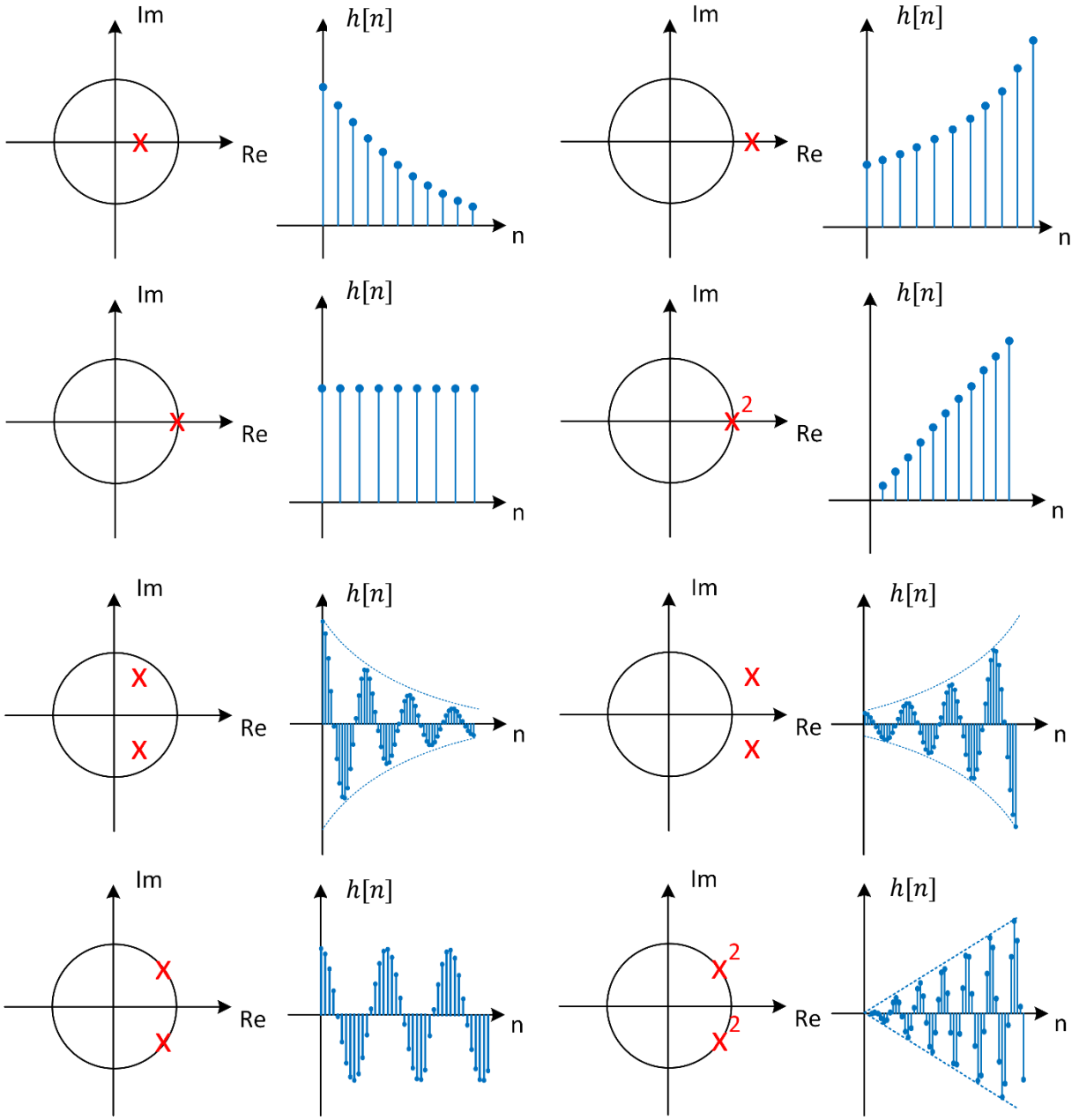
- Η κρουστική απόκριση μπορεί να αποτελείται από όρους της μορφής

$$\delta[n-k], \gamma_k^n, n^k\gamma_k^n$$

- Προφανώς η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη αν και μόνον αν

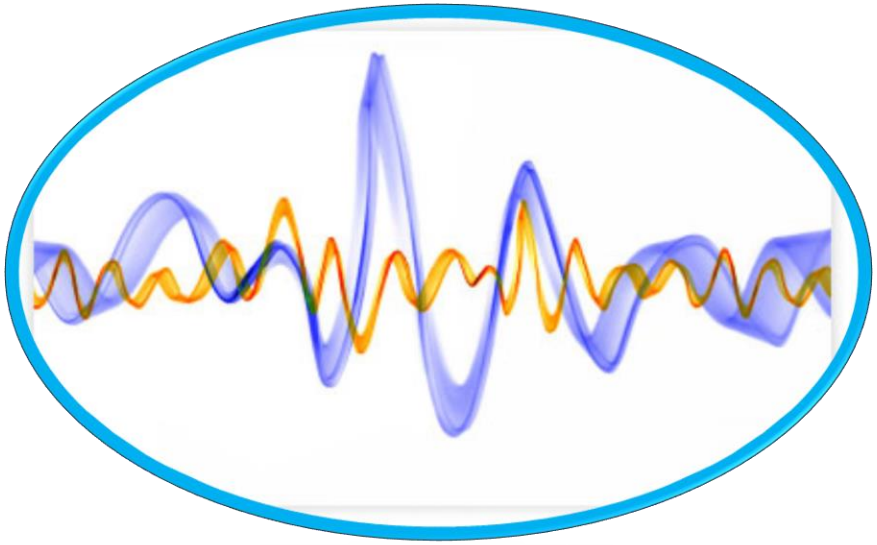
$|\gamma_k| < 1, \quad \forall\, \gamma_k \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας!

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

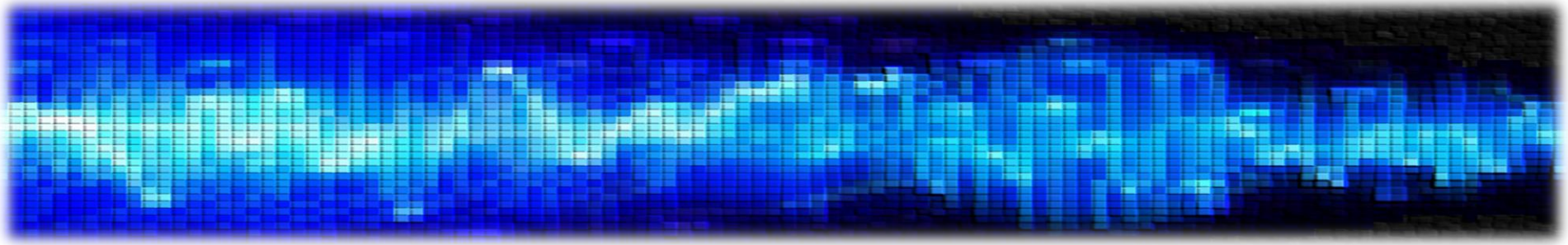
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η



- Αιτιατότητα ΓΧΑ συστημάτων
- Απόκριση σε Συχνότητα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

- Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \;\; \forall\, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \;\; \forall\, n < n_0$$

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \qquad n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = 0, \qquad n < n_0$$

- Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
- Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
  - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα

- Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$h[n] = 0, \qquad n < 0$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**

- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους… ☺

- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου

- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παρ' όλα αυτά
  - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του *γιατί* τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δεν ξέρουμε *πώς* να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά

- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια διαφορετική είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
  - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  - Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

  - Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

  - Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό

  - Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

με

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Το άθροισμα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

  - Αρκεί

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|h[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

αφού $\left|e^{j\omega n}\right| = 1, \quad \forall\, \omega, n$

  - Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
    - Θα πούμε περισσότερα αργότερα…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Η συνάρτηση ως προς ω

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)

  - Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

  - Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι πραγματική συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Η ιδιότητα

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)\right| = \left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{-j\omega}}\right)\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi_H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right) = -\boldsymbol{\varphi_H}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{-j\omega}})$$

  - Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

  - Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}$, $A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H(e^{j\omega_0})\right)} \end{aligned}$$

  - Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

  - Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
    - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με <u>πραγματική</u> κρουστική απόκριση

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta)}, \qquad A \in \Re_+$$

θα έχουμε

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right))} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta-\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right))}$$

  - Όμως

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_H\left(e^{-j\omega}\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Άρα

$$y[n] = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right))} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right))}$$
$$= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = C + A\cos(\omega_0 n + \theta)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH(e^{j0}) + |H\left(e^{j\omega_0}\right)|A\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!

  - Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} |H\left(e^{j\omega_k}\right)| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος
  - Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π!
  - Πράγματι

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}e^{j2\pi}\right) = H(e^{j\omega})$$

  - Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
    - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της
  - Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
    - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συντελεστές $h[n]$
    - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π-περιοδικά στη συχνότητα
  - Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

$n_d > 0$

Θεωρούμε $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, τότε $y[n] = x[n-n_d] = e^{j\omega_0(n-n_d)} = \underbrace{e^{-j\omega_0 n_d}}_{H(e^{j\omega_0})} \cdot e^{j\omega_0 n}$

Γενικότερα, $\boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}}$

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega n_d}| = |\cos(-\omega n_d) + j\sin(-\omega n_d)|$

$= \sqrt{\cos^2(-\omega n_d) + \sin^2(-\omega n_d)} = \sqrt{1} = 1, \ \forall\ \omega.$

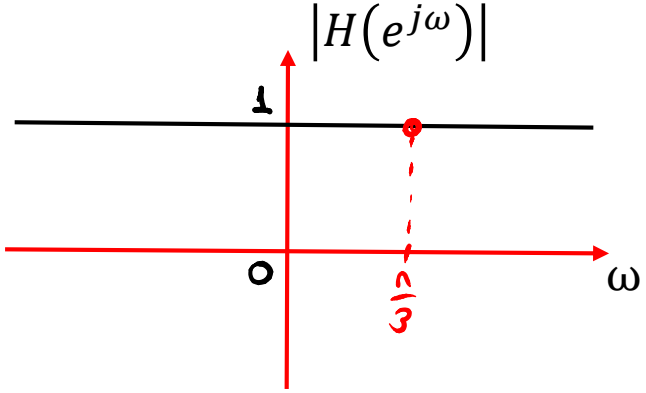
Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1}\frac{\sin(-\omega n_d)}{\cos(-\omega n_d)} =$

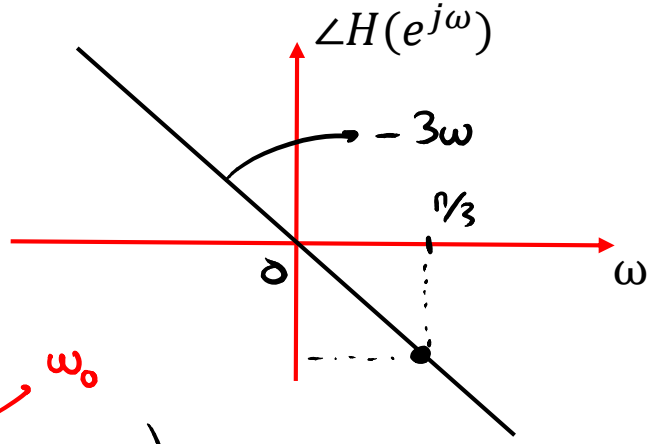
$= \tan^{-1}\frac{-\sin(\omega n_d)}{\cos(\omega n_d)} = \tan^{-1}\left(-\tan(\omega n_d)\right) = -\tan^{-1}\left(\tan(\omega n_d)\right) = -\omega n_d.$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$n_d = 3$





- Αν η είσοδος είναι $x[n] = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8}\right)$ (ω_0)

$$y[n] = 4 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} - \pi\right)$$

($1 = |H(e^{j\frac{\pi}{3}})|$, $-\pi = \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{3}})$)

$y[n] = x[n-3]$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-3) + \frac{\pi}{8}\right)$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \pi + \frac{\pi}{8}\right)$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{8}\right)$

$= 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{8}\right)$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0$, δηλ. $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$. Έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} \left(e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{M_2+1} \frac{e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \frac{e^{j\omega\frac{(M_2+1)}{2}} - e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega(M_2/2)} \frac{2j\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\left(\omega(M_2/2)\right)} \cdot \frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega(M_2/2)} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$

$= \left| \frac{1}{M_2+1} \right| \cdot \underbrace{\left| e^{-j\omega(M_2/2)} \right|}_{1,\ \forall\,\omega} \cdot \left| \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| = \frac{1}{M_2+1} \left| \frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|.$

Ας επιλέξαμε το διάστημα $[0, 2\pi)$. Έξω από αυτό, η $|H(e^{j\omega})|$ επαναλαμβάνεται.

Για $\omega = 0$, $\lim_{\omega\to 0} \frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)} = \lim_{\omega\to 0} \frac{\lambda\cos(\lambda\omega)}{\cos(\omega)} = \lambda = M_2+1$

Ο αριθμητής μηδενίζεται: $\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right) = 0$? $\frac{\omega(M_2+1)}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Άρα $\boxed{\omega = \frac{2k\pi}{M_2+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Για $M_2 = 4$, $\omega = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$, $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5} \left| \frac{\sin\left(\omega\frac{5}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ εξαρτάται ουσιαστικά από το μέτρο του

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Για να έχουμε μια πολική εικόνα, θέσαμε $M_1=0$, $M_2=4$, οπότε λάβαμε:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

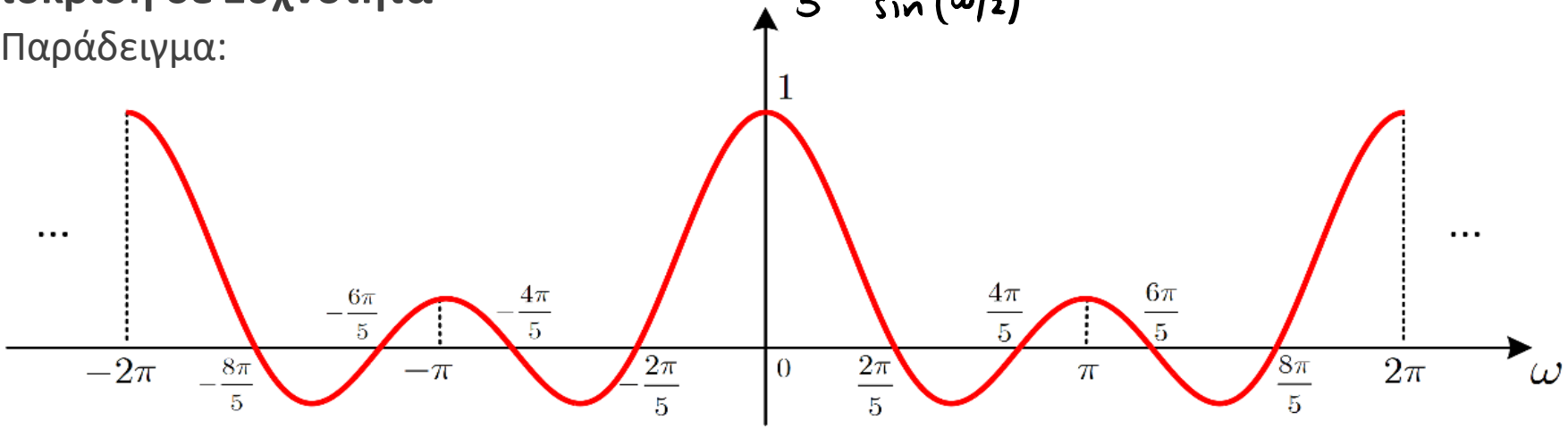
με σημεία μηδενισμού τα $\omega_k = \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ας δούμε τον όρο $\frac{1}{5}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ και το μέτρο του.

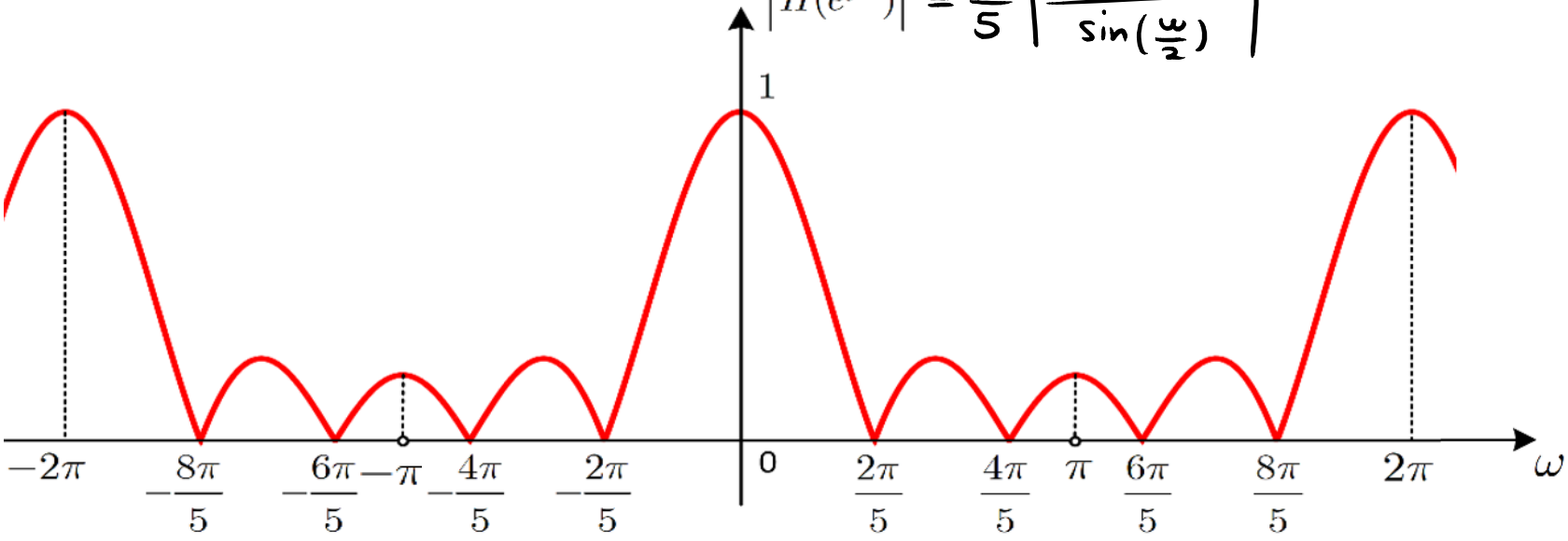
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$$\frac{1}{5}\,\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

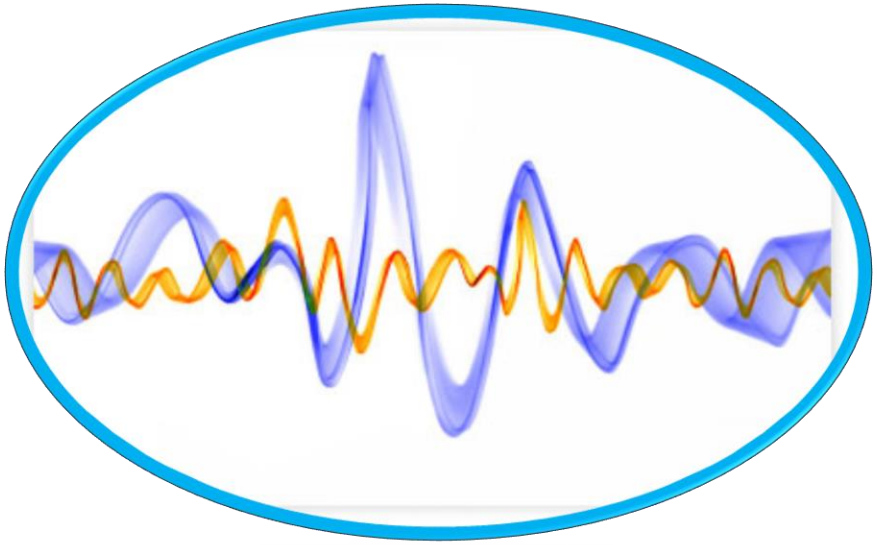


$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

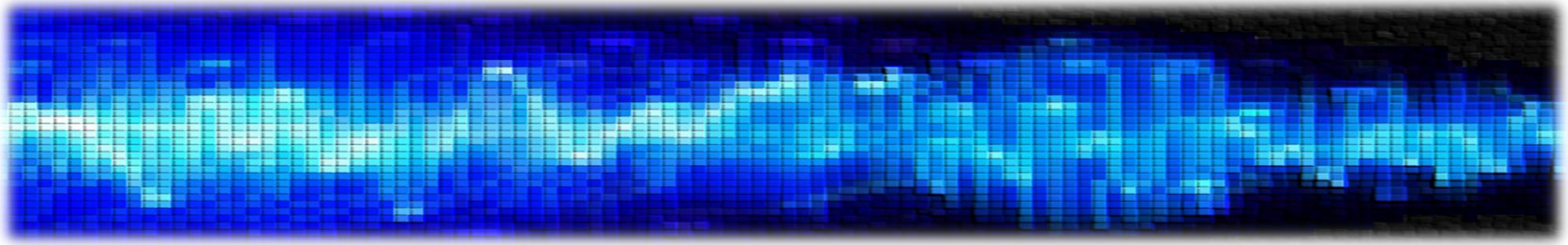
Συνεχίζεται... ☺



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η



- Απόκριση σε Συχνότητα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος (επανάληψη…)**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  - Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός): **Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος (επανάληψη…)**

  - Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

με

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα (επανάληψη…)**

  - Αν $h[n]$ πραγματική συνάρτηση του n, τότε

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)\right| = \left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{-j\omega}}\right)\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi_H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right) = -\boldsymbol{\varphi_H}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{-j\omega}})$$

  - Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα (επανάληψη…)**

  - Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}$, $A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H(e^{j\omega_0})\right)} \end{aligned}$$

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

- **Απόκριση σε Συχνότητα (επανάληψη…)**

  - Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} |H\left(e^{j\omega_k}\right)| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0$, δηλ. $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$. Έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} (e^{-j\omega})^n$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{M_2+1} \frac{e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \frac{e^{j\omega\frac{(M_2+1)}{2}} - e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega\frac{(M_2)}{2}} \frac{2j\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\left(\omega\frac{M_2}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$

$= \left| \frac{1}{M_2+1} \right| \cdot \underbrace{\left| e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \right|}_{1,\ \forall\ \omega} \cdot \left| \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| = \frac{1}{M_2+1} \left| \frac{\sin\left(\omega\frac{(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|.$

Ας επιλέξαμε το διάστημα $[0, 2\pi)$. Έξω από αυτό, η $|H(e^{j\omega})|$ επαναλαμβάνεται.

Για $\omega = 0$, $\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)} = \lim_{\omega \to 0} \frac{\lambda \cos(\lambda\omega)}{\cos(\omega)} = \lambda = M_2 + 1$

Ο αριθμητής μηδενίζεται: $\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right) = 0$? $\frac{\omega(M_2+1)}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Άρα $\boxed{\omega = \frac{2k\pi}{M_2+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Για $M_2 = 4$, $\omega = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$, $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5} \left| \frac{\sin\left(\omega\frac{5}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ εξαρτάται ουσιαστικά από το μέτρο του

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Για να έχουμε μια πολική εικόνα, θέσαμε $M_1=0$, $M_2=4$, οπότε λάβαμε:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

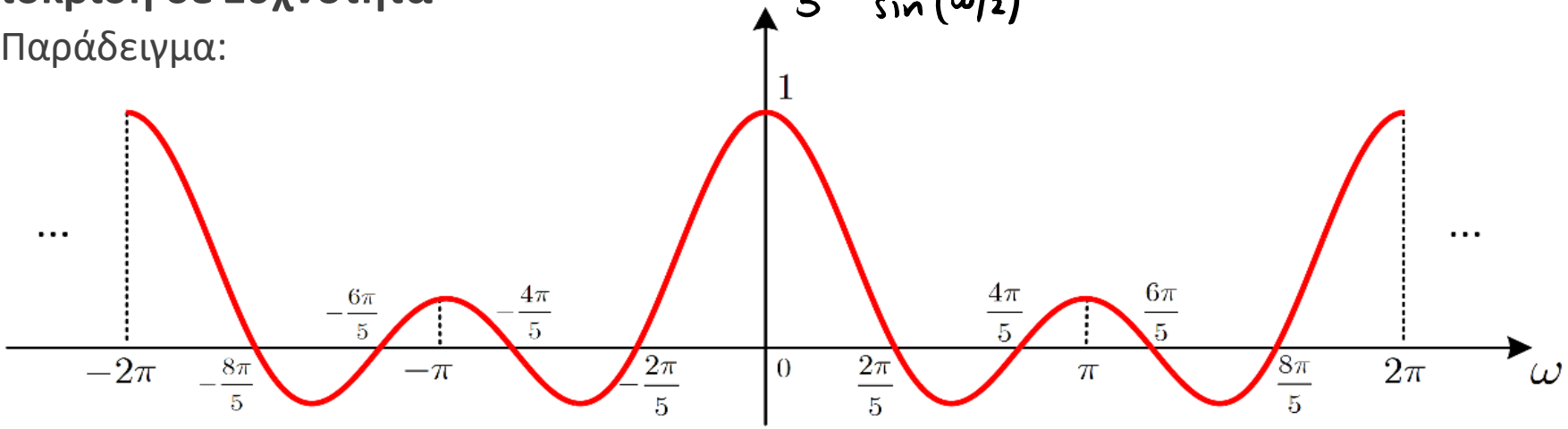
με σημεία μηδενισμού τα $\omega_k = \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ας δούμε τον όρο $\frac{1}{5}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ και το μέτρο του.

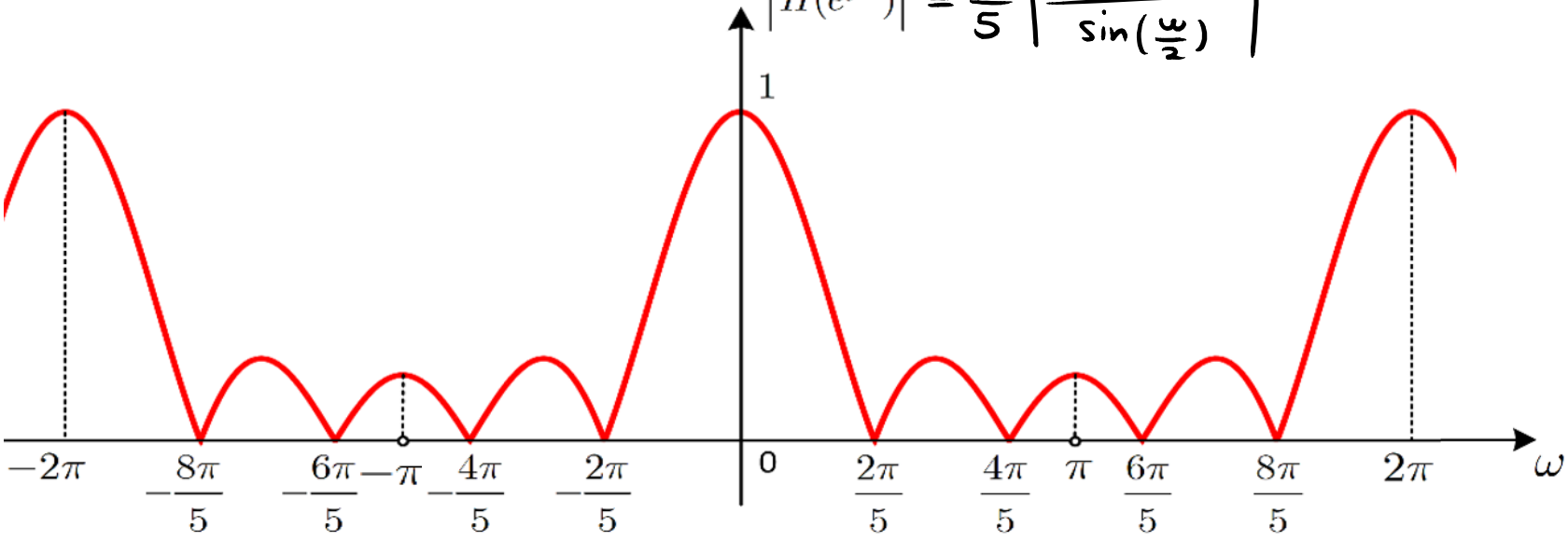
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$$\frac{1}{5}\,\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$



$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$1 \cdot |1| e^{j\theta}$ $\quad 1 \cdot |1| e^{j\psi}$ $\quad 1 \cdot |1| e^{j\int}$

Απόκριση φάσης: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega(M_2+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

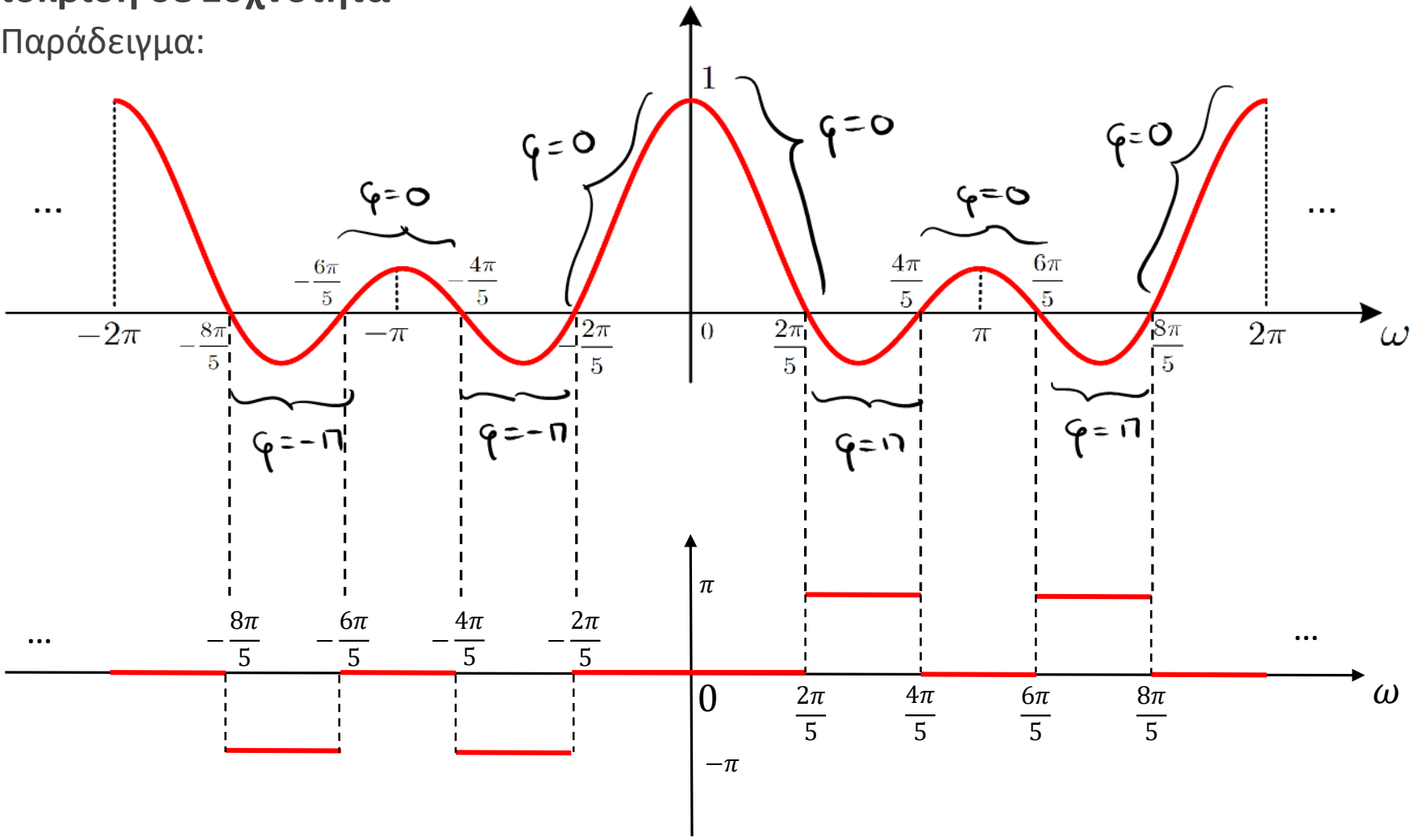
$\varphi_H(e^{j\omega}) = \theta(e^{j\omega}) + \psi(e^{j\omega}) + \int(e^{j\omega})$

- $\theta(e^{j\omega}) = 0$, γιατί $\frac{1}{M_2+1} \in \mathbb{R}_+$
- $\psi(e^{j\omega}) = -\omega \frac{M_2}{2}$
- $\int(e^{j\omega}) = ?$

$c > 0 : c e^{j0}$

$c < 0 : |c| e^{\pm j\pi}$, $e^{\pm j\pi} = -1$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



Αντιστοιχίσαμε δεξιές τιμές της φάσης σε $\omega > 0$

——— αριστερές ——— $\omega < 0$.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Είναι

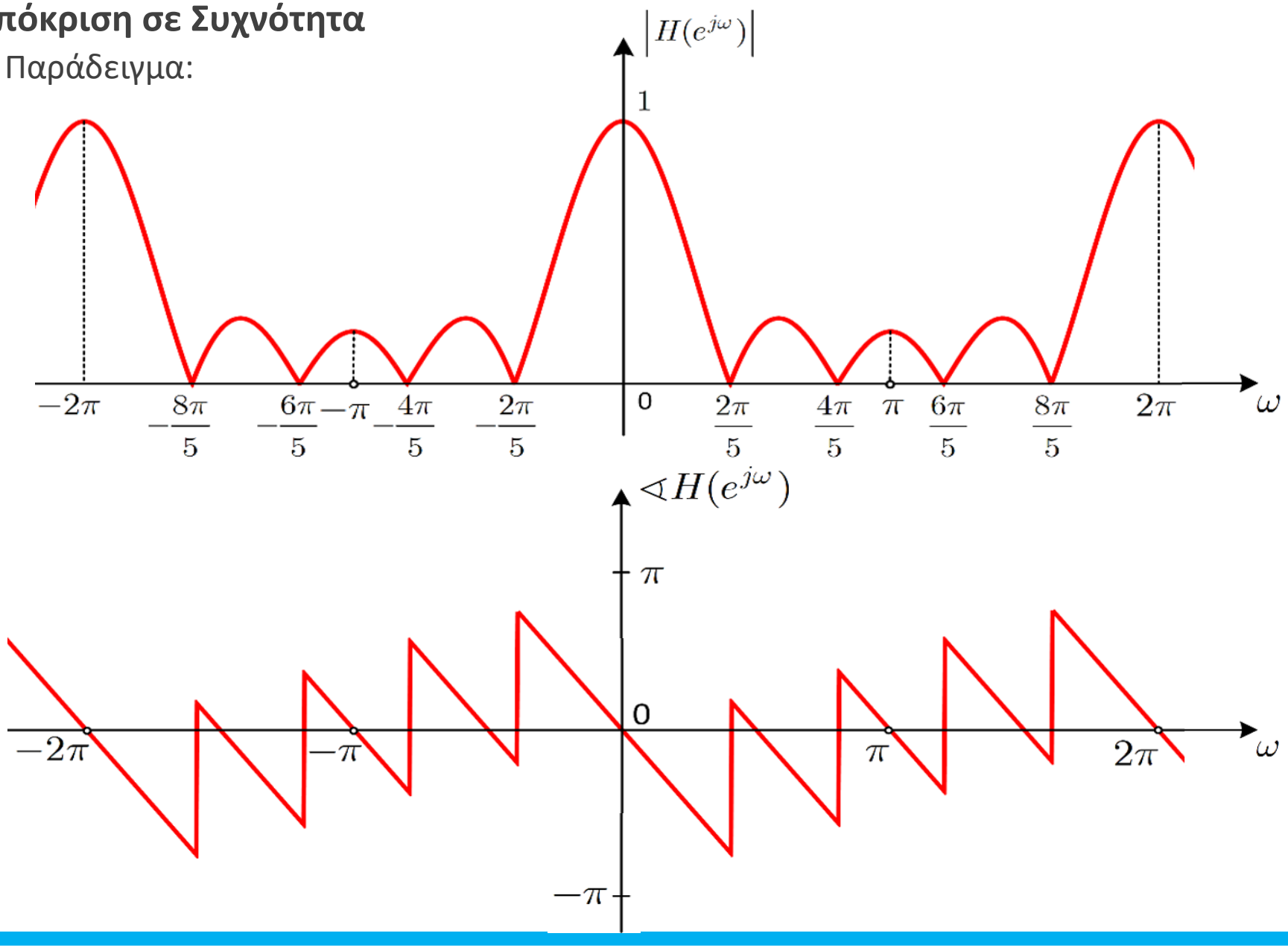
$$J(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5} \\ +\pi & , \ \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5} \\ 0 & , \ \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5} \\ +\pi & , \ \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ 0 & , \ \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \end{cases}$$

Συνολικά : $(M_2 = 4)$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega & , \ 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5} \\ -2\omega + \pi & , \ \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -2\omega & , \ \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5} \\ -2\omega + \pi & , \ \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -2\omega & , \ \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

- Έστω $x[n] = A\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3}\right)$, $y[n] = ?$

$$y[n] \cong A \cdot \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3} + \varnothing\right) = \frac{A}{4}\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{3}\right)$$

$|H(e^{j\pi})|$, $\varphi_H(e^{j\pi})$

- Έστω $x[n] = A\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right)$, $y[n] = ?$

$$y[n] \cong A \cdot \frac{1}{6}\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$|H(e^{j\frac{\pi}{3}})|$, $\varphi_H(e^{j\frac{\pi}{3}})$

- Έστω $x[n] = A\cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{8}\right) = A \cdot 0 \cdot \cos(\ldots) = 0$!!!

$|H(e^{j\frac{4\pi}{5}})|$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής

$$e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  σε ένα ΓΧΑ σύστημα

  - Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα

  - Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη

  - Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα

  - Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
    - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$

  - Το σήμα αυτό θα είναι το

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

  - Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= H\left(e^{j\omega n}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

  - Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$y[n] = H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|\left|e^{j\omega(n-k)}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

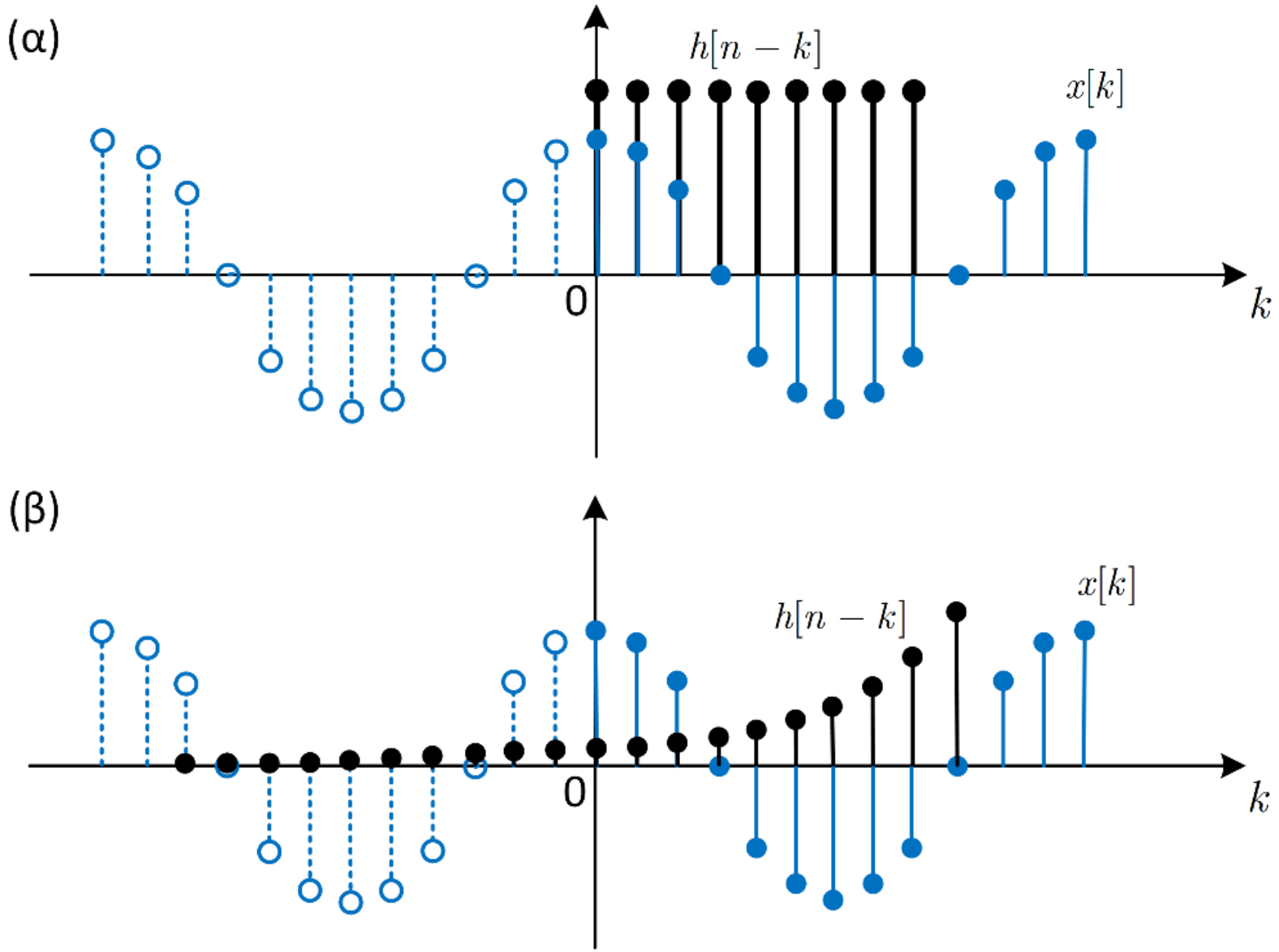
- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε
$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$
τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \to +\infty$
   - Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**



- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ας υλοποιήσουμε στο Octave/MATLAB το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

  δηλ. για το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

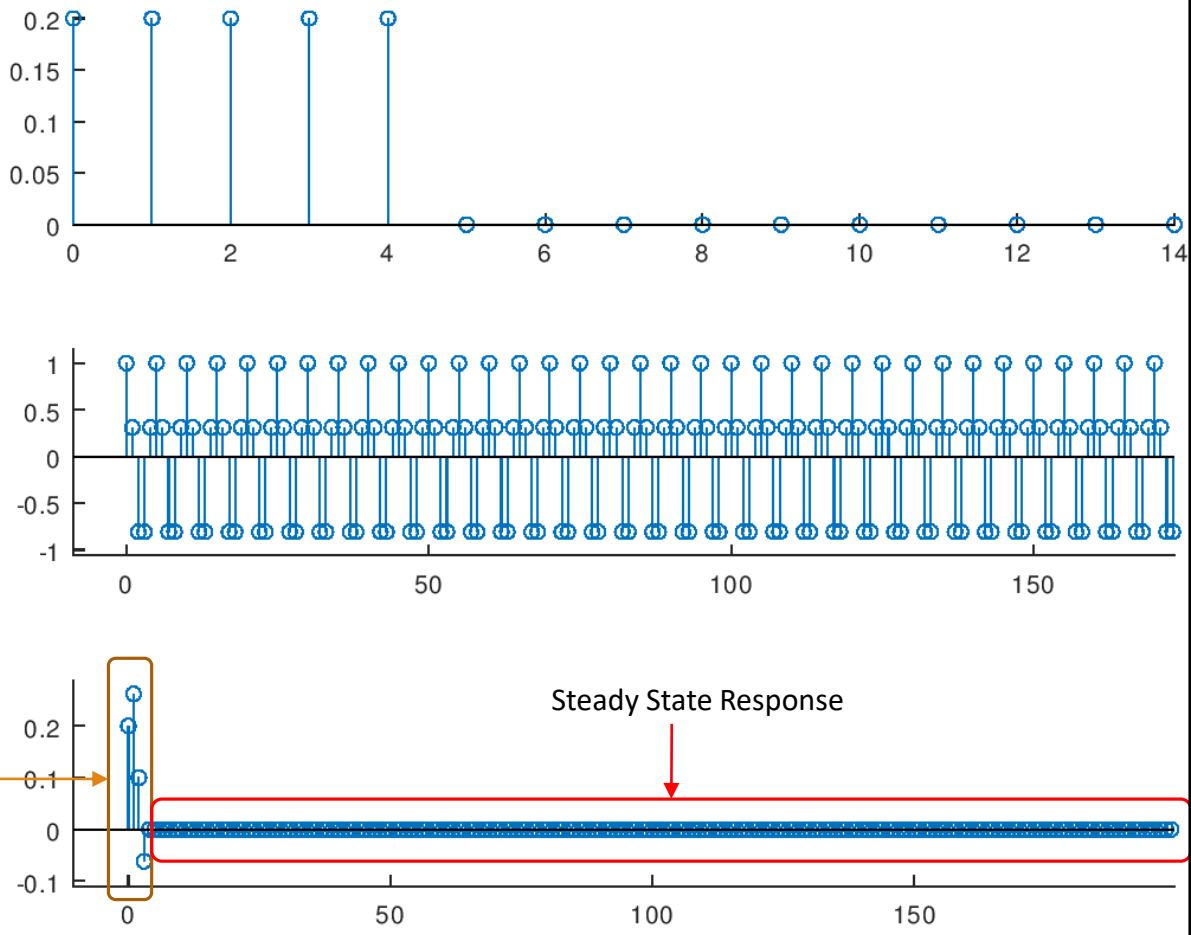
  με $M_1 = 0, M_2 = 4$.

  - Αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση μας ότι η έξοδος θα είναι μηδενική!

  - Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και την απόκριση σταθερής κατάστασης, αφού το ημίτονο ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

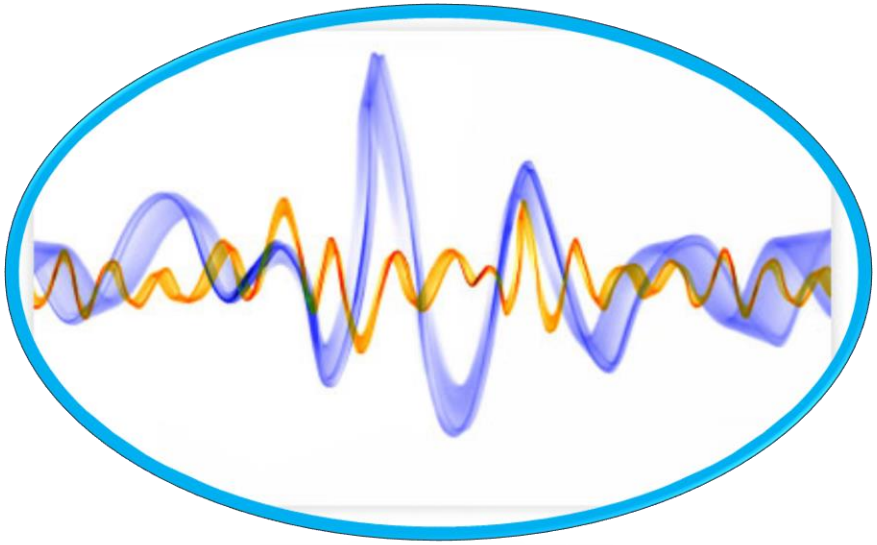
- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

```
% Impulse Response h[n]
M1 = 0;
M2 = 4;
h = 1/(M1 + M2 + 1).*ones(1, M2+1);
h = [h zeros(1,10)];
nh = 0:14;

% Input signal x[n]
omega0 = 2*pi/5;
nx = 0:1000;
x = cos(omega0.*nx);

% Convolution
y = conv(h,x);
ny = [0:1014];

% Plots
subplot(311); stem(nh, h);
subplot(312); stem(nx, x);
subplot(313); stem(ny, y);
```



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

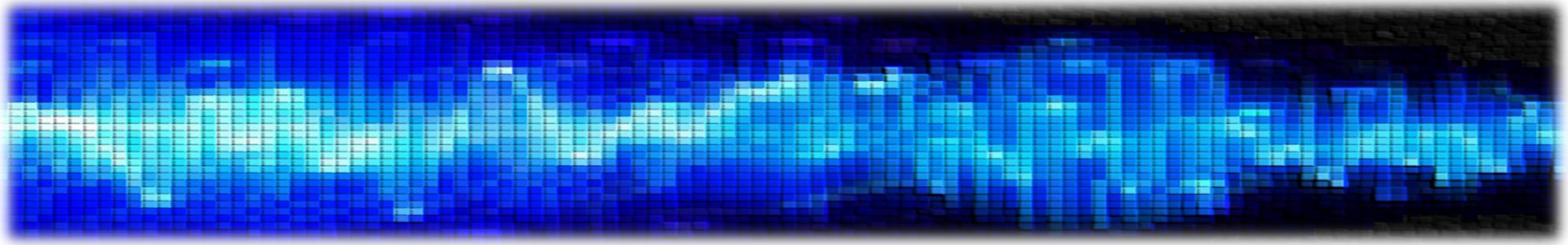
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η



- Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Προς το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου…**

  - Είδαμε με λεπτομέρεια πως επηρεάζει ένα ΓΧΑ σύστημα ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ή ένα ημίτονο) συχνότητας ω_0 που εμφανίζεται στην είσοδό του
    - Το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$
    - Στη φάση της εισόδου προστίθεται μια σταθερά $\varphi_H(e^{j\omega_0})$

  - Όμως τα περισσότερα σήματα που μας ενδιαφέρουν δεν έχουν τη μορφή ενός μιγαδικού εκθετικού (ή ημιτονοειδούς) σήματος

  - Η ανάλυση που κάναμε θα μας ήταν **πολύ** χρήσιμη αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση κάποιων μιγαδικών εκθετικών σημάτων που το καθένα θα έχει κάποια συγκεκριμένη συχνότητα
    - Τότε θα γνωρίζαμε πως επηρεάζεται κάθε συχνότητα από το ΓΧΑ σύστημα

  - Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! ☺

  - Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται – έκπληξη! ☺ – **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

  - Μια πιο εύλογη εξαγωγή του DTFT προέρχεται από τις Σειρές Fourier διακριτού χρόνου, ευθέως ανάλογα με την εξαγωγή του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από τις Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου

  - Θα παραλείψουμε εδώ αυτήν την παρουσίαση και θα δώσουμε απευθείας τον ορισμό

  - Ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ' αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους (Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης (Phase Spectrum)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

  - Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

  - Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν *συνεχείς τιμές* στο $(-\pi, \pi]$, και "υπάρχουν" μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.

2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να *συνθέσει* το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών *όλων* των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι πραγματικό, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*(e^{j\omega})$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x(e^{-j\omega})$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα [0, π] !!!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη**

  - Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

  - Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος

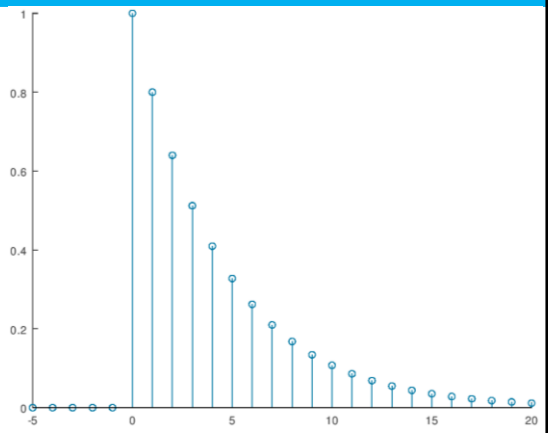
  - Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η *μέση τετραγωνική σύγκλιση*

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1.$



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}},\ |a e^{-j\omega}| < 1 \Leftarrow |a||e^{-j\omega}| \Leftarrow |a| < 1. \checkmark$$

Άρα

$$x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \frac{1}{1-b},\quad |b| < 1$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right| = \frac{1}{|1-ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{|\underbrace{1-a\cos\omega}_{Re} + j\underbrace{a\sin\omega}_{Im}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + \underbrace{a^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega}_{a^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + a^2}}, \quad |a|<1.$$

$$\varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \quad (1). \quad \text{Είναι} \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{1-ae^{j\omega}}{|1-ae^{-j\omega}|^2} = \frac{1-a\cos\omega - ja\sin\omega}{|1-ae^{-j\omega}|^2} = \underbrace{\frac{1-a\cos\omega}{|1-ae^{-j\omega}|^2}}_{X_R(e^{j\omega})} + j\underbrace{\frac{(-a\sin\omega)}{|1-ae^{-j\omega}|^2}}_{X_I(e^{j\omega})}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

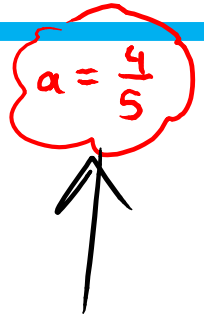
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

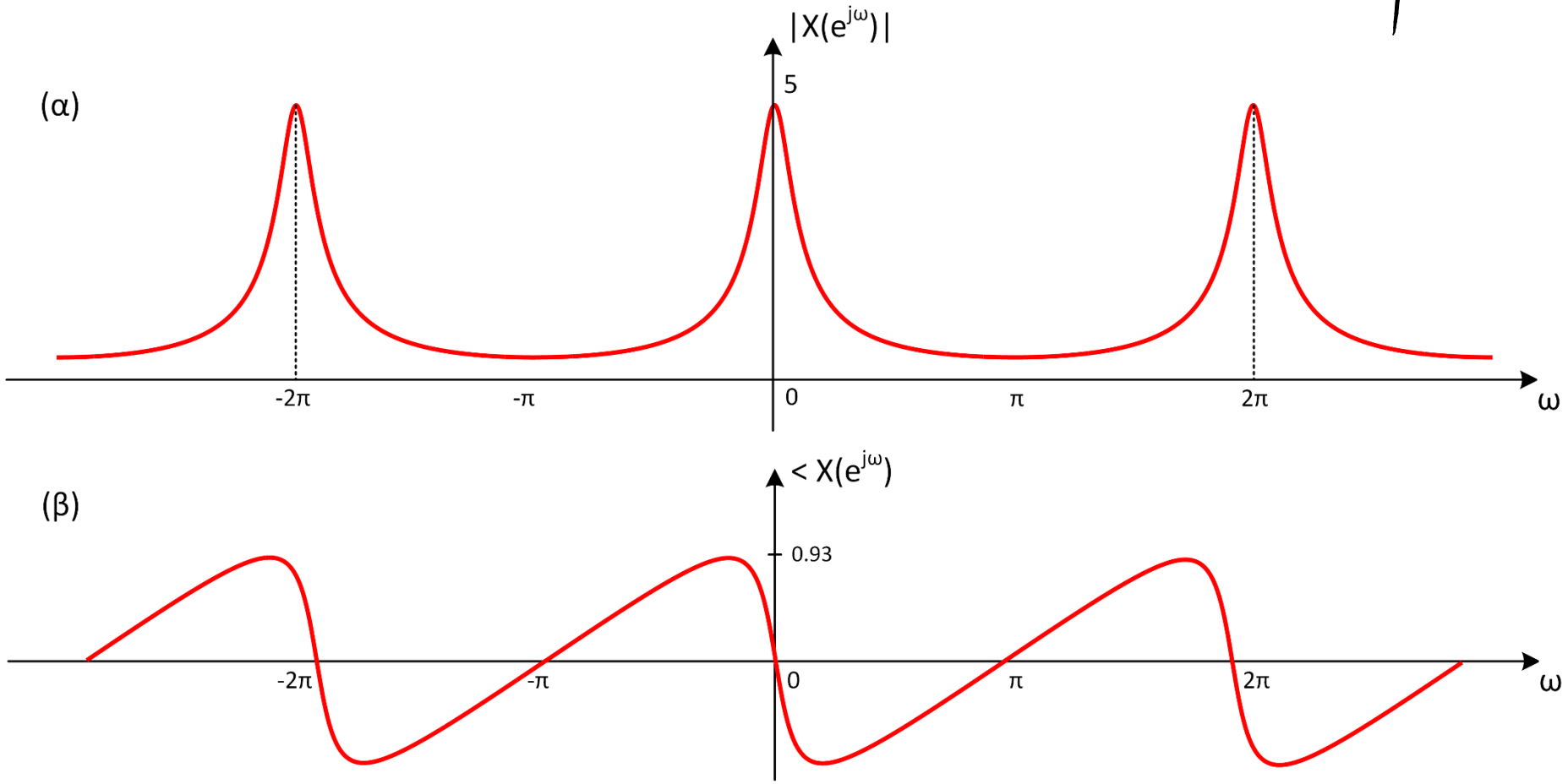
Άρα $$\varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{(-a\sin\omega)}{1-a\cos\omega} = \tan^{-1}\left[-\frac{a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}\right]$$

$$= -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\,, \quad |a|>1\,,$$

αφού $$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x).$$

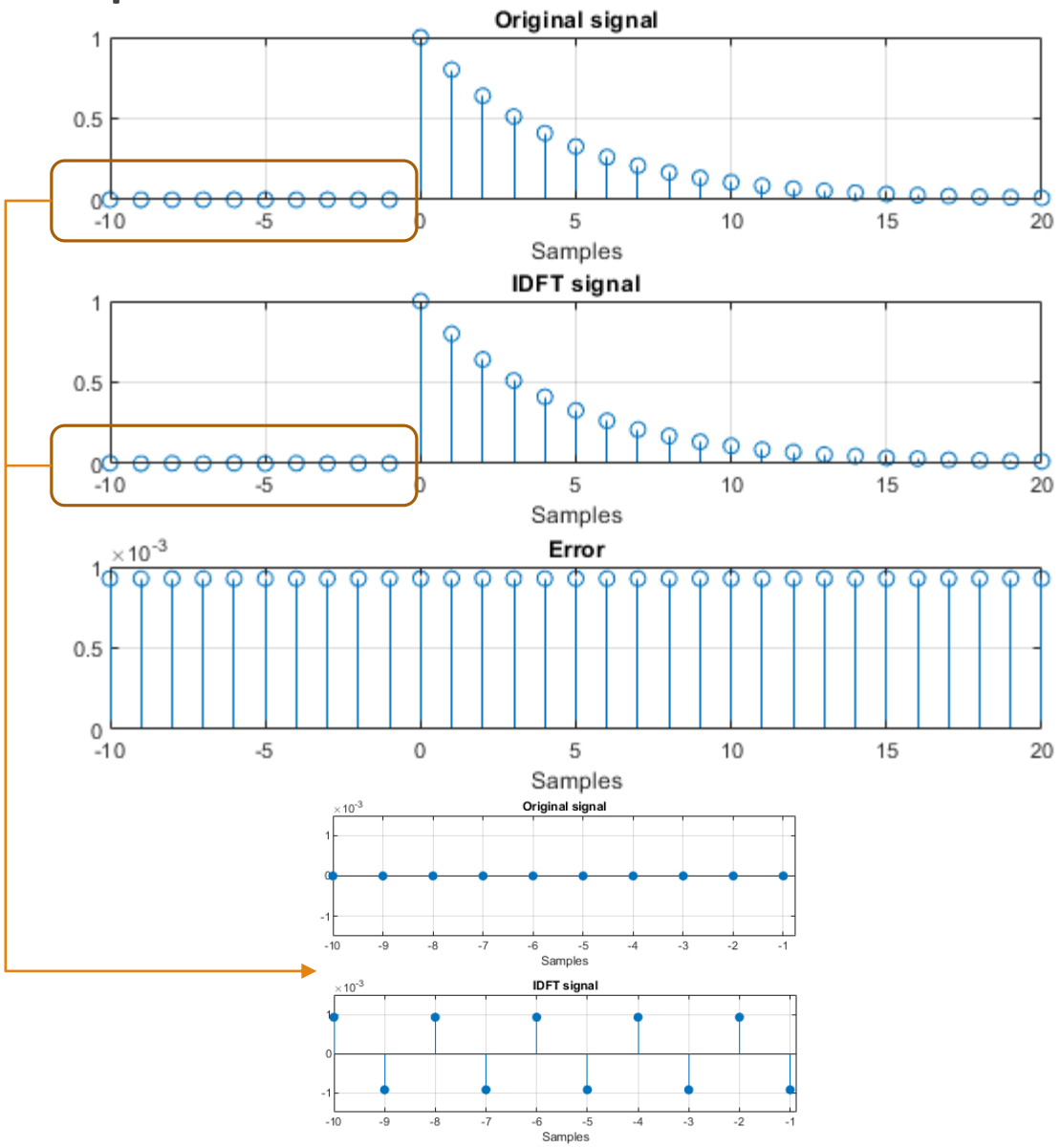
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:



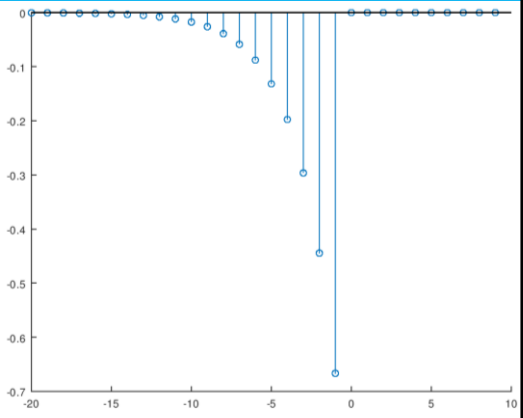


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8;
n = [-10:-1 0 1:20];
x = [zeros(1,10) alpha.^n(11:31)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1],\ |a| > 1.$



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \underbrace{u[-n-1]}_{1,\ n \le -1} e^{-j\omega n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(a e^{-j\omega}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^n$$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^{-n}$$

$$= -\frac{\left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} = -\frac{a^{-1} e^{j\omega}}{1 - a^{-1} e^{j\omega}}$$

$$= -\frac{a^{-1} e^{j\omega} \cdot a\, e^{-j\omega}}{\left(1 - a^{-1} e^{j\omega}\right) a\, e^{-j\omega}} = \frac{1}{-\left(a e^{-j\omega} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}},\ |a| > 1$$

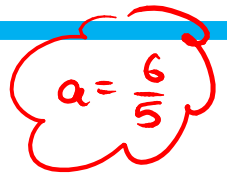
$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} b^n = \frac{b^{N_1}}{1-b},\quad |b| < 1$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}, \quad |a|>1$$

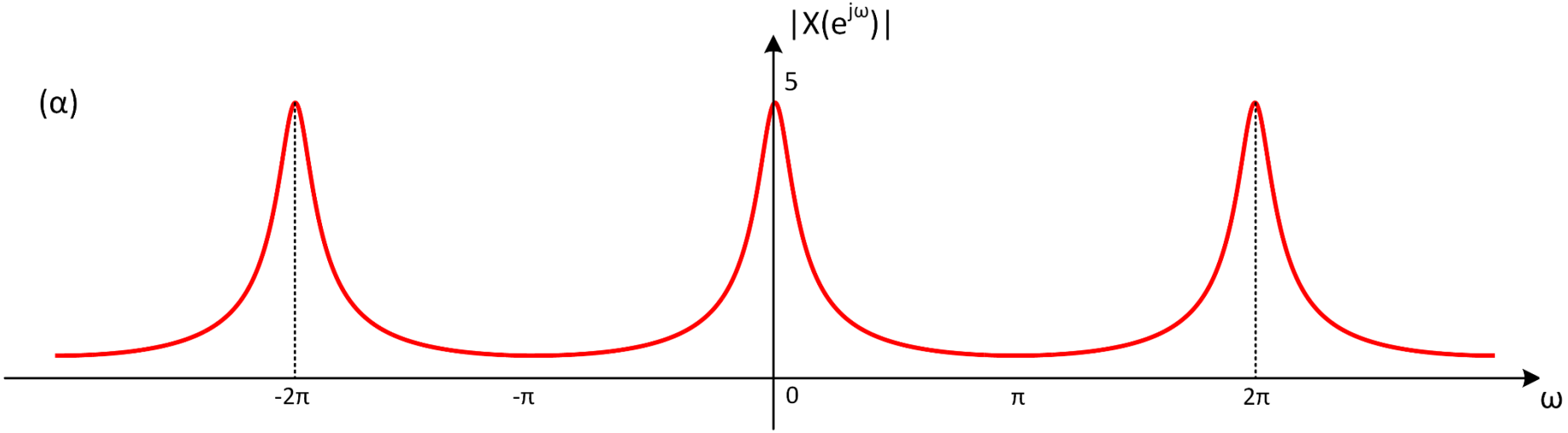
$$\varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{(-a\sin\omega)}{1-a\cos\omega}, \quad |a|>1$$

$$= -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}, \quad |a|>1.$$

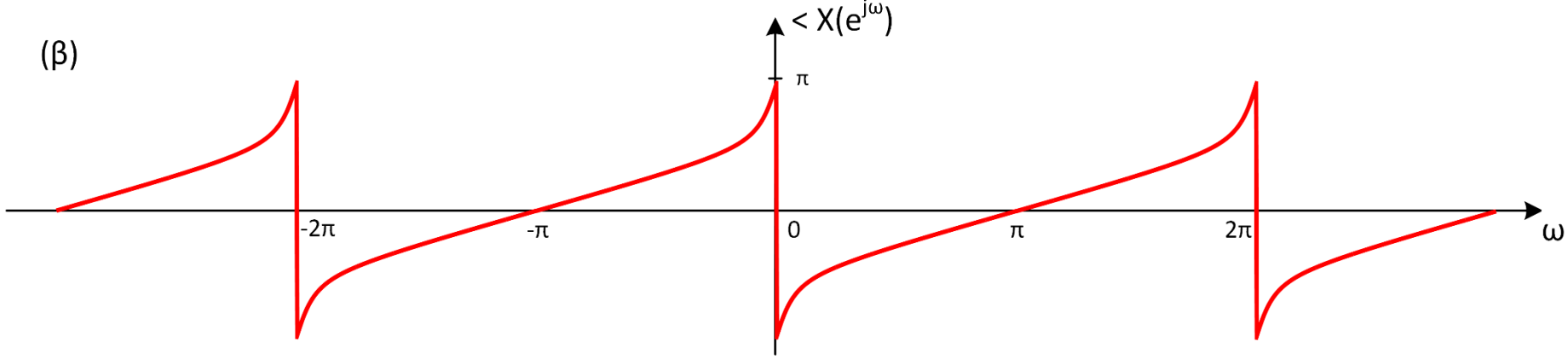


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

(α)



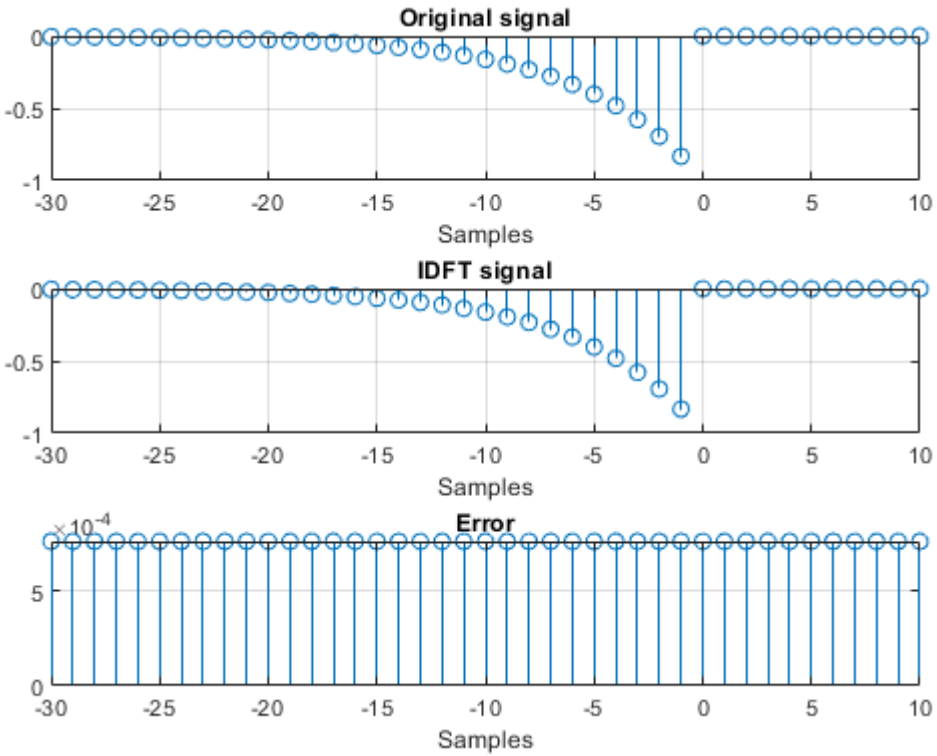
(β)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5;
n = [-30:-1 0 1:10];
x = [-alpha.^n(1:30) zeros(1,11)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```

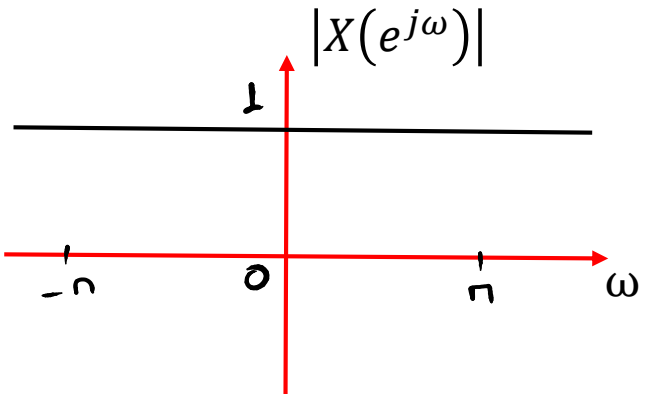


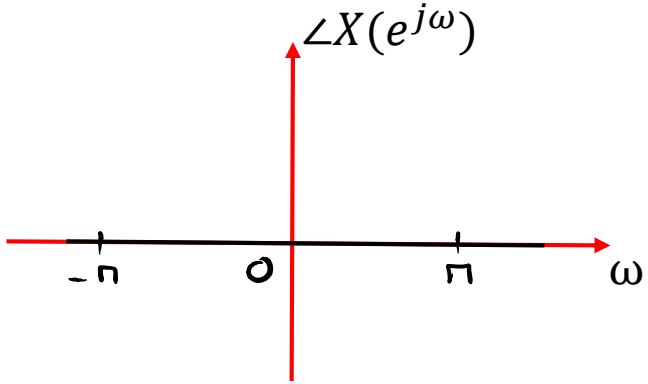
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \delta[0] \cdot e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$

Άρα $x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 1 \quad \forall\ \omega$

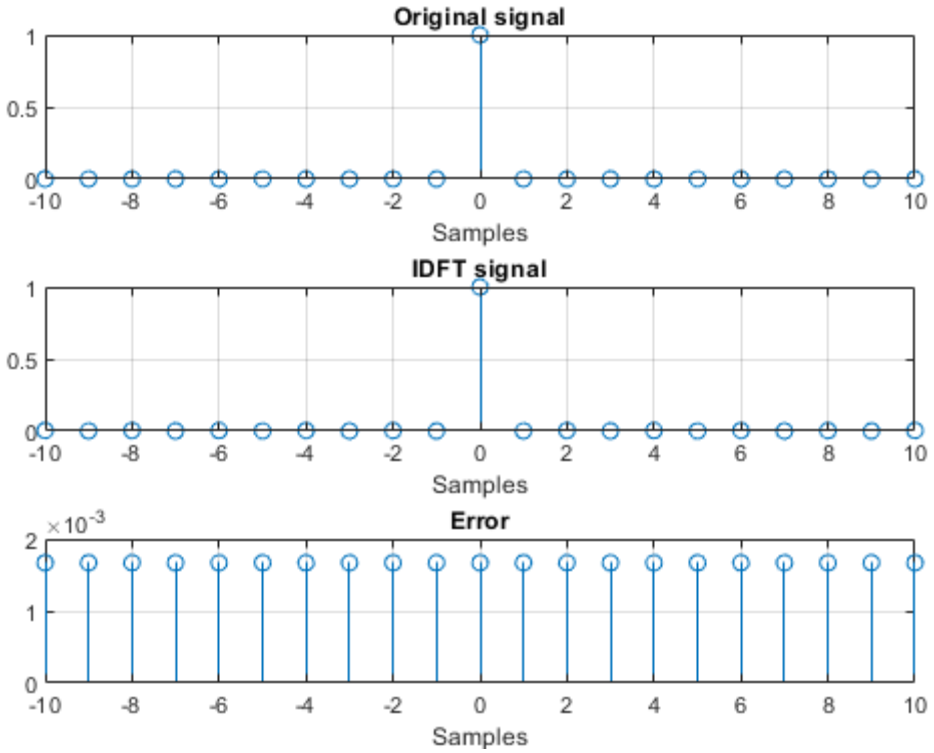




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

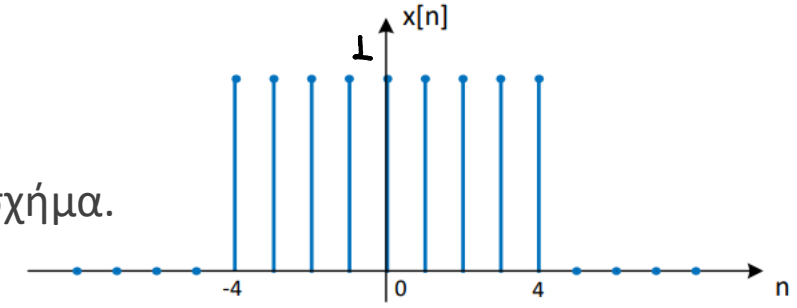
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,10) 1 zeros(1,10)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = 1 για κάθε ω
X = ones(size(w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

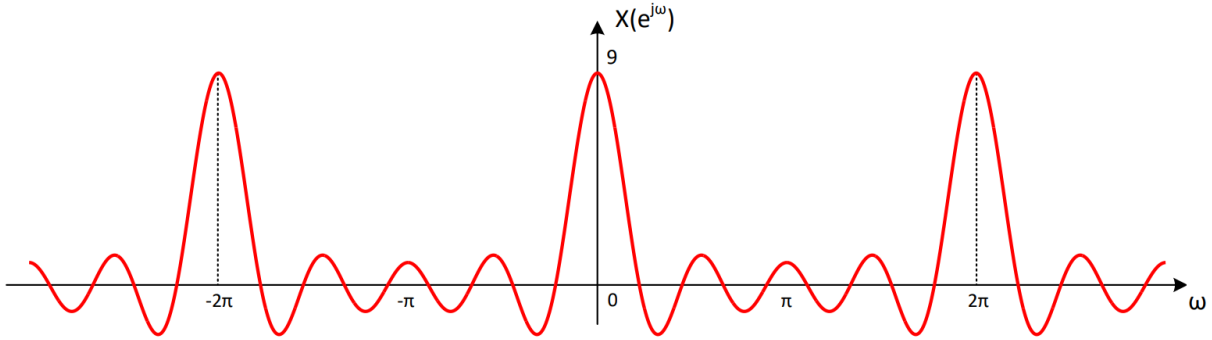


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega(-4)} - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{j4\omega} - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j9\omega/2} - e^{-j9\omega/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{2j\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

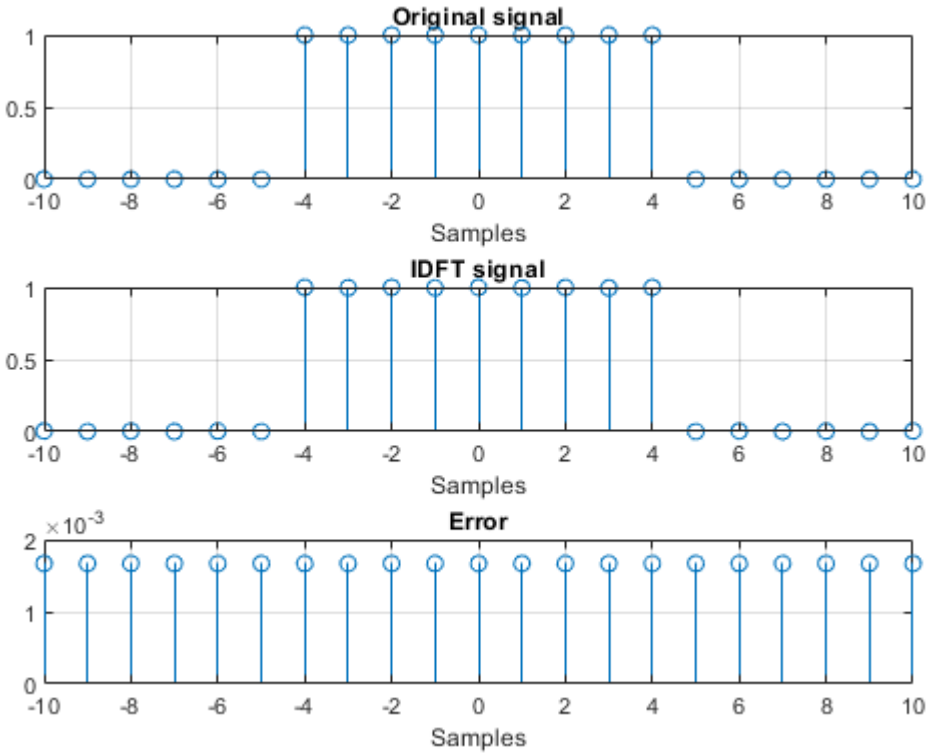
$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

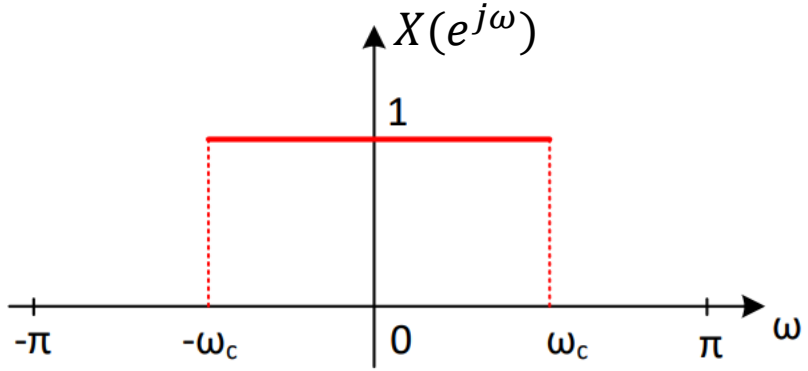
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,6) ones(1,9) zeros(1,6)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = sin(9ω/2)/sin(ω/2)
% για κάθε ω
X = sin(9*w/2)./sin(w/2);

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

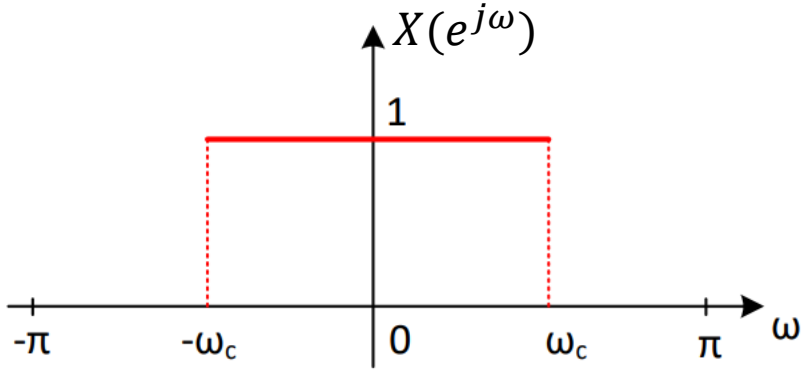
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\cdot e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}e^{j\omega n}\Big]_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$= \frac{1}{j2\pi n}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{j2\pi n}\,2j\sin(\omega_c n)$$

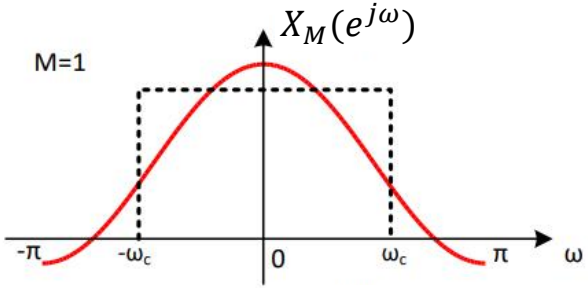
$$= \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n),\quad -\infty < n < +\infty\ (!)$$

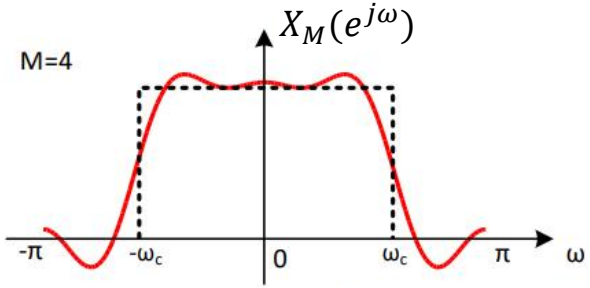
Άρα $$x[n] = \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

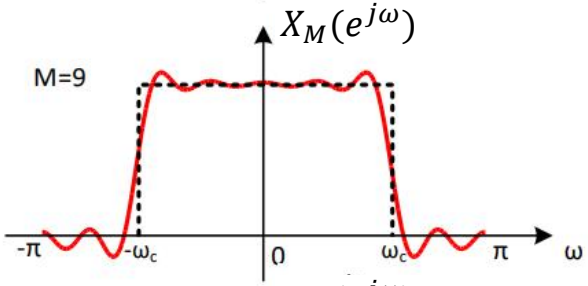
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

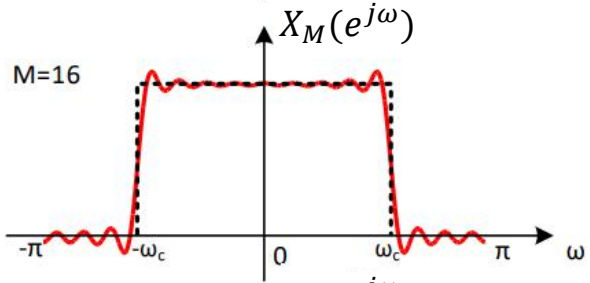


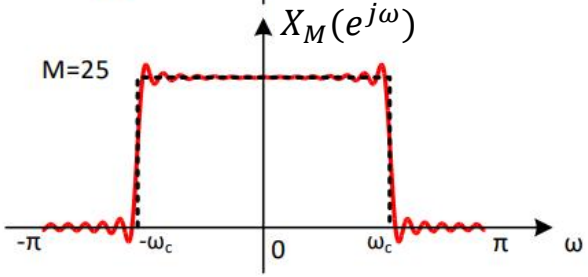
Αν υλοποιήσαμε 2M+1 δείγματα του $x[n] = \sin(\omega_c n)/\pi n$:

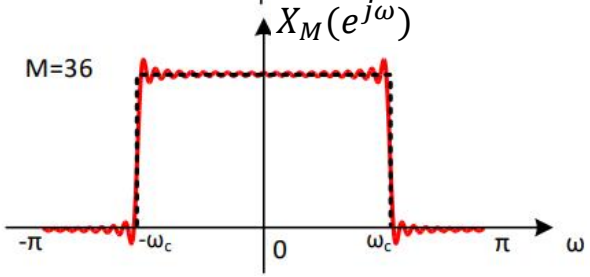








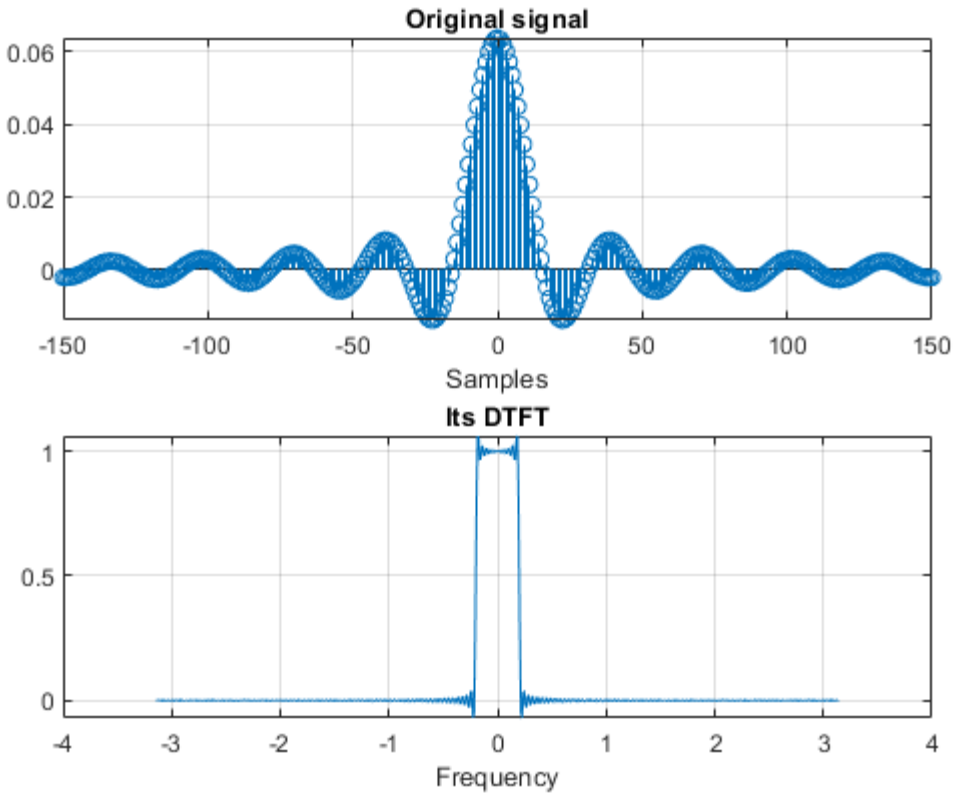




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-150:150];
wc = 0.2;
x = sin(wc*n)./(pi*n);
% Ρύθμιση απροσδιοριστίας
x(151) = wc/pi;

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);

% Σύνθεση του X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = zeros(size(w));

for i = 1:length(n)
    X_syn = X_syn + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X_syn);
title('Its DTFT'); xlabel('Frequency'); grid;
```



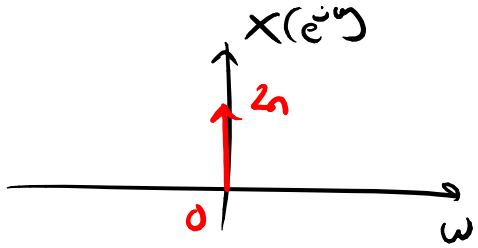
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = 1$.

Θα δείξαμε ότι $x[n] = 1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$

Είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega = e^{j\omega n}\Big]_{\omega=0} = 1$$



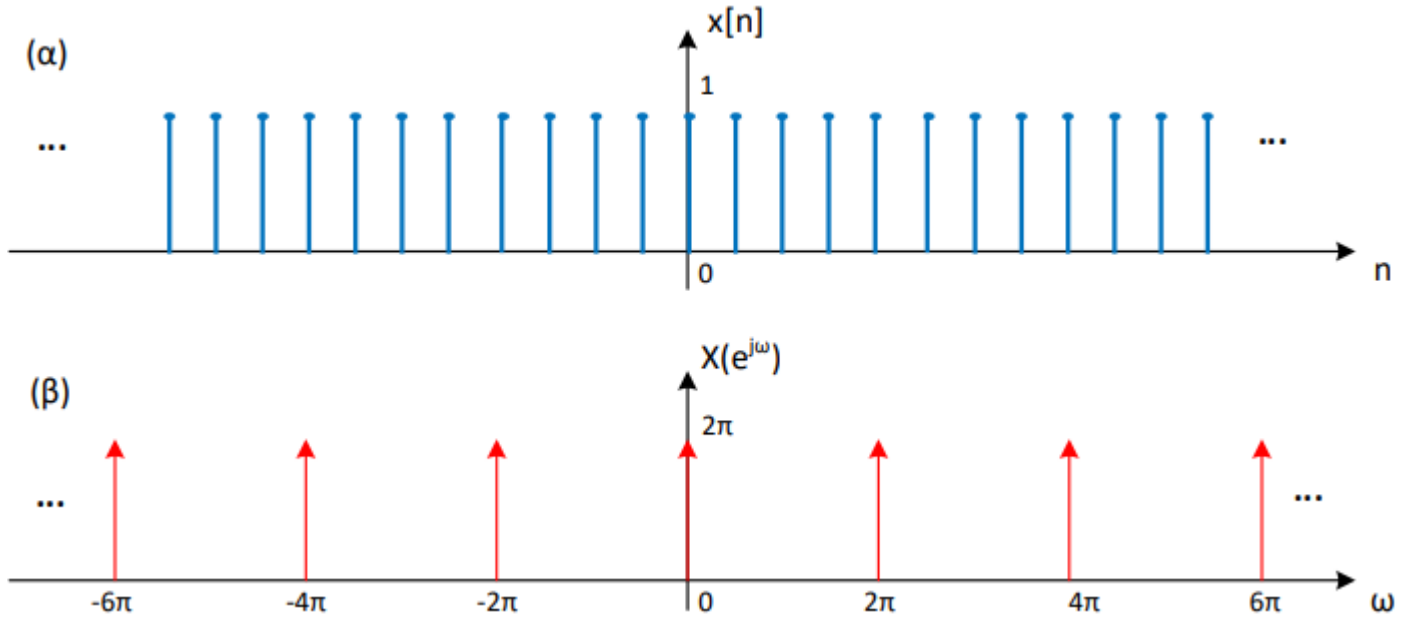
Άρα

$$x[n] = 1 \ \forall n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)\,dx = f(x_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Το σήμα στο χρόνο $x[n]=1$ και ο DTFT του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \ \forall\, n, \ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

Θα δείξουμε ότι $x[n] = e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$

Είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega = e^{j\omega n}\Big]_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n}.$$

Άρα $x[n] = e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\, f(x)\, dx = f(x_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)\,, \quad \forall\, n,\ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\cos(\omega_0 n + \varphi)\, e^{-j\omega n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\varphi} e^{-j\omega n}}_{\mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \varphi)}\right\}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega n}}_{\mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}\right\}}$$

Από προηγ. παράδειγμα:

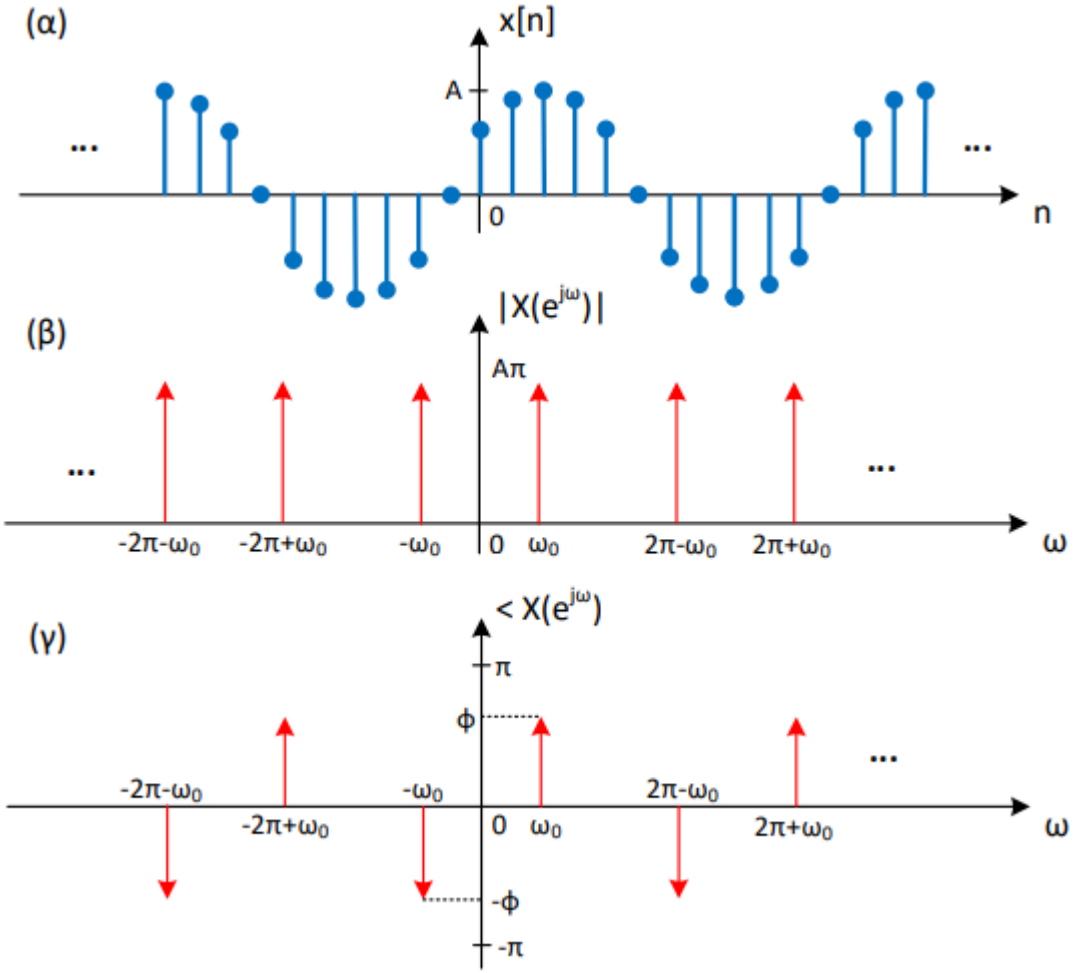
$$X(e^{j\omega}) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$= A\pi e^{j\varphi}\delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi}\delta(\omega + \omega_0)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Το σήμα στο χρόνο, το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

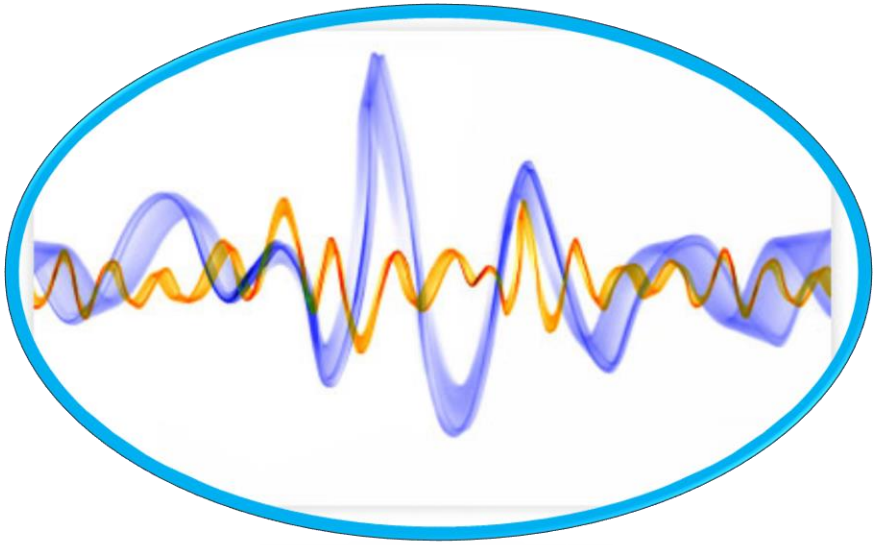
Για να δούμε το DTFT στο διάστημα $(-\pi,\pi]$, θέσαμε $k=0$ όπου χρειάζεται στις διπλανές σχέσεις.

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n\sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \lvert r\rvert<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$
$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}-j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

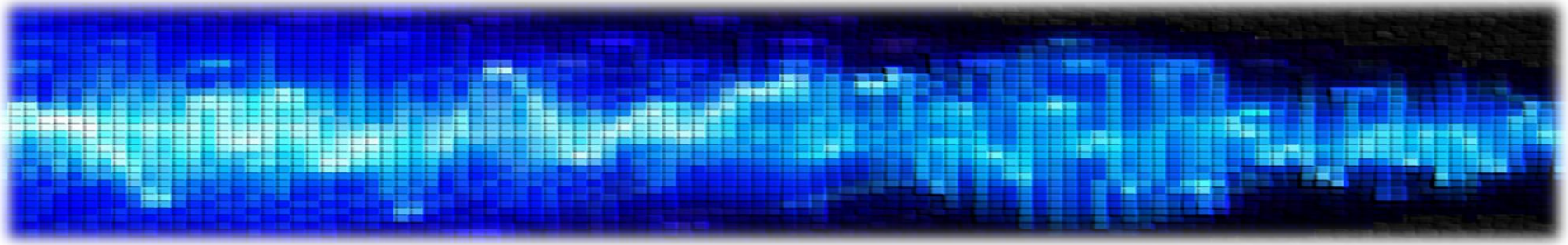
Τέλος Διάλεξης



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

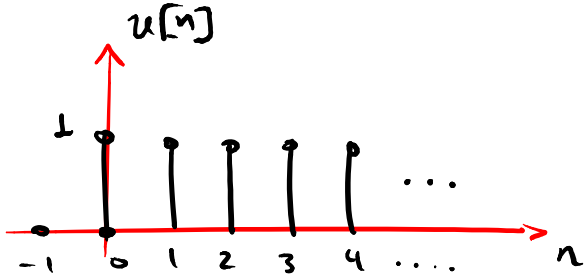
ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η



- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ιδιότητες

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.

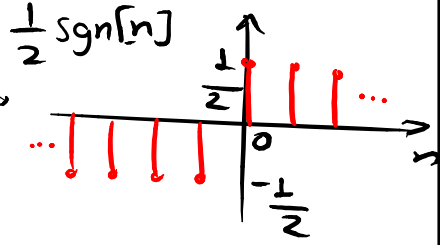


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega})^n$$

sign function

Μπορούμε να γράψουμε ότι $u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]$

$$\mathrm{sgn}[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$



Αν βρούμε το DTFT του παραπάνω έχουμε:

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\right\}$$

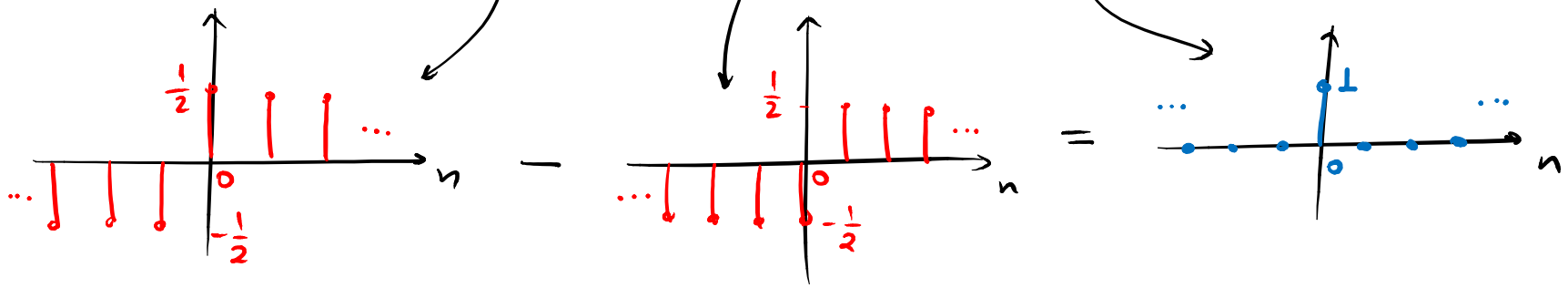
$$= \pi\delta(\omega) + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\right\} \quad (1)$$

Άρα πρέπει να βρούμε το $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\right\}$!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2}\text{sgn}[n] - \frac{1}{2}\text{sgn}[n-1] = \delta[n]$



$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\text{sgn}[n] - \frac{1}{2}\text{sgn}[n-1]\right\} = \mathcal{F}\{\delta[n]\} = 1$$

$$\mathcal{F}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}\text{sgn}[n]}_{w[n]}\right\} - \mathcal{F}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}\text{sgn}[n-1]}_{w[n-1]}\right\} = 1$$

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]e^{-j\omega n}}_{W(e^{j\omega})} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n-1]e^{-j\omega n}}_{e^{-j\omega}W(e^{j\omega})} = 1$$

$$W(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}W(e^{j\omega}) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n-1]e^{-j\omega n}$$

Θέτω $k = n-1 \Rightarrow n = k+1$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} w[k]e^{-j\omega(k+1)} = e^{-j\omega\cdot 1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} w[k]e^{-j\omega k} = W(e^{j\omega})$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Άρα $W(e^{j\omega})\left[1 - e^{-j\omega}\right] = 1 \Longrightarrow W(e^{j\omega}) = F\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\right\} =$

$= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$. ②

Η ① $\overset{②}{\Longrightarrow}$ $F\{u[n]\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$.

Οπότε

$$u[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	**Μετασχ. Fourier**
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \|a\|>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\|n\|},\ \|a\|<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n\sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \|r\|<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \|\omega\|<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\|\omega\|\le\pi\end{cases}$
$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}-j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$k-$οστή παραγώγιση στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\frac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{j\omega}}X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert, \\ \phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n] = x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n] = -x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n] = \mathrm{Ev}\{x[n]\}$, πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n] = \mathrm{Od}\{x[n]\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα

Έστω $w[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow W(e^{j\omega}) = ?$

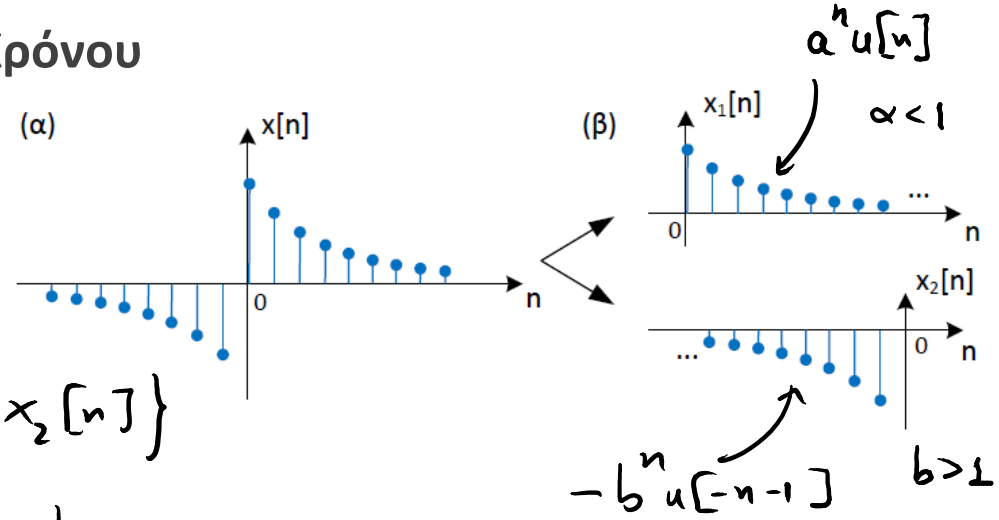
$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(ax_1[n] + bx_2[n] \right) e^{-j\omega n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_1[n] e^{-j\omega n}}_{aX_1(e^{j\omega})} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} bx_2[n] e^{-j\omega n}}_{bX_2(e^{j\omega})}$$

$$= aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα
    - Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



Έχουμε $X(e^{j\omega}) = F\{x_1[n]\} + F\{x_2[n]\}$

$= F\{a^n u[n]\} + F\{-b^n u[-n-1]\}$

$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-be^{-j\omega}}$

$= \frac{1-be^{-j\omega}+1-ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})} = \frac{2-(a+b)e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Είναι $Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[\underbrace{n-n_0}_{k}] e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega(k+n_0)}$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k} \right)}_{X(e^{j\omega})} e^{-j\omega n_0}$$

$$= X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}$$

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \cdot |e^{-j\omega n_0}| = |X(e^{j\omega})|$$

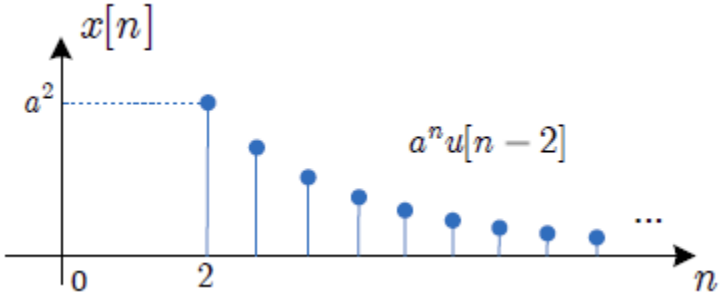
φάσμα πλάτους

$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) - \omega n_0$$

φάσμα φάσης

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση
    - Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



Ξέραμε ότι $\underbrace{a^n u[n]}_{y[n]} \xleftrightarrow{F} \underbrace{\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}_{Y(e^{j\omega})}$, $|a|<1$

Είναι $\underline{y[n-2]} = a^{n-2}u[n-2] = a^{-2}\left(a^n u[n-2]\right) = \underline{a^{-2}x[n]}$

$\updownarrow F$

$$Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} = a^{-2}X(e^{j\omega})$$

$$\frac{e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}} = a^{-2}X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^2 e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}}.$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$y[n] \qquad\qquad Y(e^{j\omega})$$

Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n}x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$

$$= X(e^{j(\omega-\omega_0)}).$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα
    - Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ αν

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \xleftrightarrow{F^{-1}} x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

Ζητάμε το $y[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\underbrace{\pi}_{\omega_0})}) \xleftrightarrow{F} e^{j\pi n} x[n]$

Ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα:

$$y[n] = e^{j\pi n} x[n] = (e^{j\pi})^n x[n] = (-1)^n x[n]$$

Είδαμε ότι $x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$, άρα:

$$y[n] = (-1)^n \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}.$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[kn],\ k \in Q \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\frac{\omega}{k}})$$

Δείτε την απόδειξη στις σημειώσεις.

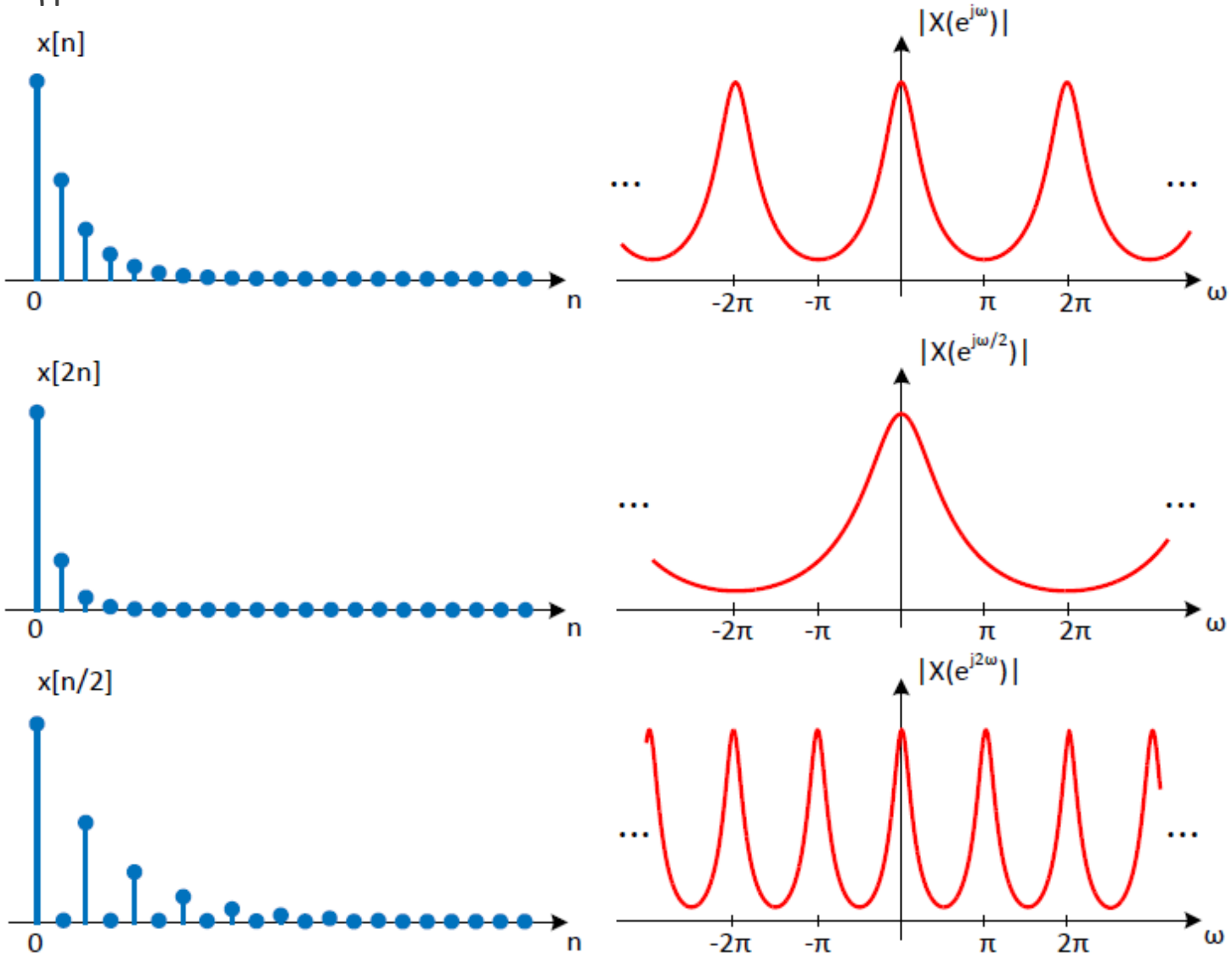
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο
    - Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x\left[\frac{n}{2}\right]$, αν $x[n] = a^n u[n], \ \ |a| < 1$

Είναι $x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} a^{\frac{n}{2}} u\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ άρτιος} \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\omega}}$

$$Y(e^{j\omega}) = F\left\{x\left[\frac{n}{2}\right]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{n}{2}\right] e^{-j\omega n} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ άρτιος}}}^{+\infty} a^{\frac{n}{2}} \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} \quad \left(\text{Θέτω } k = \frac{n}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{-j\omega 2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a e^{-j2\omega}\right)^k = \frac{1}{1 - a e^{-j2\omega}}.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$$

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

Απόδειξη στις σημειώσεις

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

Υπολογίστε τη συνέλιξη $a^n u[n] * b^n u[n]$, $|a|<1$, $|b|<1$.

Μπορείτε να δείξετε ότι $c_{ab}[n] = b^n \dfrac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}} u[n]$.

Έχουμε:

$x[n]$: $a^n u[n]$, $|a|<1$ $\xleftrightarrow{F}$ $\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ $\quad X(e^{j\omega})$

$y[n]$: $b^n u[n]$, $|b|<1$ $\xleftrightarrow{F}$ $\dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}$ $\quad Y(e^{j\omega})$

$\Rightarrow C_{ab}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

Θέτω $u = e^{-j\omega}$, οπότε $C_{ab}(u) = \dfrac{1}{(1-au)(1-bu)}$

$$= \frac{A}{1-au} + \frac{B}{1-bu} \cdot (1)$$

$$A = C_{ab}(u)(1-au)\Big]_{u=\frac{1}{a}} = \frac{(1-au)}{(1-au)(1-bu)}\Big]_{u=\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-bu}\Big]_{u=\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-\frac{b}{a}}$$

$$B = C_{ab}(u)(1-bu)\Big]_{u=\frac{1}{b}} = \frac{(1-bu)}{(1-au)(1-bu)}\Big]_{u=\frac{1}{b}} = \frac{1}{1-au}\Big]_{u=\frac{1}{b}} = \frac{1}{1-\frac{a}{b}}$$

Άρα $C_{ab}(e^{j\omega}) \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{1-\frac{b}{a}} \cdot \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \dfrac{1}{1-\frac{a}{b}} \cdot \dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}$ $\xrightarrow{F^{-1}}$

$\xrightarrow{F^{-1}}$ $C_{ab}[n] = \dfrac{1}{1-\frac{b}{a}} a^n u[n] + \dfrac{1}{1-\frac{a}{b}} b^n u[n]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: θεώρημα Parseval

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = E_x$$

Έστω $x[n] = \delta[n]$ $\rightsquigarrow$ $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta^2[n] = 1^2 = 1$ ✓

Είδαμε ότι $X(e^{j\omega}) = 1 \ \forall \omega$

Άρα

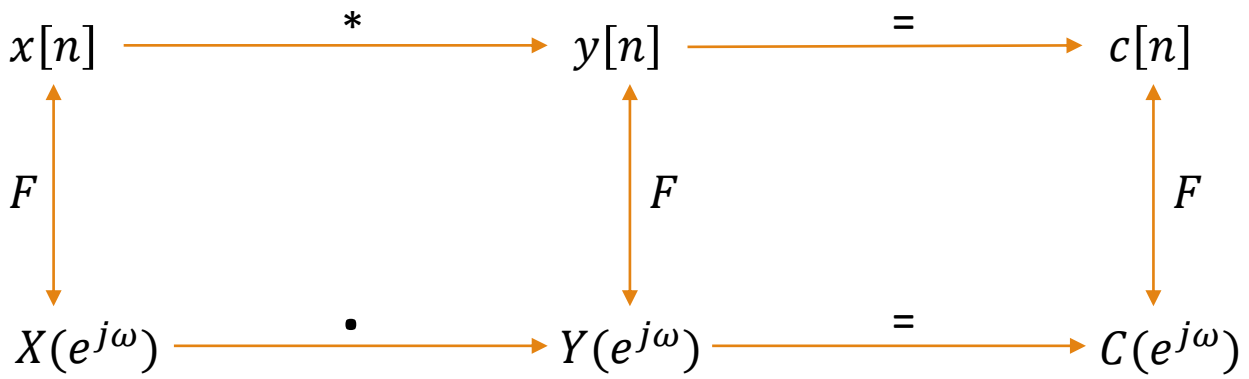
$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\omega\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi+\pi) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$ ✓

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

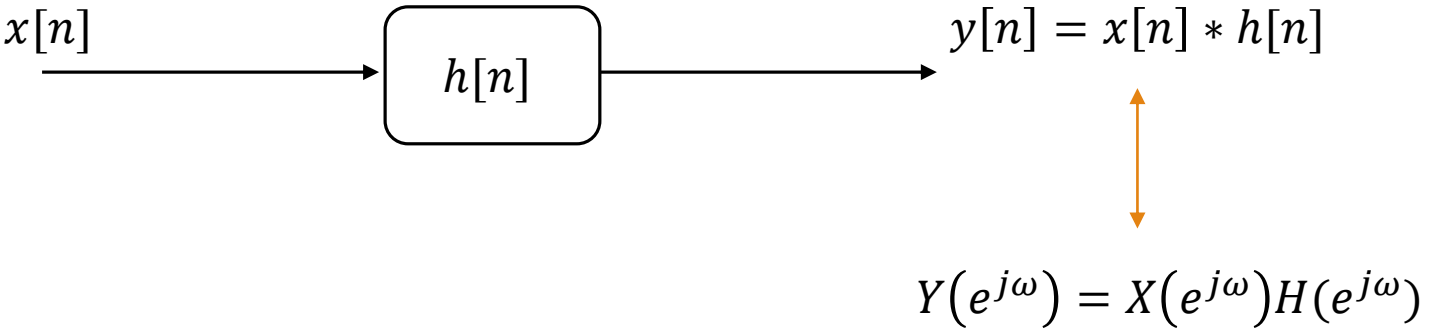
  - Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του DTFT είναι:



  - Αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$

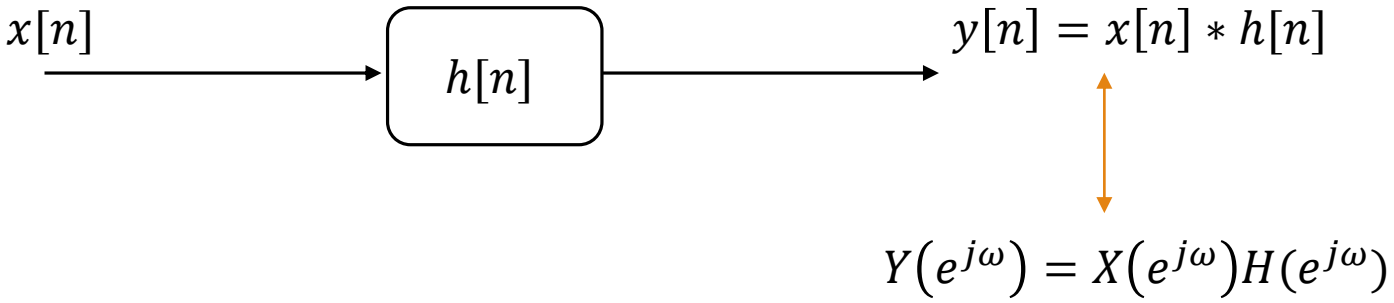


  - Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

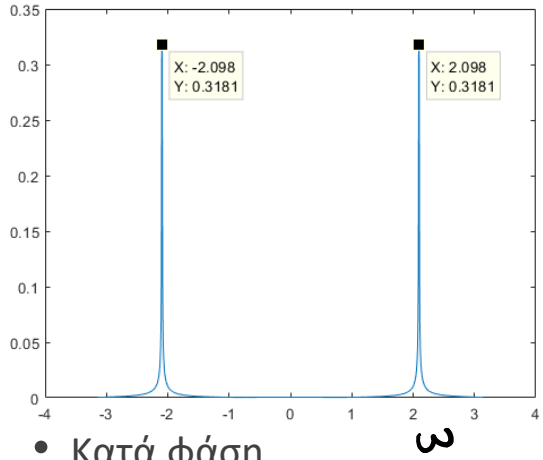
- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

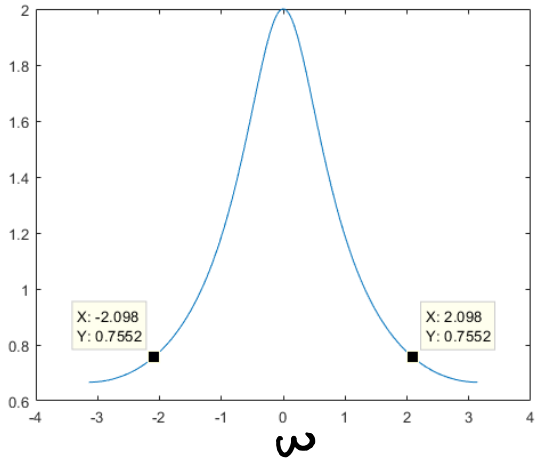
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

Είσοδος



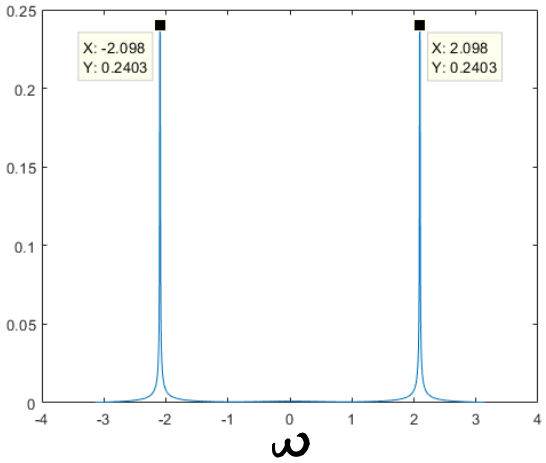
•

Σύστημα



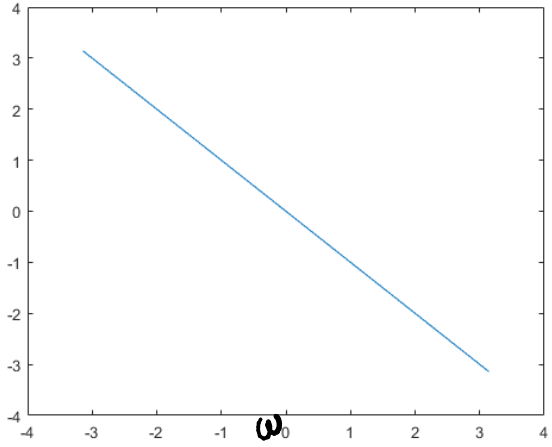
=

Έξοδος



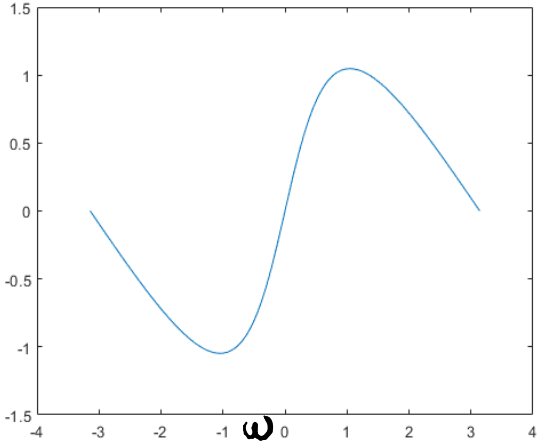
- Κατά φάση

Είσοδος



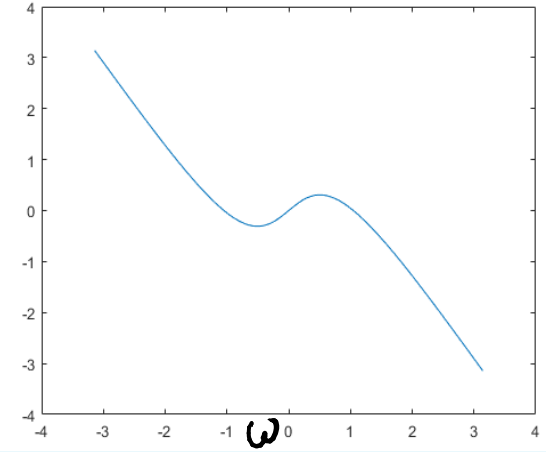
+

Σύστημα

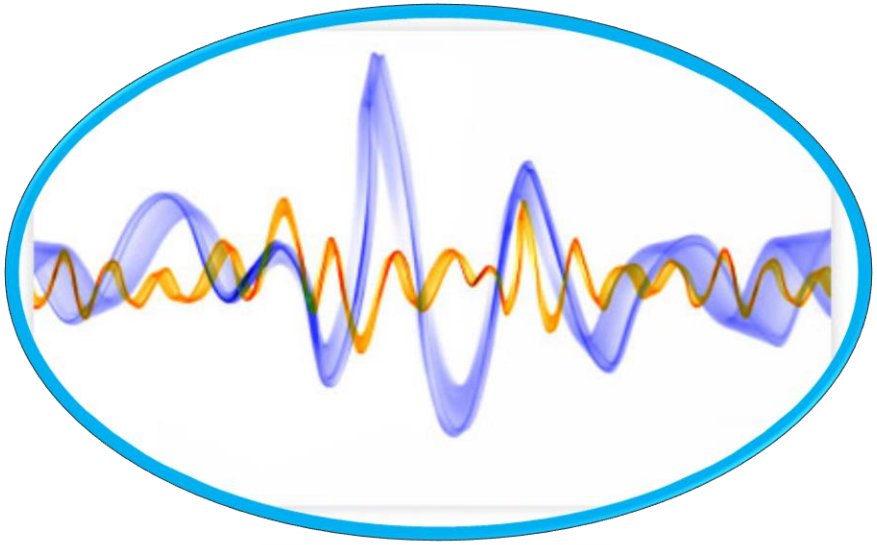


=

Έξοδος



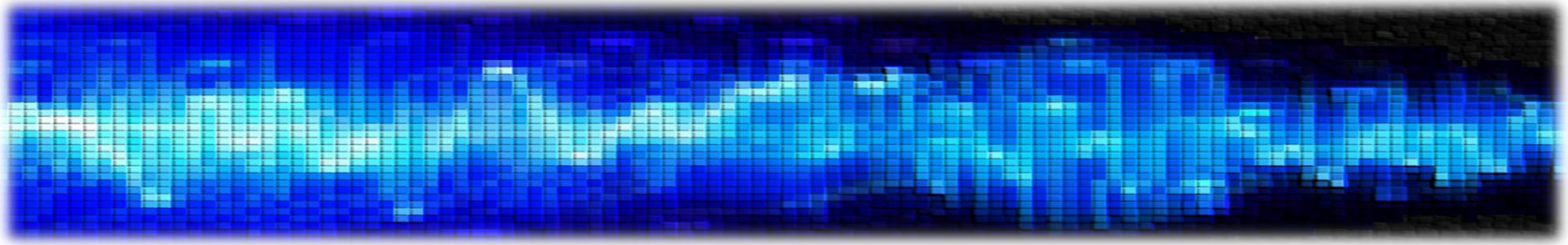
Συνεχίζεται... ☺



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

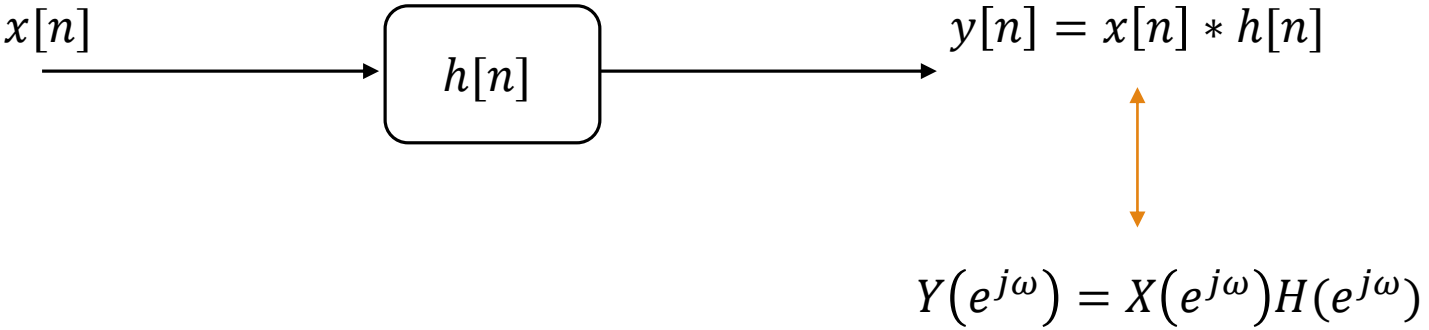
ΔΙΑΛΕΞΗ 9Η



- Συστήματα στο χώρο του Fourier

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$

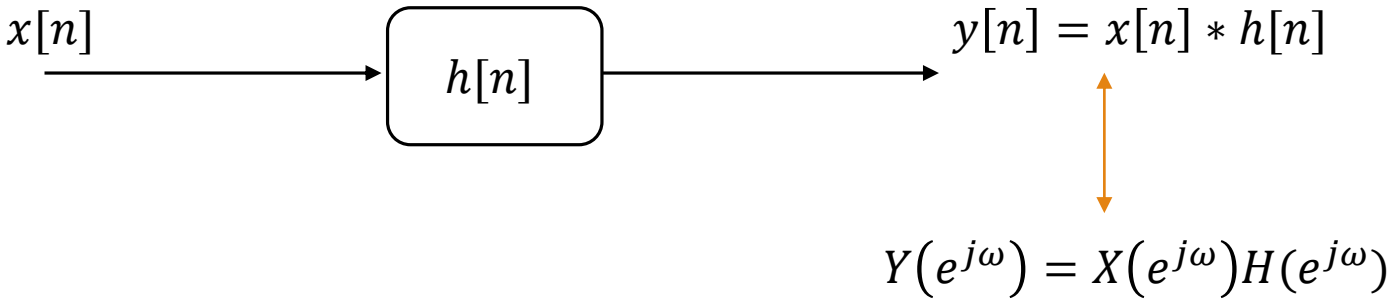


- Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

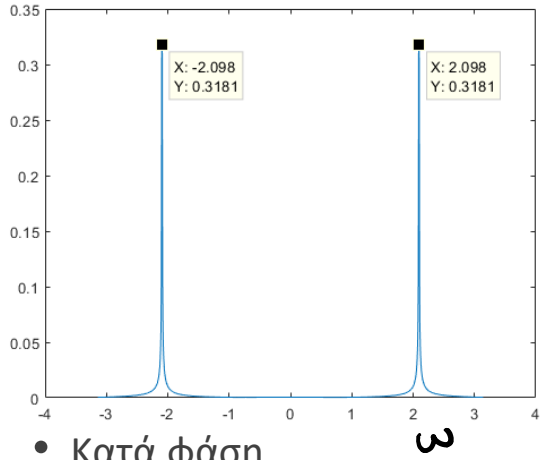
- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

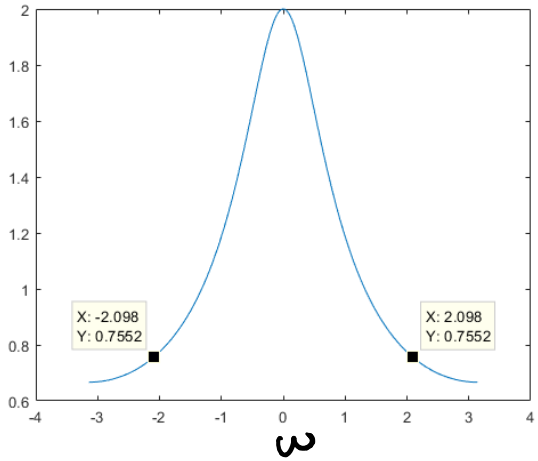
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

Είσοδος



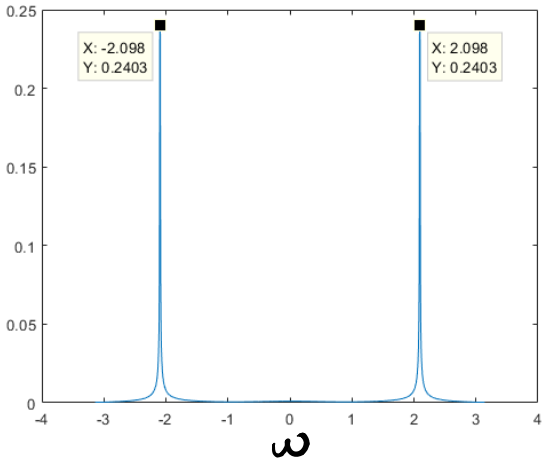
•

Σύστημα



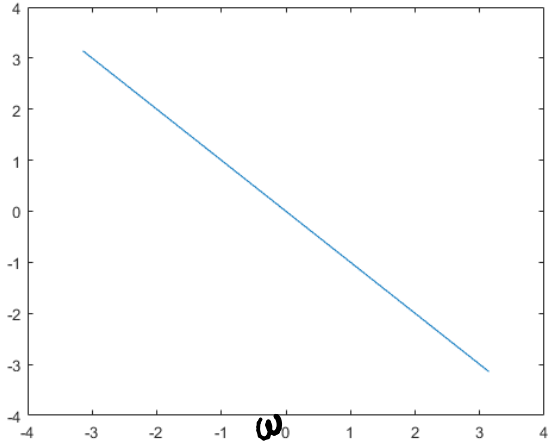
=

Έξοδος



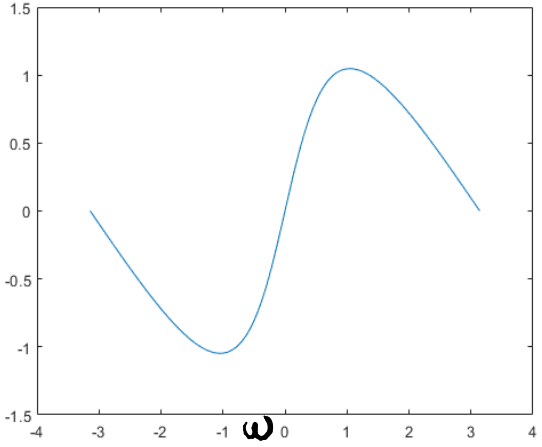
- Κατά φάση

Είσοδος



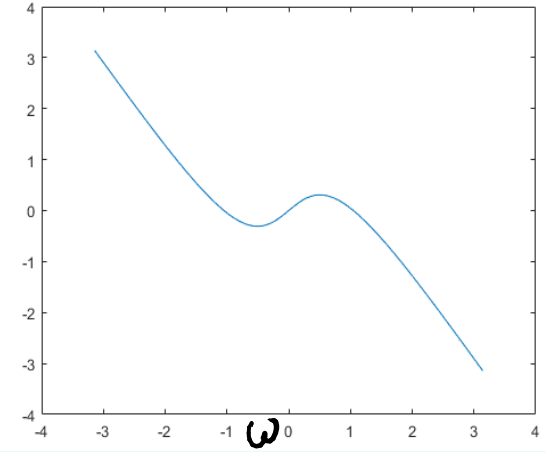
+

Σύστημα



=

Έξοδος



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

  - Η σχέση

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Πώς? Λύνοντας ως προς $H(e^{j\omega})$, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

  - Ας δούμε ένα παράδειγμα…

$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ Βρείτε την κρουστική απόκριση.

Είναι

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Οπότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{1-1/4\, e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{F^{-1}} h[n] \; ?$$

Είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} e^{-j\omega} \xleftrightarrow{F^{-1}} h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

  - Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}$$

  - Έτσι

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

Χρόνος: έστω $S_0 : y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$, θέτω $x[n] = \delta[n]$, τότε $y[n] = h_0[n]$, δηλ.

$$h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n]$$

Για $n=0$: $h_0[0] - \frac{1}{2}h_0[-1] = \delta[0] = 1 \Leftrightarrow \boxed{h_0[0] = 1}$ ($h_0[-1] = 0$)

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma - \frac{1}{2} \Rightarrow$ χαρακτ. ρίζα: $\gamma = \frac{1}{2}$

Άρα

$$h_0[n] = c\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Αφού $h_0[0] = 1$, έχουμε $h_0[0] = c\left(\frac{1}{2}\right)^0 = c = 1$

Άρα

$$h_0[n] = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Η ακολουθία απόκρισης θα είναι:

$$h[n] = h_0[n] - \frac{1}{4} h_0[n-1]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Συχνότητα:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4} x[n-1]$$

$$\updownarrow F$$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

$$Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$$

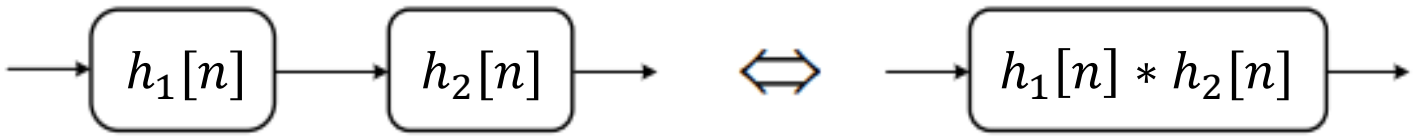
$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}e^{-j\omega}$$

Άρα

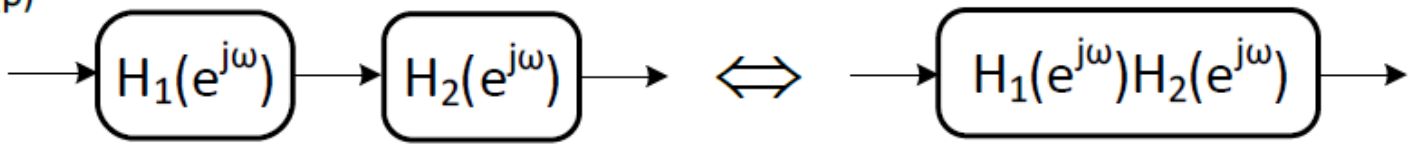
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**

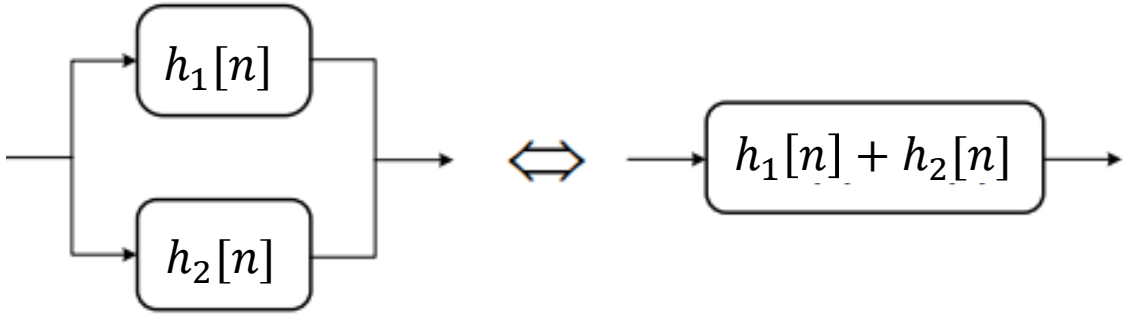
(α)



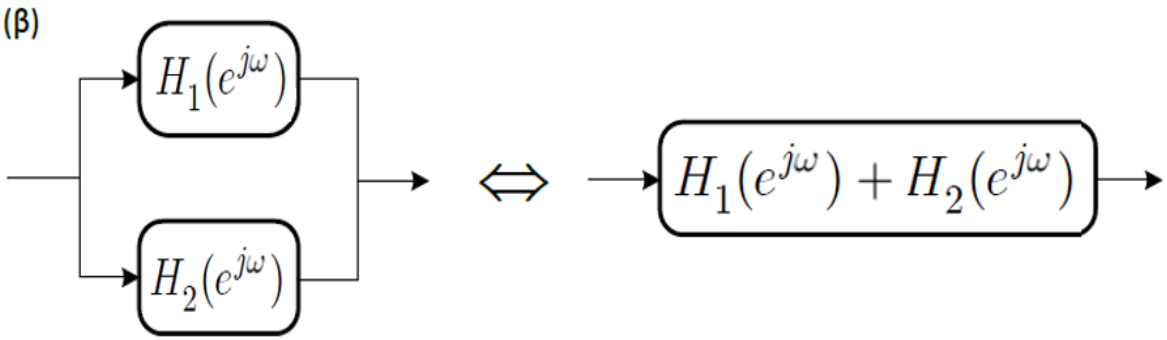
(β)



(α)



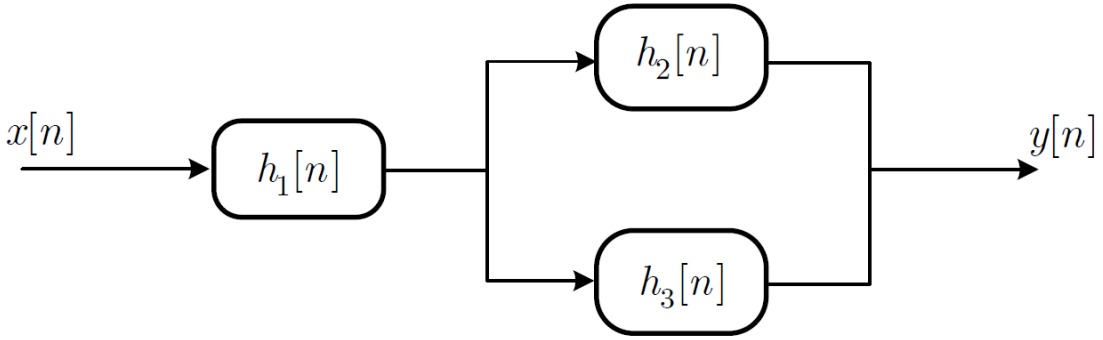
(β)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$
$$h_2[n] = \delta[n-2],$$
$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



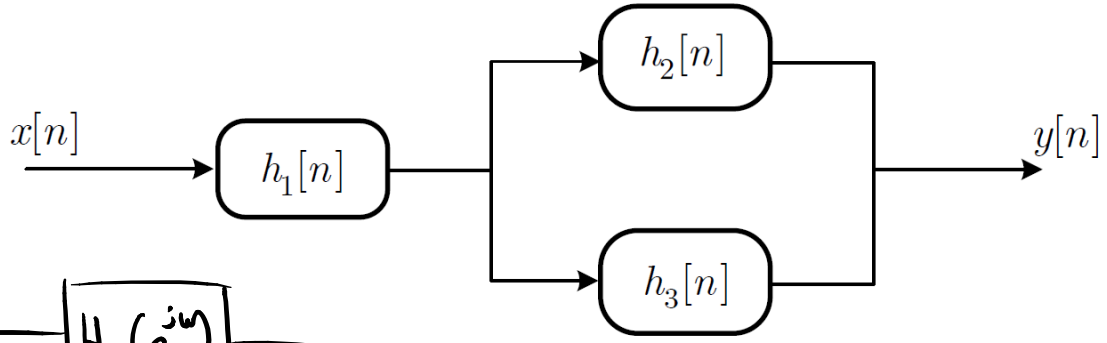
α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

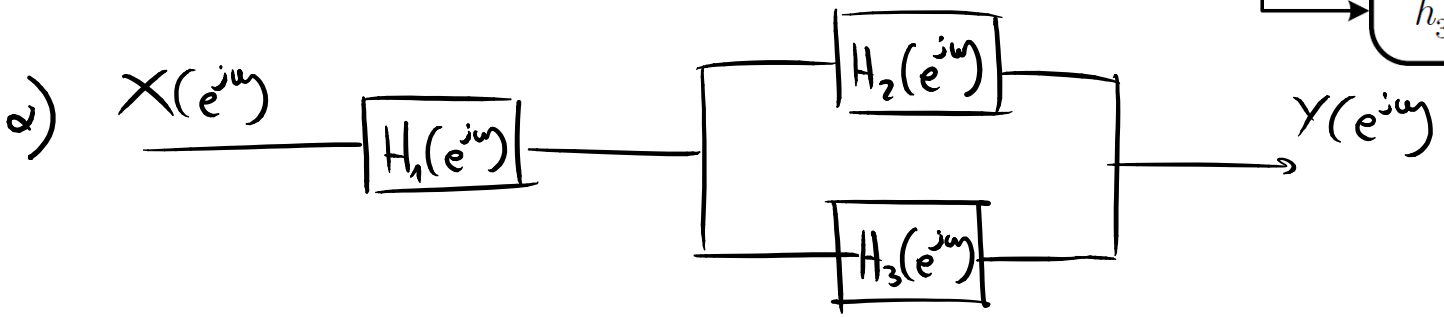
γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

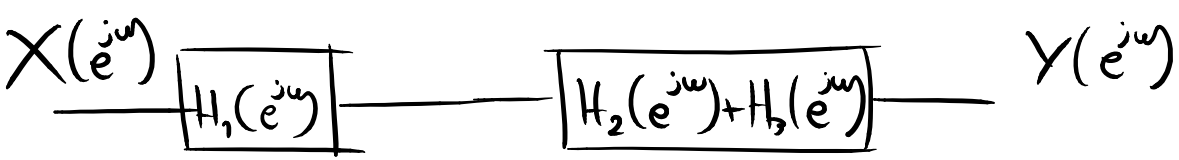
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

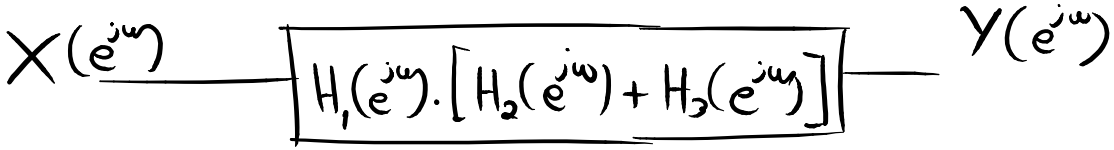
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



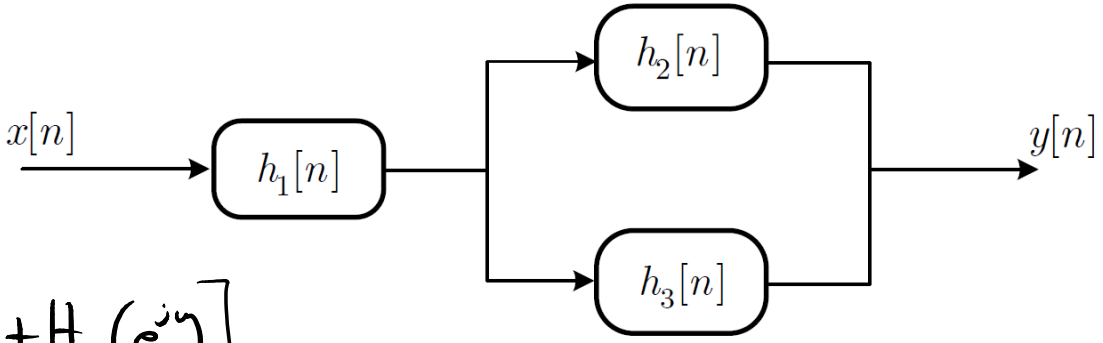
α)







- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



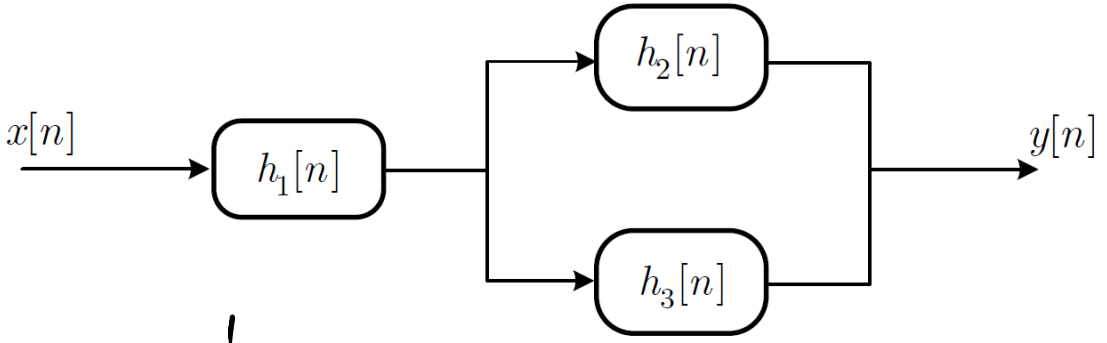
Άρα θα είναι:

$$H_{eq}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega}) \right]$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left[e^{-j2\omega} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right]$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} e^{-j2\omega} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \cdot \textcircled{1}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



β) Βρήκαμε ότι:

$$H_\Delta(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}e^{-j2\omega} + \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$\updownarrow F^{-1} \qquad \updownarrow F^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2] \qquad ? \; g[n]$$

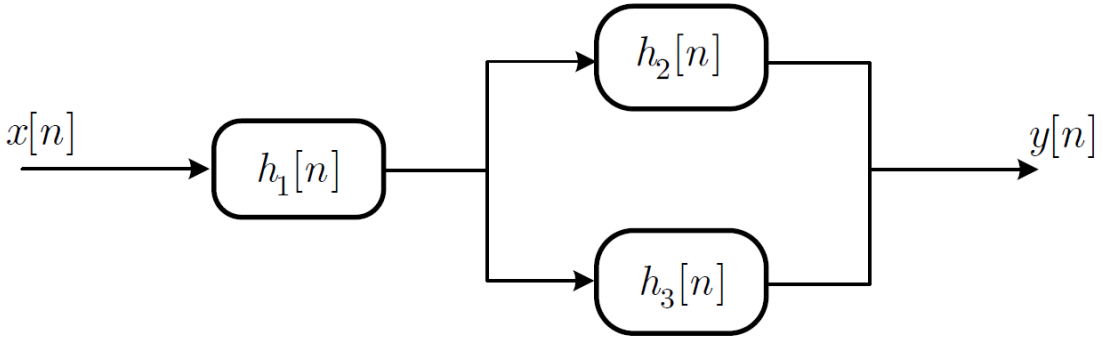
$G(e^{j\omega})$

Είναι $G(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \dfrac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \dfrac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

$$A = G(e^{j\omega})(1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega})\Big]_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Big]_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



$$B = G(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\Big]_{e^{-j\omega}=4}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Big]_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1-2} = -1$$

Άρα $$G(e^{j\omega}) = 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - 1\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

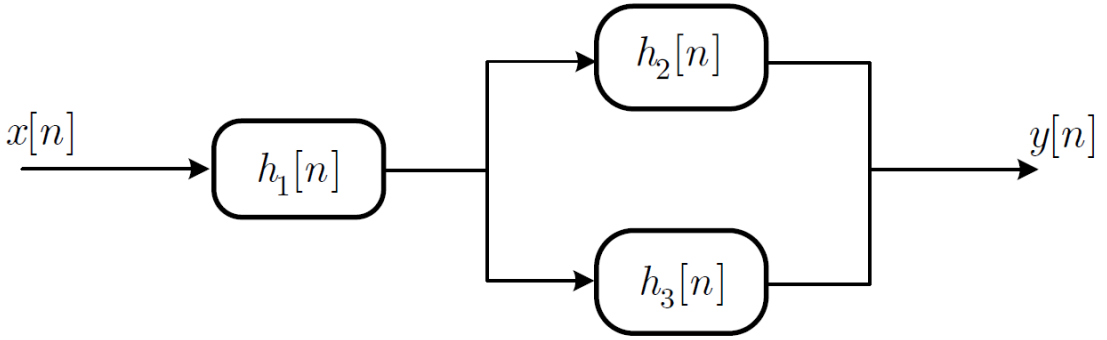
$$\updownarrow F^{-1}$$

$$g[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Συνολικά $$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



γ) Από (1):

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)e^{-j2\omega}+1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1-\underbrace{\frac{1}{2}e^{-j\omega}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}_{-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Άρα

$$X(e^{j\omega})\left(1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}\right) = Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right)$$

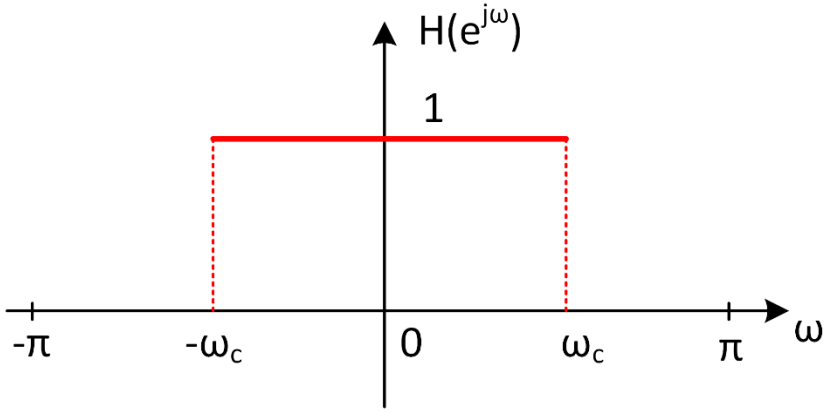
$$X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega})$$

έτσι, $x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3] = y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$

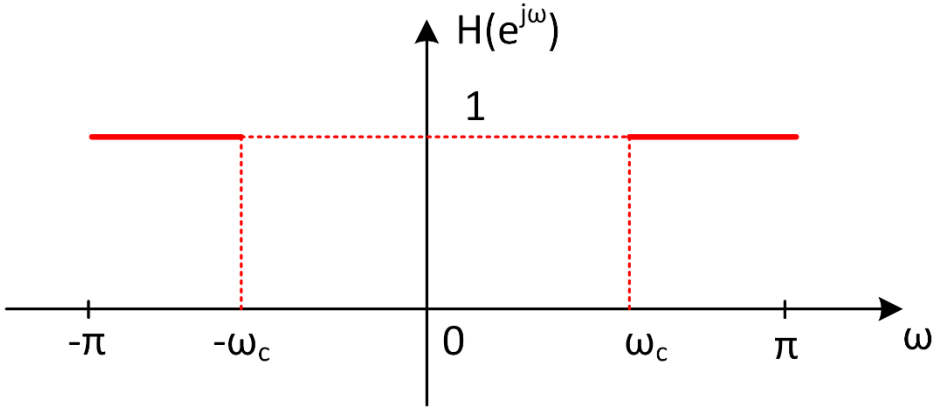
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

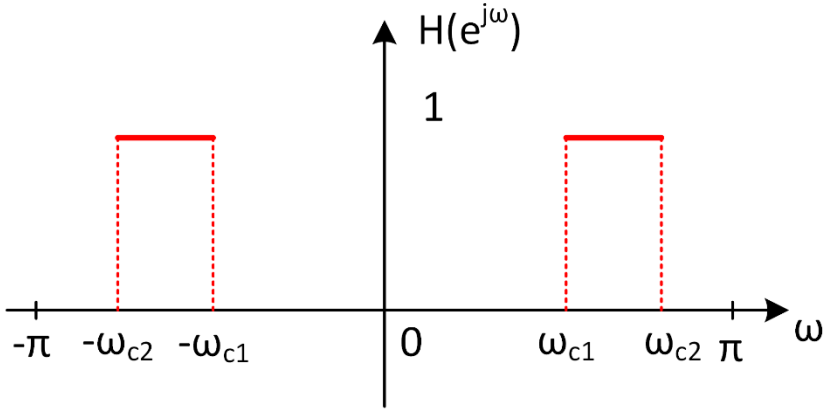
- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας



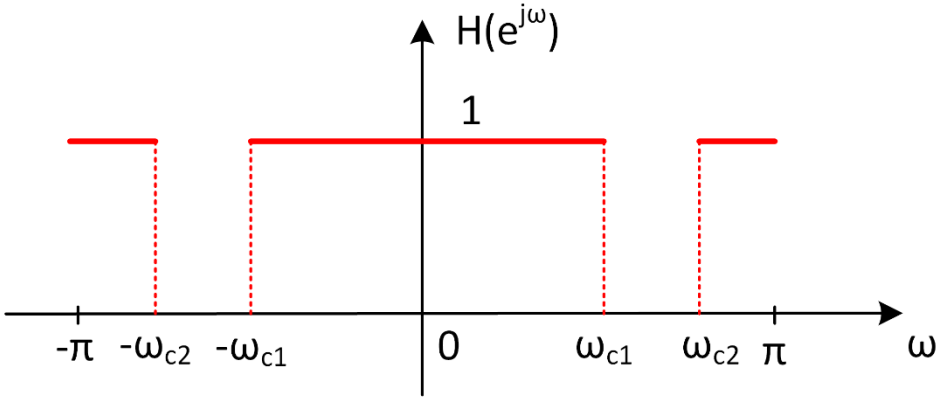
(α) Χαμηλοπερατό



(β) Υψιπερατό



(γ) Ζωνοπερατό



(δ) Ζωνοφρακτικό

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

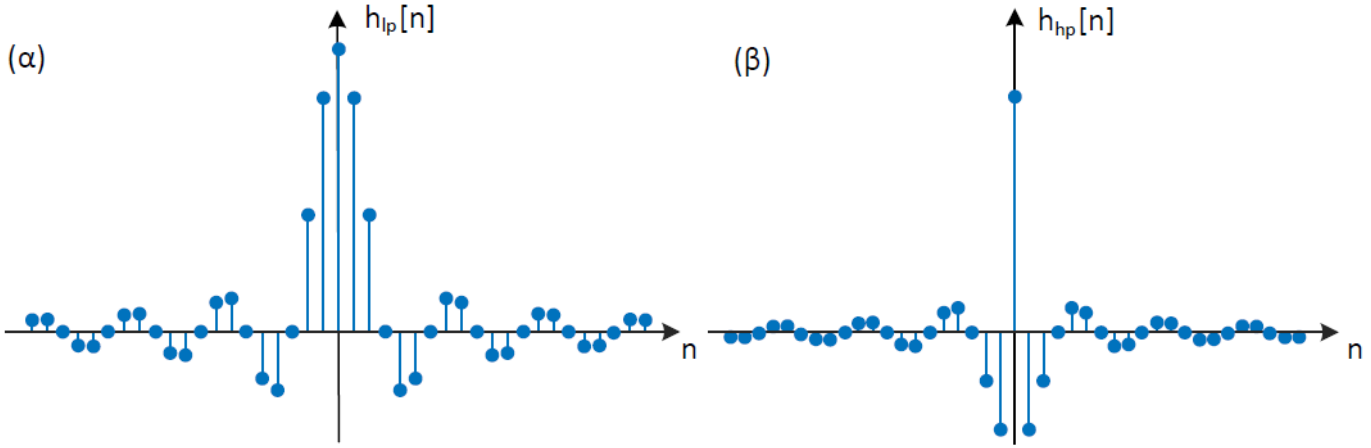
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad \leftrightarrow \quad H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

  - Το υψιπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

  - Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

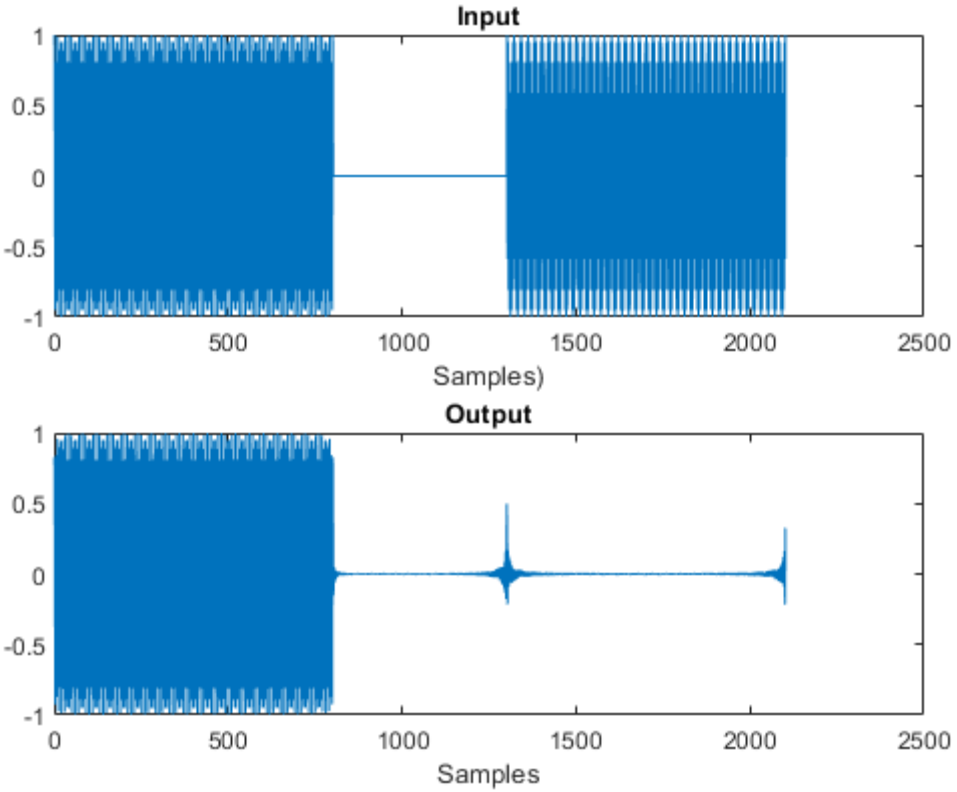
$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**

```
% Ideal lowpass filter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tones
f1 = 1800; %Hz
f2 = 2800; %Hz

% Sampling frequency and time axis
fs = 8000;
t = 0:1/fs:0.1; % .1 seconds

% Discrete time frequencies
w1 = 2*pi*f1/fs;
w2 = 2*pi*f2/fs;

% Sound
x = [cos(2*pi*f1*t) zeros(1,500) cos(2*pi*f2*t)];

% Lowpass filter
fc = 2600; % Hz
wc = 2*pi*fc/fs;
n = -length(x)/2:length(x)/2;
hlp = wc/pi * sinc(wc*n/pi);

% Filter!
y = conv(x,hlp,'same');

% Show!
figure; subplot(211);
plot(x); xlabel('Samples)'); title('Input');
subplot(212);
plot(y); xlabel('Samples'); title('Output');
```



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα ως $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος αν η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h[n] = \frac{4\sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{(n-1)\pi}$$

$e^{j\omega_0 n} \rightarrow H(e^{j\omega_0})\, e^{j\omega_0 n}$

Είχαμε ότι $h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F} H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Παρατηρώ ότι $h[n] = 4h_{lp}[n-1]$, για $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Οπότε $H(e^{j\omega}) = F\{4h_{lp}[n-1]\} = 4H_{lp}(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Άρα $y[n] = 2|H(e^{j\frac{\pi}{4}})|\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right) + 8|H(e^{j\frac{3\pi}{4}})|\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5} + \varphi_H(e^{j\frac{3\pi}{4}})\right)$

Αφού $\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$ είναι εκτός $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, όπως ο 2ος όρος απεκόπτεται.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:

Έχει,

$$y[n] = 2\left|H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right| \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \varphi_H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right)$$

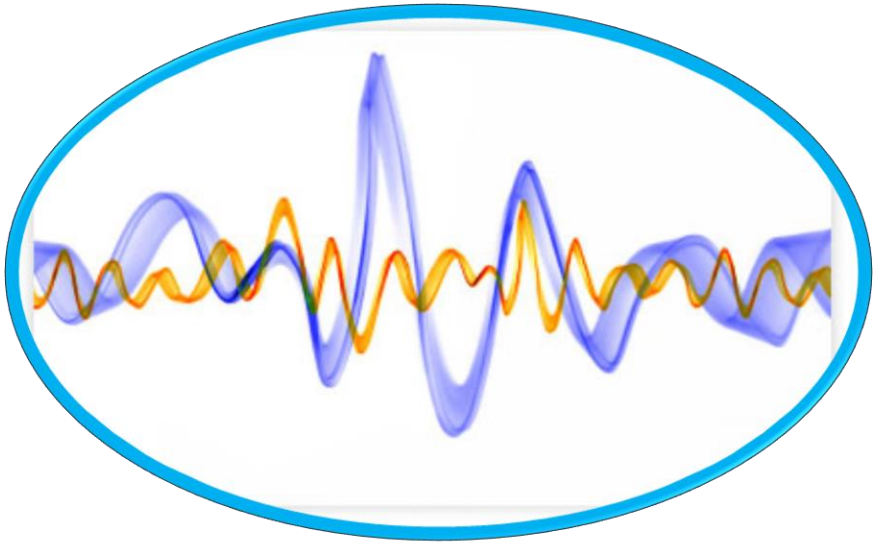
$$H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = 4e^{-j\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \left|H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right| = 4$$

$$\varphi_H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow y[n] = 8\cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right).$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

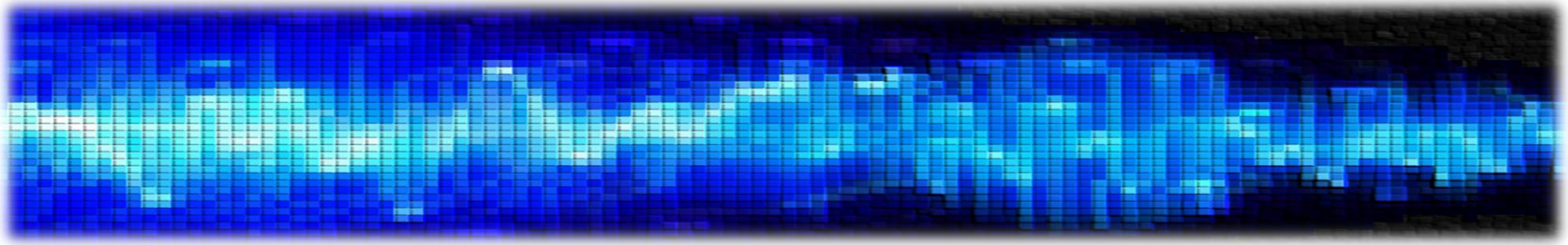
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

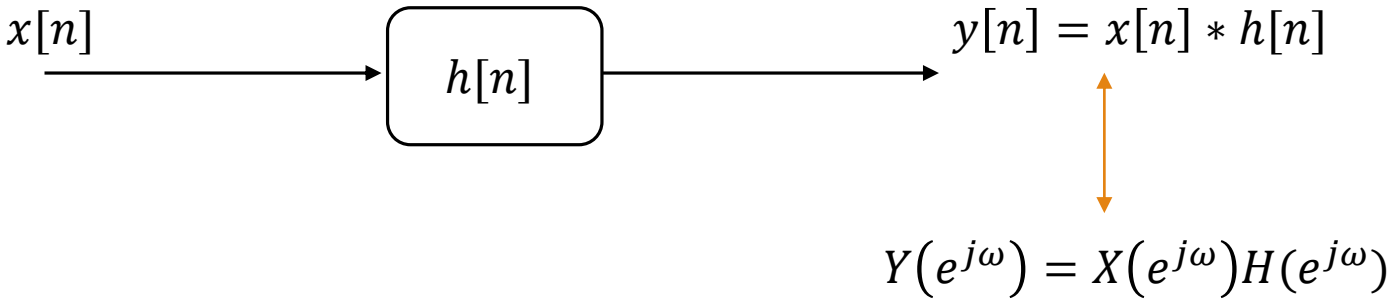
ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η



- Συστήματα στο χώρο του Fourier

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας (επανάληψη…)**



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

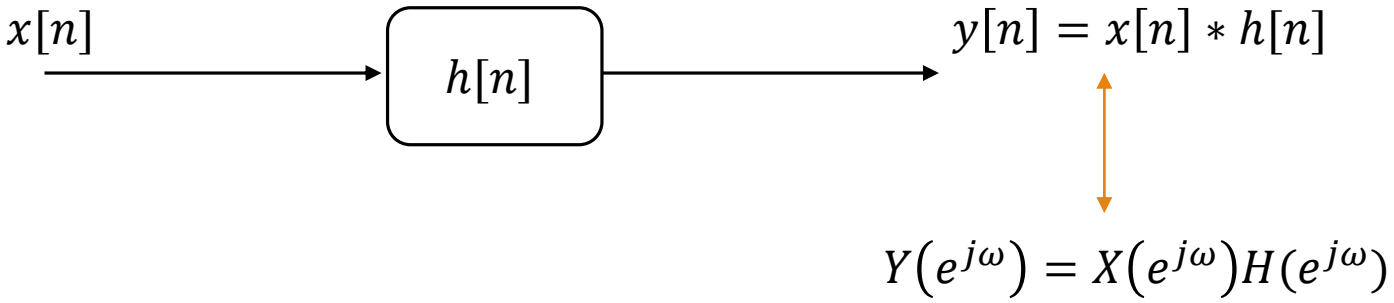
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**



- Για να μπορούμε να εφαρμόζουμε το μετασχ. Fourier σε μια εξίσωση διαφορών, υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, ότι η απόκριση σε συχνότητα υπάρχει
  - Δεν είναι πάντα αληθές αυτό
- Για να υπάρχει η απόκριση σε συχνότητα αρκεί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

- Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί συνθήκη ευστάθειας του συστήματος!
- Άρα πρέπει να έχουμε ευσταθές σύστημα για να μπορούμε να πάρουμε το μετασχ. Fourier του!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

  - Τα πράγματα όσον αφορά την επίδραση της απόκρισης πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του είναι σχετικά ξεκάθαρα
    - Η απόκριση πλάτους πολλαπλασιάζεται με το φάσμα πλάτους της εισόδου
  - Φαινομενικά και η επίδραση της απόκρισης φάσης δε συνιστά κάτι πολύπλοκο
    - Η απόκριση φάσης προστίθεται στο φάσμα φάσης της εισόδου
  - Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη χρονική δομή ενός σήματος
  - Οπότε η επίδραση της απόκρισης φάσης διατηρεί ή όχι την αρχική χρονική δομή του σήματος
  - Όμως τελικά τα πράγματα δεν είναι τα όσο απλά για την απόκριση φάσης. Γιατί?
  - Γιατί η φάση ενός μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα!
    - Η πρόσθεση οποιουδήποτε ακέραιου πολλαπλάσιου του 2π διατηρεί την ίδια τιμή στη φάση

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης, το αποτέλεσμα είναι πάντα στο διάστημα (-π, π]
  - Αυτή η τιμή ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal phase value)

$$-\pi < ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] \leq \pi$$

  - Οποιαδήποτε άλλη γωνία μπορεί να γραφεί με βάση την πρωτεύουσα φάση ως

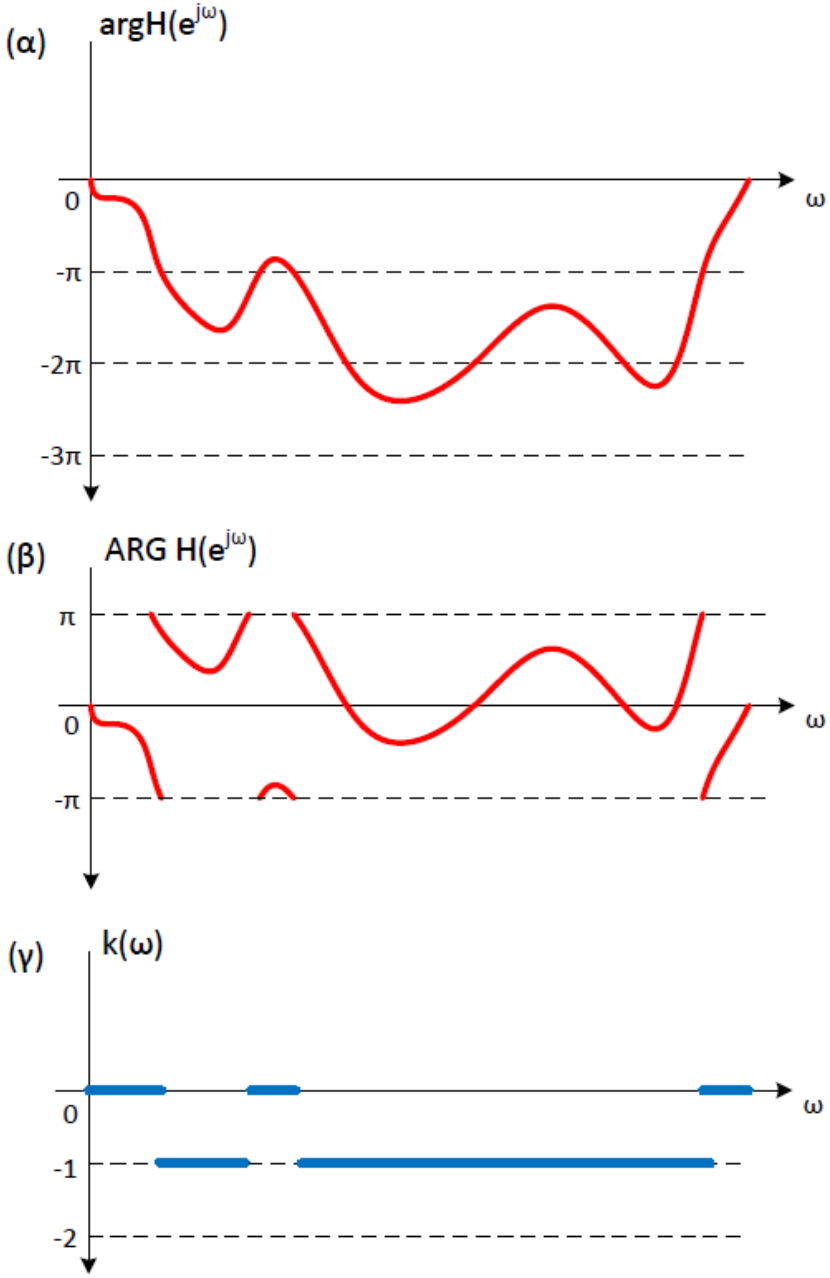
$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H\left(e^{j\omega}\right) = \arg[H\left(e^{j\omega}\right)] = ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] + 2\pi k(\omega) \rightarrow \in Z$$

- Η διαδικασία εύρεσης της συνεχούς (ως προς ω) συνάρτησης φάσης από την πρωτεύουσα φάση που παίρνουμε από την αντίστροφη εφαπτομένη ονομάζεται **ξετύλιγμα φάσης (phase unwrapping)**

- Δείτε το ακόλουθο σχήμα

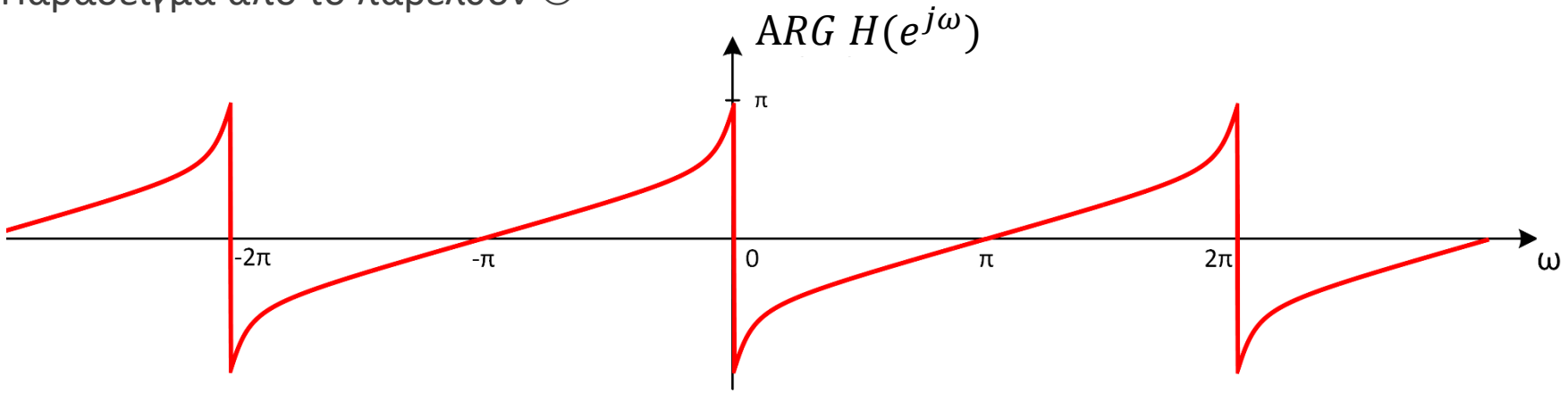
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

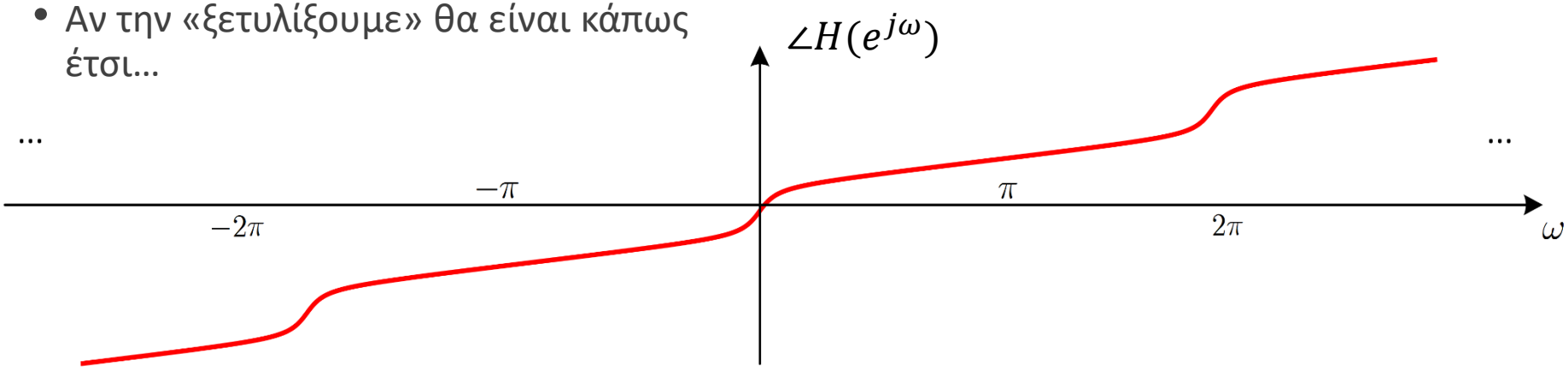
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα από το παρελθόν ☺



  - Αυτή είναι η απόκριση φάσης του γνωστού σας σήματος

$$h[n] = -a^n u[-n-1], |a| > 1$$

  - Αν την «ξετυλίξουμε» θα είναι κάπως έτσι…



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος για ημιτονοειδή είσοδο της μορφής

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)\,, \qquad -\infty < n < +\infty$$



δίνεται ως

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))$$

  - Προσέξτε:

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}\right) + \theta\right)$$

  - Η ποσότητα

$$-\frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}$$

μας δείχνει τη **χρονική καθυστέρηση σε δείγματα** του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

  - Η συνάρτηση

$$\tau_p\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{\varphi_H(e^{j\omega})}{\omega}$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης (phase delay)**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

  - Στην πράξη, μια άλλη μετρική μας είναι πιο χρήσιμη
    - …καθώς άπειρης διάρκειας ημίτονα δεν υπάρχουν στην πράξη!
    - …και πιθανότατα αυτά να μην έχουν σταθερό πλάτος προϊόντος του χρόνου

  - Μπορεί κανείς να δείξει ότι η συνάρτηση

$$\tau_g\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{d}{d\omega}\varphi_H\left(e^{j\omega}\right)$$

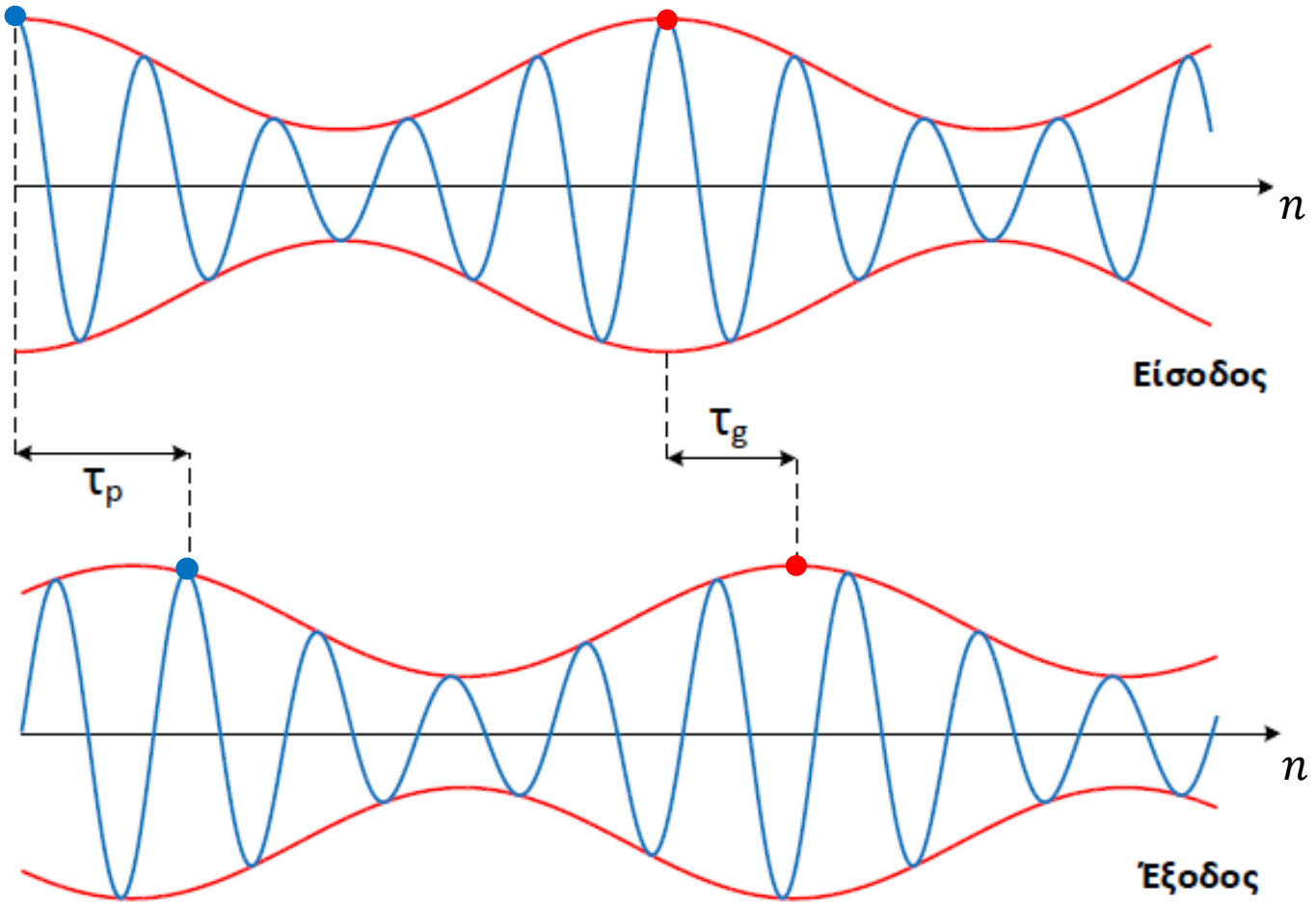
η οποία ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)** είναι αυτή που καθορίζει την καθυστέρηση της **περιβάλλουσας** του σήματος (και άρα του σήματος) στην έξοδό του, αν

- η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι περίπου σταθερή **γύρω** από μια συχνότητα ω_0 η οποία σχετίζεται με την είσοδο
- η καθυστέρηση ομάδας είναι περίπου σταθερή **γύρω** από μια συχνότητα ω_0 η οποία σχετίζεται με την είσοδο

  - Δείτε το ακόλουθο σχήμα για ένα άπειρης διάρκειας ημίτονο διαμορφωμένο κατά πλάτος

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**



- Ποια από τις δυο μετρικές εκφράζει την καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n)\cos(\omega_c n) = \frac{A}{2}\cos(\omega_l n) + \frac{A}{2}\cos(\omega_u n)$$

με χρήση Euler/τριγωνομετρίας και με $\omega_l = \omega_c - \omega_0$ και $\omega_u = \omega_0 + \omega_c$ με $\omega_c \gg \omega_0$

  - Αν περάσουμε το σήμα από ένα σύστημα $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi_h(e^{j\omega})}$ τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \frac{A|H(e^{j\omega_l})|}{2}\cos(\omega_l n + \phi(\omega_l)) + \frac{A|H(e^{j\omega_u})|}{2}\cos(\omega_u n + \phi(\omega_u))$$

  - Αν η απόκριση πλάτους είναι περίπου μοναδιαία γύρω από τις συχνότητες ω_u, ω_l τότε

$$y[n] = \frac{A}{2}\cos(\omega_l n + \phi(\omega_l)) + \frac{A}{2}\cos(\omega_u n + \phi(\omega_u))$$

$$= A\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

- Αφού $\omega_c \gg \omega_0$, τότε $\omega_u \approx \omega_c$ και $\omega_l \approx \omega_c$
- Μπορούμε να βρούμε την ξετυλιγμένη φάση γύρω από ένα μικρό εύρος συχνοτήτων με κέντρο το ω_c ως ανάπτυγμα Taylor:

$$\phi_h\left(e^{j\omega}\right) \approx \phi_h\left(e^{j\omega_c}\right) + \frac{d}{d\omega}\phi_h\left(e^{j\omega_c}\right)(\omega - \omega_c)$$

- Με χρήση του παραπάνω, η φάση μετατόπισης του πρώτου όρου του γινομένου θα είναι

$$-\frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2\omega_c} \approx -\frac{2\phi_h\left(e^{j\omega_c}\right)}{2\omega_c} = -\frac{\phi_h(e^{j\omega_c})}{\omega_c}$$

- Για το δεύτερο όρο

$$-\frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2\omega_0} = -\frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{\omega_u - \omega_l} \approx -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega_c})$$

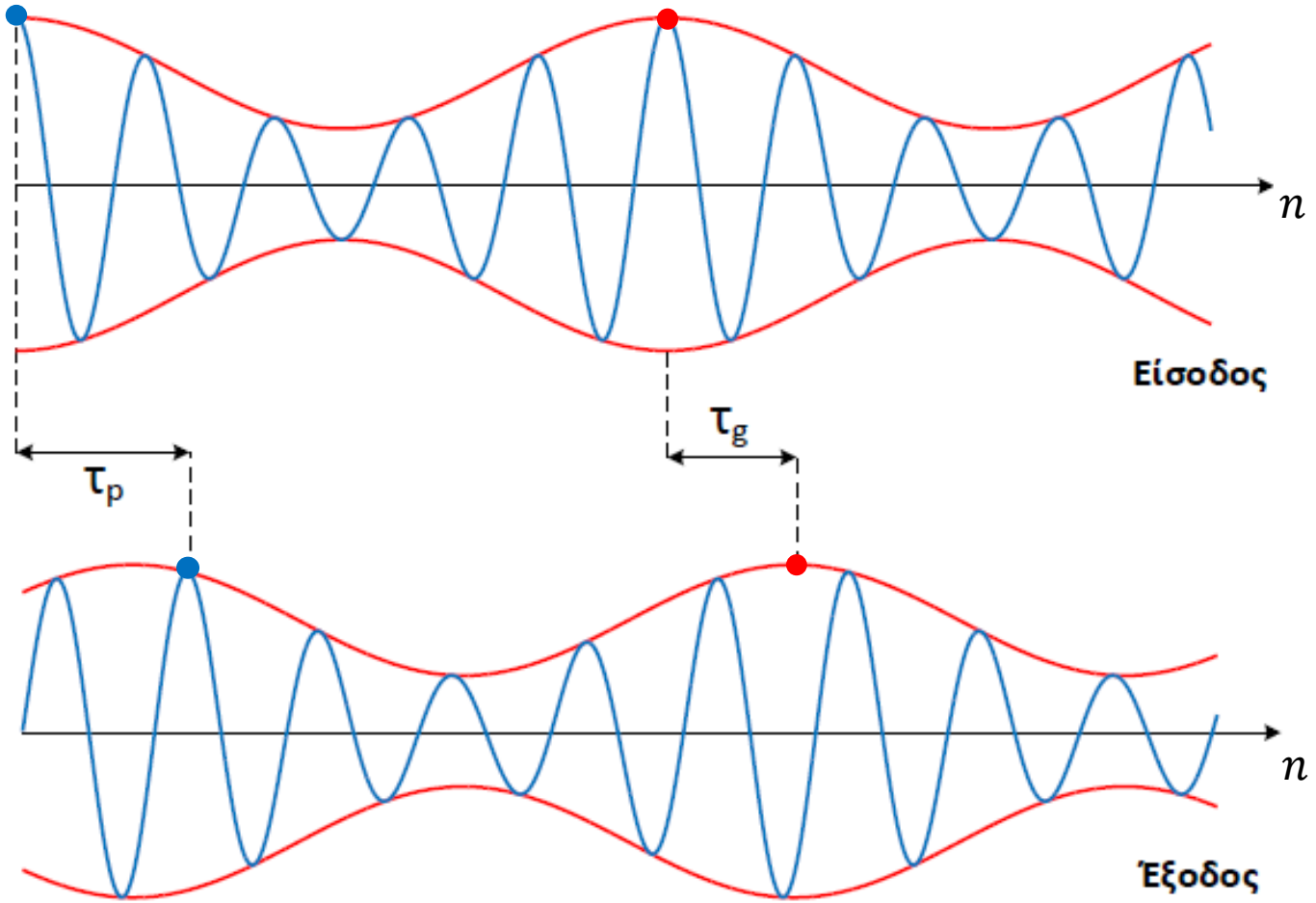
που είναι η καθυστέρηση ομάδας $\tau_g(e^{j\omega_c})$

- Έτσι το σήμα γράφεται ως

$$y[n] \approx A\left|H\left(e^{j\omega_c}\right)\right|\cos(\omega_0(n - \tau_g(e^{j\omega_c})))\cos(\omega_c(n - \tau_p(e^{j\omega_c}))$$

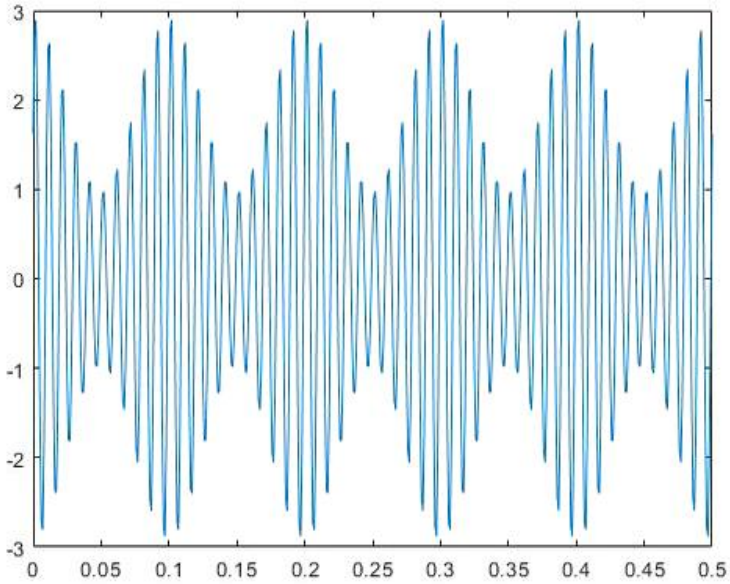
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Ξανά ☺

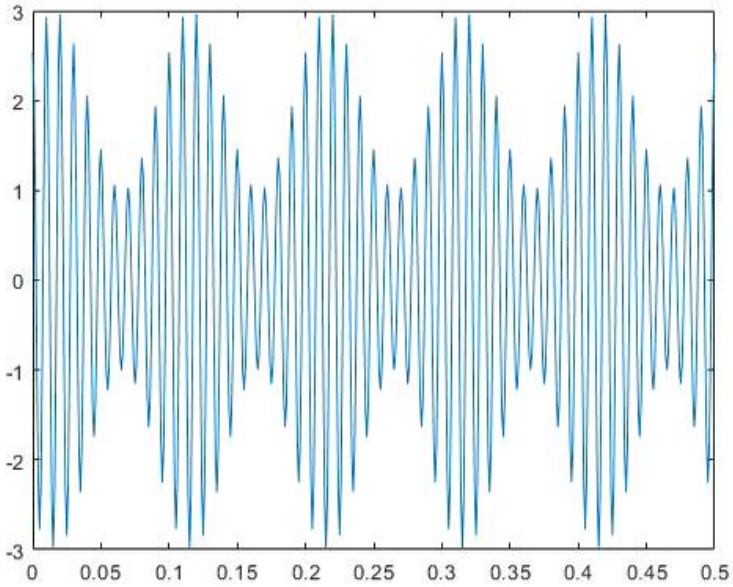


© Καφεντζής Γιώργος, PhD

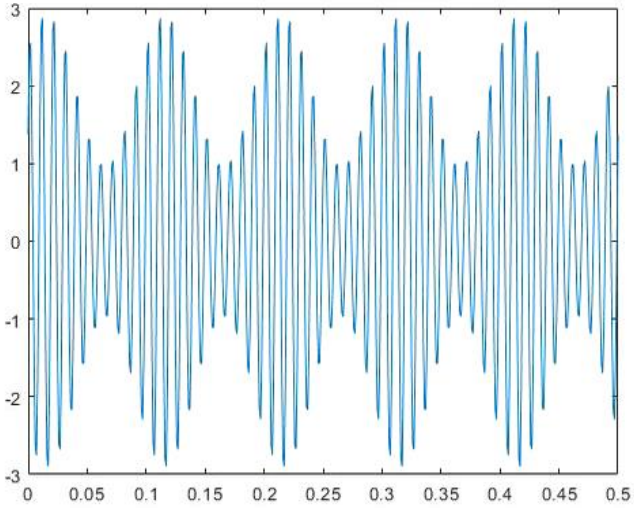
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**



Phase Delay



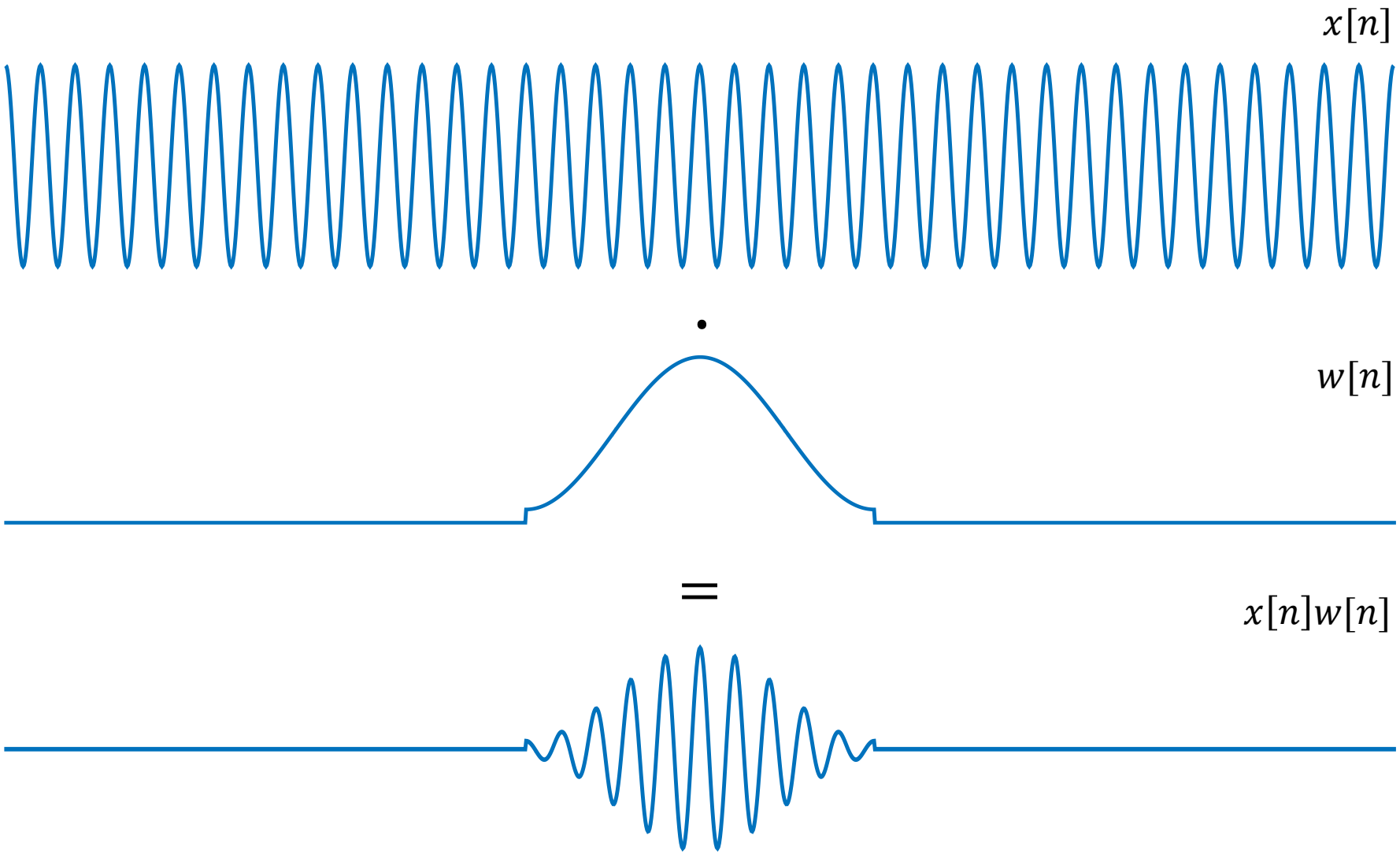
Group Delay



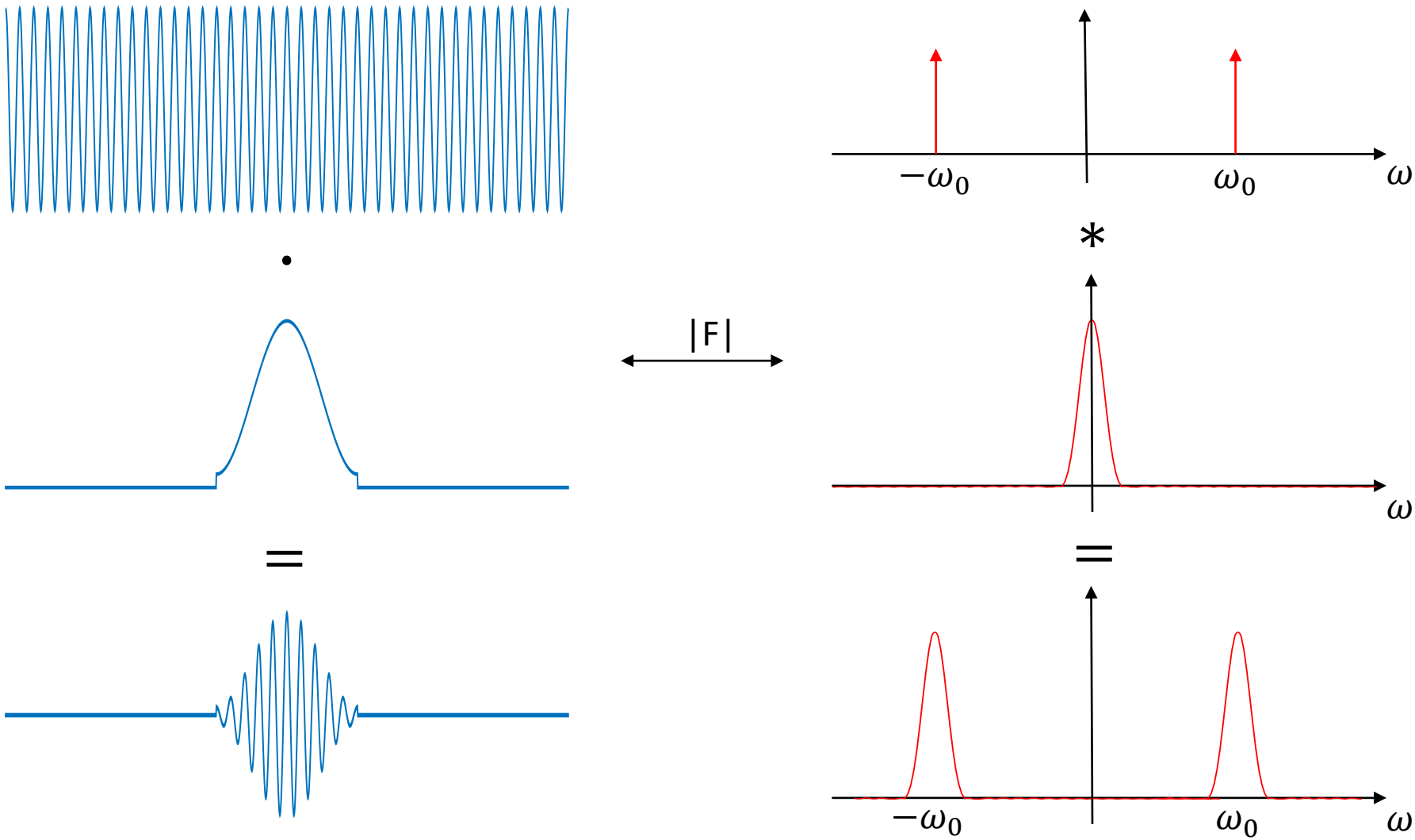
Phase & Group Delay

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

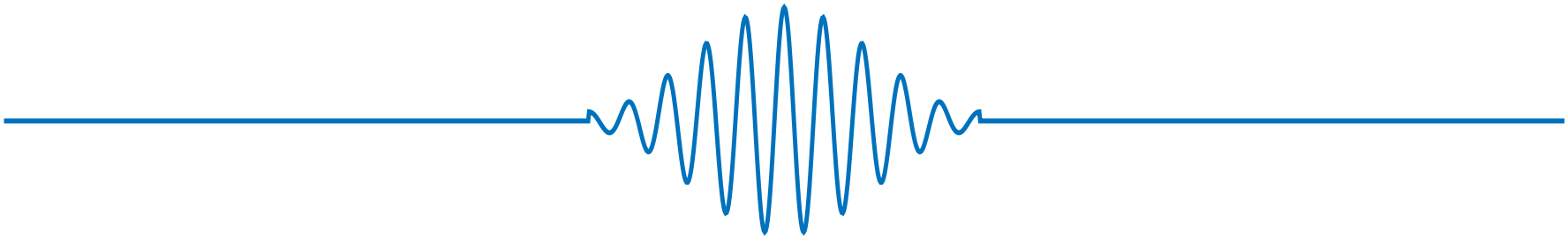
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Όμως αν το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, θα προκύπτει όπως παρακάτω:



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Όμως αν το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, θα προκύπτει όπως παρακάτω:



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**



- Παρατηρήσατε ότι ο παραπάνω ημιτονοειδής παλμός δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα ω_0 αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

$$w[n] \cdot A\cos(\omega_0 n) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} W\left(e^{j\omega}\right) * \left(A\pi\delta(\omega-\omega_0) + A\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$\frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει ο ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier $W\left(e^{j\omega}\right)$ του σήματος της περιβάλλουσας $w[n]$!
  - Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε το σήμα ονομάζεται **στενής ζώνης**!
    - Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα $w[n]$ πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια…
      - Γιατί? Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**



- Παρατηρήστε ότι το ημίτονο είναι **διαμορφωμένο** (πολλαπλασιασμένο) με μια Gaussian-like περιβάλλουσα $w[n]$
- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το «πακέτο συχνοτήτων» που αποτελεί τον ημιτονοειδή παλμό!
- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, τότε κάθε «πακέτο» κάθε συχνότητας θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος, κι έτσι η έξοδος θα είναι εν γένει διαφορετική στη μορφή της σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου
- Αν όμως τα διαμορφωμένα ημίτονα («πακέτα») είναι σήματα **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα εύρος συχνοτήτων

$$[-\omega_0 - B, -\omega_0 + B], [\omega_0 - B, \omega_0 + B]$$

με ω_0 τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης κάθε «πακέτου» της εξόδου!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

- Έστω ότι η περιβάλλουσα $w_k[n]$ κάθε συχνότητας ω_k είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα, δηλ.

$$w_k[n] \neq 0, \qquad N_1 \leq n \leq N_2$$
$$W_k\left(e^{j\omega}\right) = 0, \qquad |\omega| > B_k, \qquad B_k \ll \omega_k$$

- Μπορούμε εύκολα (Άσκηση ☺) να δείξουμε ότι τότε

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega-\omega_k)}\right) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega+\omega_k)}\right) \right)$$

- Πράγματι έχουμε ένα άθροισμα σημάτων στενής ζώνης!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

  - Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα (slide 6), η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k\left[n - \tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)\right] \cos\left(\omega_k\left(n - \tau_p\left(e^{j\omega_k}\right)\right) + \theta_k\right)$$

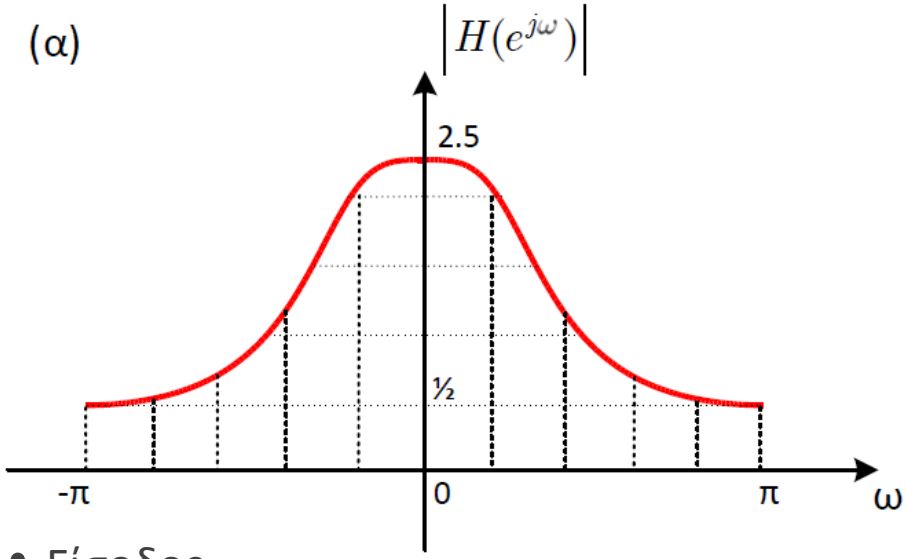
  - Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας ω_k έχει καθυστερήσει κατά $\tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)$

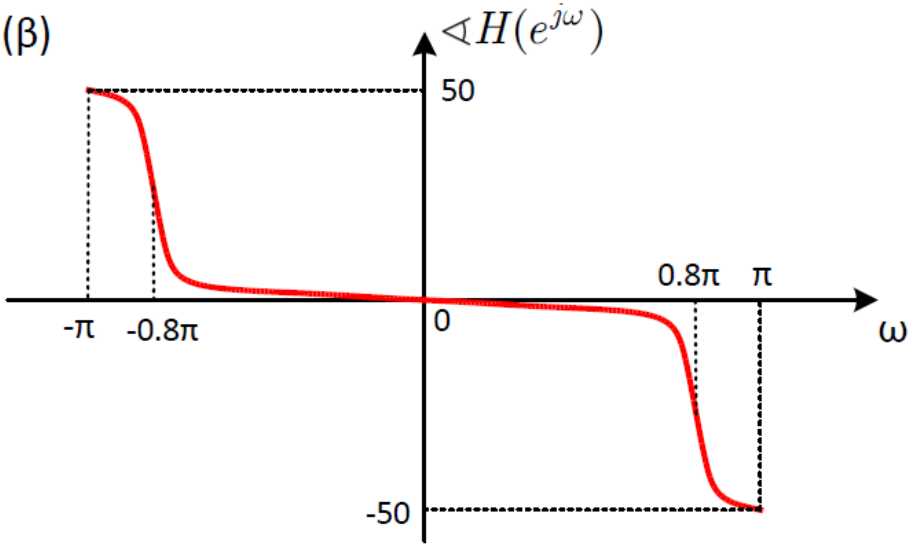
Καθυστέρηση Ομάδας ΓΧΑ Συστήματος

- Αν η απόκριση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος είναι γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας του είναι σταθερή ως προς τη συχνότητα. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα στενής ζώνης της εισόδου θα υποστεί την ίδια καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος.
- Αν η απόκριση φάσης είναι μη γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας δεν είναι σταθερή, και άρα θα υπάρχουν διαφορετικές καθυστερήσεις για διαφορετικά "πακέτα" συχνοτήτων της εισόδου, με αποτέλεσμα τη διασπορά στο χρόνο της ενέργειας του σήματος στην έξοδο του συστήματος. Έτσι, η μη γραμμικότητα στη φάση ή - ισοδυνάμως - η μη σταθερή καθυστέρηση ομάδας συνεπάγεται διασπορά του σήματος στο χρόνο.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.



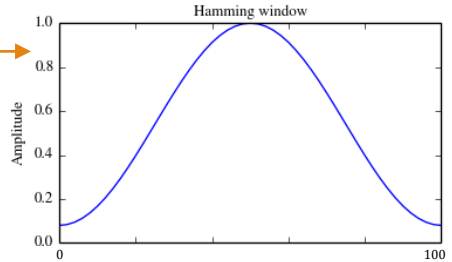


- Είσοδος

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

$$= w[n-M]\sin(0.2\pi n) + w[n-M]\sin(0.8\pi n) + w[n-7M]\sin(0.4\pi n)$$

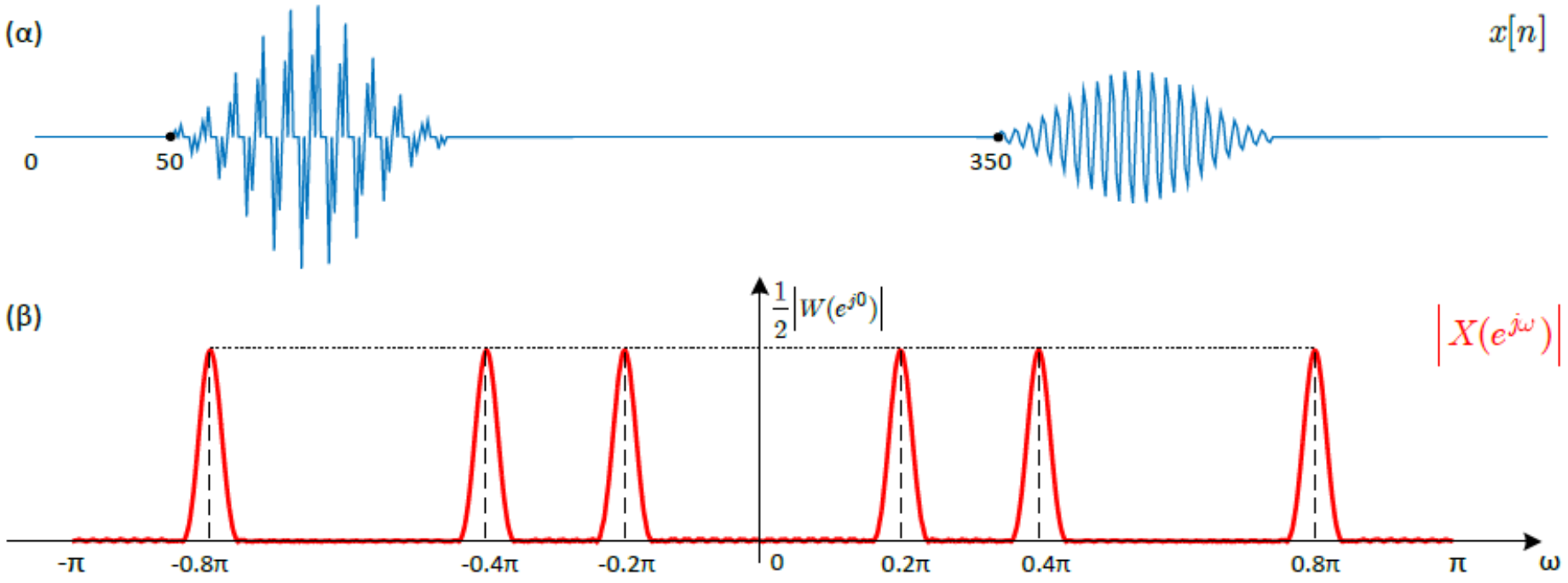
με $M = 50$ και $w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad 0 \le n \le N = 100$



- Το σημαντικό εύρος συχνοτήτων για αυτό το $w[n]$ είναι $\sim \frac{8\pi}{100}\frac{rad}{sample}$

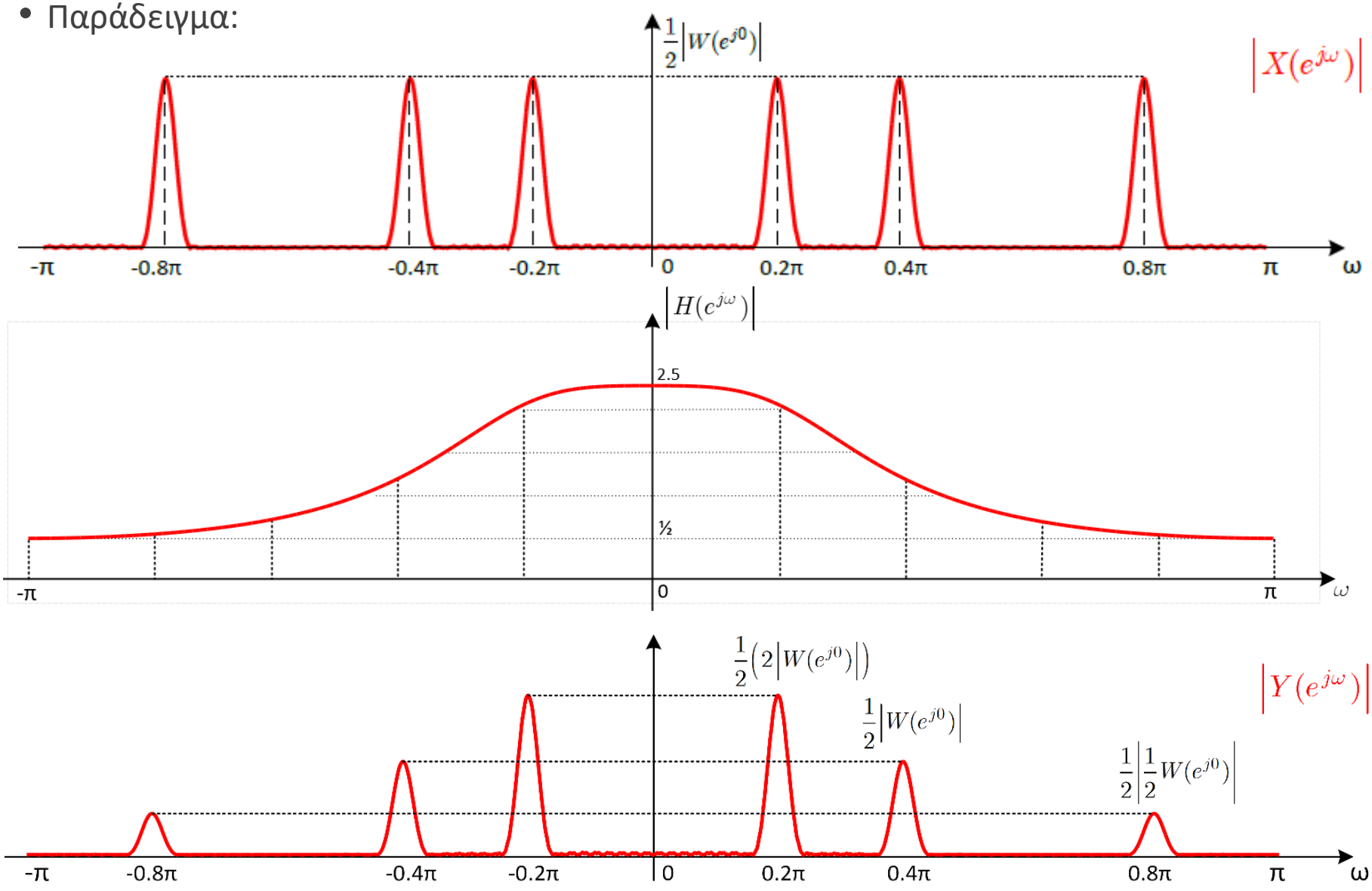
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα:

$$x[n] = w[n-50]\sin(0.2\pi n) + w[n-50]\sin(0.8\pi n) + w[n-350]\sin(0.4\pi n)$$



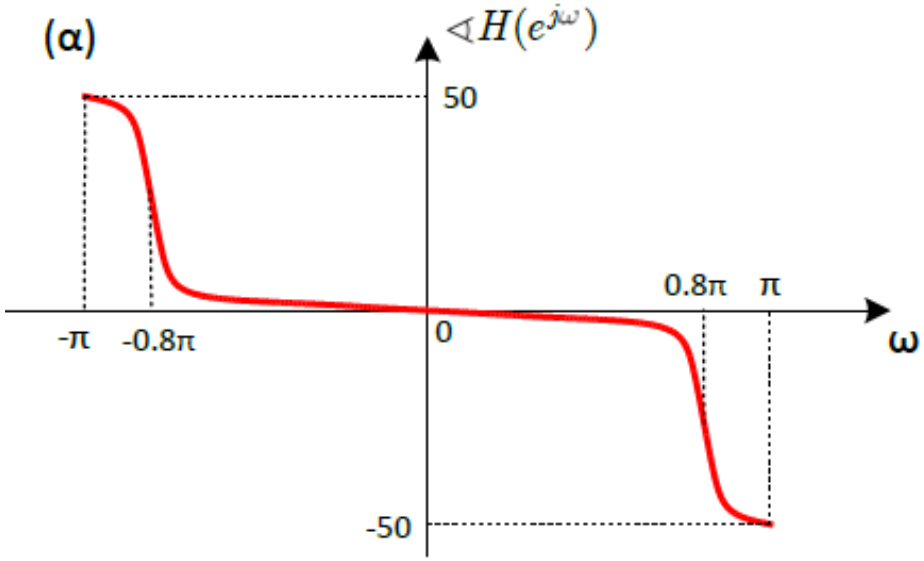
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

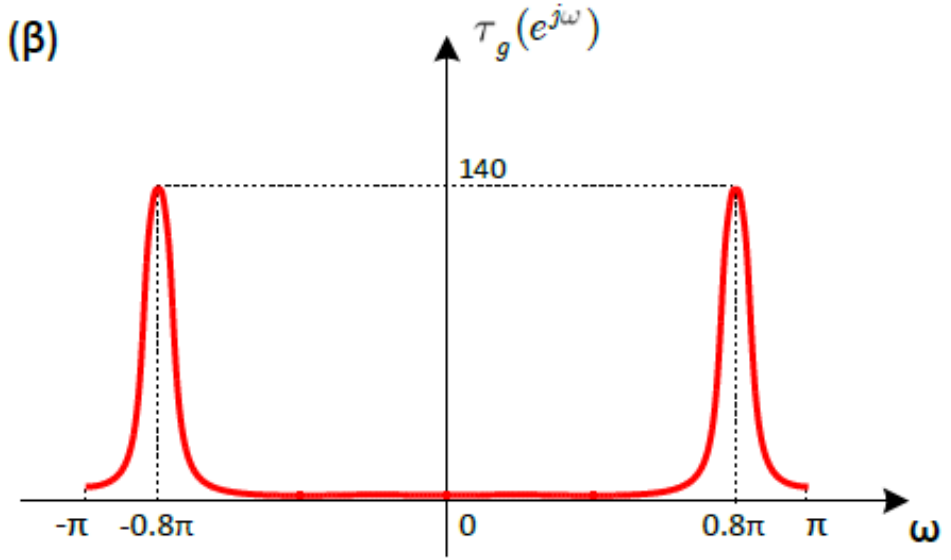
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα:



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

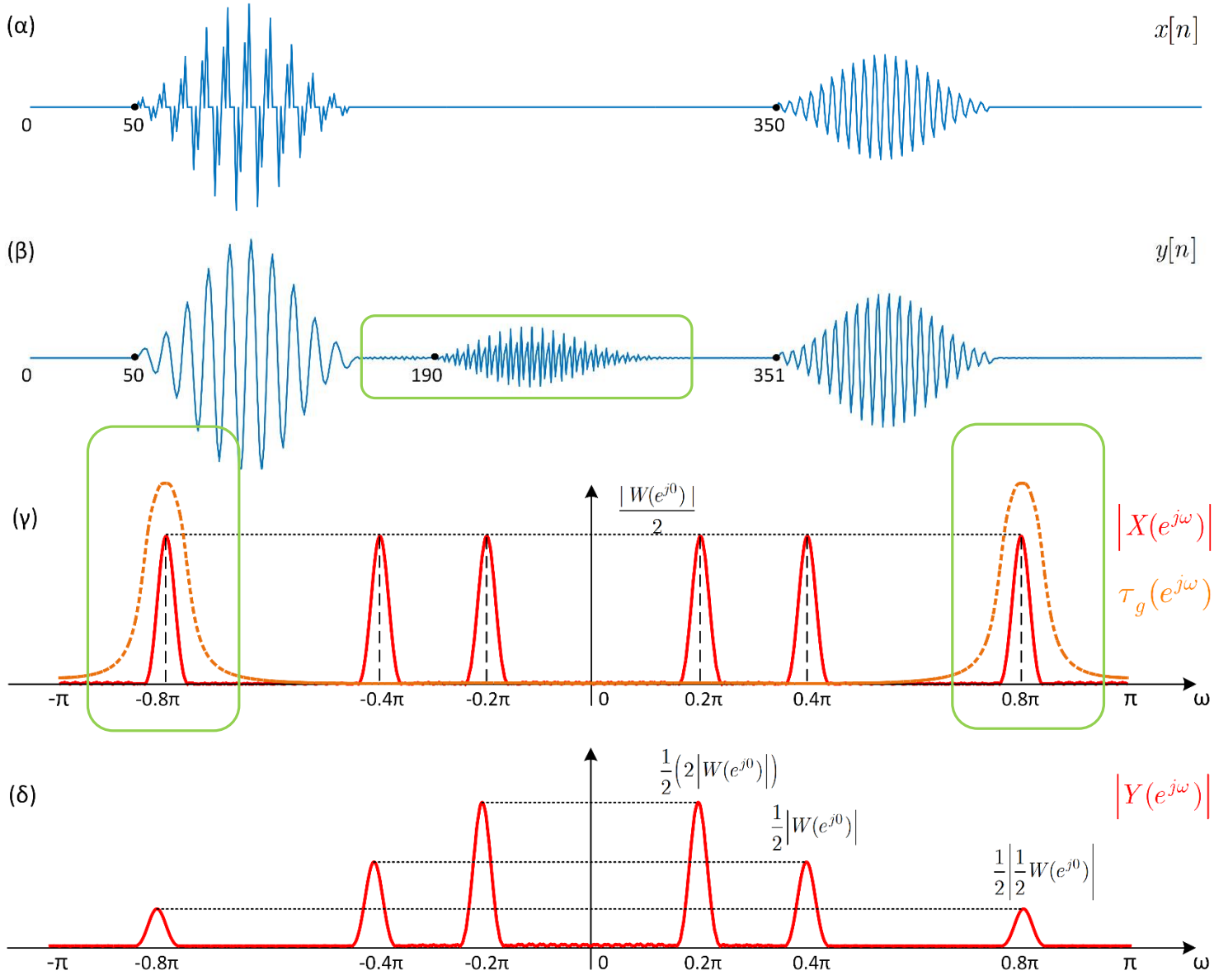
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα:





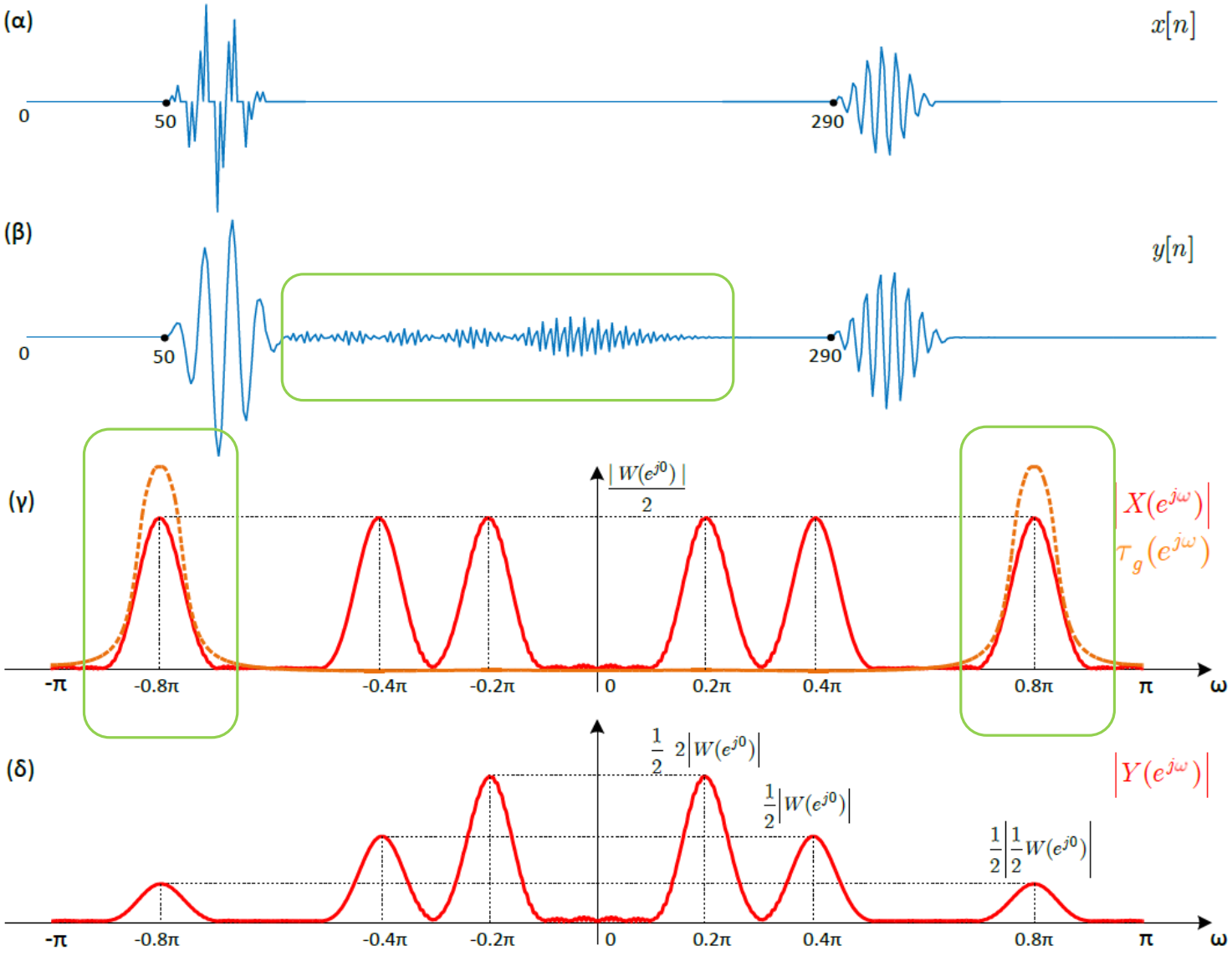
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα:



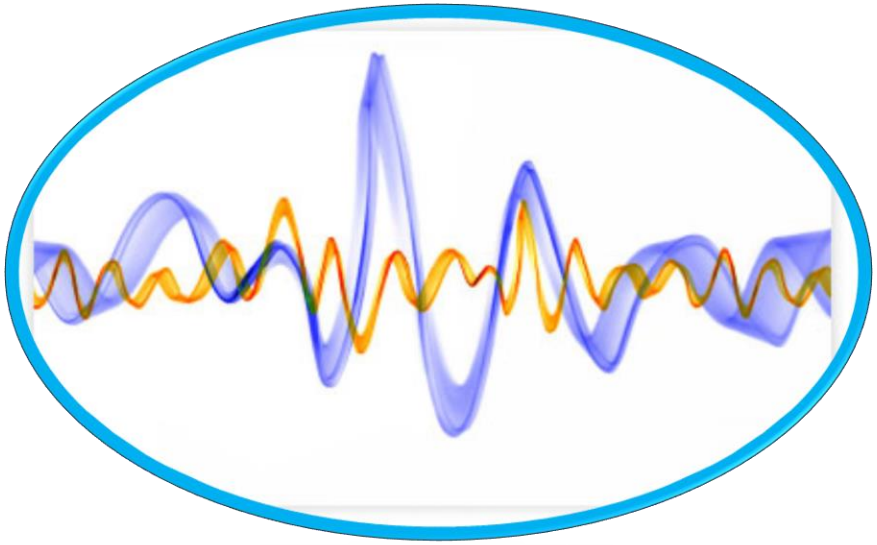
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα:

Είσοδος ευρείας ζώνης (wideband)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

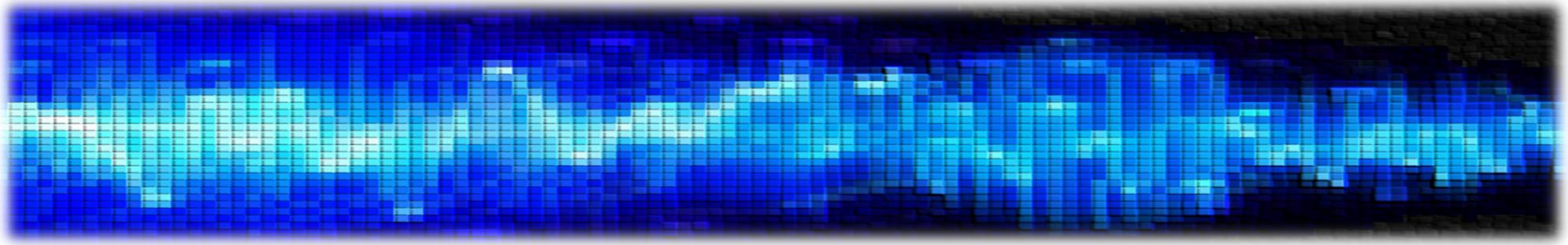
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 11Η



- Μετασχηματισμός Z

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας

- Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:

  1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  2. Υπάρχουν συστήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα

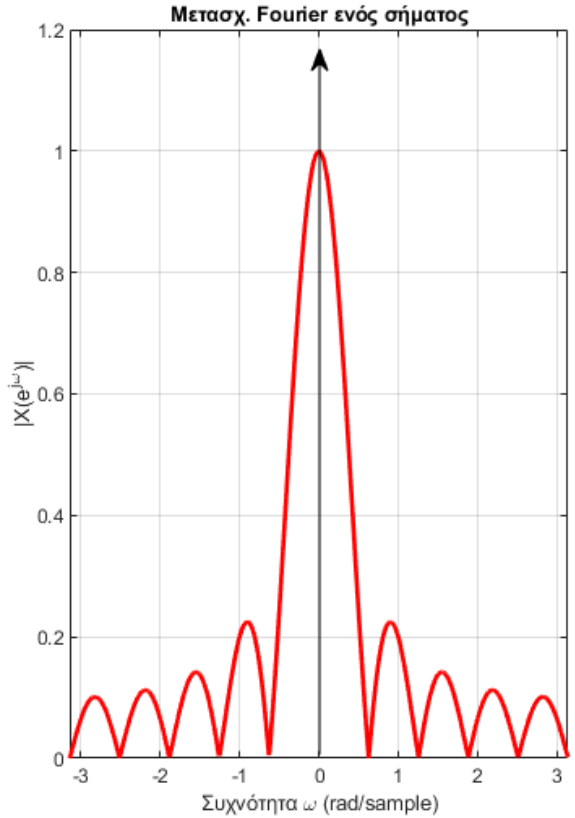
- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!

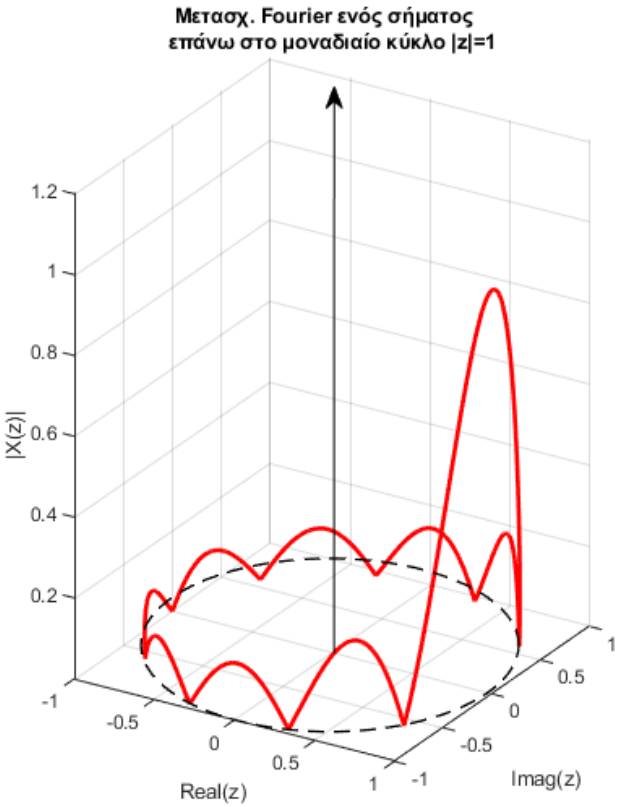
- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό?

- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους $e^{-j\omega n}$
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον *μοναδιαίο* κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου
- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα
- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
  - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?



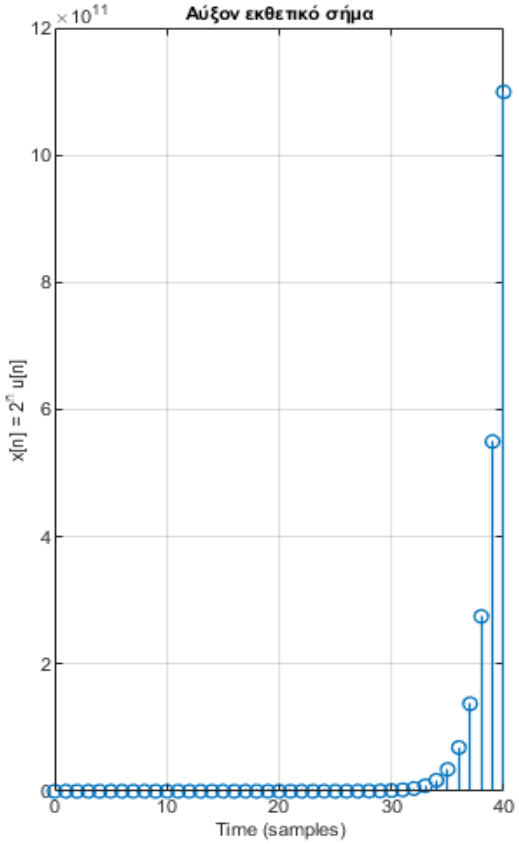


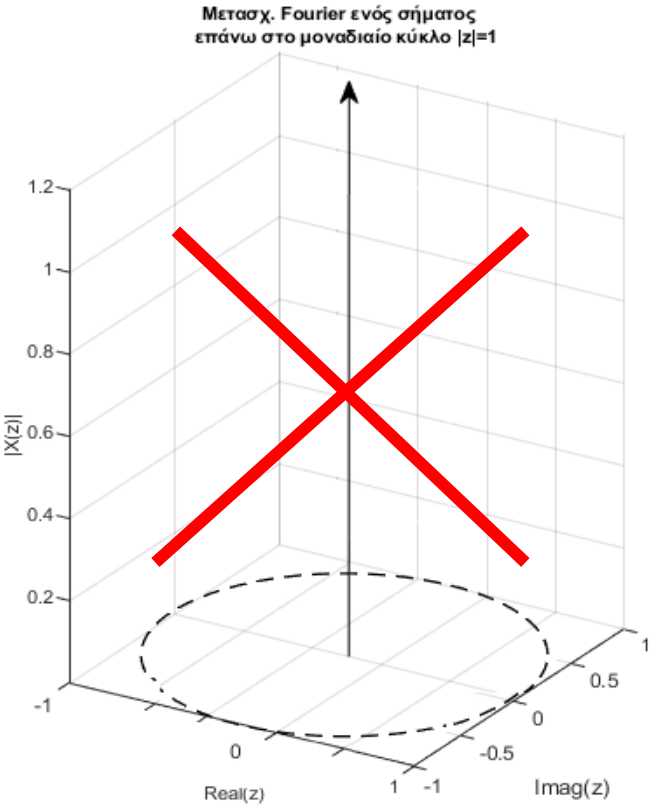
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους
- Διαφορετικού πλάτους ίσως?





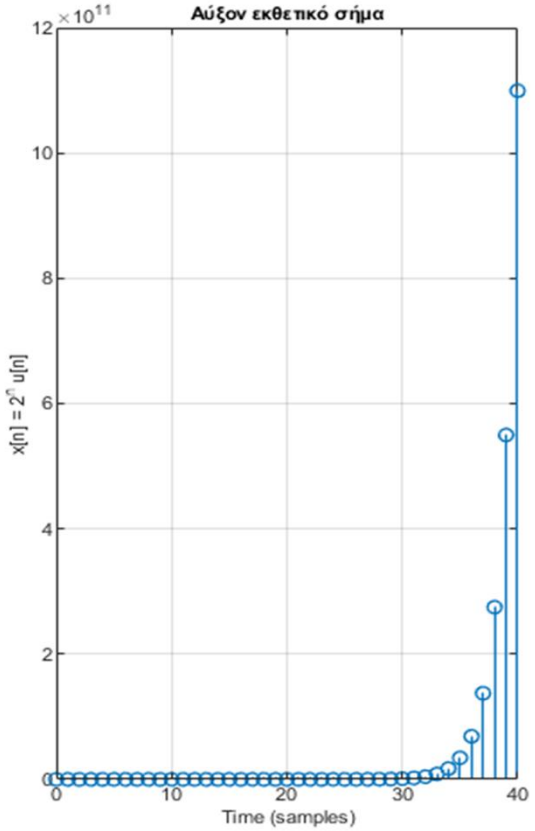
- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

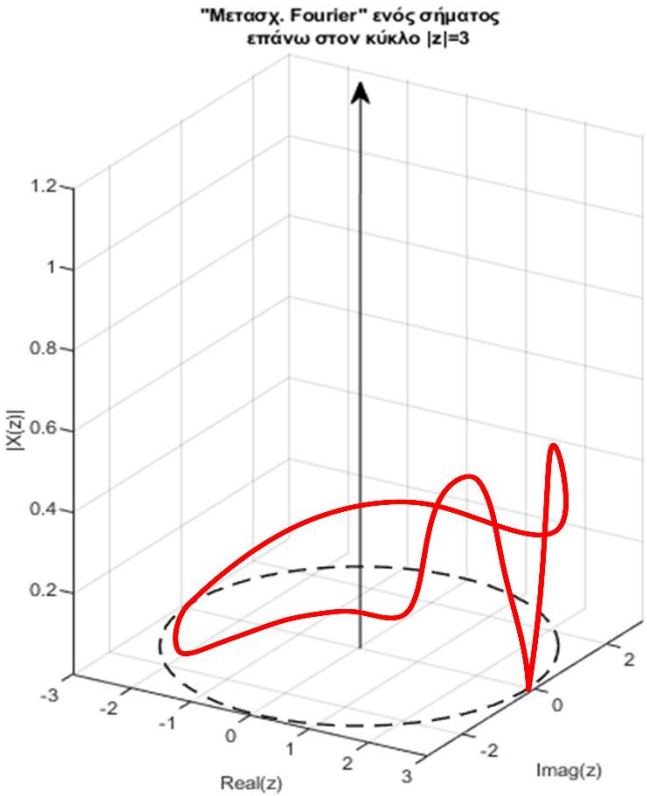
$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r





© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προφανώς όταν

$$\left|X\left(re^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
  - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη
- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2^n}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2}{r}\right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \qquad r \in \Re_+$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

  - Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, |z| > 2$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $a \in \mathbb{R}$

Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \underbrace{u[n]}_{1,\, n \geq 0} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|az^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Leftarrow \boxed{|z| > |a|}$.

Περιοχή Σύγκλισης

Άρα

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

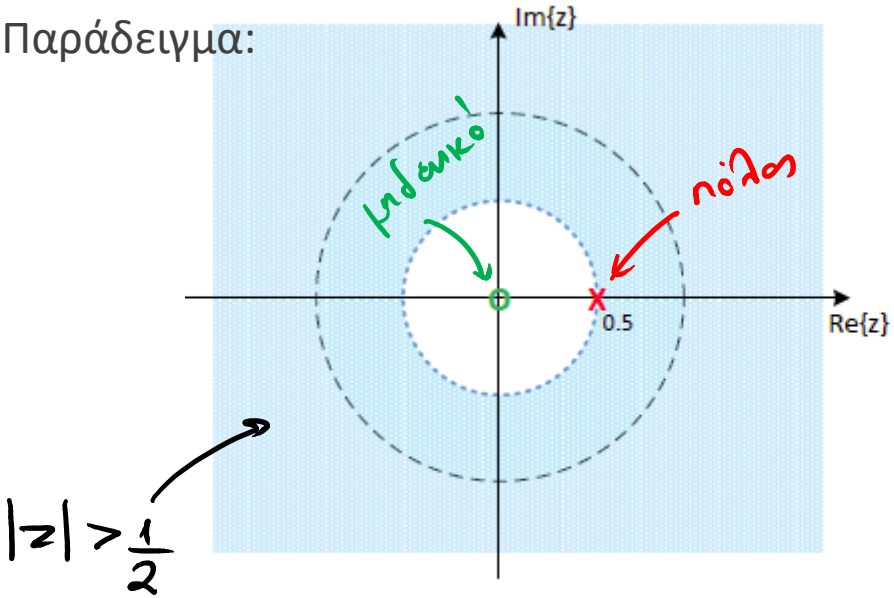
Είναι $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, $|z| > |a|$.

Ρίζες αριθμητή : $z = 0$: ονομάζονται ΜΗΔΕΝΙΚΑ

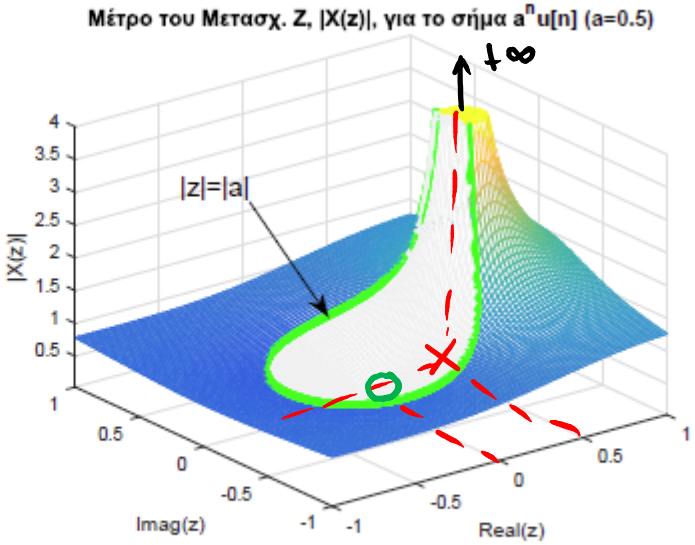
Ρίζες παρονομαστή : $z = a$: ονομάζονται ΠΟΛΟΙ

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για a = 0.5*



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z.*

Πόλος = $X(z) \to \infty$ στη θέση $z = \frac{1}{2}$

Μηδενικό = $X(z) = 0$ στη θέση $z = 0$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $a \in \mathbb{R}$.

Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-a^n u[-n-1]\right) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \underbrace{u[-n-1]}_{1,\, n \le -1} z^{-n}$

$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(az^{-1}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(az^{-1}\right)^{-n} =$

$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{-1}z\right)^n = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}, \quad |a^{-1}z| < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| < |a|}$

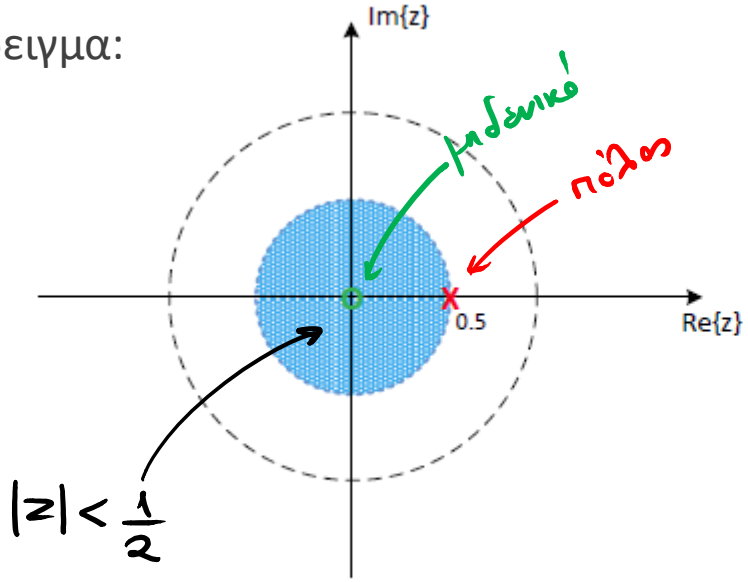
Πεδίο Σύγκλισης

Είναι $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$

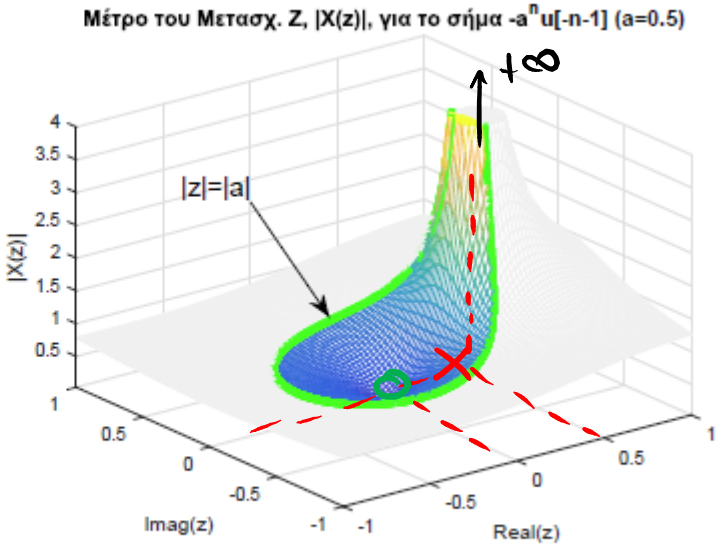
Άρα $x[n] = -a^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για* $a = 0.5$



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z για* $a = 0.5$

Είναι $X(z) = \frac{z}{z-a}$

Μηδενικά: $z = 0$: μηδενίζει το $X(z)$

Πόλοι: $z - a = 0 \Rightarrow z = a$: απειρίζει το $X(z)$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

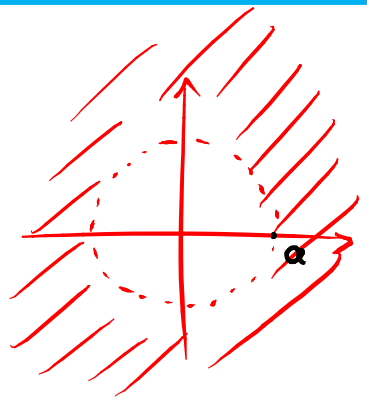
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

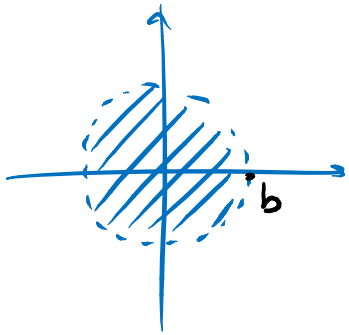
Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a^n u[n] - b^n u[-n-1] \right) z^{-n}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$

$|z| > |a| \qquad |z| < |b|$

$= \frac{1-bz^{-1}+1-az^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$





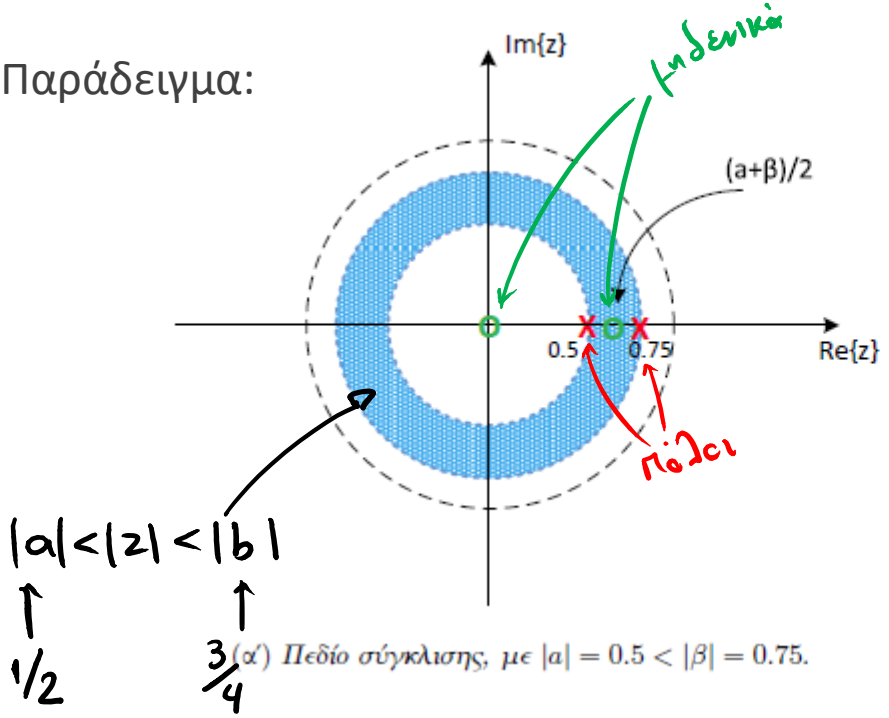
- Αν $a > b$, Πεδίο Σύγκλισης $= \emptyset$. Άρα δεν υπάρχει ο Μετ. Z!
- Αν $a < b$, Πεδίο Σύγκλισης: $|a| < |z| < |b|$, δακτύλιος

Άρα

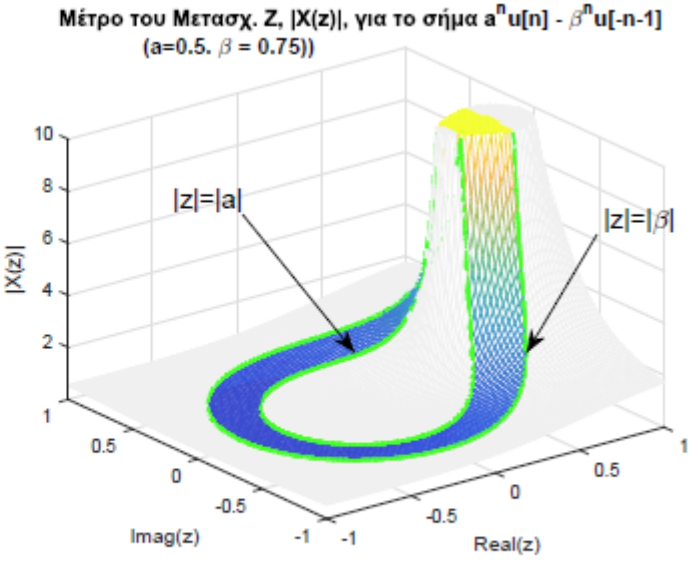
$$x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}, \quad |a| < |z| < |b|$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης, με* $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z με* $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

$$\text{Πόλοι}: \quad X(z) = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \overset{\cdot z^2}{=} \frac{2z^2-(a+b)z}{(z-a)(z-b)}, \quad |a|<|z|<|b|$$

$$\text{Μηδενικά}: \quad 2z^2-(a+b)z=0 \Rightarrow z=\frac{a+b}{2} \text{ και } z=0$$

$$\text{Πόλοι}: \quad (z-a)(z-b)=0 \Rightarrow z=a,\ z=b$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n}$$

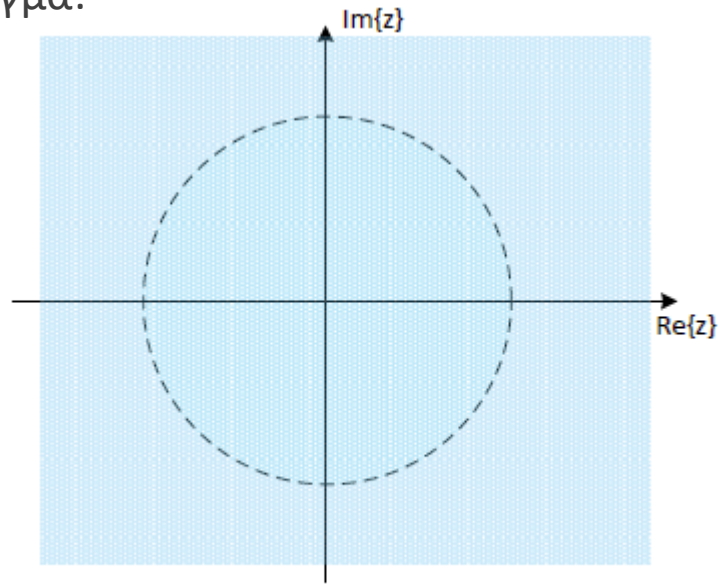
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 \cdot z^0 = 1, \quad \forall z$$

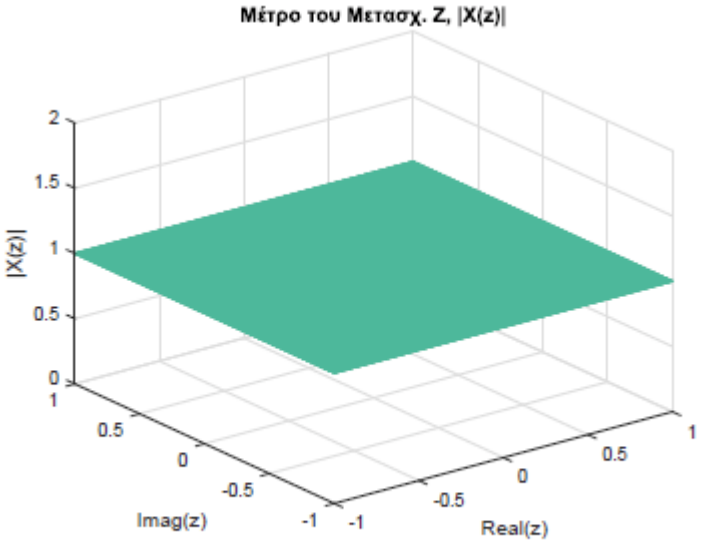
Άρα

$$x[n] = \delta[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = 1 \quad \forall z$$

- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n]$.

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0]\, z^{-n}$$

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 \cdot z^{-n_0} = z^{-n_0}$$

$$|X(z)| = \frac{1}{|re^{j\omega}|^{n_0}} = \frac{1}{|r|^{n_0}\,|e^{j\omega}|^{n_0}} = \frac{1}{r^{n_0}}$$

Οπότε

$$x[n] = \delta[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z) = z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$$

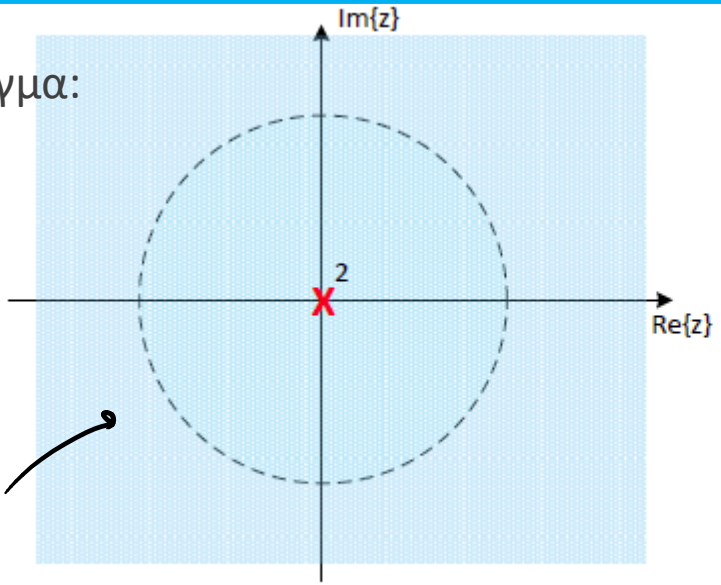
$n_0 > 0$:

Μηδενικά : $\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^{n_0}} = 0$, άρα $z = \infty$ υπάρχει μηδενικό.

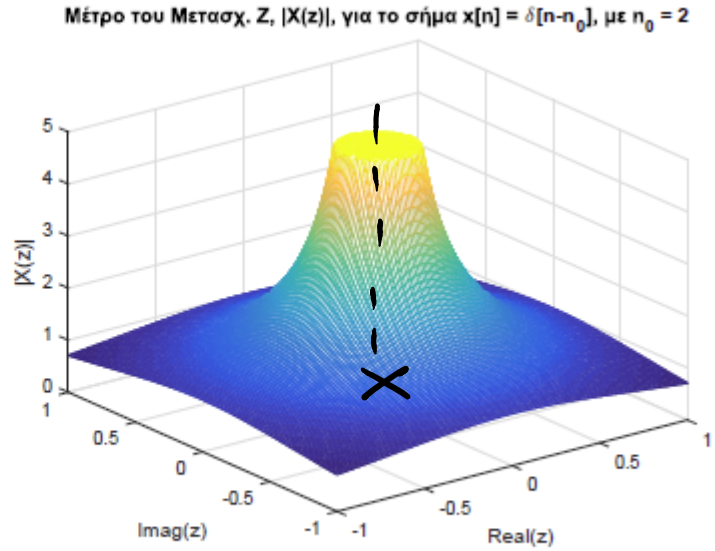
Πόλοι : $z = 0$ υπάρχει πόλος

Πεδίο Σύγκλισης : $|z| > 0$

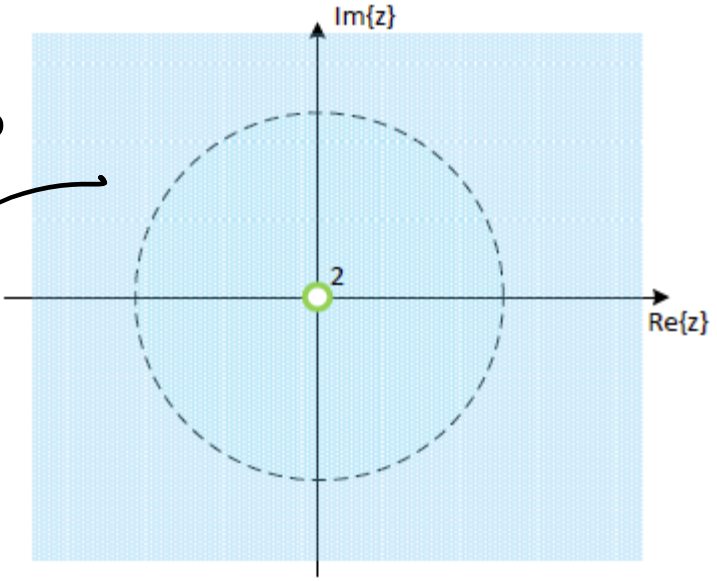
- Παράδειγμα:



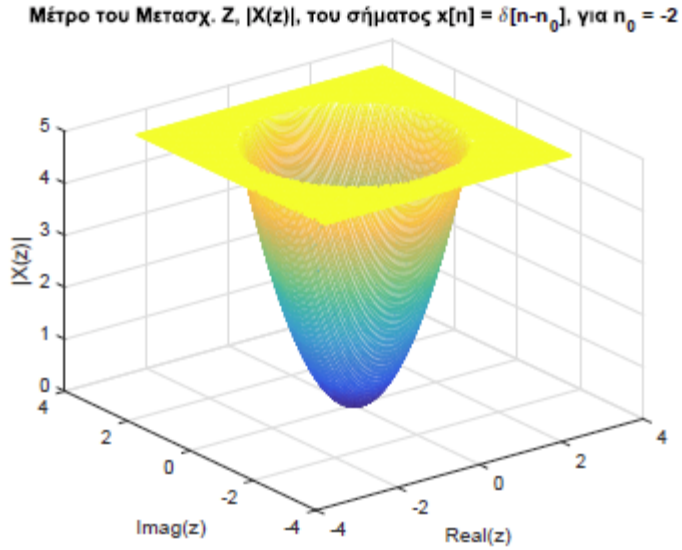
(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n - n_0]$, *για* $n_0 = 2$.



(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n - n_0]$, *για* $n_0 = -2$.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
  - ΟΧΙ!
  - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

  - Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

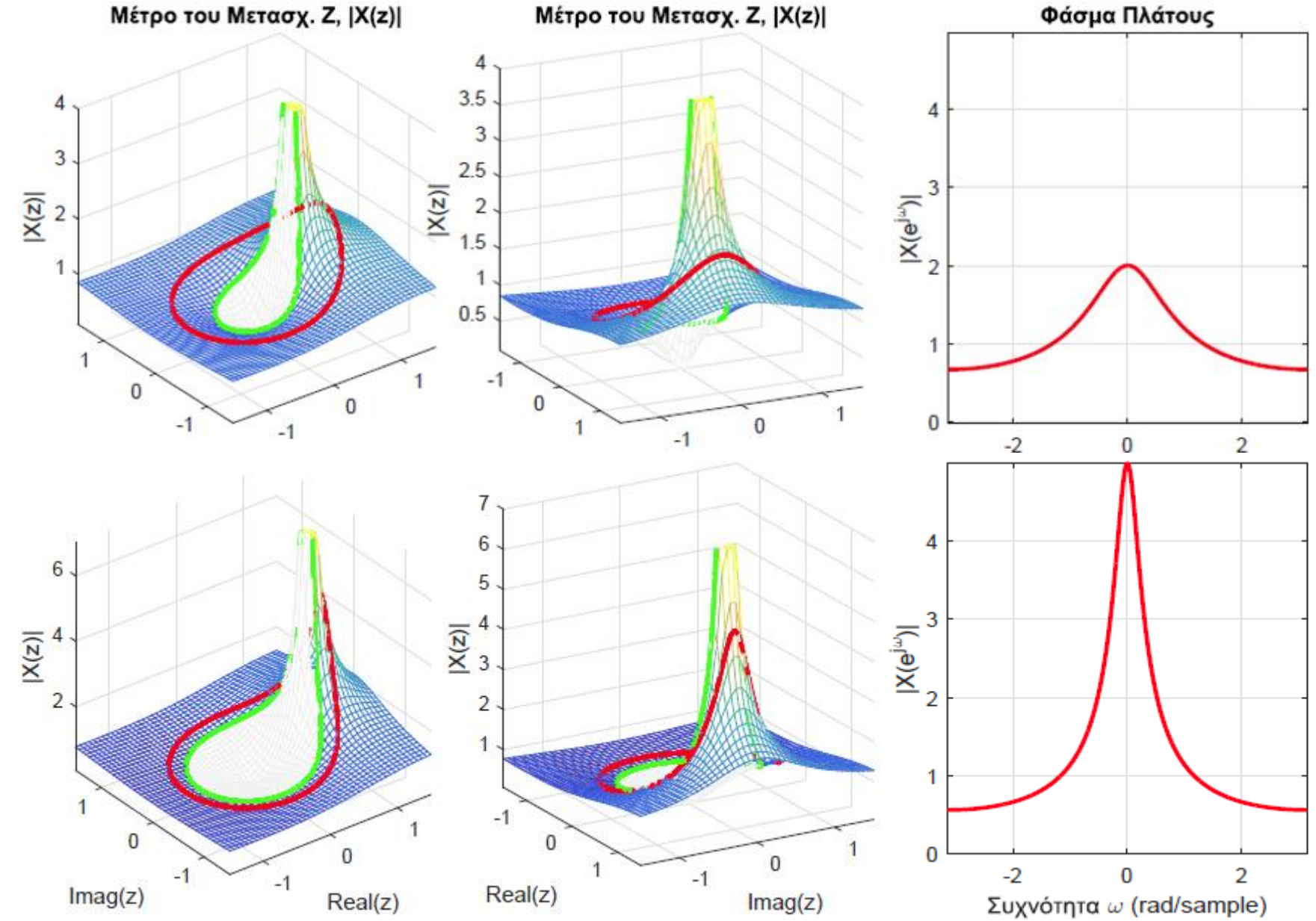
  - Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

  - Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$

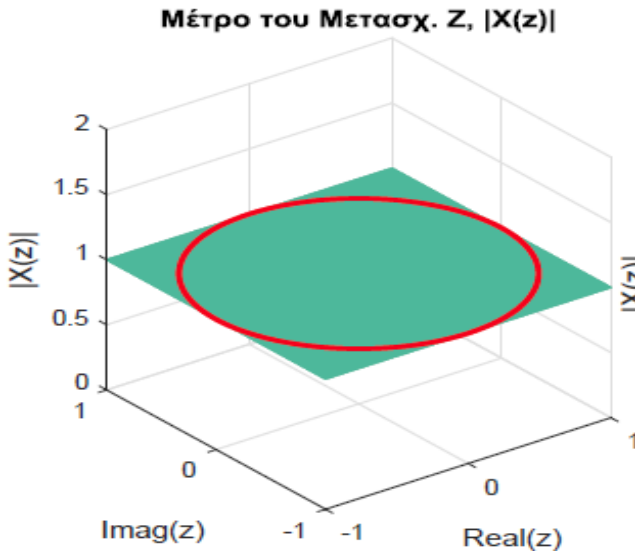
  - Δείτε τι συμβαίνει…

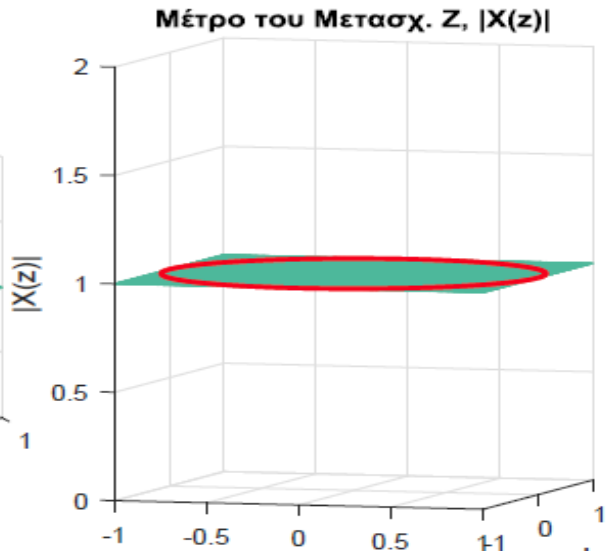
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

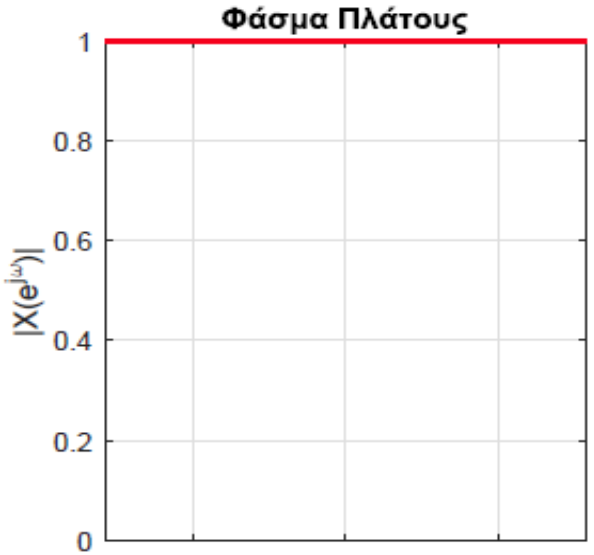
- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

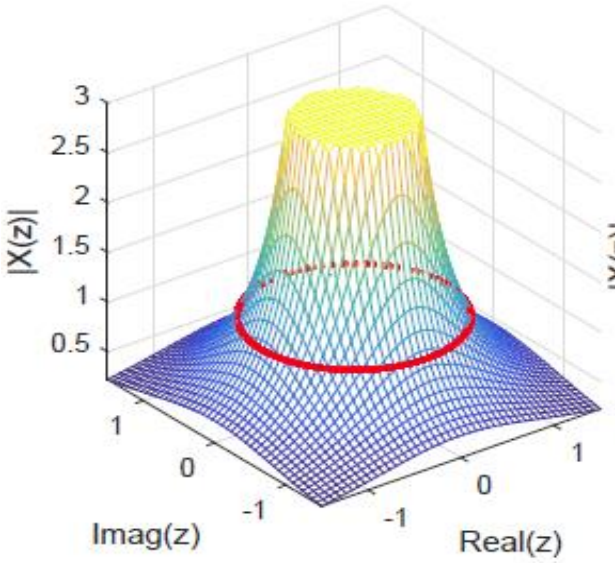


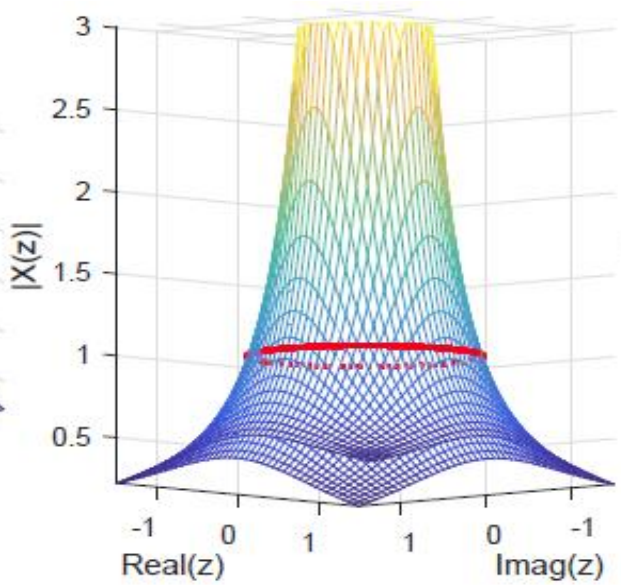
- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n],\ x[n] = \delta[n-2]$?

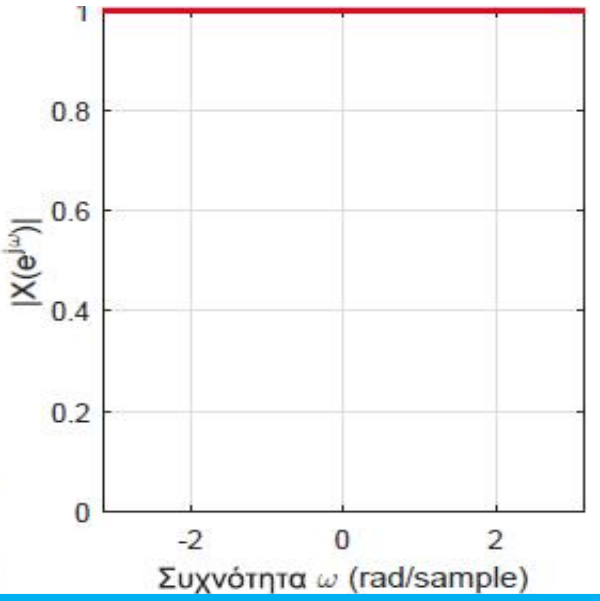






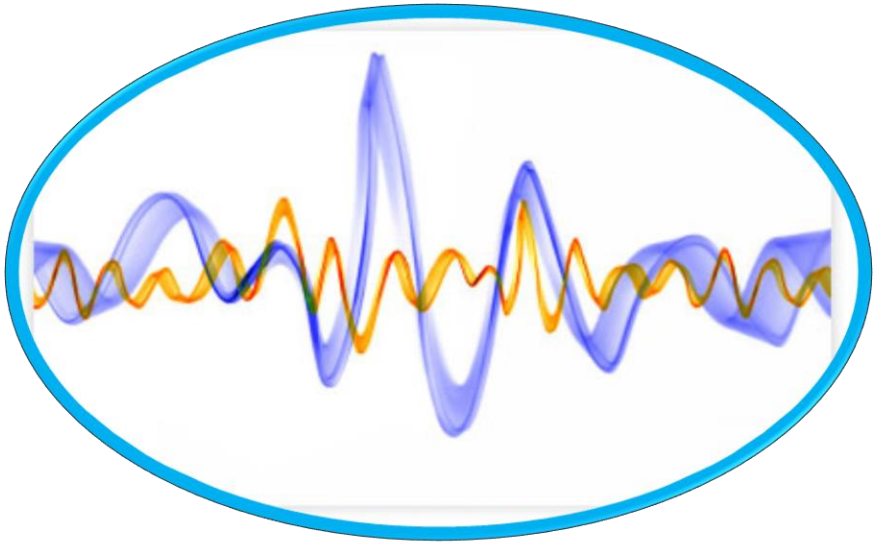






© Καφεντζής Γιώργος, PhD

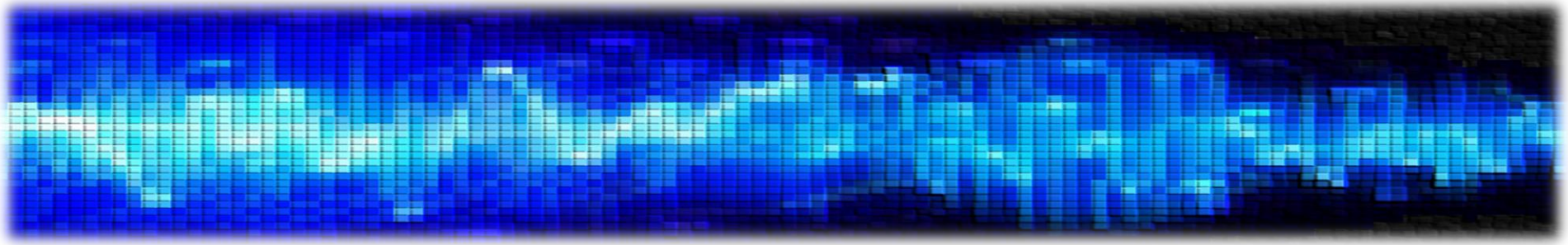
Συνεχίζεται... ☺



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η



- Μετασχηματισμός Z
- Ιδιότητες & Ζεύγη
- Πεδίο Σύγκλισης

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

- **Πεδίο Σύγκλισης**: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

- Ζεύγη:

Σήμα στο χρόνο	Μετασχηματισμός Z
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\delta[n]$	$1, \forall z$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 > 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert > 0$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 < 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert < \infty$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier (επανάληψη)**

  - Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

  - Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

  - Επιτρέπεται μόνον όταν ο τελευταίος εμπεριέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού Z!

  - Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

(α′) Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β′) Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη "φέτα" της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

(γ′) Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά "φέτες" των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n$$

$u[n]$: $1, n \geq 0$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| > 1}$$

Πεδίο Σύγκλισης

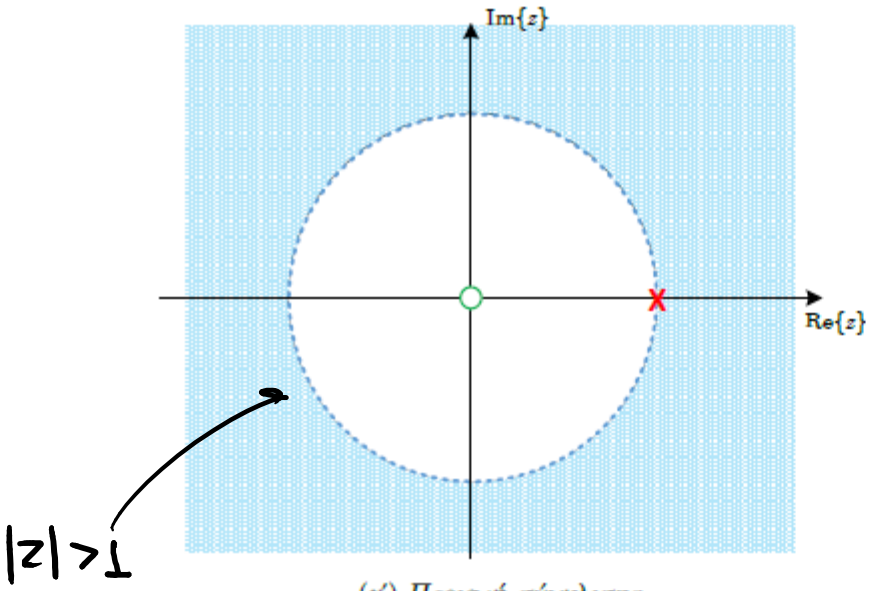
Άρα

$$x[n] = u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

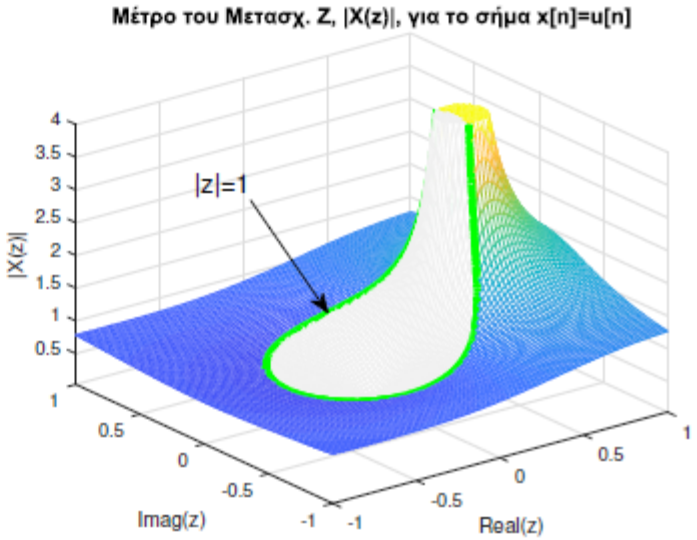
Μπορούμε να γράψαμε $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:



(α′) *Περιοχή σύγκλισης.*

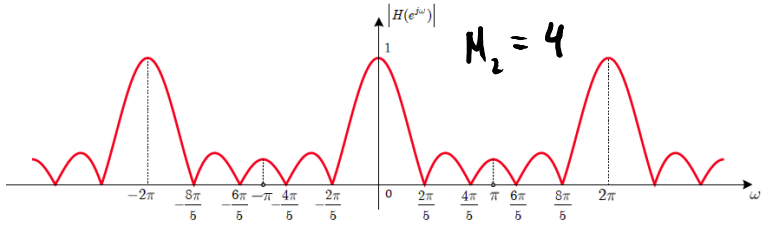


(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = u[n]$.

Πόλος: $z-1=0 \Leftrightarrow \boxed{z=1}$

Μηδενικό: $\boxed{z=0}$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα



$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} \cdot z^{-n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n}$

$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1 - z^{-(M_2+1)}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{z^{M_2+1}}{z^{M_2+1}} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{z^{M_2+1} - 1}{z^{M_2+1} - z^{M_2}} =$

$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1}{z^{M_2}} \cdot \frac{z^{M_2+1} - 1}{z - 1}$

M_2+1 πόλοι

M_2+1 μηδενικά

Πόλοι: $z^{M_2} = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (M_2 πόλοι)

$z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$

Μηδενικά: $z^{M_2+1} = 1 \Leftrightarrow z_k = e^{j\frac{2\pi k}{M_2+1}}, \; k = 0, \dots, M_2$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

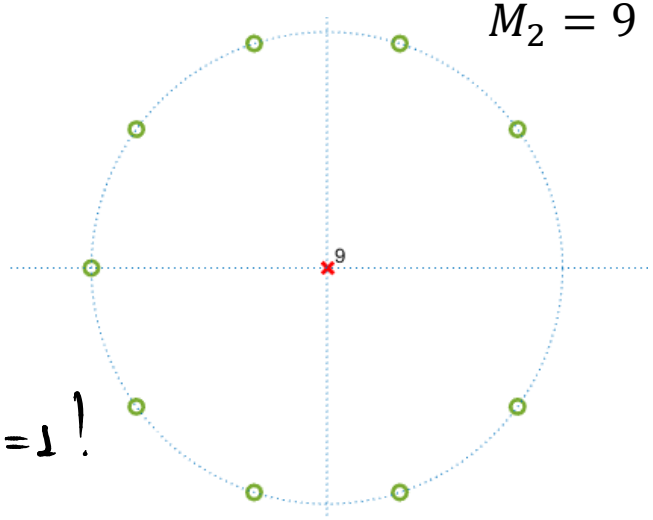
Πόλοι: $z=1$, $z=0$ (τάξης M_2)

Μηδενικά: $z_k = e^{j2k/(M_2+1)}$, $k=0,\dots,M_2$

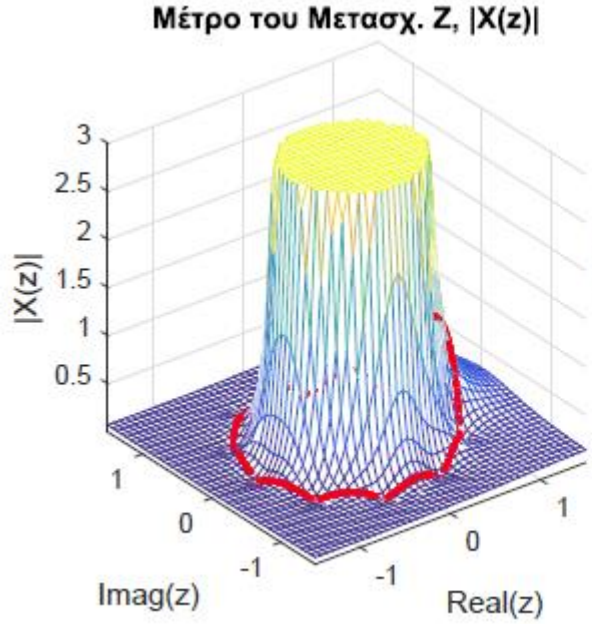
Για $k=0$, $z_0 = e^0 = 1 \Leftrightarrow z=1$

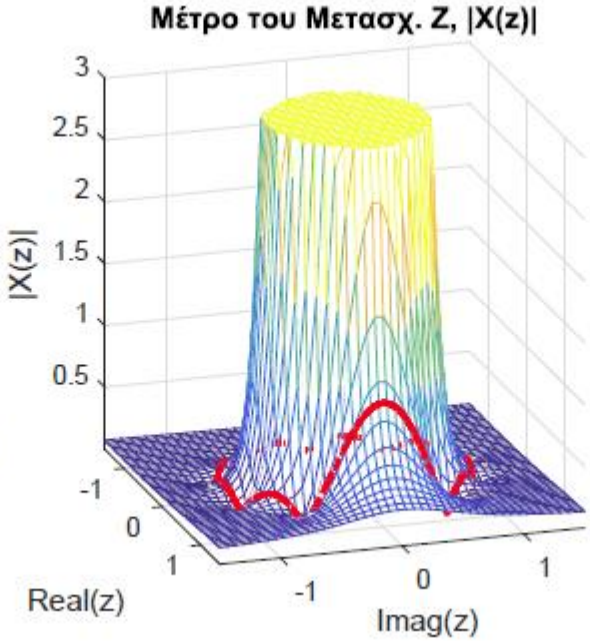
Άρα δεν υπάρχει μηδενικό ή πόλος στο $z=1$!

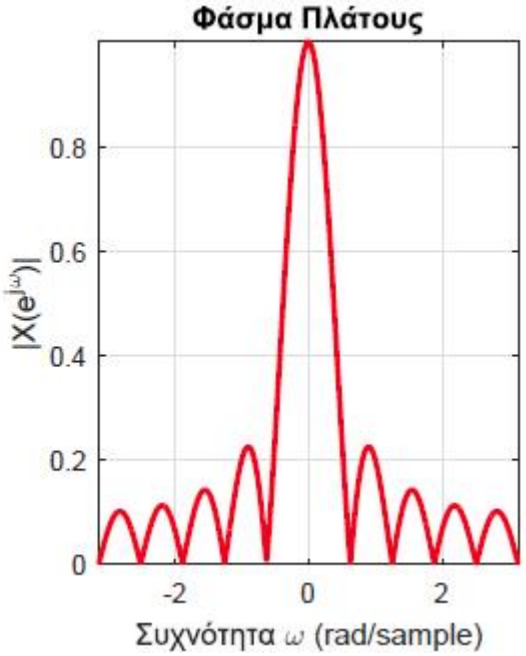
$M_2 = 9$



$|z|>0$







- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Z**	**Πεδιο Σύγκλισης**
	$\mathbf{x[n]}$ $\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{X(z)}$ $\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$	

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Z του σήματος

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \qquad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad |z| > 1/2$$

Είναι

$$W(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

γιατί $\{|z| > \frac{1}{3}\} \cap \{|z| > \frac{1}{2}\} \neq \emptyset$

$|z| > \frac{1}{3}$ (πόλος στο $\frac{1}{3}$)

$|z| < \frac{1}{3}$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$. Υπολογίστε το Μετασχ. Z του.

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$

Είναι $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]$$

Έστω $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$, $\boxed{|z| > \frac{1}{3}}$

Οπότε $x[n] = 9\,y[n+2] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 9z^2 \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = 9z^2 \frac{1}{1-\frac{1}{3z}}$

Είναι: $X(z) = 9\,\frac{z^3}{z-\frac{1}{3}}$ → $z=0$ (τάξης 3)

→ $z=\frac{1}{3}$ (και δυο πόλοι στο ∞)

Άρα $\boxed{\frac{1}{3} < |z| < \infty}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα $x[n] \in \Re$ με ρητό μετασχ. Z που έχει
    - Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$
    - Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση $z = \sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

  Βρείτε μια μορφή για το $X(z)$

$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$ Συζυγία στο χρόνο

Αν: $x[n] \in \mathbb{R}$, τότε πόλοι & μηδενικά έρχονται σε συζυγή ζεύγη!

Είναι $x[n] = x^*[n] \xleftrightarrow{Z} \boxed{X(z) = X^*(z^*)}$

Αν το $z_0 = e^{-j\frac{\pi}{8}}$ είναι πόλος του $X(z)$, τότε $X(z_0) = \infty$. Άρα και το $z_0^* = e^{j\frac{\pi}{8}}$ θα είναι πόλος του $X(z)$.

Αν το $z_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ είναι μηδενικό του $X(z)$, τότε $X(z_1) = 0$. Οπότε και το $z_1^* = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ θα είναι μηδενικό του $X(z)$.

Έτσι,

$$X(z) = A\,\frac{\left(1-\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}{\left(1-e^{j\pi/8}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\pi/8}z^{-1}\right)}, \quad A \in \mathbb{R}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα $x[n] = (2)^n u[n]$, $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε τη συνέλιξή τους

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), R_x$$
$$y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z), R_y$$
$$c_{xy}[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z), R_c \supseteq R_x \cap R_y$$

Είναι

$$2^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z|>2 = X(z)$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{4} = Y(z)$$

$$C_{xy}(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Συνέλιξη στο χρόνο:

$$A = C_{xy}(z)(1-2z^{-1})\Big]_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

$$B = C_{xy}(z)(1+\frac{1}{4}z^{-1})\Big]_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{1-2z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{9}$$

Άρα

$$C_{xy}(z) = \frac{8}{9}\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad R_c = R_x \cap R_y$$

$$= \{|z|>2\} \cap \{|z|>\tfrac{1}{4}\}$$

$$= \{|z|>2\}$$

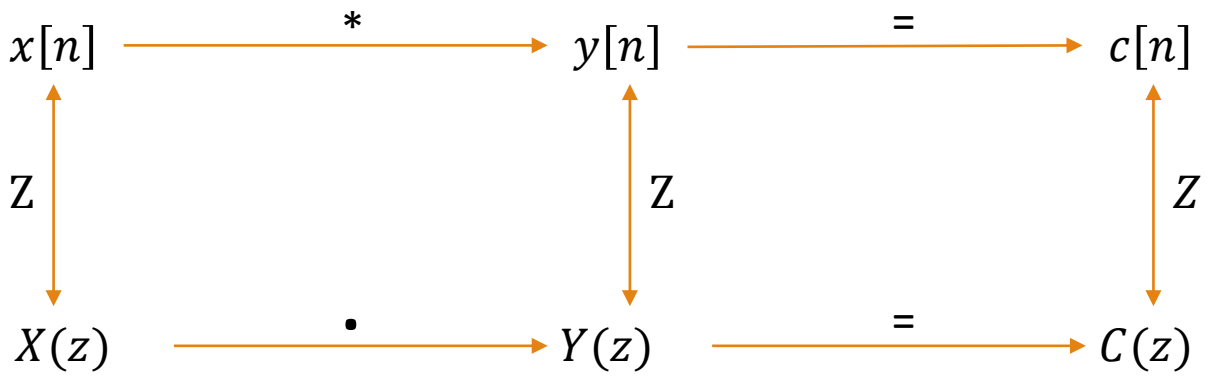
z^{-1} $\quad$ $|z|>2$ $\quad$ $|z|<2$ z^{-1} $\quad$ $|z|>\frac{1}{4}$ $\quad$ $|z|<\frac{1}{4}$ z^{-1}

$$C_{xy}[n] = \frac{8}{9}2^n u[n] + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**

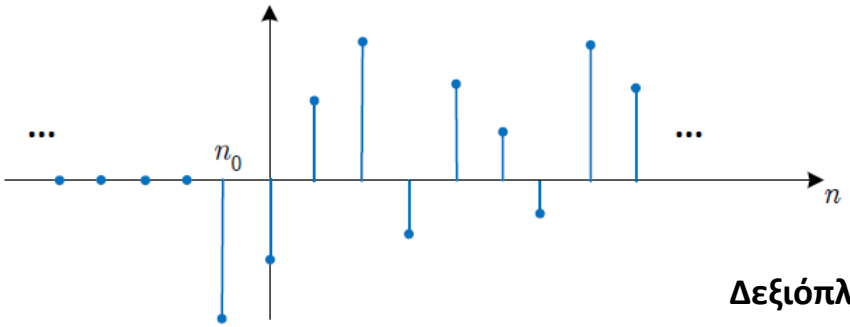
  - Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του Μετ. Z είναι:



  - Θα θυμάστε παρόμοια διαδικασία από τον DTFT
    - Μόνο που τώρα καλύπτουμε μεγαλύτερη «γκάμα» σημάτων ☺
    - Ξανά, αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

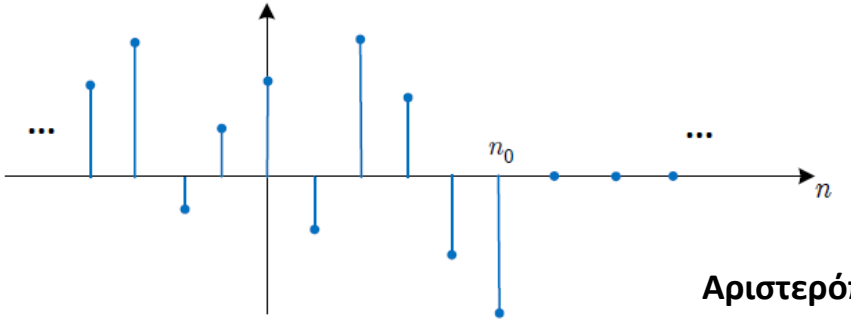
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης**



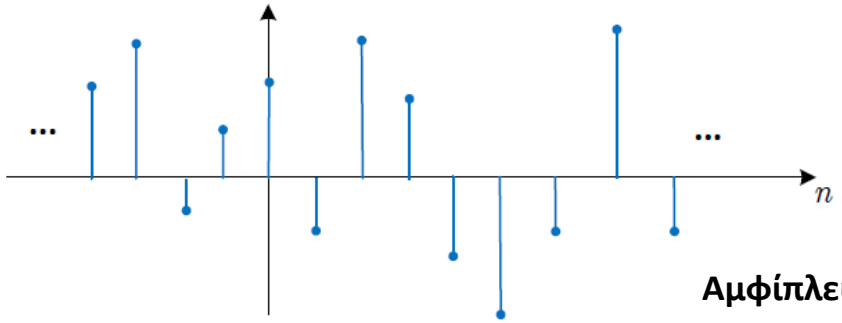
$$x[n] = 0, \quad n < n_0$$

Δεξιόπλευρο → Εξωστρεφές ROC

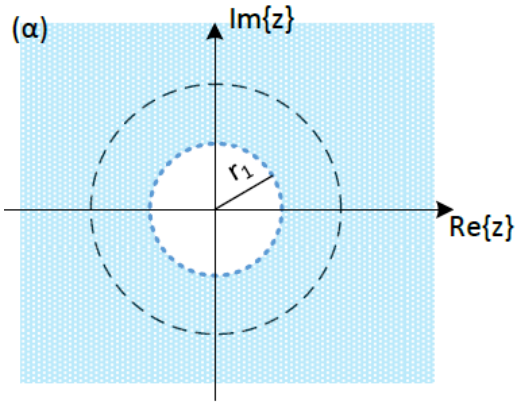


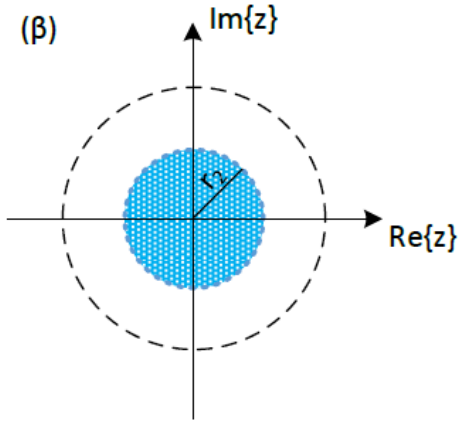
$$x[n] = 0, \quad n > n_0$$

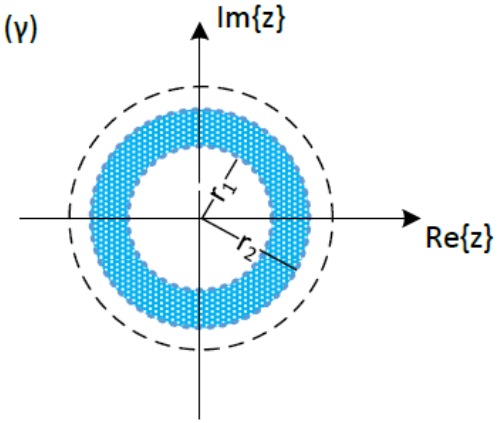
Αριστερόπλευρο → Εσωστρεφές ROC



Αμφίπλευρο → Δακτυλιοειδές ROC

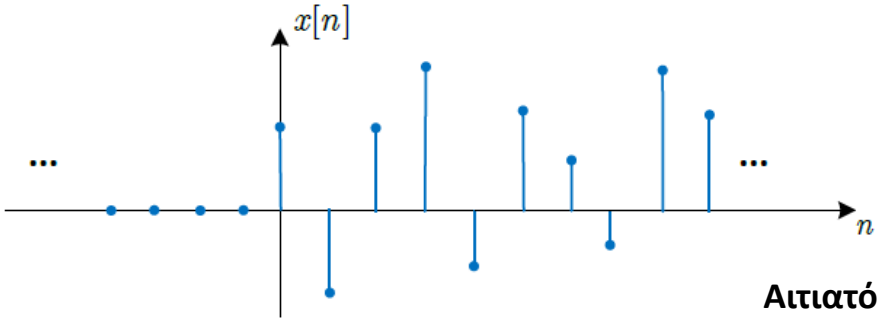






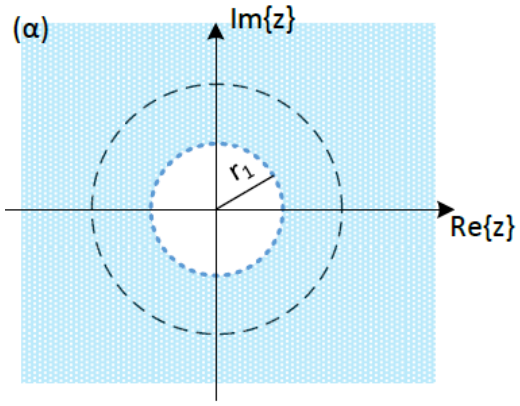
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

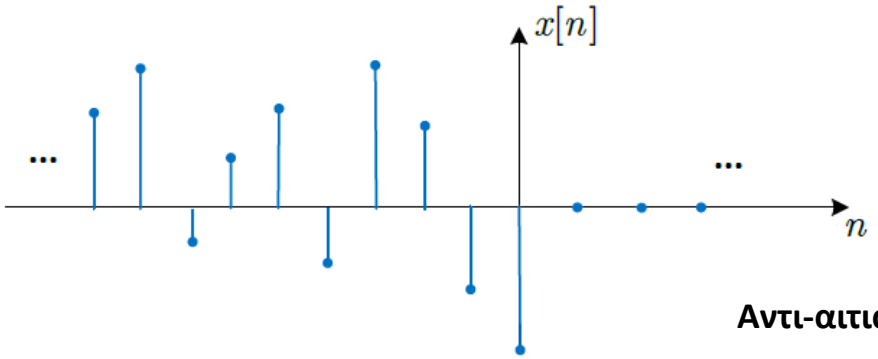
- **Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης**



$$x[n] = 0, \quad n < 0$$

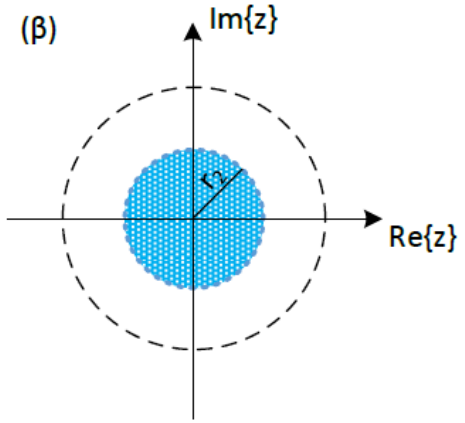
Αιτιατό → Εξωστρεφές ROC

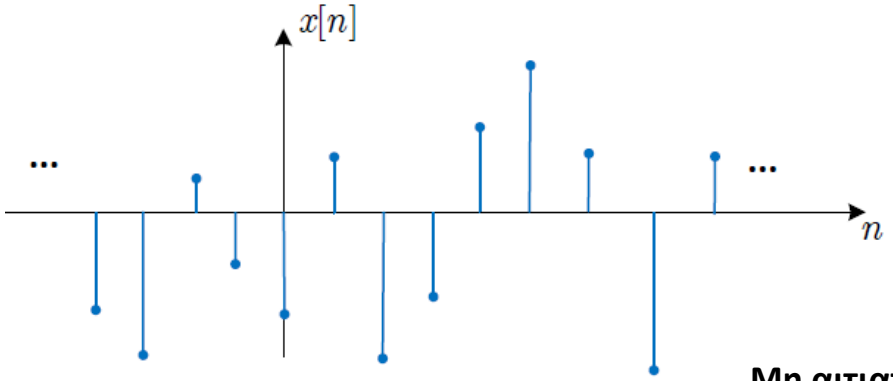




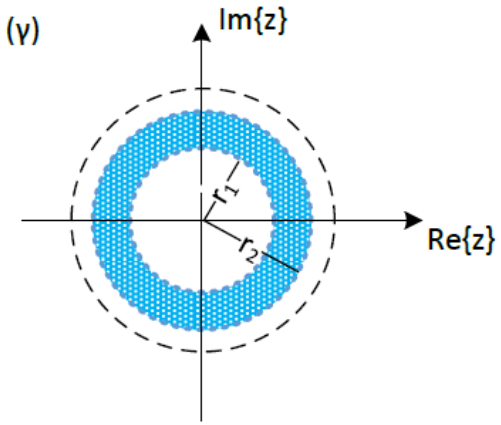
$$x[n] = 0, \quad n > 0$$

Αντι-αιτιατό → Εσωστρεφές ROC





Μη αιτιατό → Δακτυλιοειδές ROC



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Ζεύγη Μετασχηματισμών Z

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n-n_0],\ n_0>0$	z^{-n_0}	$z\neq 0$	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n+n_0],\ n_0>0$	z^{n_0}	$z\neq \infty$	πεπερασμένης διάρκειας
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$	αντι-αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$	αντι-αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$-nu[-n-1]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|<1$	αντι-αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$	αντι-αιτιατό
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό
$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

1. Το ROC μπορεί να είναι α) ένας δακτύλιος, β) μια περιοχή εκτός ενός κυκλικού δίσκου, γ) ένας κυκλικός δίσκος, (δ) όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός ίσως των $|z| = 0$ ή $|z| = \infty$

2. Το ROC **δεν** πρέπει να περιέχει πόλους!

3. Το ROC πρέπει να είναι μια συνεκτική περιοχή του μιγαδικού επιπέδου.

4. Αν το σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο, τότε το ROC περιλαμβάνει όλο το μιγαδικό επίπεδο, πλην ίσως των σημείων $z = 0$ ή $z = \infty$

5. Αν το σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το ROC του είναι εξωστρεφές, δηλ. της μορφής $|z| > \max|p_k|$, με p_k τους πόλους του σήματος
   a) Το $z = \infty$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αιτιατό
   b) Το $z = \infty$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αιτιατό

6. Αν το σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το ROC του είναι εσωστρεφές, δηλ. της μορφής $|z| < \min|p_k|$, με p_k τους πόλους του σήματος
   a) Το $z = 0$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αντι-αιτιατό
   b) Το $z = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αντι-αιτιατό

7. Αν το σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το ROC του είναι ένας δακτύλιος, δηλ. της μορφής $|p_i| < |z| < |p_j|$, με p_i, p_j δυο πόλους του σήματος με $|p_i| < |p_j|$
   - Πρέπει ασφαλώς να ικανοποιείται η ιδιότητα 2.

- **Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)**

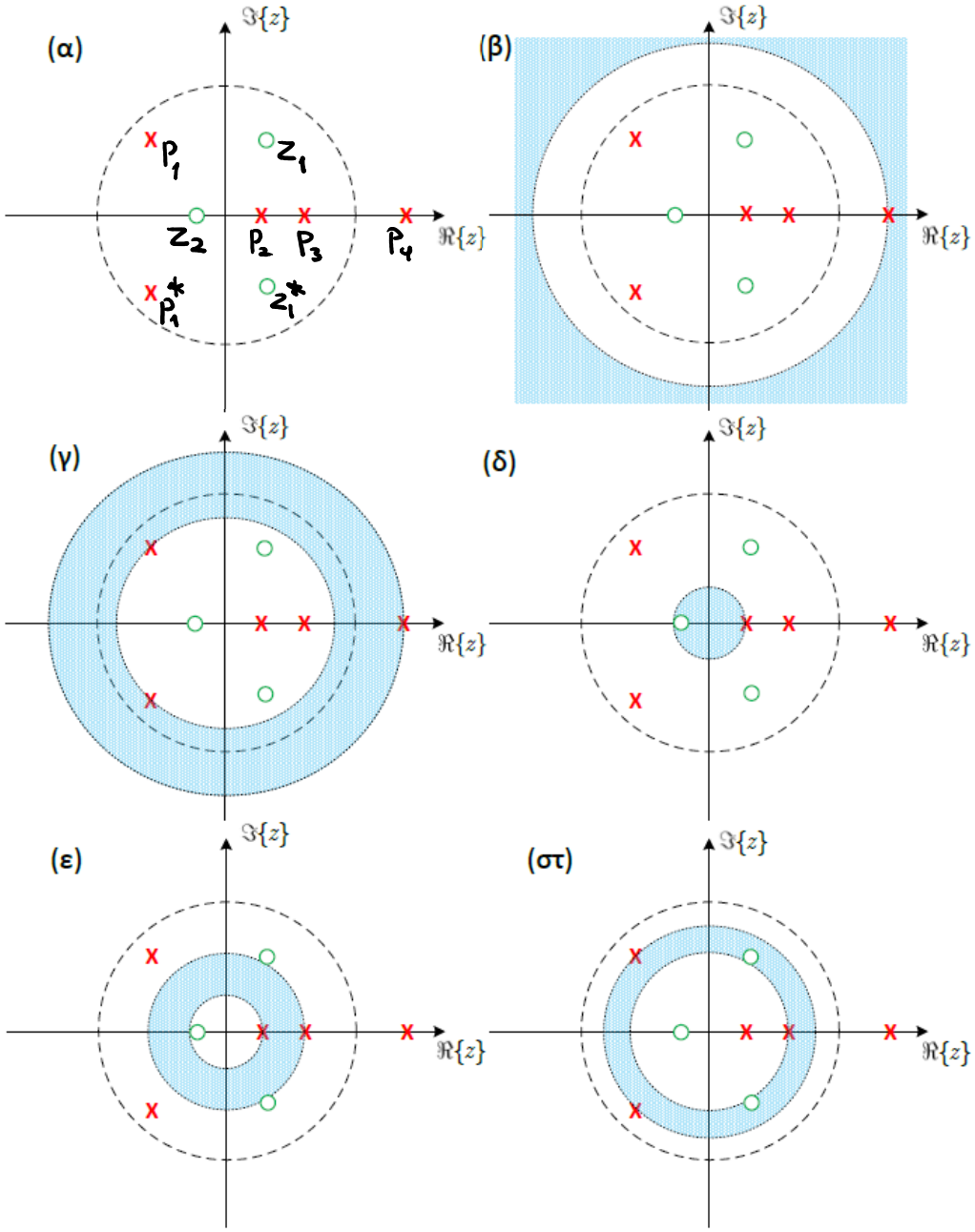
$\longrightarrow |z| < |p_2|$

$\longrightarrow |p_2| < |z| < |p_3|$

$\longrightarrow |p_3| < |z| < |p_1|$

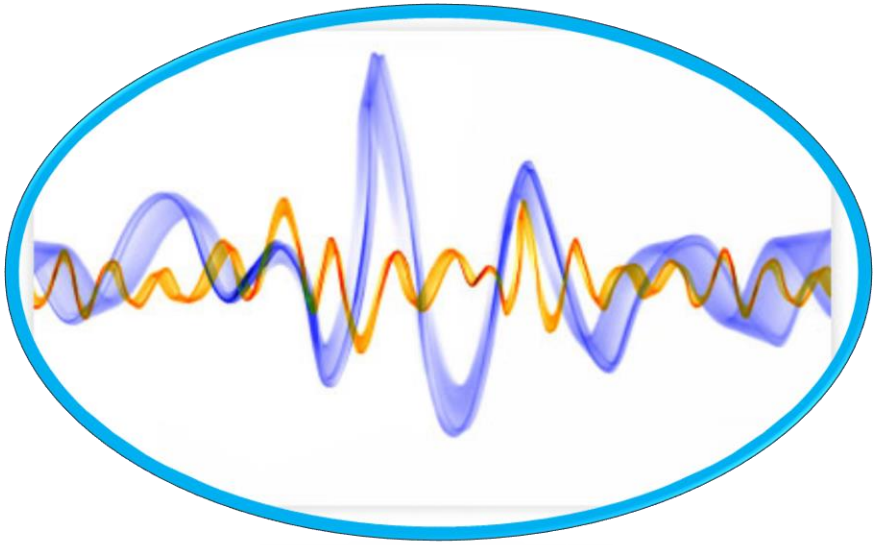
$\longrightarrow |p_1| < |z| < |p_4|$

$\longrightarrow |z| > |p_4|$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

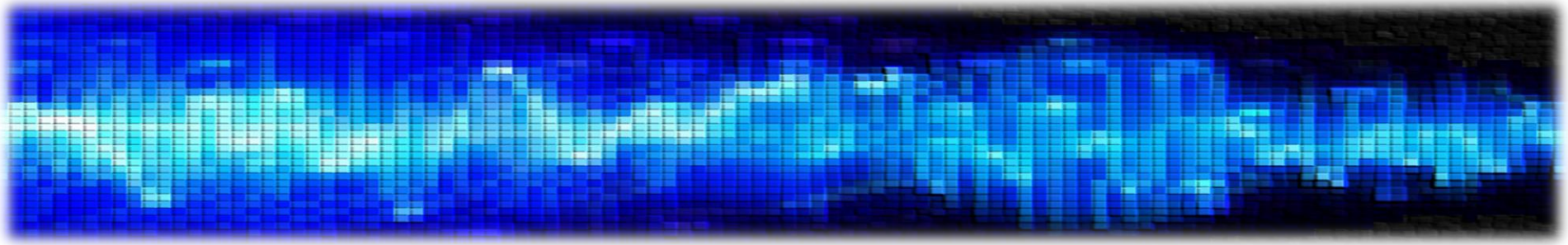
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η



- Πόλοι & Μηδενικά
- Συστήματα στο χώρο του Z

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

- **Πεδίο Σύγκλισης**: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

- Σχέση μετασχ. Z με μετασχ. Fourier

Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

(α′) Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β′) Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη "φέτα" της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

(γ′) Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά "φέτες" των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z (επανάληψη)**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχηματισμός Z**	**Πεδιο Σύγκλισης**
	$\mathbf{x[n]}$ $\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{X(z)}$ $\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$	

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

- Γνωρίζουμε ήδη (διαισθητικά) τη σημασία των πόλων και των μηδενικών στο μετασχ. Z
- Η αναπαράσταση των πόλων και μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο συνιστά το **περίφημο διάγραμμα πόλων-μηδενικών**
- Ας μιλήσουμε λίγο περισσότερο για αυτό το διάγραμμα
- Έστω ότι έχουμε ένα ρητό μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ \ldots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ \ldots + b_N z^{-N}}$$

- Παραγοντοποιώντας

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^{N}(z - \psi_l)}$$

- Προφανώς, τα ξ_k, ψ_l είναι τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα
  - Είναι εμφανές ότι υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι
- Όμως υπάρχει και ο όρος z^{N-M}! Ας τον δούμε…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{l=1}^{N}(z-\psi_l)}$$

  - Αν N $>$ M τότε υπάρχουν επιπλέον N-M μηδενικά στο $z = 0$
  - Αν N $<$ M τότε υπάρχουν επιπλέον M-N πόλοι στο $z = 0$

  - Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τον **ίδιο αριθμό πόλων και μηδενικών**!

- Αν τώρα

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{l=1}^{N}(z-\psi_l)} = \frac{a_0}{b_0} z^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-\frac{\xi_k}{z}\right)}{\prod_{l=1}^{N}\left(1-\frac{\psi_l}{z}\right)}$$

τότε

  - Αν N $>$ M, τότε $\lim_{z\to\infty} X(z) = 0$, οπότε υπάρχουν επιπλέον N-M μηδενικά στο $z = \infty$
  - Αν N $<$ M, τότε $\lim_{z\to\infty} X(z) = \infty$, οπότε υπάρχουν επιπλέον M-N πόλοι στο $z = \infty$

- Ξανά, **όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά**!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**
  - Παράδειγμα:
    - Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

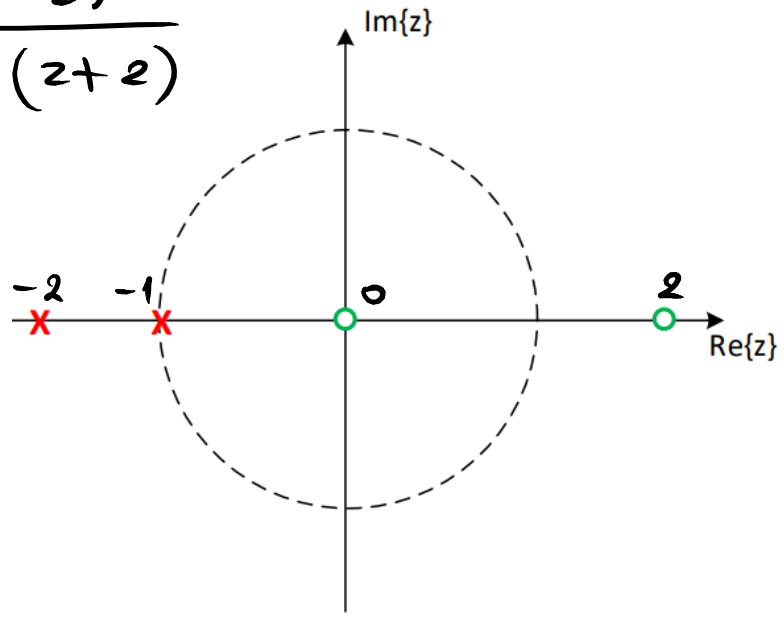
$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Είναι $X(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} \overset{\cdot z^2}{=\!=} \dfrac{z^2(1-2z^{-1})}{z^2(1+3z^{-1}+2z^{-2})}$

$= \dfrac{z^2-2z}{z^2+3z+2} = \dfrac{z(z-2)}{(z+1)(z+2)}$

Πόλοι: $z=-1$
$z=-2$

Μηδενικά: $z=0$
$z=2$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

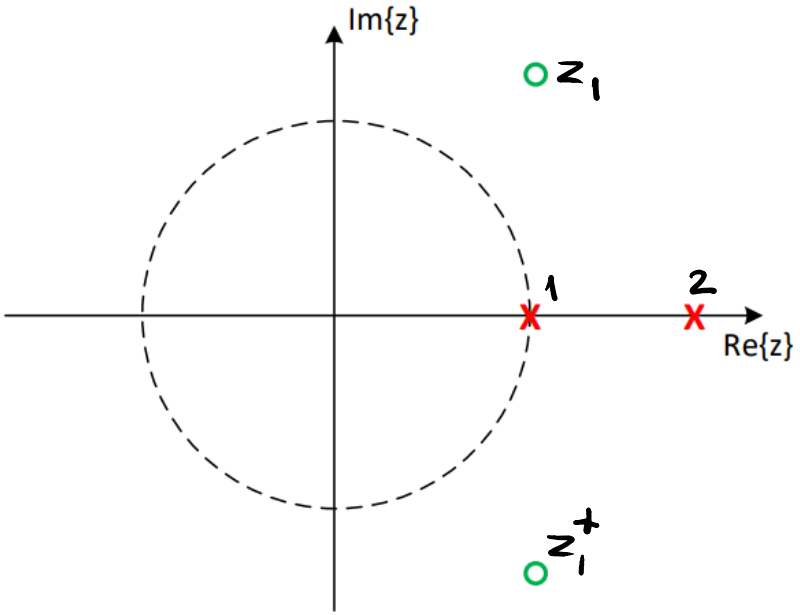
- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**
  - Παράδειγμα:
    - Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Είναι $X(z) \overset{\cdot z^2}{=} \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2} = \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z-2)(z-1)}$, $z_1 = 1 + j\sqrt{2}$

Μηδενικά: $z_1 = 1 + \sqrt{2}j$,
$z_2 = z_1^* = 1 - j\sqrt{2}$

Πόλοι: $z = 1$
$z = 2$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

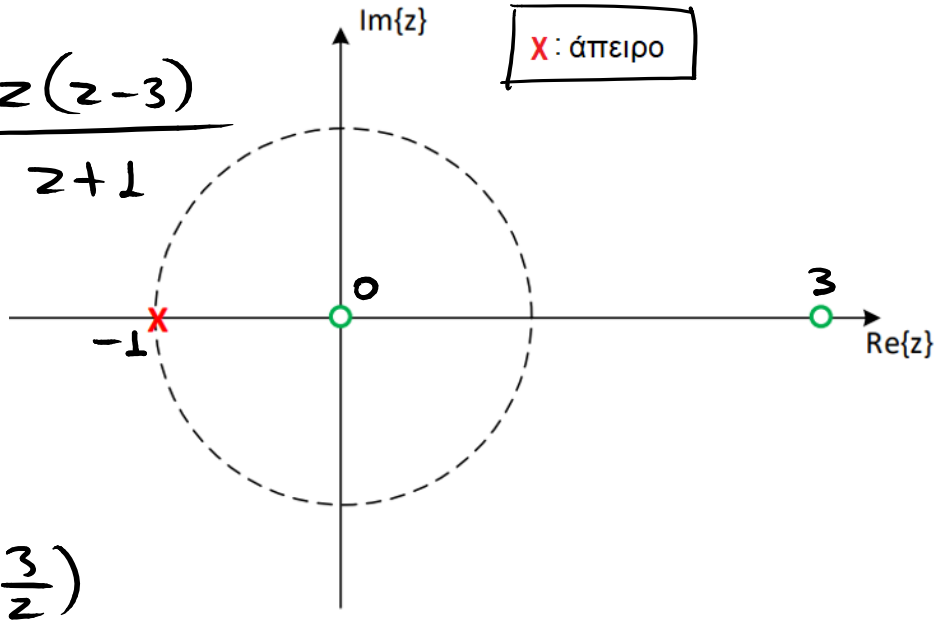
- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**
  - Παράδειγμα:
    - Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z + 1}$$

Είναι $X(z) = \frac{z^2-3z}{z+1} = \frac{z(z-3)}{z+1}$

Μηδενικά: $z=0$, $z=3$

Πόλοι: $z=-1$, ?



Είναι $X(z) = z\frac{z-3}{z+1} = z\frac{z(1-\frac{3}{z})}{z(1+\frac{1}{z})}$

$= z\frac{1-\frac{3}{z}}{1+\frac{1}{z}}$, $\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} z\frac{1-3/z}{1+1/z} = \infty$

Υπάρχει ένας πόλος στο ∞!

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Ορισμός:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- Στα πλαίσια των σημάτων και συστημάτων χρησιμοποιούνται εναλλακτικά τρεις τρόποι υπολογισμού του αντιστρόφου

1. Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρές
2. Τη μακρά διαίρεση
3. Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Θα επικεντρωθούμε μόνο στην τελευταία, καθώς σχετίζεται στενά με τα ΓΧΑ συστήματα και την ιδιότητα της συνέλιξης

- Για κάθε μέθοδο μπορείτε να δείτε τις σημειώσεις σας

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Η γενική μορφή ενός μετασχ. Z των σημάτων που είδαμε είναι

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

- Μπορούμε να διασπάσουμε το παραπάνω κλάσμα ως

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k\neq i}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{L} \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

όπου

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z)\Big|_{z=d_k}$$

$$C_m = \frac{1}{(L-m)!(-d_i)^{L-m}} \left\{ \frac{d^{L-m=L}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)] \right\}\Big|_{z=d_i}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}, \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

$z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \;\big|\; \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1$

$-(z^{-2} - 3z^{-1} + 2) \;\big|\; 2$

$5z^{-1} - 1$

$$\Rightarrow X(z) = 2 + \underbrace{\frac{5z^{-1} - 1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}}_{G(z)}$$

$$= 2 + G(z)$$

Οπότε $$X(z) = 2 + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

$$A = \left.\frac{5z^{-1} - 1}{1 - z^{-1}}\right]_{z^{-1}=2} = -9$$

$$B = \left.\frac{5z^{-1} - 1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right]_{z^{-1}=1} = 8$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**
  - Παράδειγμα:

Άρα $X(z) = 2 + G(z) = 2 - 9\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 8\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$

z^{-1} $\quad$ z^{-1}

- $|z| > \frac{1}{2}$
- $|z| < \frac{1}{2}$

- $|z| > 1$
- $|z| < 1$

$x[n] = 2\delta[n] + g[n]$

$= 2\delta[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 8u[-n-1]$

$-a^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 (1 - z^{-1})}, \qquad |z| > 1$$

Είναι $$X(z) = \frac{C_1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{C_2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{A}{1 - z^{-1}}$$

Είναι

$$A = X(z)(1 - z^{-1})\Big]_{z^{-1}=1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\Big]_{z^{-1}=1} = 4$$

$$C_2 = X(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\Big]_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1 - z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=2} = -1$$

$$C_1 = \frac{1}{(2-1)!\left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1}} \frac{d}{dz^{-1}} X(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\Big]_{z^{-1}=2}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**
  - Παράδειγμα:

$$= -2 \left. \frac{d}{dz^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} \right]_{z^{-1}=2} = -2 \left. \frac{\overbrace{1' \cdot (1-z^{-1})}^{0} - (1-z^{-1})' \cdot 1}{(1-z^{-1})^2} \right]_{z^{-1}=2}$$

!!!

$$= -2 \left. \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \right]_{z^{-1}=2} = -2 \frac{1}{(1-2)^2} = -2$$

Άρα

$$X(z) = \frac{4}{1-z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}, \quad |z|>1$$

$\frac{4}{1-z^{-1}}$	$\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$	$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$
• $\|z\|>1$	• $\|z\|>\frac{1}{2}$	• $\|z\|>\frac{1}{2}$
• $\|z\|<1$	• $\|z\|<\frac{1}{2}$	• $\|z\|<\frac{1}{2}$

$$x[n] = 4u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \ ?$$

$$\frac{-1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} = \frac{-1 \cdot z^{-1} \cdot z}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} = \frac{-2\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)z}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

$$n a^n u[n] \longleftrightarrow z$$

$$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z|>|a|$$

!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**
  - Παράδειγμα:

Καταλήξαμε στο: $-\dfrac{2\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\cdot z = -2\dfrac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\cdot z^{1} =$

z^{-1} ↔ $n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

z^{-1} ↕

$-2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]$

από ιδιότητα χρονικής καθυστέρησης

Άρα

$$X(z) = 4u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1].$$

Πόλοι - Μηδενικά: $X(z) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\left(1-z^{-1}\right)} = \dfrac{z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}$

Πόλοι: $z=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}, z=1$

Μηδενικά: $z=0, z=0, z=0$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- Ο Μετασχ. Z είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αναπαράστασης σημάτων

- Η εμπειρία σας ως τώρα ίσως σας έχει αποκαλύψει τη χρήση του για ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων…
  - …μέσω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο → γινόμενο στο χώρο του Z

- Ας «πλεύσουμε» στο χώρο των συστημάτων με τον ίδιο τρόπο που κάναμε και στο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ξεκινάμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης και ιδιοτιμής!

  - Μπορούμε να δείξουμε εύκολα (do it! ☺) ότι το σήμα $x[n] = Az^{-n}$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Η ιδιοτιμή του δίνεται από την εξίσωση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

η οποία βλέπετε ότι αποτελεί το Μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης του ΓΧΑ συστήματος

- Ο μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

δε θα μπορούσε να μην έχει κι αυτός το δικό του όνομα: **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)**

- Η «έκδοση» του μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα**, όπως ήδη γνωρίζετε

- Θα θυμάστε ίσως ότι τα ΓΧΑ συστήματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:
  - **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)**
  - **Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)**

- **FIR συστήματα**
- Περιγράφονται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k], \qquad N_1, N_2 > 0$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k}$$

- Βλέπετε ότι αποτελείται από θετικές και αρνητικές δυνάμεις του z
- Μπορούμε να το γράψουμε ως

$$H(z) = \frac{1}{z^{N_2}} \sum_{k=0}^{N_1+N_2} b_{k-N_1} z^{N_1+N_2-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z-c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρήστε ότι έχει N_2 πόλους στο $z = 0$ και N_1 πόλους στο άπειρο
  - ROC: $\{0 < |z| < \infty\}$
- Επίσης έχει $N_1 + N_2$ μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **FIR συστήματα**

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Αν $N_1 = 0$, τότε έχουμε ένα αιτιατό FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_2 πόλους στο $z = 0$
  - ROC: $\{|z| > 0\}$
- Επίσης έχει N_2 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο
- Αν $N_2 = 0$, τότε έχουμε ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{0} b_k z^{-k} = b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} (z - c_k) = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_1 πόλους στο $z = \infty$
  - ROC: $\{|z| < \infty\}$
- Επίσης έχει N_1 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **FIR συστήματα**

- **Συμπεράσματα**

- Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$

- Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$

- Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **IIR συστήματα**
- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι

- Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$

- Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$

- Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

$$\updownarrow Z$$

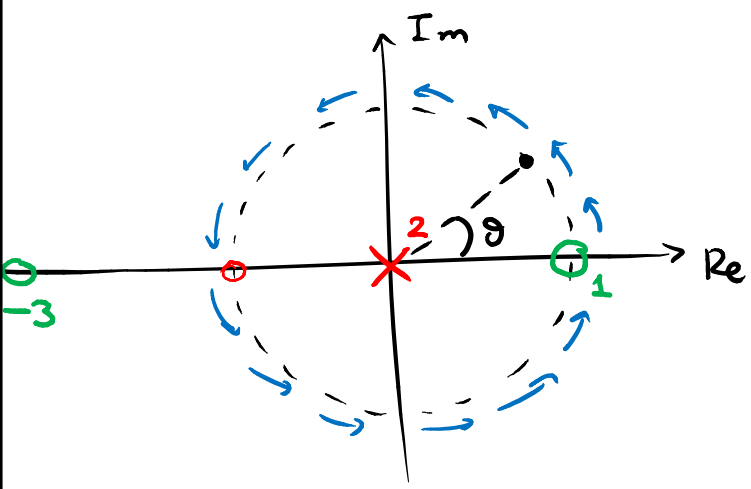
$$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z)$$

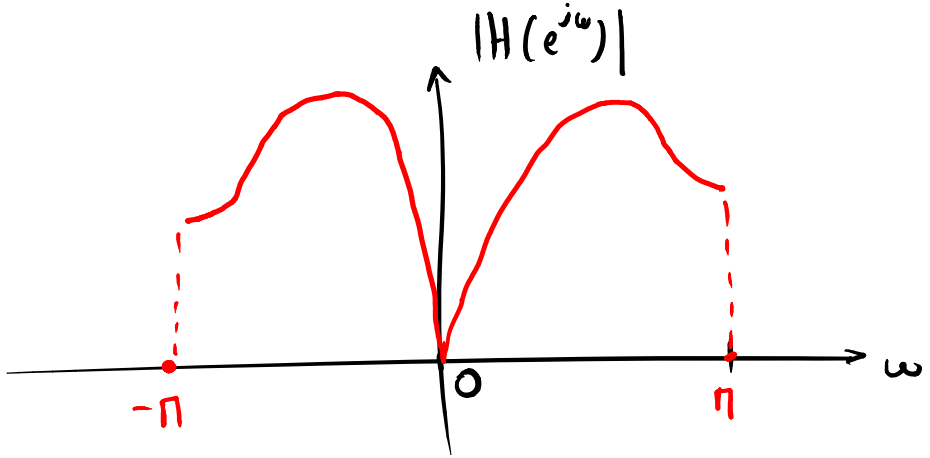
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}$$

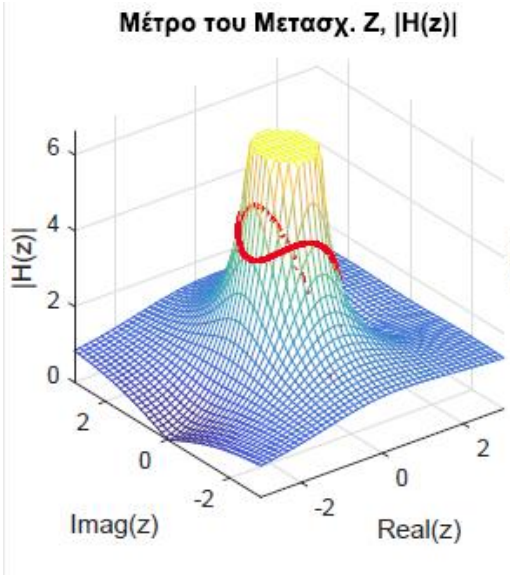
Είναι $H(z) = \dfrac{z^2 + 2z - 3}{z^2}$ → 2 μηδενικά : $z = -3$, $z = 1$

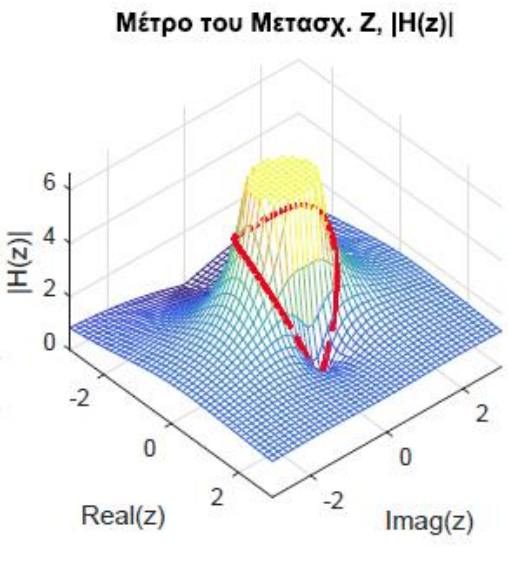
↳ 2 πόλοι στο $z = 0$

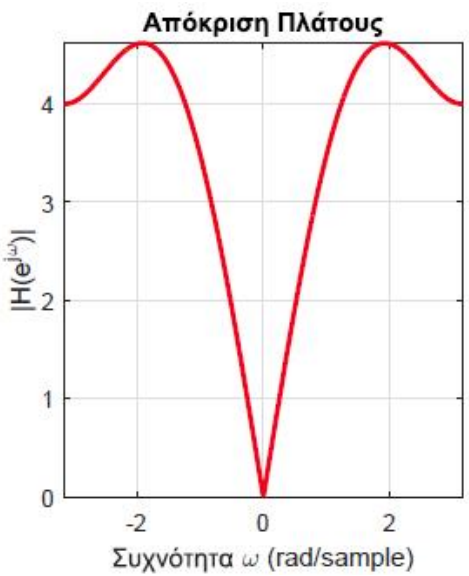
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:





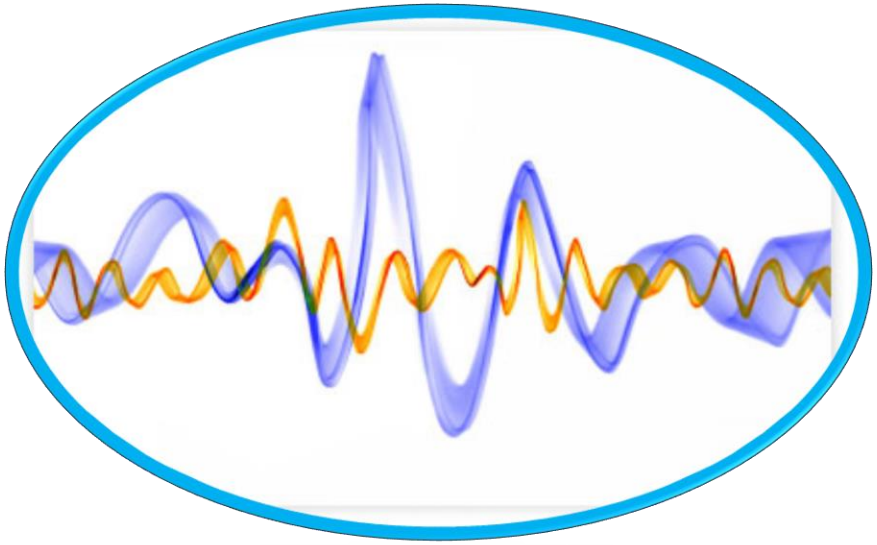






© Καφεντζής Γιώργος, PhD

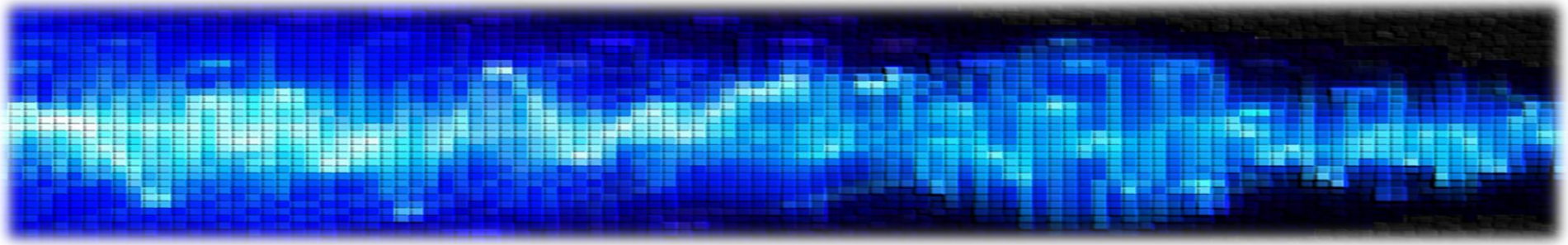
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 14Η



- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Z

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **FIR συστήματα (επανάληψη…)**

- **Συμπεράσματα**

- Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$

- Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$

- Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **IIR συστήματα (επανάληψη…)**
- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι

- Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$

- Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$

- Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών (επανάληψη…)

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Το σύστημα είναι FIR και αιτιατό: $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \dots$

Είναι $$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-3}X(z) - \frac{2}{3}z^{-4}X(z)$$

$$= X(z)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}\right)$$

Άρα $$H(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}, \quad |z| > 0$$

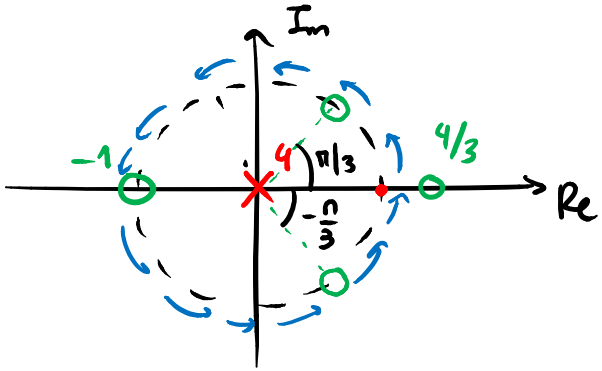
Είναι $$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4}$$

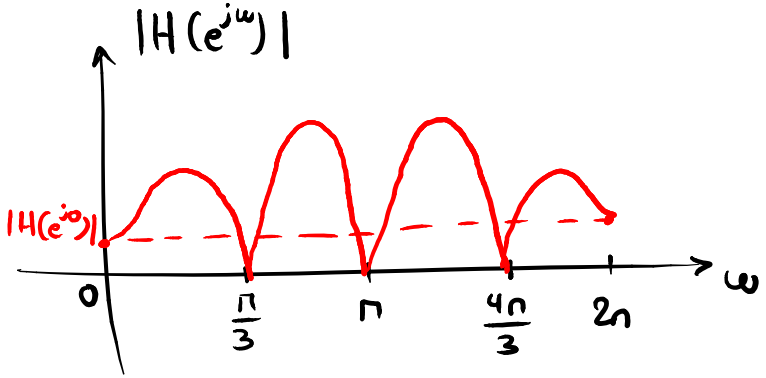
→ $z = -1$, $z = 4/3$, $z = e^{j\frac{\pi}{3}}$, $z = e^{-j\frac{\pi}{3}}$ } (4)

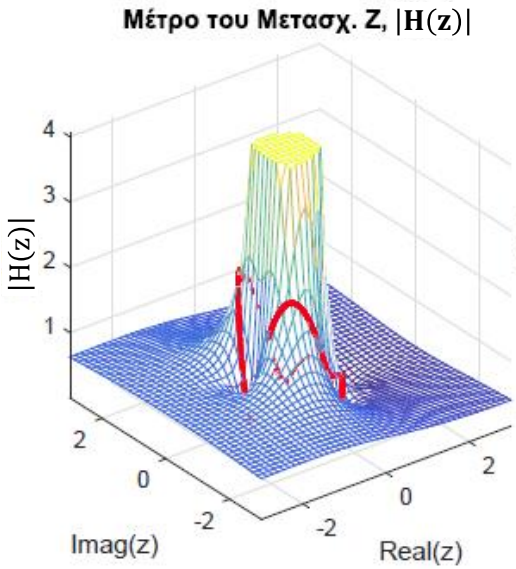
→ Πόλοι: $z = 0$ (4)

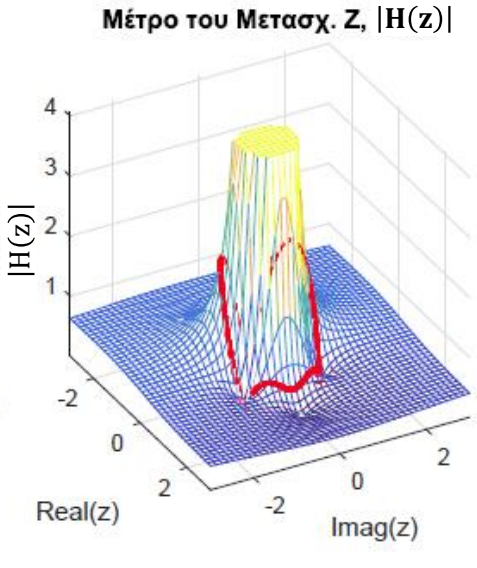
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

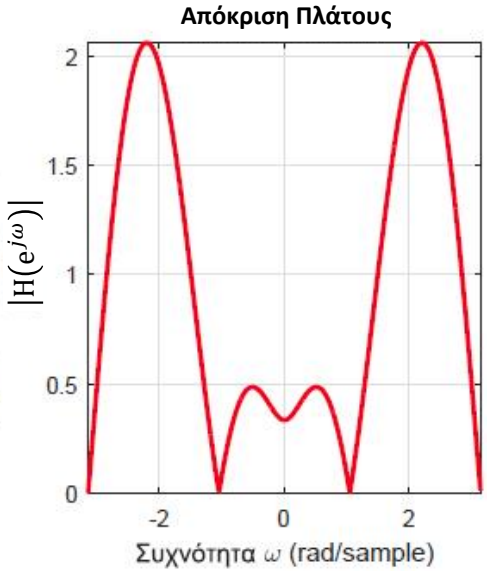
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:











- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 3z^{-2}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)\left(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - 2z^{-1}\right)$$

$z=0,\ z=2$

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{(z+3)(z-1)} = \frac{z(z-2)}{(z+3)(z-1)}$$

$z^2 + 2z - 3 = 0 \rightarrow z = -3,\ z = 1$ $\Rightarrow$ ROC: $1 < |z| < 3$

λόγω μη αιτιατότητας του συστήματος

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Είναι $H(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+3z^{-1}}$

$$A = H(z)(1-z^{-1})\Big]_{z^{-1}=1} = \frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=1} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

$$B = H(z)(1+3z^{-1})\Big]_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

Άρα $H(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{5}{4}\frac{1}{1+3z^{-1}}$, ROC : $1 < |z| < 3$

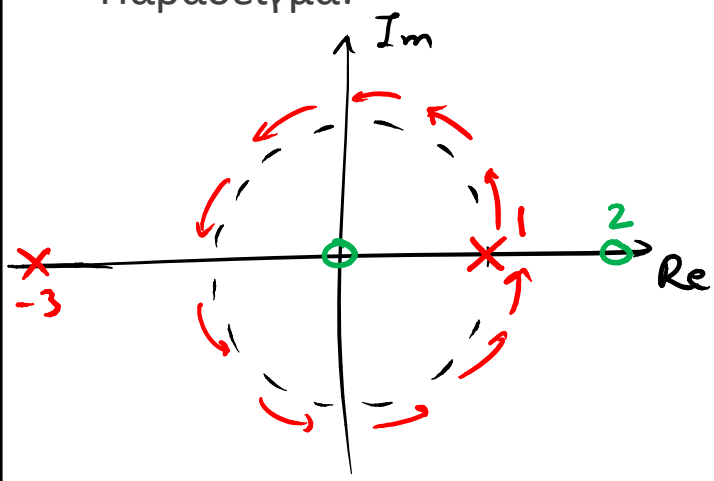
- $\frac{1}{1-z^{-1}}$: • $|z|>1$ • $|z|<1$
- $\frac{1}{1+3z^{-1}}$: • $|z|>3$ • $|z|<3$

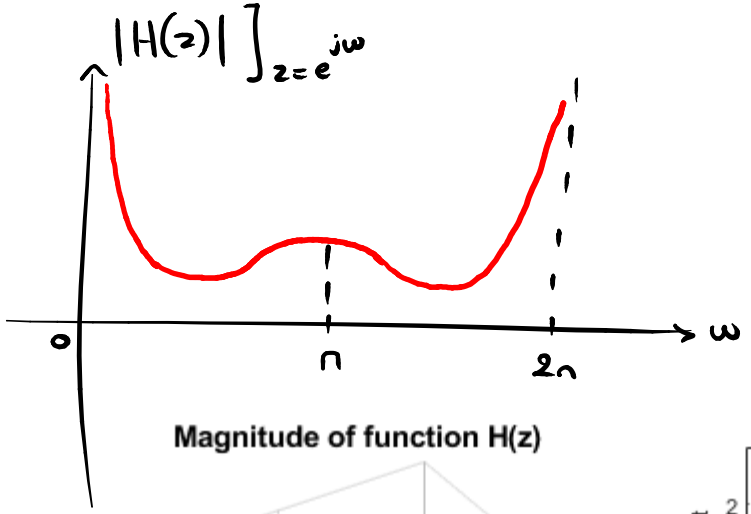
Οπότε: $h[n] = -\frac{1}{4}u[n] - \frac{5}{4}(-3)^n u[-n-1]$

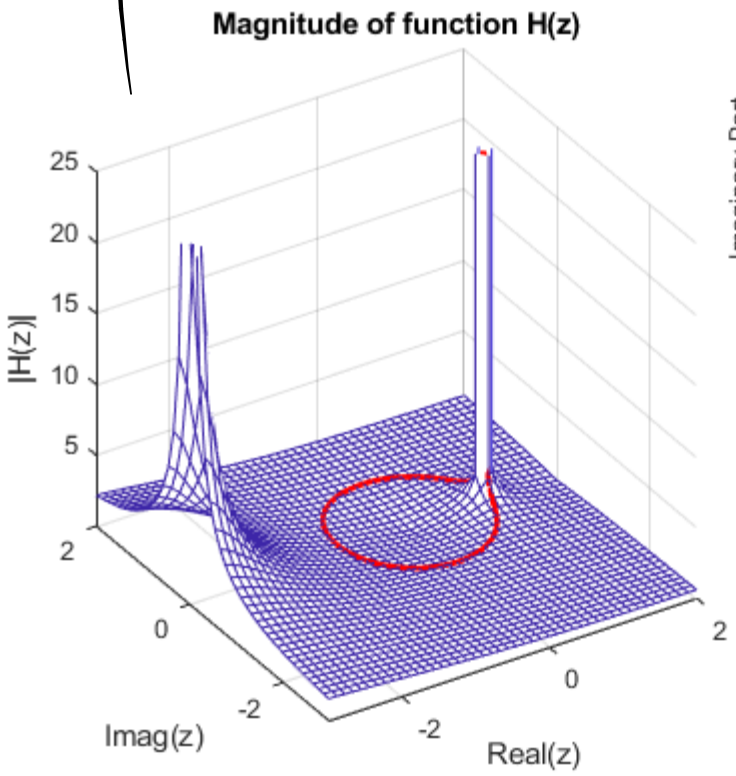
Είναι $H(e^{j\omega}) = -\frac{1}{4}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\right) + \frac{5}{4}\frac{1}{1-3e^{-j\omega}}$

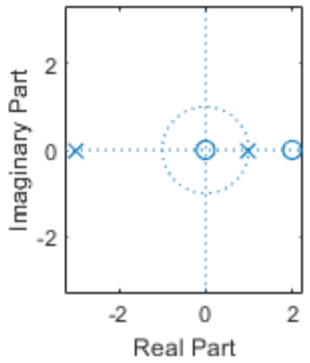
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

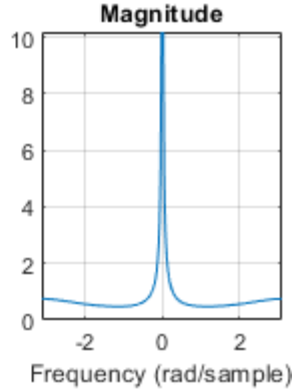
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:





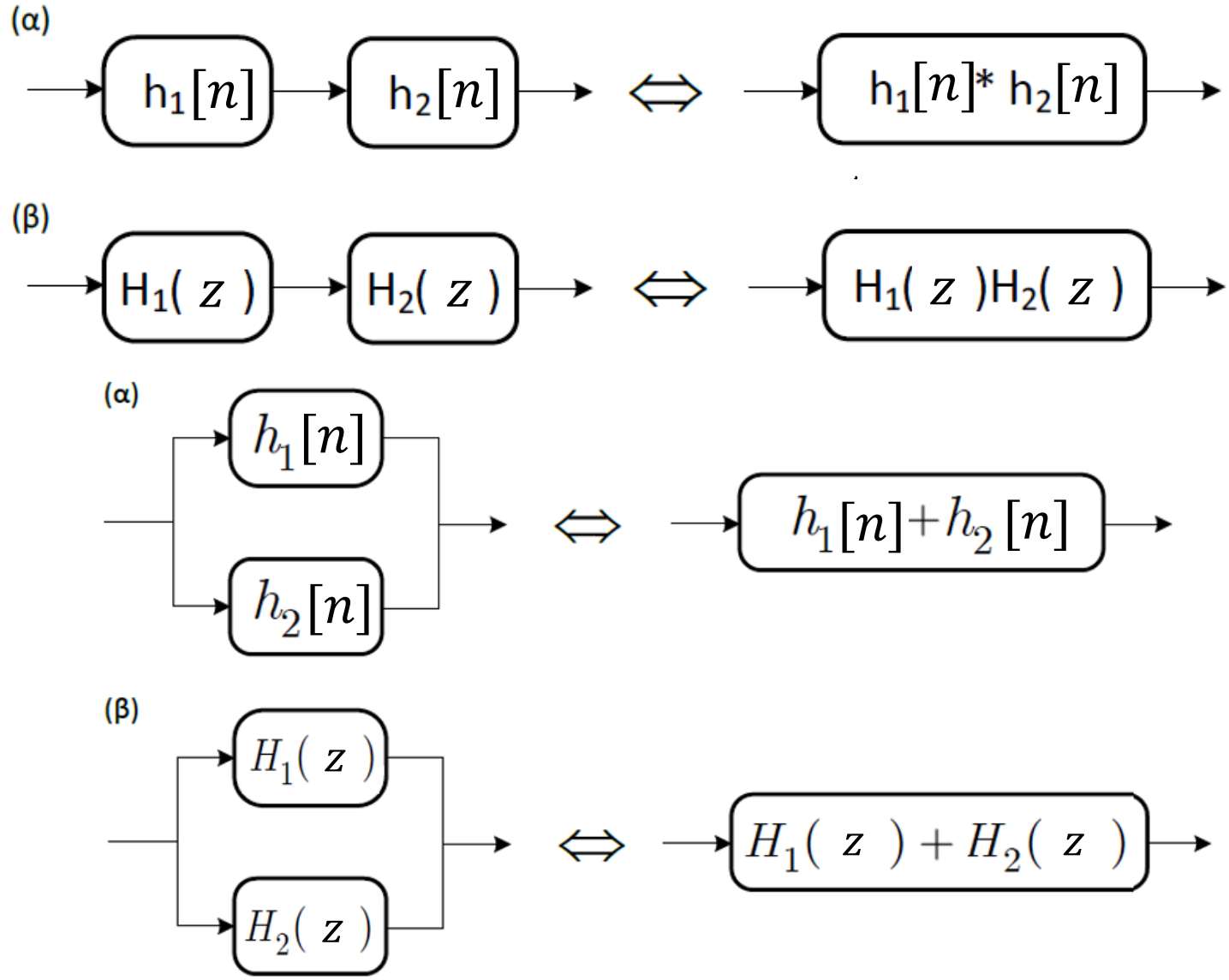






© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Διατάξεις Συστημάτων**



- **Ευστάθεια στο χώρο του Z**
- Έχουμε δείξει ότι αν $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν $|\gamma_i| < 1, \ \forall\, i$, όπου γ_i οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του $h[n]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall\, \omega$



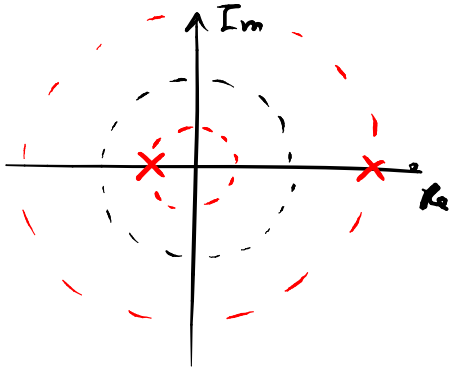
- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.



Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $z_1 = 2$, $z_2 = -\frac{1}{2}$

Πιθανά ROCs:

(α) $|z| > 2$ (β) $|z| < \frac{1}{2}$ (γ) $\frac{1}{2} < |z| < 2$

Είναι $H(z) = \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$, με $A = 1$, $B = 1$

Άρα $H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

(α) Θέλω το σύστημα να είναι ευσταθές. Αυτό συμβαίνει στο (γ)

Πεδίο : $\frac{1}{2} < |z| < 2 \Longrightarrow \{|z| > \frac{1}{2}\} \cap \{|z| < 2\}$

Άρα $$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\updownarrow z^{-1}$$

$$h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(β) Τα αιτιατά σήματα έχουν εξωτερικό πεδίο σύγκλισης. Αυτό είναι το $|z| > 2 \Longrightarrow \{|z| > \frac{1}{2}\} \cap \{|z| > 2\}$

Άρα $$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\updownarrow z^{-1}$$

$$h[n] = 2^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Έχουμε $$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2} z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\left(1 - 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-2}\right) Y(z) = \left(2 - \frac{3}{2}z^{-1}\right) X(z)$$

$$\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}\right) Y(z) = \left(2 - \frac{3}{2}z^{-1}\right) X(z)$$

$$Y(z) - \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = 2X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\updownarrow z^{-1}$$

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2}x[n-1]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + 3z^{-1})}, \quad R_H$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

Είναι $H(z) = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z+3)} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z+3)}$

Μηδενικά: $z=0$ (2), $z=-1$

Πόλοι: $z=1$, $z=\frac{1}{2}$, $z=-3$

Πεδία Σύγκλισης:

α) $|z| < \frac{1}{2}$

β) $\frac{1}{2} < |z| < 1$

γ) $1 < |z| < 3$

δ) $|z| > 3$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:

Είναι $H(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{1+3z^{-1}}$, R_H, με $A=1$, $B=-\frac{2}{7}$, $C=\frac{3}{7}$

Οπότε $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{7}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7}\frac{1}{1+3z^{-1}}$

α) $|z|<\frac{1}{2}$: $h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$

β) $\frac{1}{2}<|z|<1$: $h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$

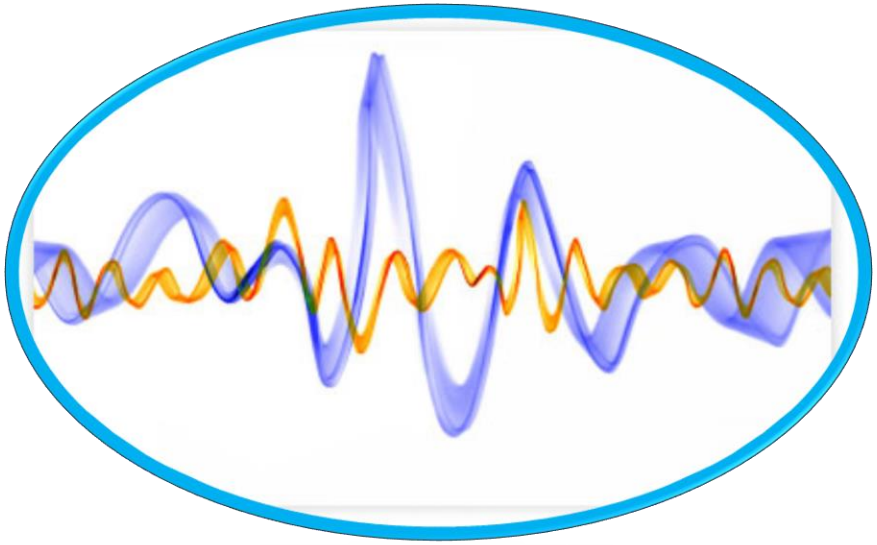
γ) $1<|z|<3$: $h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$

δ) $|z|>3$: $h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7}(-3)^n u[n]$

	Ευσταθές	Αιτιατό
α)	X	X
β)	X	X
γ)	X	X
δ)	X	✓

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

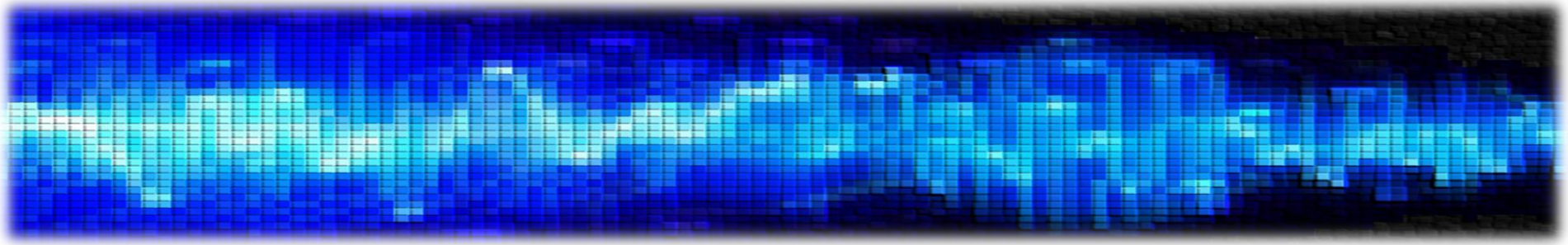
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η



- Συστήματα στο χώρο του Z

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Αντίστροφα Συστήματα**

- Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο
  - Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο $y[n] = x[n] * h[n]$, και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη
    - Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου
  - Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα $h_i[n]$ τέτοιο ώστε
    $$y[n] * h_i[n] = x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n]$$
    δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο
  - Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$
  - Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του Z προκύπτει ότι
    $$H_i(z)H(z) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$
  - Το σύστημα $h_i[n]$ ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του $h[n]$
  - Στο χώρο του Z, αν
    $$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$
    τότε
    $$H_i(z) = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}$$

Οι πόλοι του συστήματος γίνονται μηδενικά του αντιστρόφου και τα μηδενικά του συστήματος γίνονται πόλοι του αντιστρόφου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, |z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

Είναι $H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$, ROC_{H_i} ?

Επιλογές ROC: • $|z| > 0.5$ • $|z| < 0.5$ $\cap$ $|z| > 0.8 \neq \emptyset$

Άρα $H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}, |z| > 0.5$

Επιλέον

$$h_i[n] = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} - 0.8\,Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\right\}, |z| > 0.5$$

$$= (0.5)^n u[n] - 0.8(0.5)^{n-1} u[n-1].$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω $H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$, $|z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

$\frac{1}{2} - z^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{z}$

$z = 2$

Είναι $H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}}$, ROC_{H_i} ?

Επιλογές:

- $|z| > 2$ → αιτιατό, ασταθές
- $|z| < 2$ → ευσταθές, αντιαιτιατό

$\cap\ |z| > 0.8 \neq \emptyset$

Και τα δυο είναι έγκυρα ROC αντίστροφου συστήματος!!

Είναι $H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{\frac{1}{2} - z^{-1}} = \frac{2 - 1.6z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - 1.6\frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$

Θα είναι:

- $h_i[n] = 2(2)^n u[n] - 1.6(2)^{n-1} u[n-1]$ → αιτιατό, ασταθές
- $h_i[n] = -2 \cdot (2)^n u[-n-1] + 1.6(2)^{n-1} u[-n]$ → ευσταθές, αντι-αιτιατό

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα
  - Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό
  - Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$
    - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου, αφού το πεδίο σύγκλισης του είναι $\{|z| > \max|c_k|\}$ και $|c_k| < 1, \forall k$
    - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε
  - Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα $H(z)$ έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?
  - Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
    - Άρα **όλα** τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται ΚΑΙ ΑΥΤΑ εντός του μοναδιαίου κύκλου
  - Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης – Minimum Phase**
    - θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ. Z ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (== «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Z «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
  - Πώς?
    - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «διαισθητική»
- Δε θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε *ακριβώς* πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά?

ΝΑΙ!! ☺

(…από το ακροατήριο)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

- Ας γράψουμε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και την καθυστέρηση ομάδας μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, όταν αυτή υπολογίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

❑ Απόκριση Πλάτους

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |\mathrm{A}|\frac{\prod_{k=1}^{M}\left|1-b_k e^{-j\omega}\right|}{\prod_{l=1}^{N}|1-a_k e^{-j\omega}|}$$

❑ Απόκριση Φάσης

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle A + \angle\prod_{k=1}^{M}(1-b_k e^{-j\omega}) - \angle\prod_{k=1}^{M}\left(1-a_k e^{-j\omega}\right)$$
$$= \angle A + \sum_{k=1}^{M}\angle(1-b_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^{M}\angle(1-a_k e^{-j\omega})$$

❑ Καθυστέρηση Ομάδας

$$\tau_g\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=1}^{M}\frac{d}{d\omega}\angle(1-a_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^{M}\frac{d}{d\omega}\angle(1-b_k e^{-j\omega})$$

- Κοινό στοιχείο: όροι της μορφής $\left(1-c_k e^{-j\omega}\right)$!!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Ας θεωρήσουμε τον όρο $1 - ce^{-j\omega}$, με $c \in \mathbb{C}$
- Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις
  - Το c είναι πόλος
  - Το c είναι μηδενικό
- Θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις επάνω στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης
- Ξεκινώντας από τη θεώρηση του $c = re^{j\theta}$ ως **μηδενικό**:

$$H(z) = 1 - cz^{-1} = 1 - re^{j\theta}z^{-1}$$

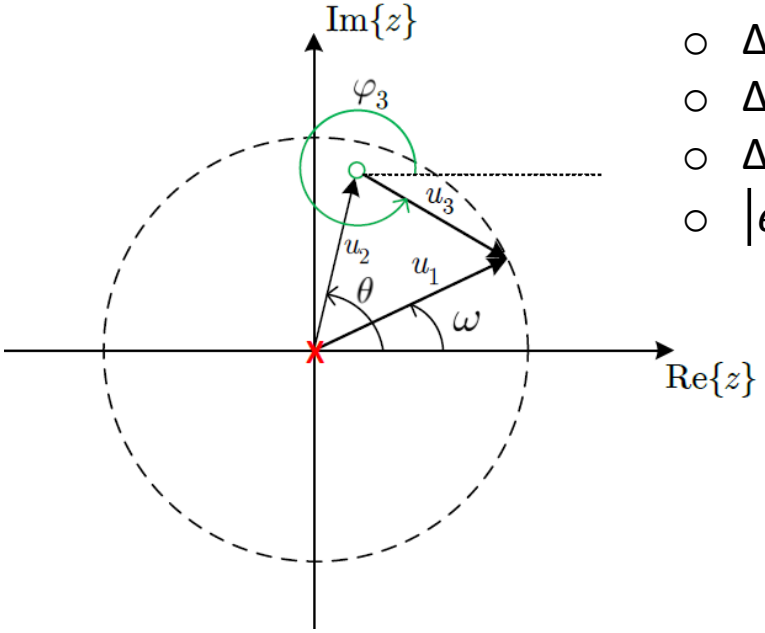
- Οπότε:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right| = \left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = \left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|$$



- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από Ο ως το μηδενικό
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από μηδενικό ως το μοναδ. κύκλο
- $\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right| = |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{u}_3|$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το μήκος του $\vec{u}_3$!!

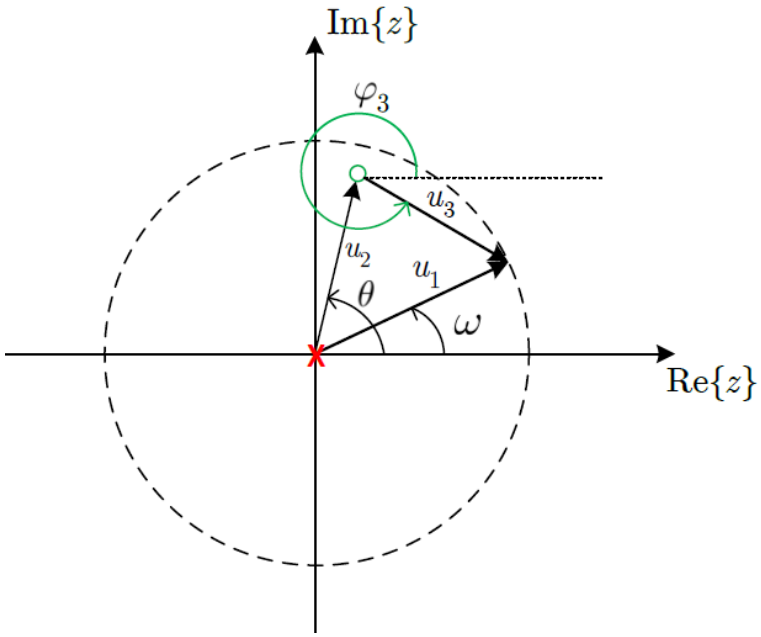
- Για την απόκριση φάσης

$$\angle\left(1 - re^{j\theta}e^{j\omega}\right) = \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) - \angle e^{j\omega} = \phi_3 - \omega$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\phi_3 - \omega$!!

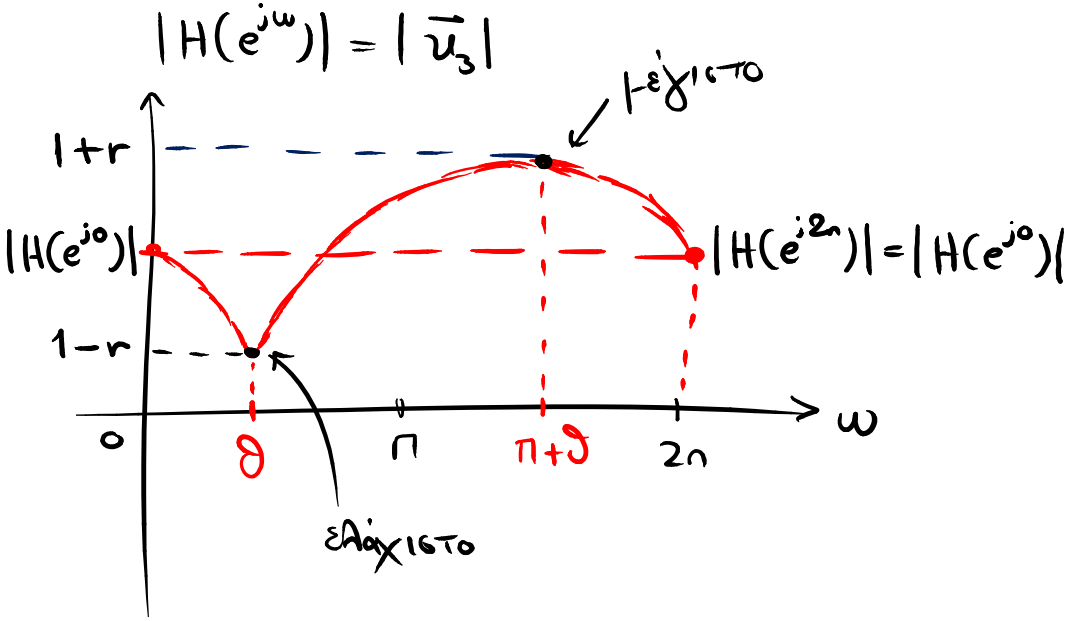
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



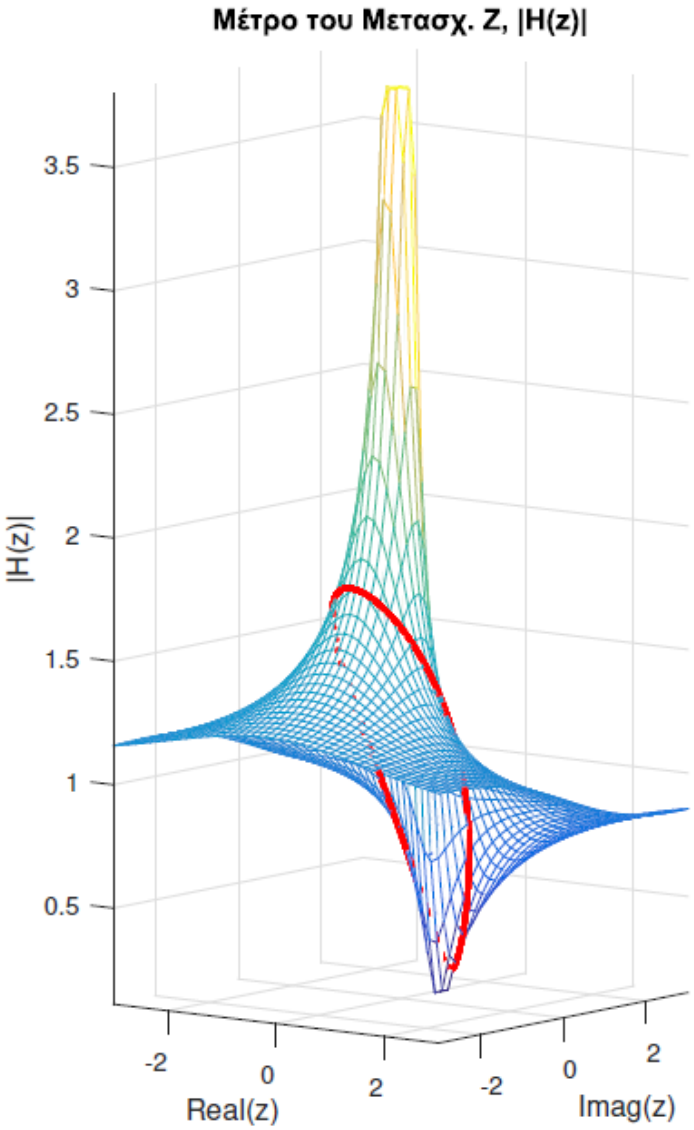
$$|H(e^{j\omega})| = |\vec{u}_3|$$

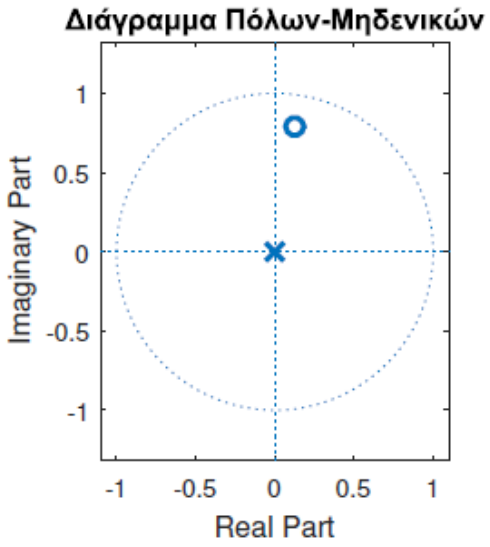
$$\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3 - \omega$$

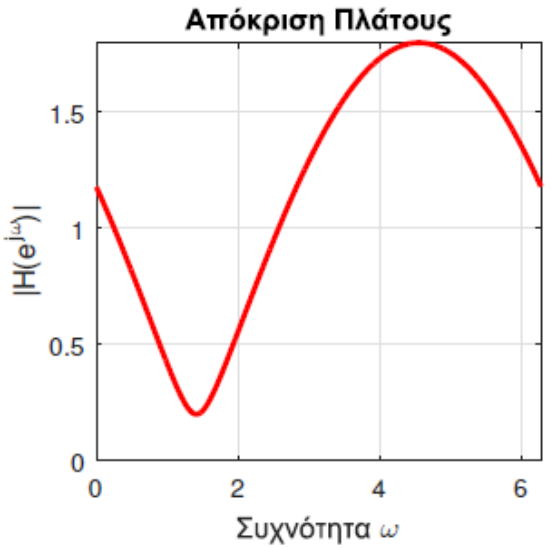


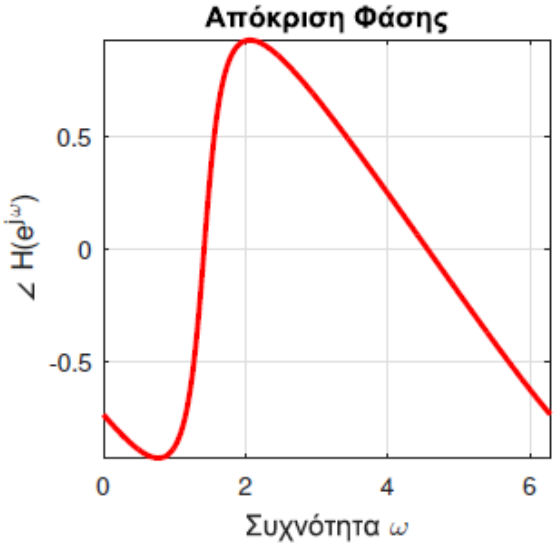
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

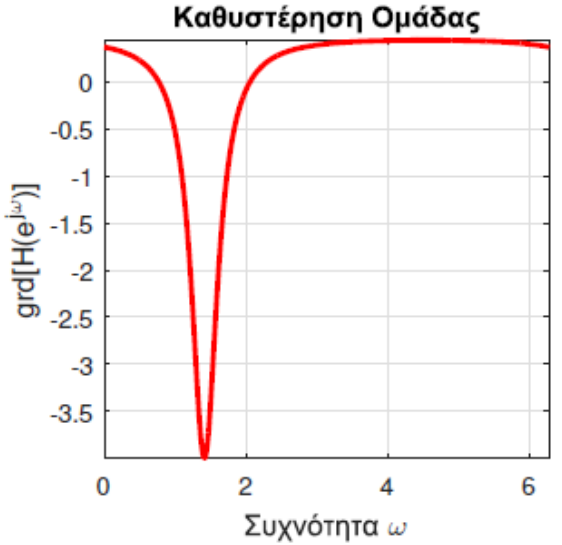
• Διάγραμμα Διανυσμάτων





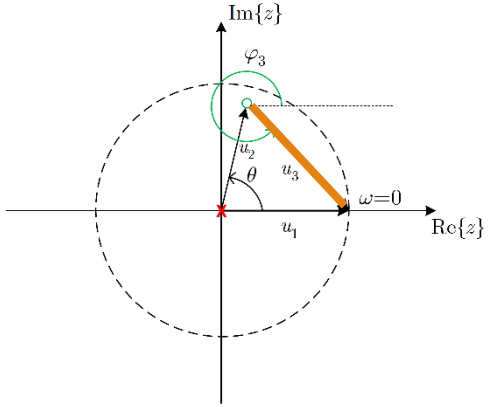


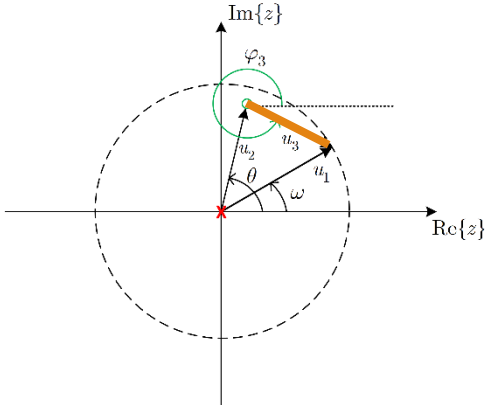


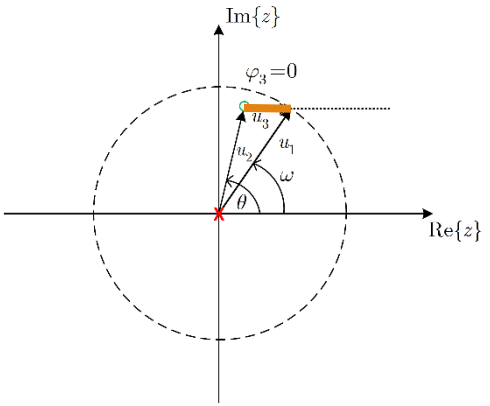


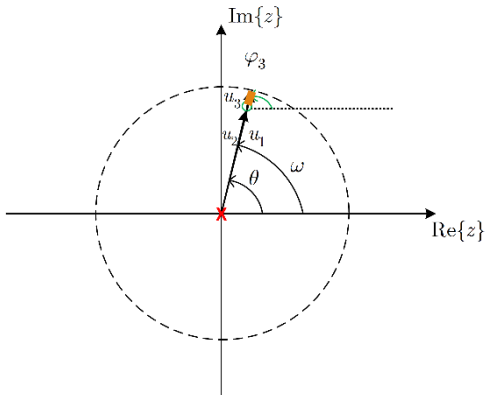
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

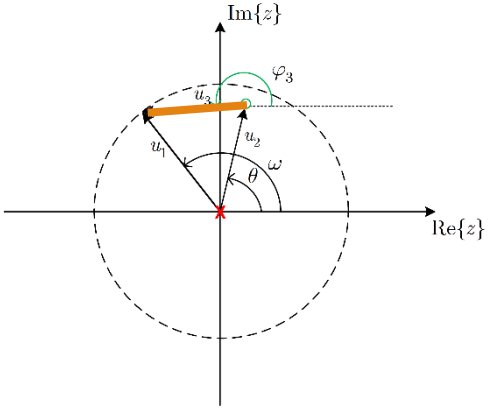
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

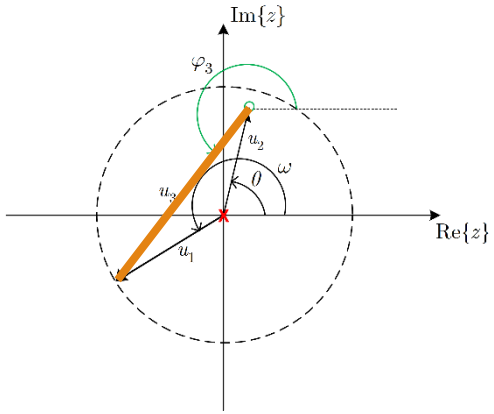


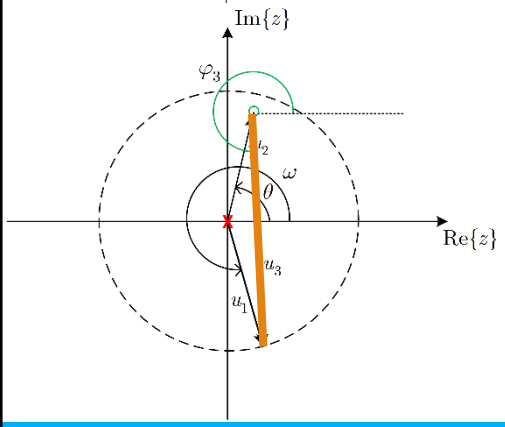


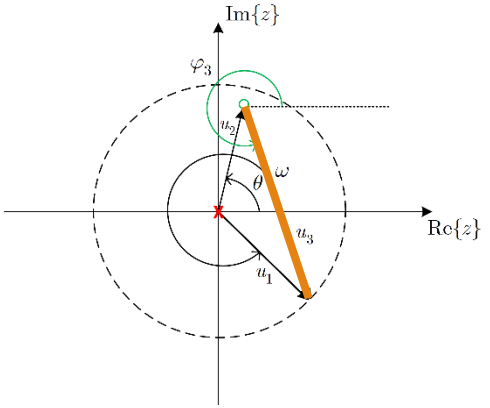


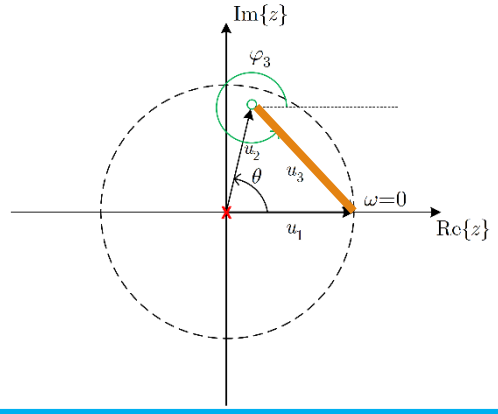






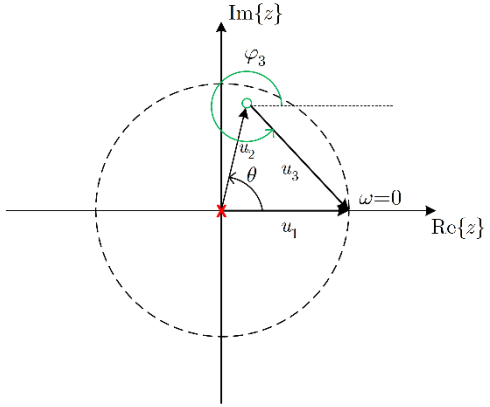


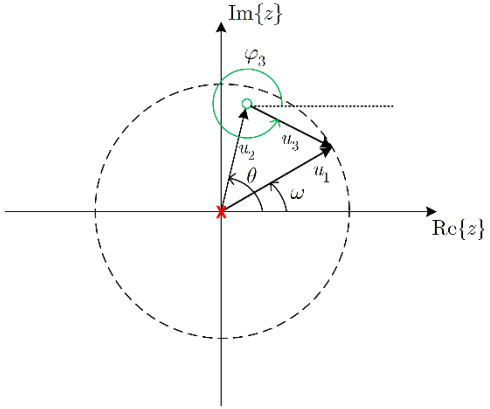


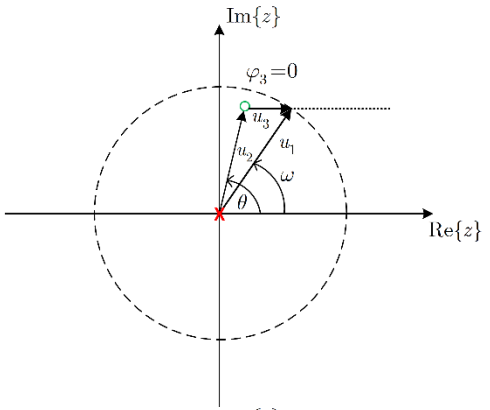


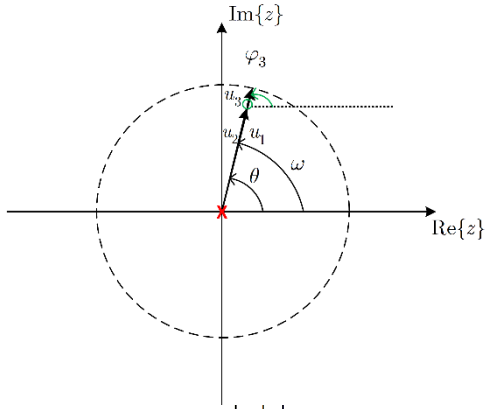
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

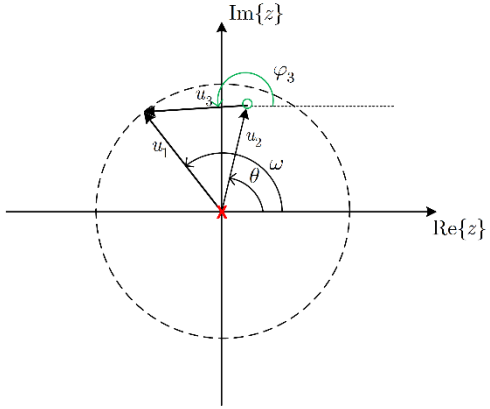
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

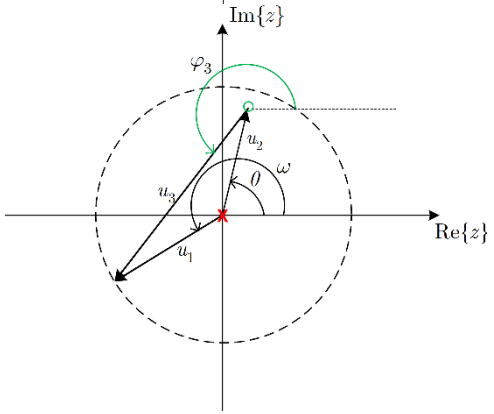


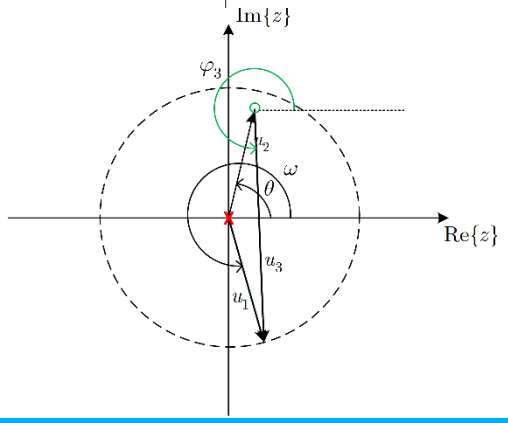


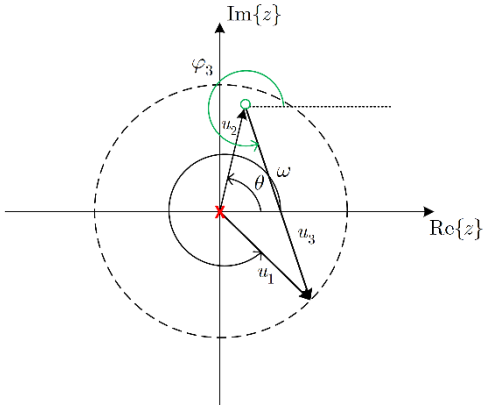


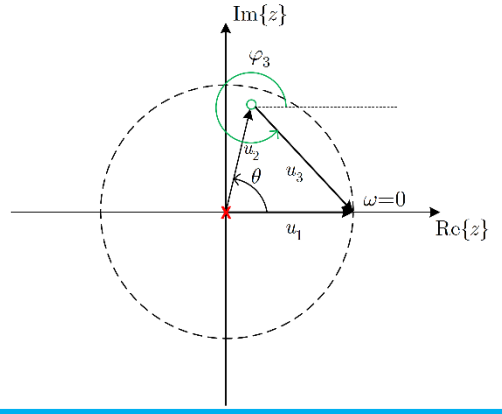








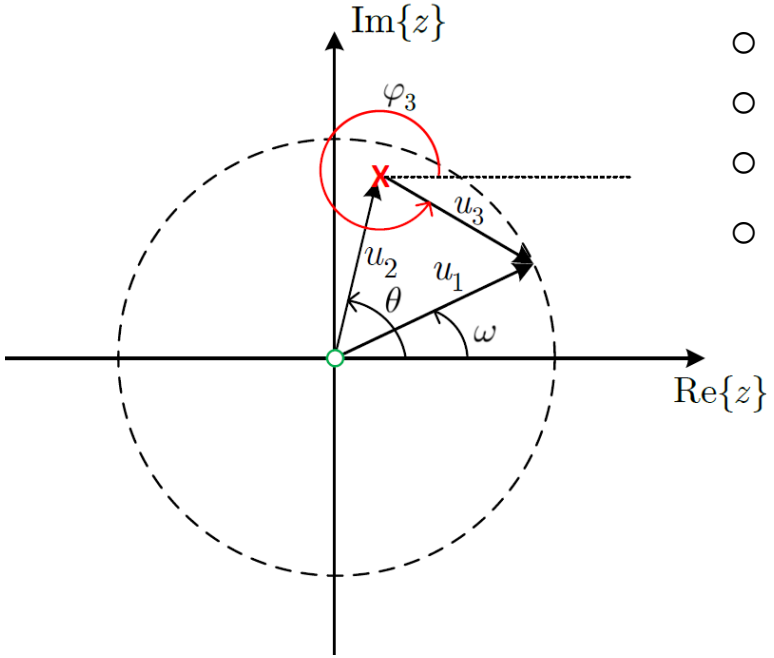




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{\left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|} = \frac{1}{\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|}$$



- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από Ο ως τη θέση του $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από $re^{j\theta}$ ως το μοναδ. κύκλο
- $\frac{1}{\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|} = \frac{1}{\left|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\right|} = \frac{1}{\left|\vec{u}_3\right|}$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το (αντίστροφο) μήκος του $\vec{u}_3$!!

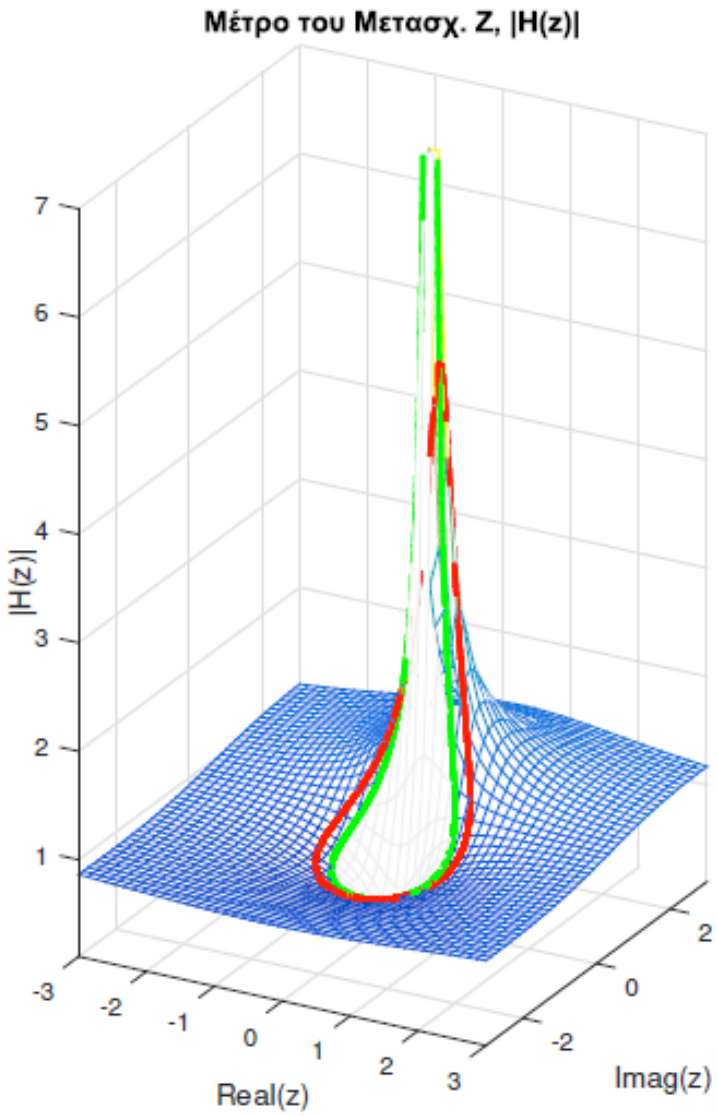
- Για την απόκριση φάσης

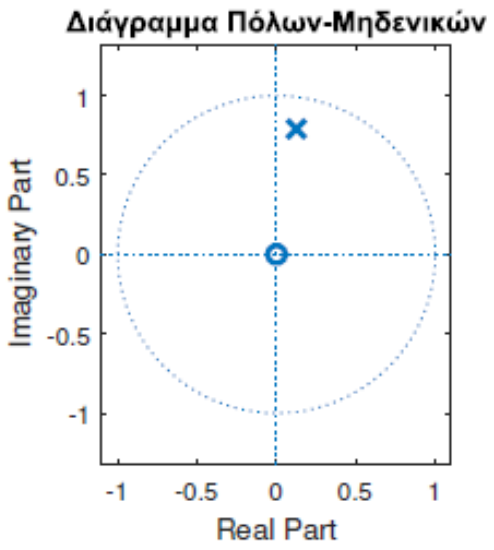
$$\angle \frac{1}{\left(1 - re^{j\theta}e^{j\omega}\right)} = \angle e^{j\omega} - \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) = \omega - \phi_3$$

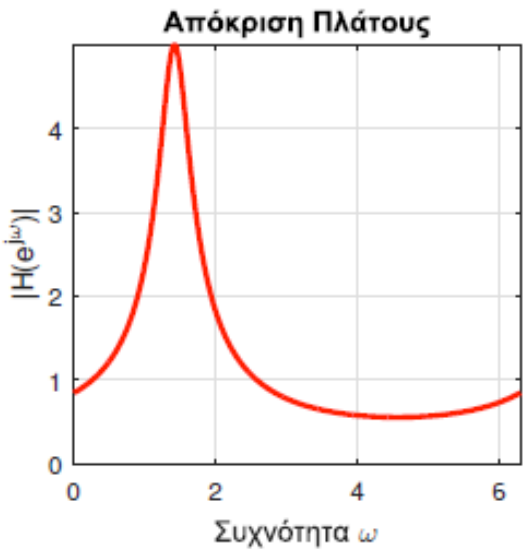
Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\omega - \phi_3$!!

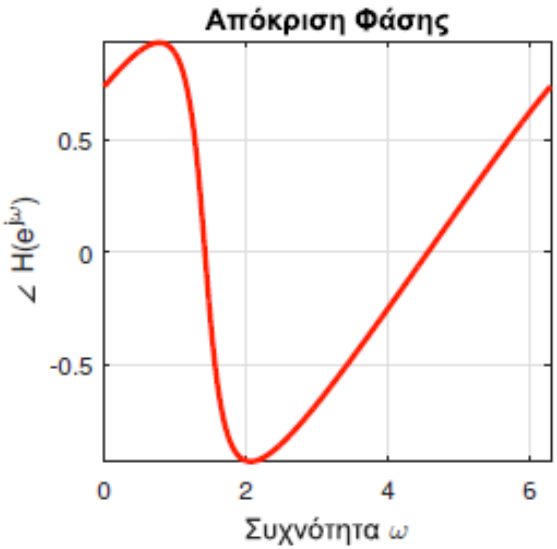
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

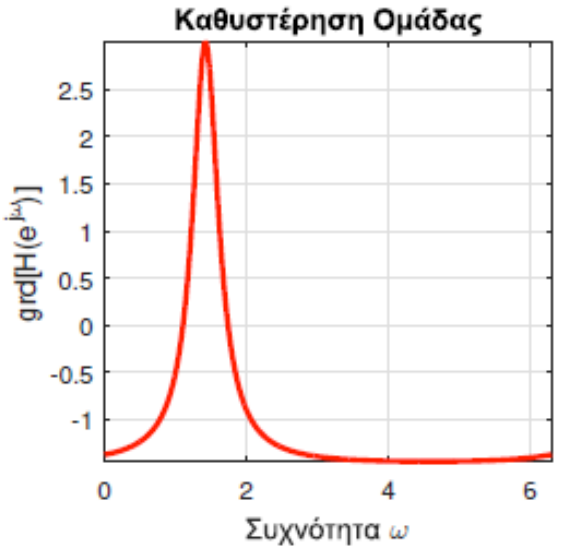
• Διάγραμμα Διανυσμάτων





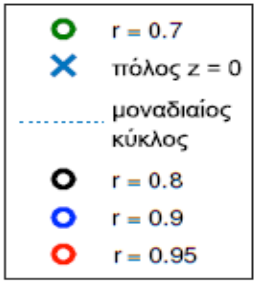


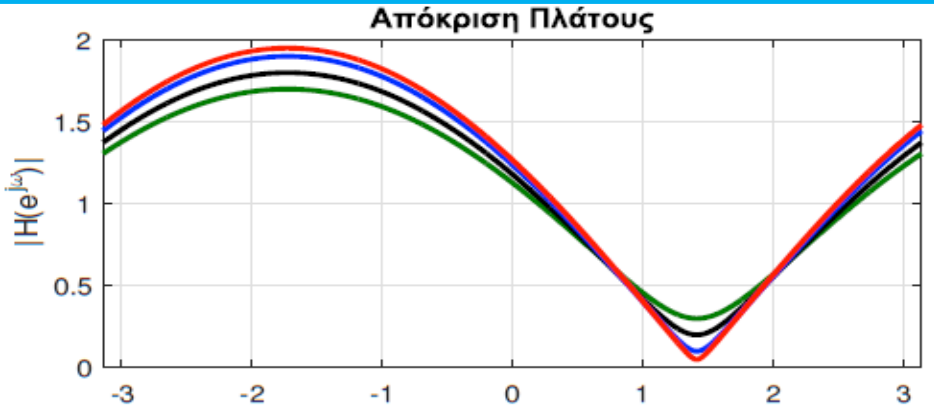


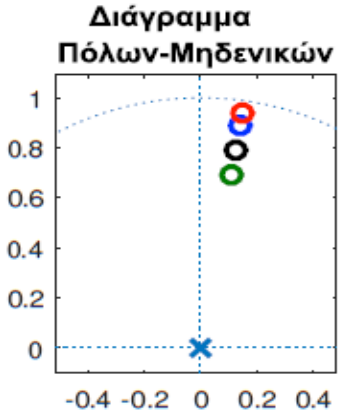


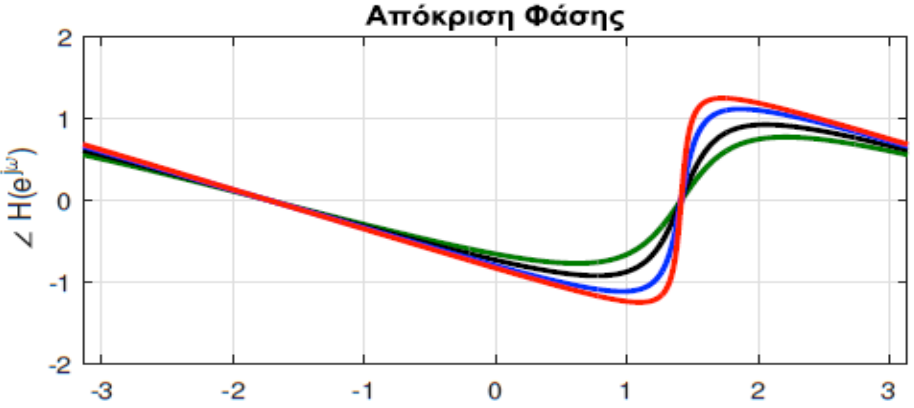
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

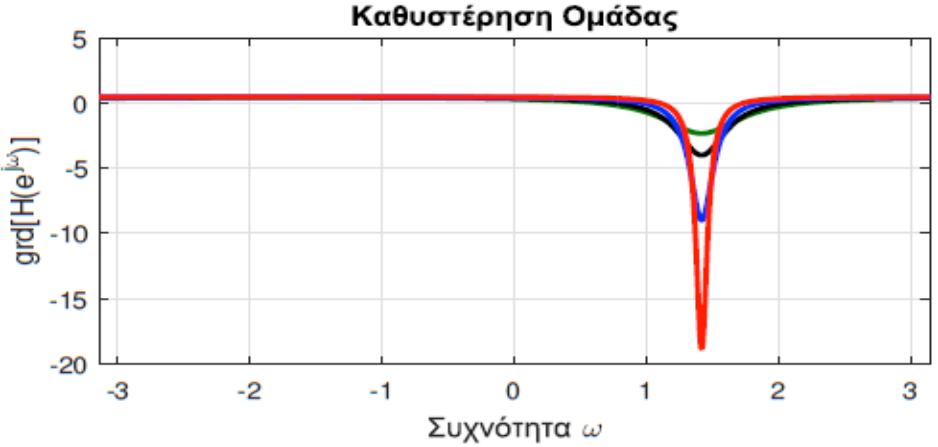
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**





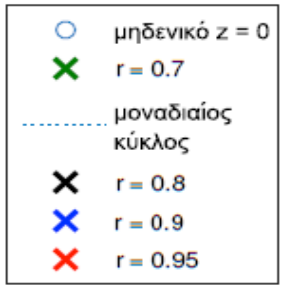


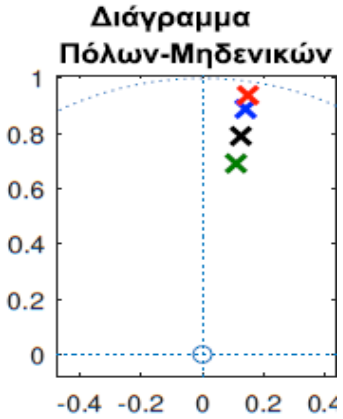


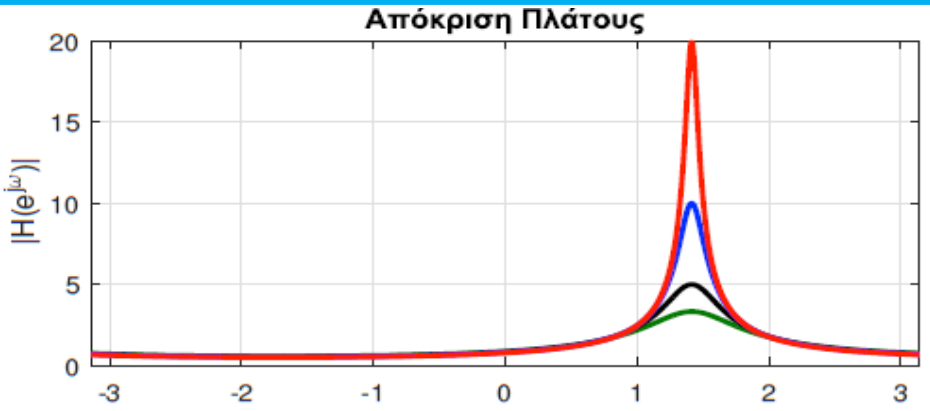


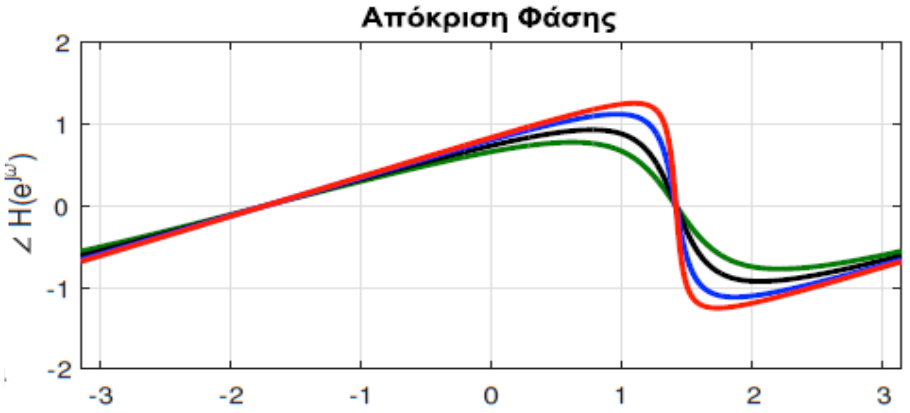
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

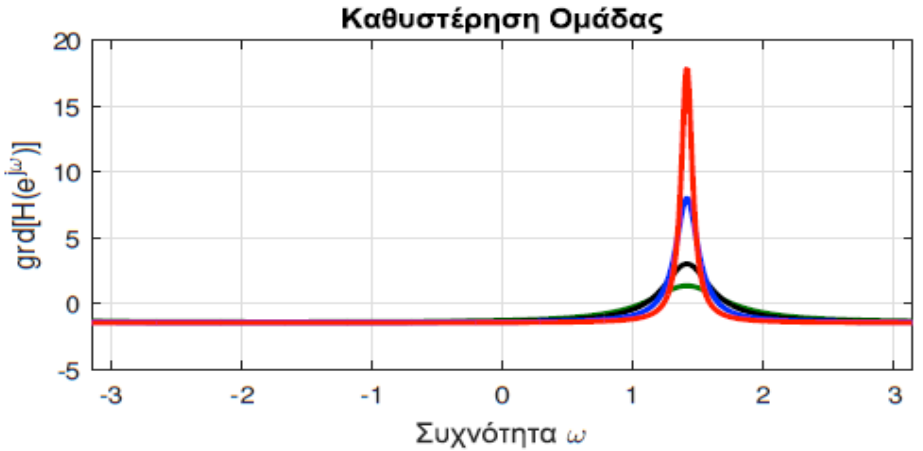
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**





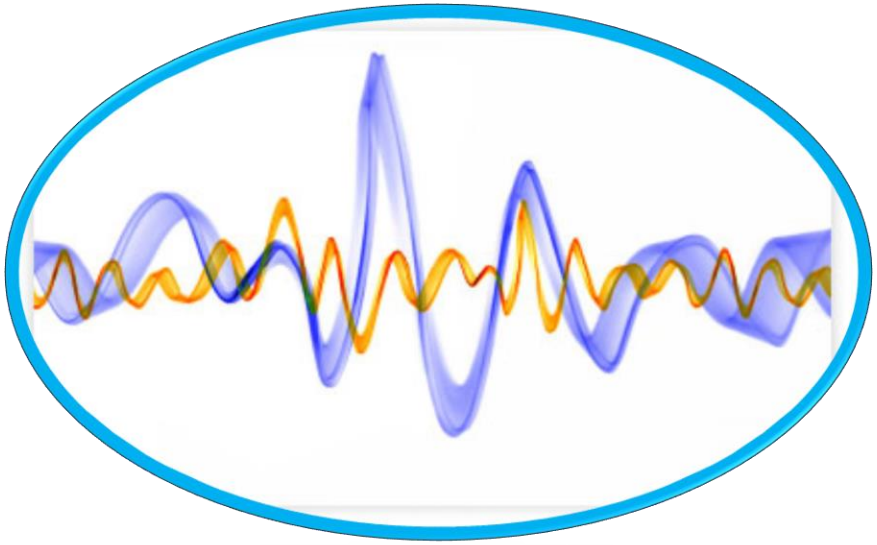






© Καφεντζής Γιώργος, PhD

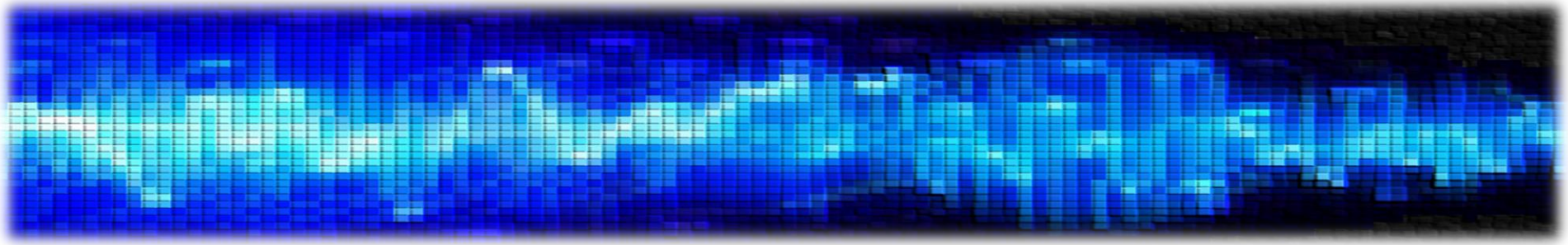
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

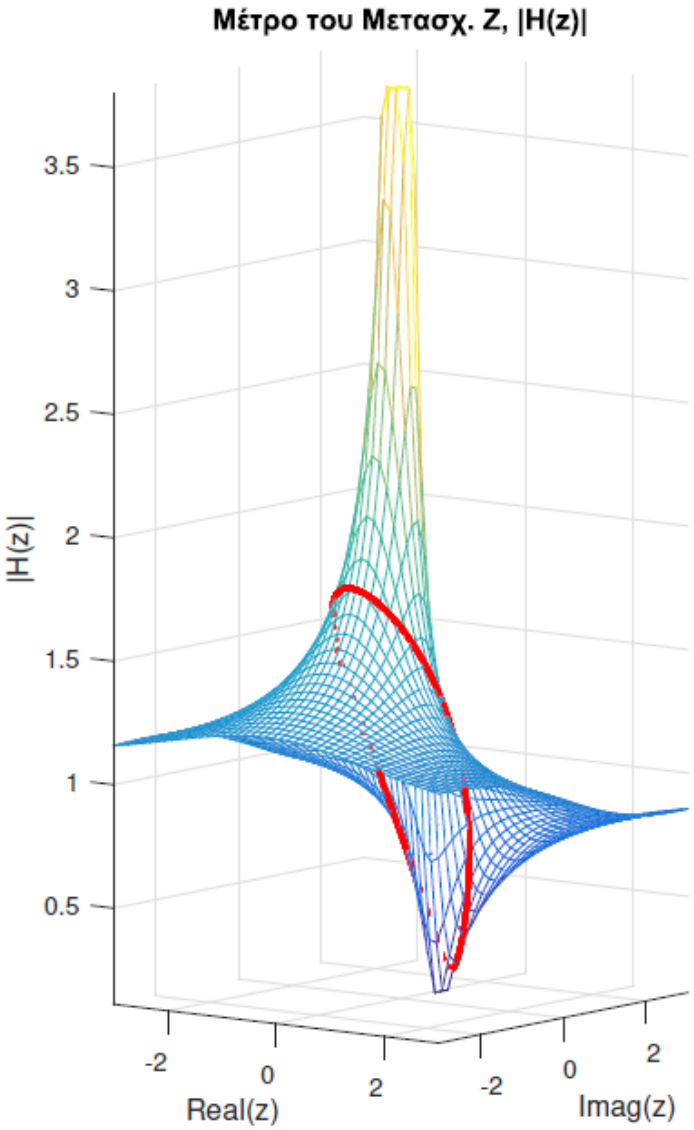
ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

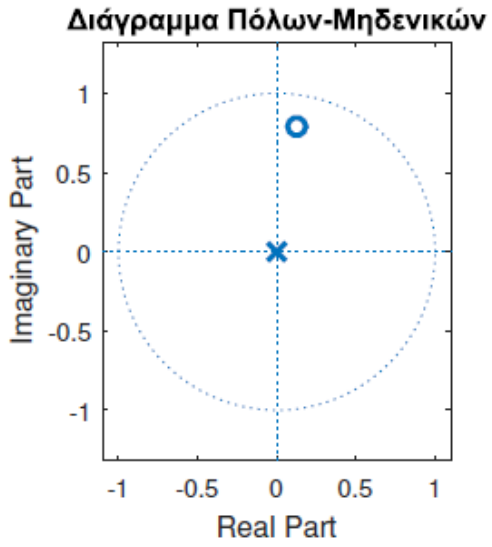


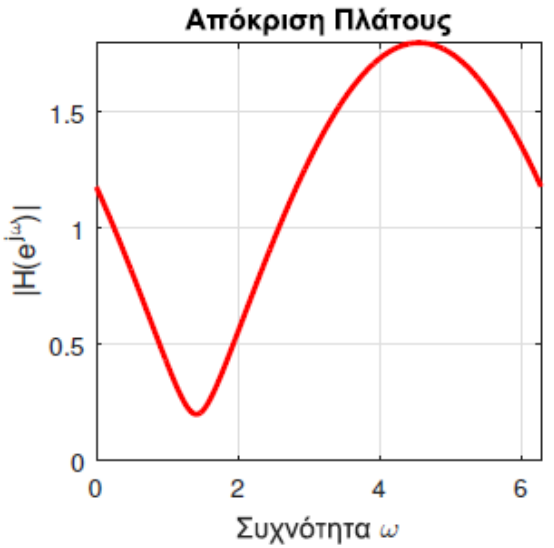
- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης
- Συστήματα All-Pass
- Διάσπαση σε ελάχιστης φάσης και all-pass

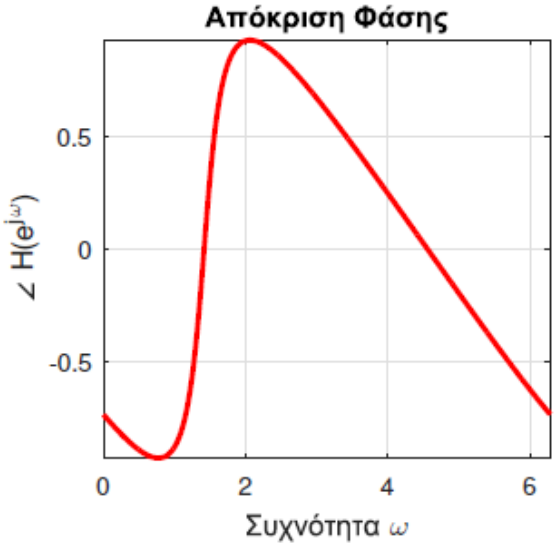
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

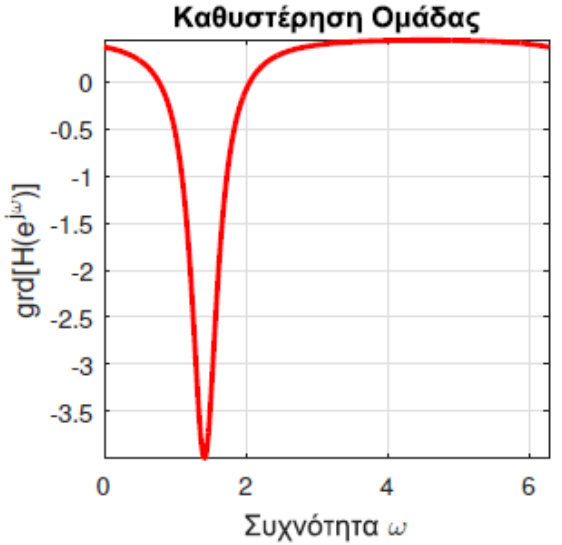
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**





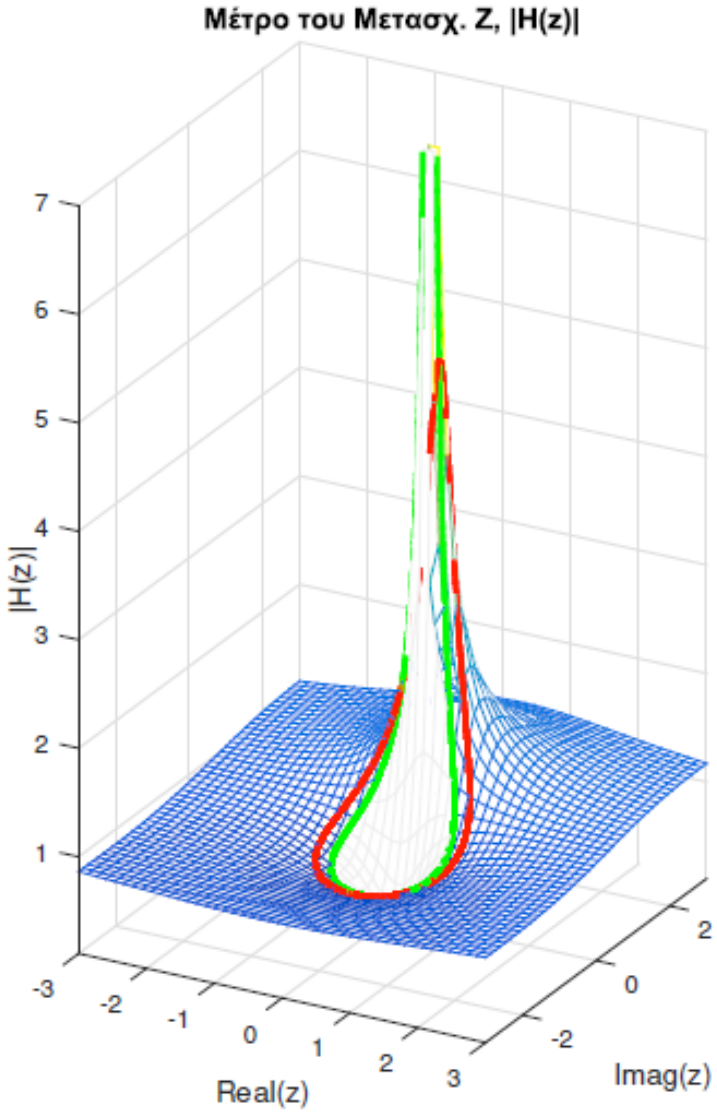


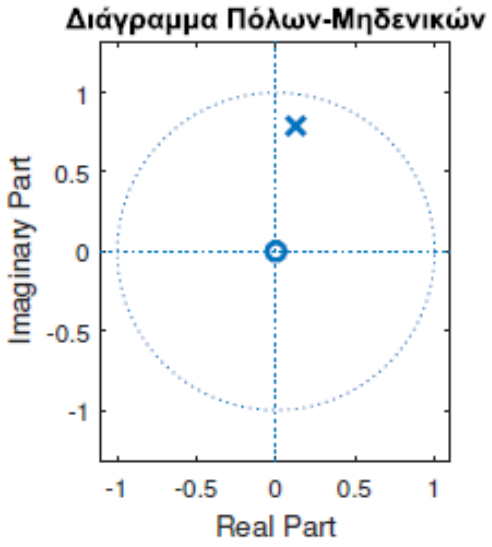


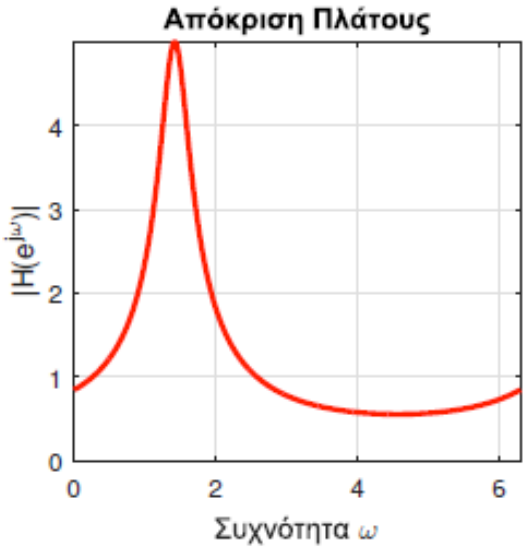


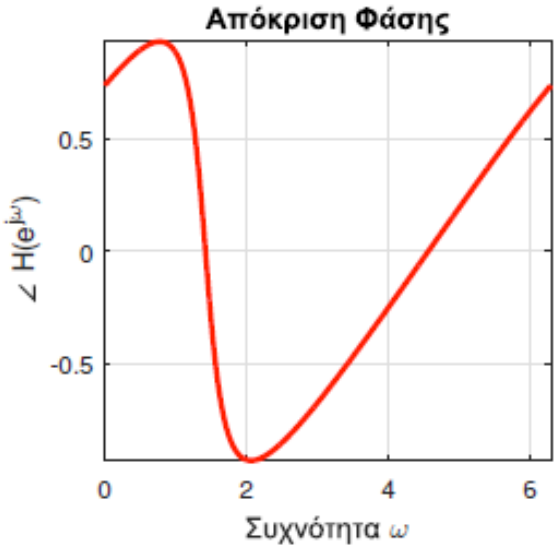
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

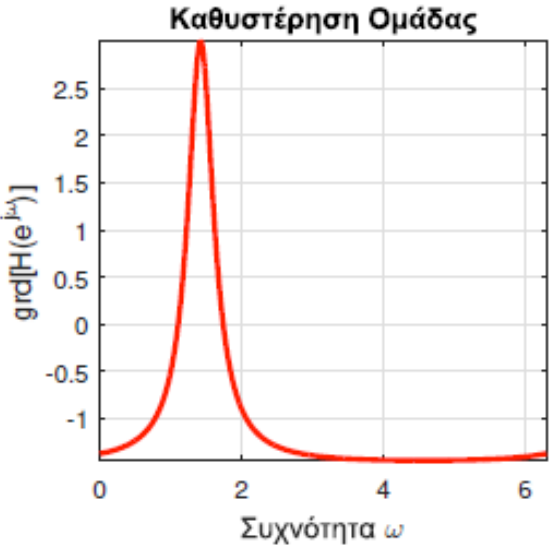
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**





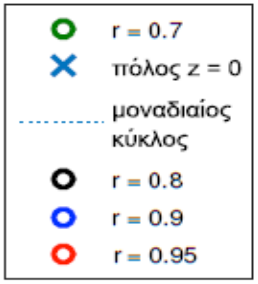


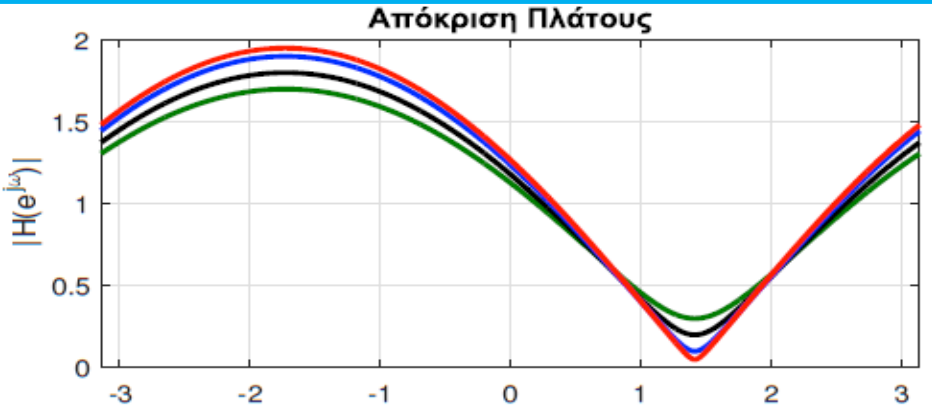


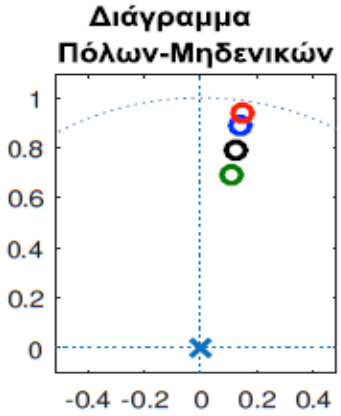


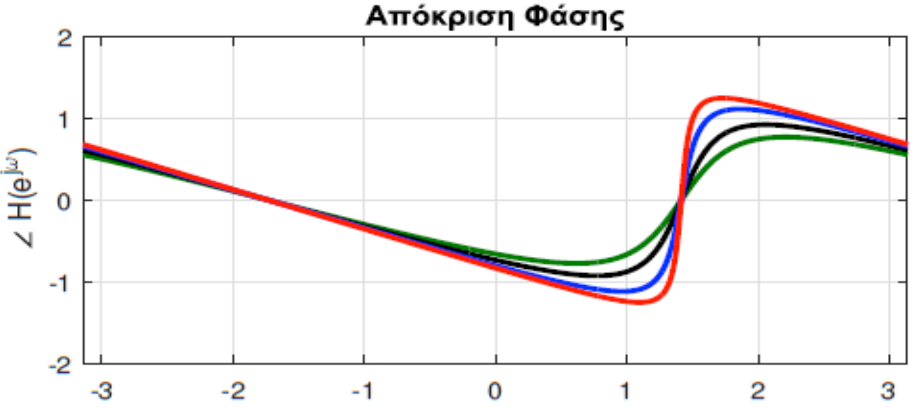
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

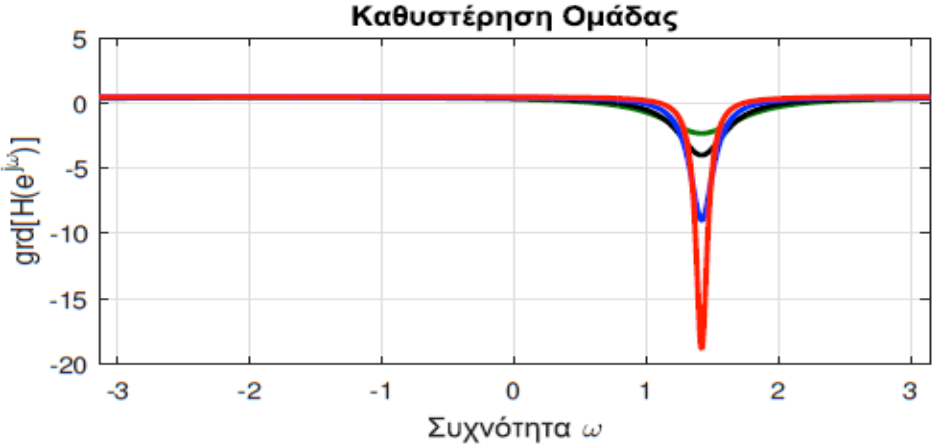
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**





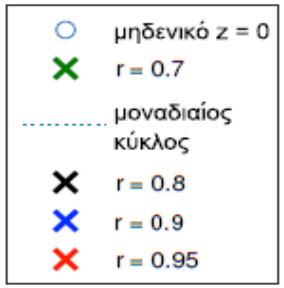


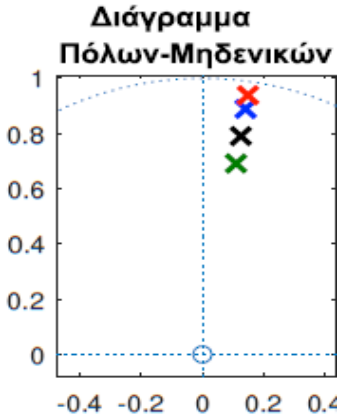


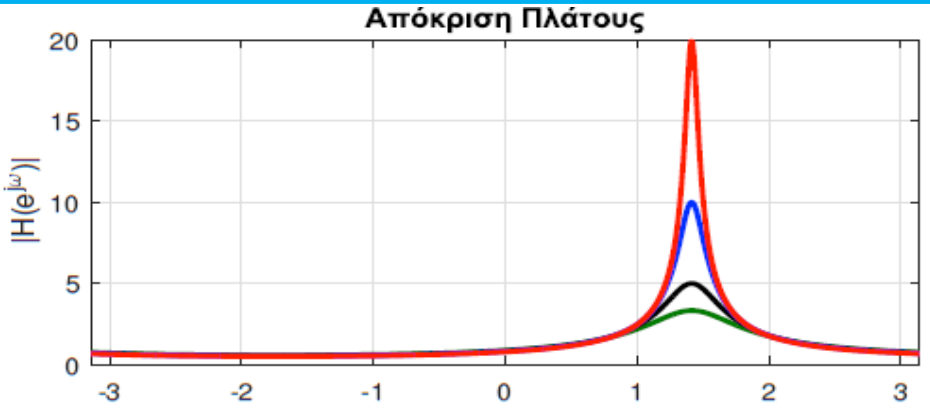


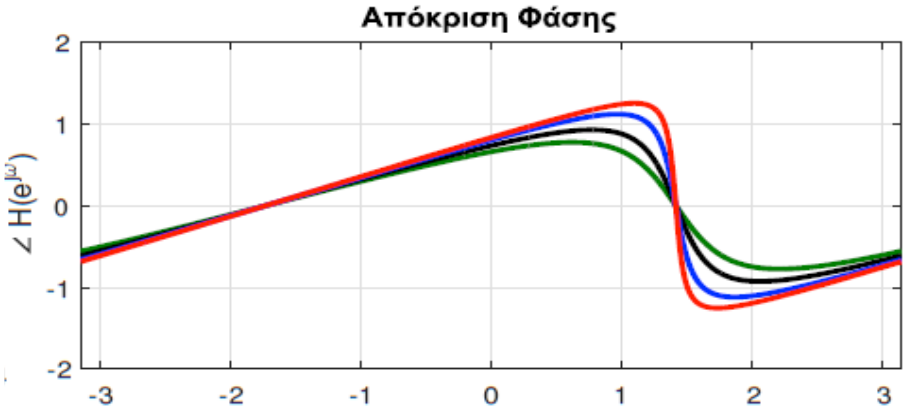
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

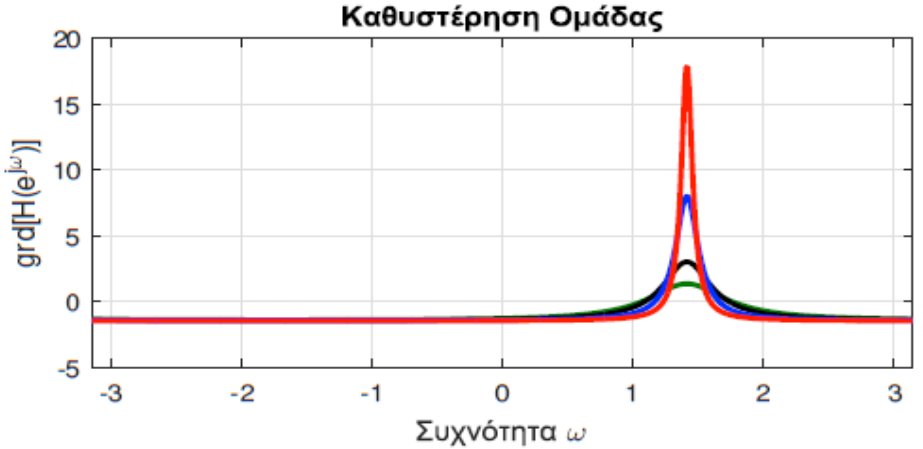
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**









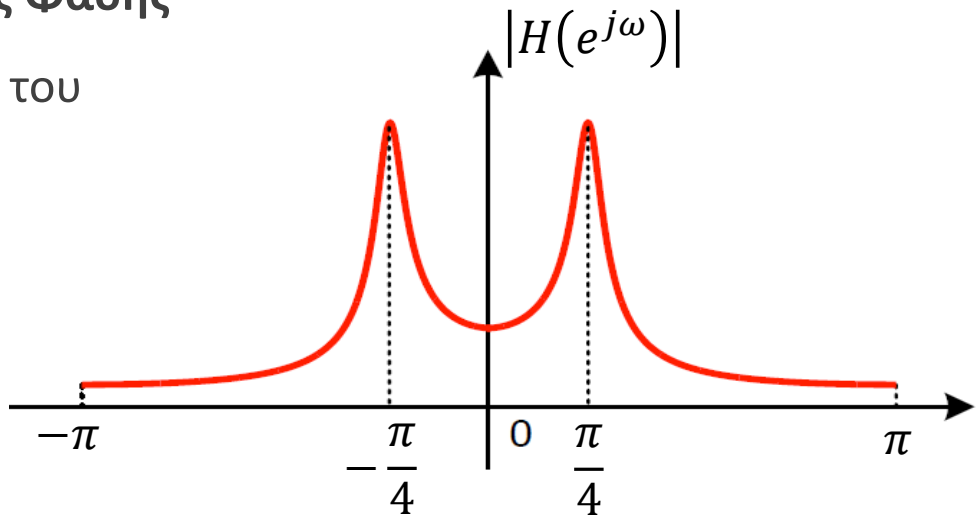


© Καφεντζής Γιώργος, PhD

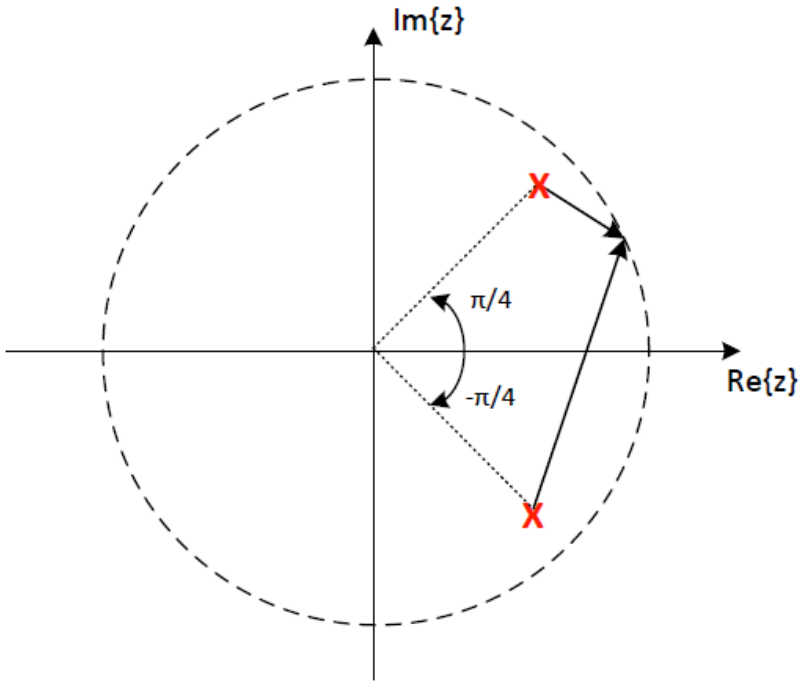
- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- **Ερώτημα:** υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των αποκρίσεων πλάτους και φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται ως ρητή συνάρτηση μεταφοράς?
- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει την απόκριση φάσης από την απόκριση πλάτους? Αν ναι, πότε?
- **Πρακτικότερη διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$?
- Η τελευταία διατύπωση προφανώς μας λέει ότι αν είναι εφικτός αυτός ο υπολογισμός, τότε μπορούμε από τη συνάρτηση μεταφοράς να βρούμε τα πάντα για ένα δεδομένο ΓΧΑ σύστημα
- **Το ερώτημα λοιπόν μπορεί να επαναδιατυπωθεί (για τελευταία φορά ☺) ως:** *Μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$?*

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Έστω ότι μας δίνεται η απόκριση πλάτους του σχήματος



- Μπορούμε με κάποια ασφάλεια να υποθέσουμε ότι το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που «γεννά» αυτή την απόκριση πλάτους φαίνεται παρακάτω



- Μπορούμε να πούμε ότι

$$H_1(z) = \frac{A}{\left(1 - re^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - re^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

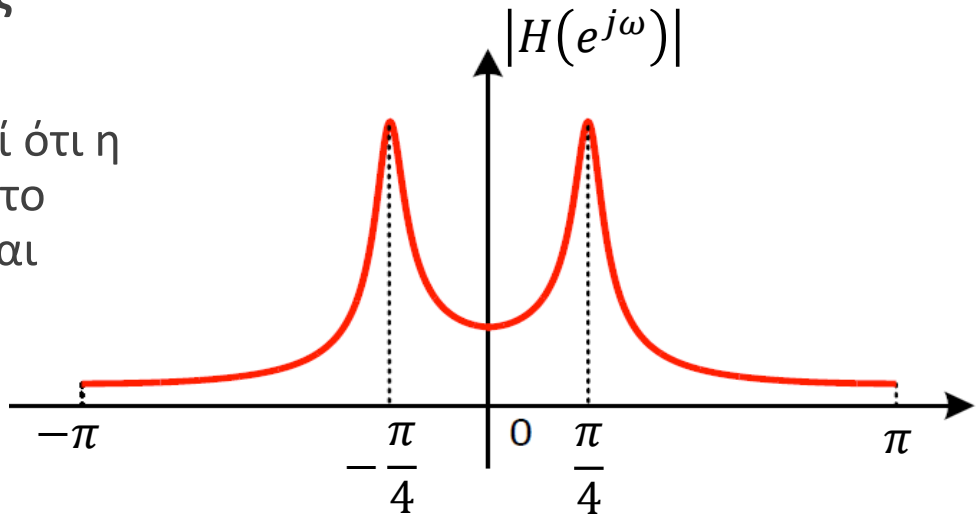
δηλ.

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \frac{|A|}{\left|e^{j\omega} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right|\left|e^{j\omega} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right|}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- Όμως θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δεδομένη απόκριση πλάτους δίνεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που φαίνεται παρακάτω

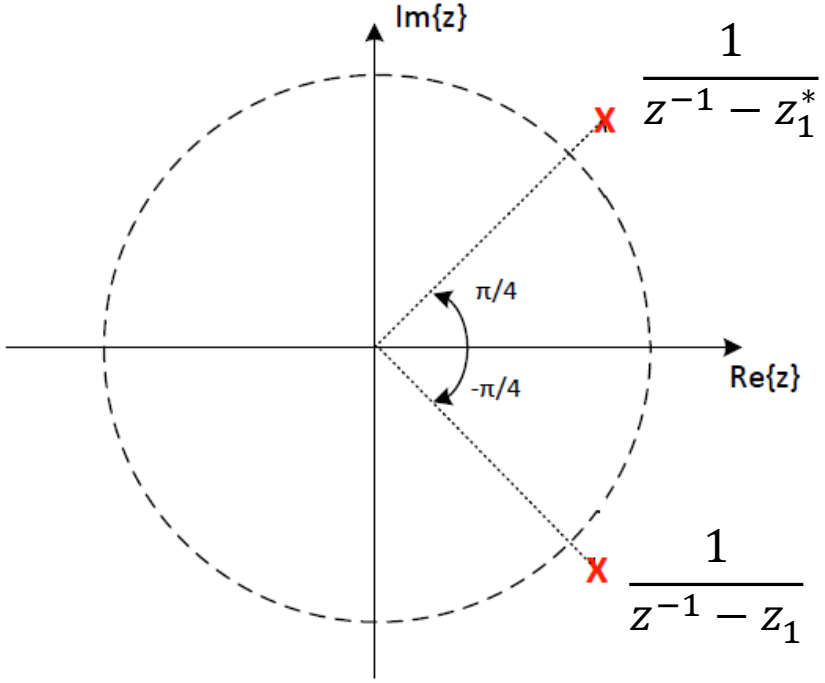


- Στην περίπτωσή μας έχουμε

$$H_2(z) = \frac{A}{\left(z^{-1} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z^{-1} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

δηλ.

$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \frac{|A|}{\left|e^{-j\omega} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right|\left|e^{-j\omega} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right|}$$



- Γιατί ισχύει ότι

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \left|H_2(e^{j\omega})\right| ?????$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Παρατηρήστε ότι όροι της μορφής $\frac{1}{1-z_1 z^{-1}}$ και $\frac{1}{z^{-1}-z_1^*}$ έχουν το ίδιο μέτρο για $z = e^{j\omega}$:

$$\frac{1}{|1 - z_1 e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{-j\omega}(e^{j\omega} - z_1)|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_1|} \quad \text{και} \quad \frac{1}{|e^{-j\omega} - z_1^*|}$$

αφού οι όροι εντός του μέτρου είναι συζυγείς!

- Έτσι, πράγματι τα δυο συστήματα έχουν την ίδια απόκριση πλάτους!
- Αφού όμως $H_1(z) \neq H_2(z)$ προφανώς δε θα έχουν την ίδια απόκριση φάσης
- Το δεύτερο σύστημα έχει τους πόλους του στις **συζυγείς αμοιβαίες θέσεις** των πόλων του πρώτου συστήματος
- Οι πόλοι του πρώτου συστήματος βρίσκονται στις θέσεις (a, a^*) και του δεύτερου συστήματος στις θέσεις $\left(\frac{1}{a^*}, \frac{1}{a}\right)$
  - Το σύστημα εξακολουθεί να είναι πραγματικό και στις δυο περιπτώσεις

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Άρα υπάρχουν **δυο** συστήματα $H(z)$ με τη δεδομένη απόκριση πλάτους, τα οποία διαφέρουν ασφαλώς στην απόκριση φάσης, σωστά?
- Λάθος! ☺
- Μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμα συστήματα τα οποία θα έχουν τον έναν πόλο εντός και τον άλλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και τα οποία θα έχουν κι αυτά την ίδια απόκριση πλάτους!
  - …αν χαλαρώσουμε την απαίτηση να ανταποκρίνονται σε πραγματικά συστήματα ☺
- Είναι λοιπόν σαφές ότι η γνώση της απόκρισης πλάτους και του πλήθους των πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς δε μας εξασφαλίζει τη μονοσήμαντη γνώση της συνάρτησης μεταφοράς
  - …και κατά συνέπεια της απόκρισης φάσης
- Ας θέσουμε οπότε εκ νέου το ερώτημα: ***τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?***
- Χρειάζεται να περιορίσουμε τις επιλογές μας στις **θέσεις** των πόλων-μηδενικών!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- ***Τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?***
- Η γνώση του πλήθους και των σχετικών **θέσεων** (εντός/εκτός μον. κύκλου, κλπ) των πόλων και των μηδενικών, καθώς και της απόκρισης πλάτους ορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση μεταφοράς
- Για ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό που να έχει και ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο, όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου : σύστημα **ελάχιστης φάσης**
- Κάτι τελευταίο…
- Το πλήθος πόλων-μηδενικών είναι απαραίτητη γνώση, μαζί με την απόκριση πλάτους;
- ***Ναι!*** Ο λόγος είναι ότι μπορεί κανείς να προσθέσει *άπειρους* πόλους και μηδενικά χωρίς να αλλοιώσει καθόλου την απόκριση πλάτους!!
  - Πώς? Πολλαπλασιάζοντας τα τέσσερα $H(z)$ που είδαμε με όρους της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

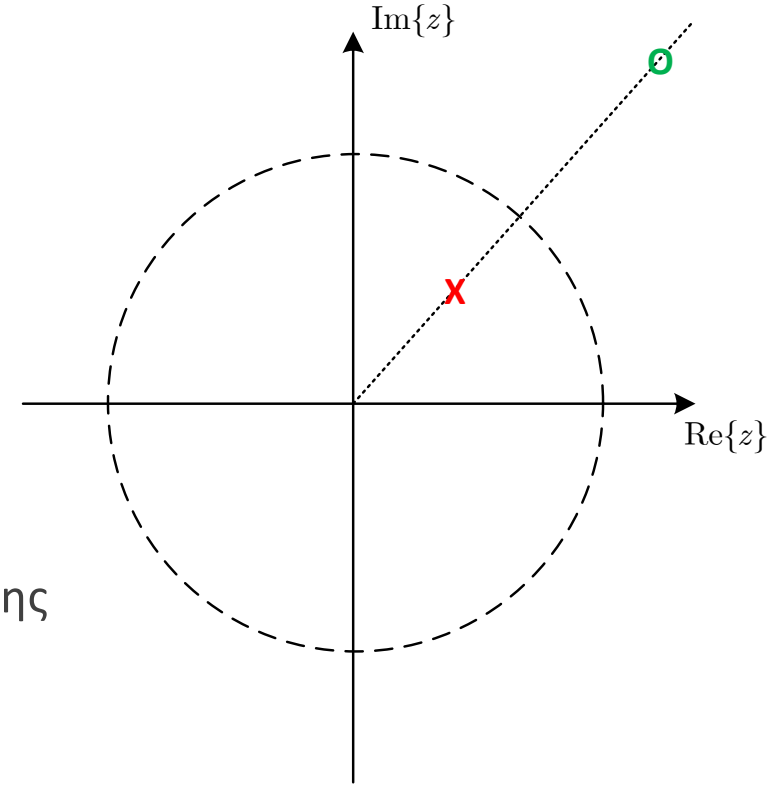
- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

- Τι συνεισφέρει ο παραπάνω όρος στην απόκριση πλάτους?

$$\left|\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}\right|_{z=e^{j\omega}} = \left|\frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{e^{-j\omega}(1 - a^* e^{j\omega})}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = 1$$

- (Μηδενικό, πόλος) = $\left(\frac{1}{a^*}, a\right)$
- Άπειρα τέτοια ζεύγη πόλων-μηδενικών δεν αλλοιώνουν την απόκριση πλάτους!
- Αλλοιώνουν ασφαλώς την απόκριση φάσης
- Τέτοια συστήματα ονομάζονται **all-pass συστήματα**
  - Θα τα μελετήσουμε στη συνέχεια
- Πολλές φορές μας δίνεται το τετράγωνο της απόκρισης σε συχνότητα $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$
- Μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες από αυτό?



- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Έχουμε $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = |H(z)|^2{}_{z=e^{j\omega}} = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$
- Άρα αν

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})} \Longrightarrow H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k^* z)}$$

τότε

$$|H(z)|^2 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})\,(1 - c_k^* z)}$$

$$|H(z)|^2\Big|_{z=e^{j\omega}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{N} 1 + |b_k|^2 - 2|b_k|\cos(\omega - \angle b_k)}{\prod_{k=1}^{M} 1 + |c_k|^2 - 2|c_k|\cos(\omega - \angle c_k)} \quad (1)$$

- Για κάθε πόλο $z = c_k$ του συστήματος $H(z)$, υπάρχει ένας ακόμη πόλος $z = \frac{1}{c_k^*}$ στο $|H(z)|^2$ και για κάθε μηδενικό $z = b_k$ του συστήματος $H(z)$ υπάρχει ένα ακόμη μηδενικό $z = \frac{1}{b_k^*}$ στο $|H(z)|^2$
- Το $|H(z)|^2$ διαθέτει συζυγή αμοιβαία ζεύγη πόλων-μηδενικών
- Το ένα στοιχείο του κάθε ζεύγους σχετίζεται με το $H(z)$ και το άλλο στοιχείο με το $H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$ για το οποίο ισχύει

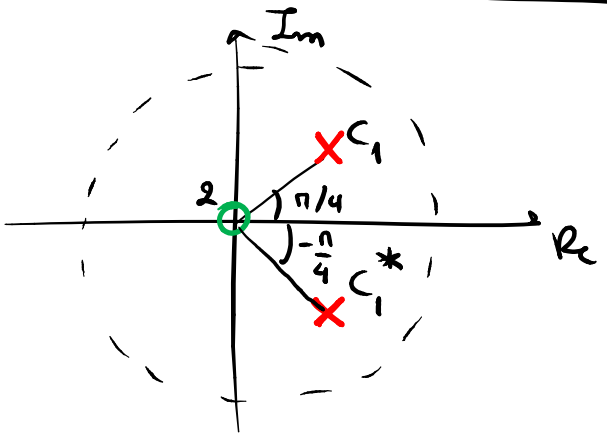
$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (2)$$

Προφανώς $b_k = 0$ αν συγκρίνετε τις σχέσεις (1), (2).

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{5}{4} = 1 + |c_1|^2 \Rightarrow |c_1|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{|c_1| = \frac{1}{2}}$$

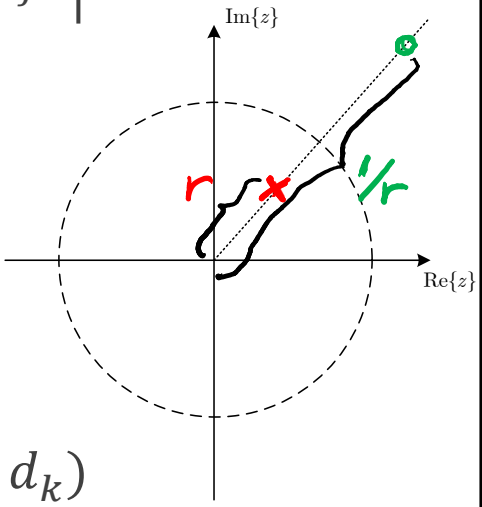
$$-\measuredangle c_1 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\measuredangle c_1 = \frac{\pi}{4}} \quad \text{. Άρα } c = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$



$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- **All-pass Συστήματα**

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right| = \prod_{k=1}^{N} \frac{\left|e^{-j\omega} - a_k^*\right|}{\left|1 - a_k e^{-j\omega}\right|} = 1$$



- Πόλοι-μηδενικά: $\left(a_k, \frac{1}{a_k^*}\right) = \left(r_k e^{j\theta_k}, \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k}\right)$
- Για πραγματική* κρουστική απόκριση

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_1} \underbrace{\frac{z^{-1} - b_k^*}{1 - b_k z^{-1}}}_{b_k \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^{N_2} \underbrace{\frac{(z^{-1} - d_k^*)(z^{-1} - d_k)}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}}_{d_k \in \mathbb{C}}$$

- Για σύστημα πρώτης τάξης, μπορεί να δειχθεί ότι η απόκριση φάσης είναι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = -\omega - 2\tan^{-1}\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

* οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή ζεύγη

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

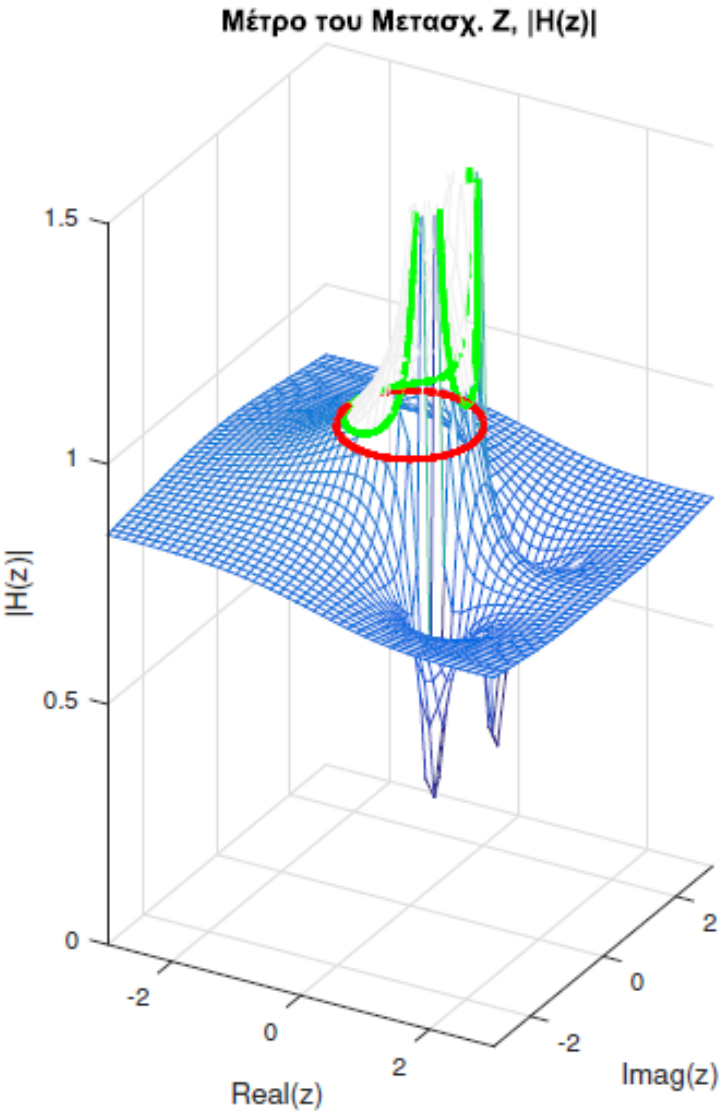
- **All-pass Συστήματα**
- Καθυστέρηση ομάδας

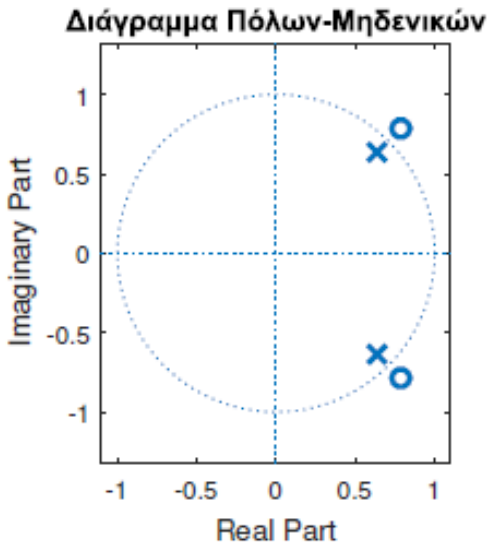
$$\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)}$$

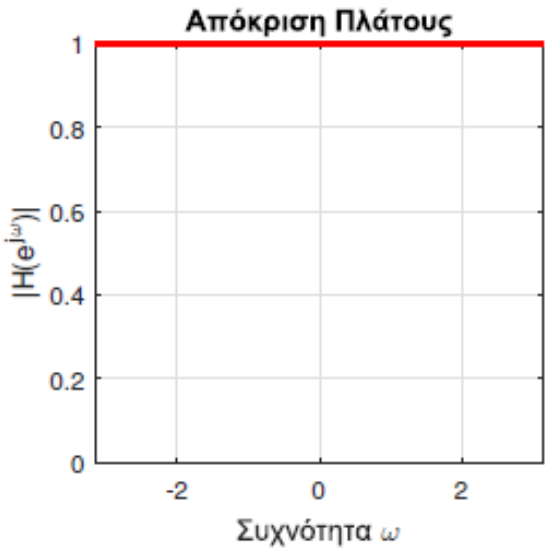
- Αν $H(z)$ ευσταθές και αιτιατό ($r < 1$) τότε $\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] > 0$
- Αν $\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] > 0 \Rightarrow \angle H\left(e^{j\omega}\right) \leq 0, \quad 0 \leq \omega < \pi$
  - Απόκριση φάσης μη-θετική!
- **Αιτιατά** all-pass συστήματα έχουν **πάντα θετική καθυστέρηση ομάδας**!
- Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να καθυστερήσουν συνιστώσες στενής ζώνης της εισόδου τους χωρίς να επηρεάσουν το πλάτος τους!
- Που είχαμε δει κάτι παρόμοιο;
  - Στην πρώτη μας συζήτηση για την καθυστέρηση ομάδας!

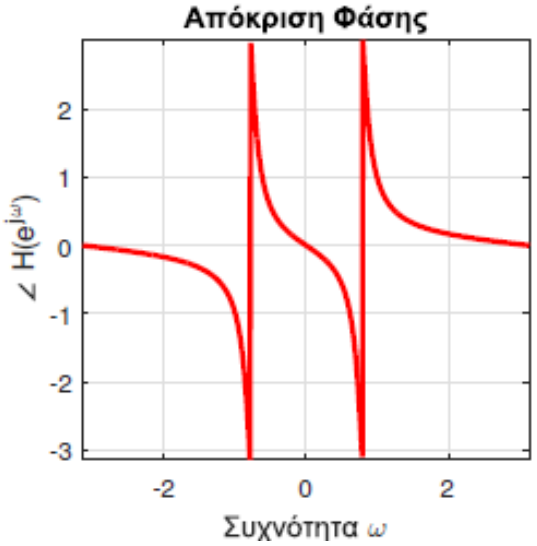
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

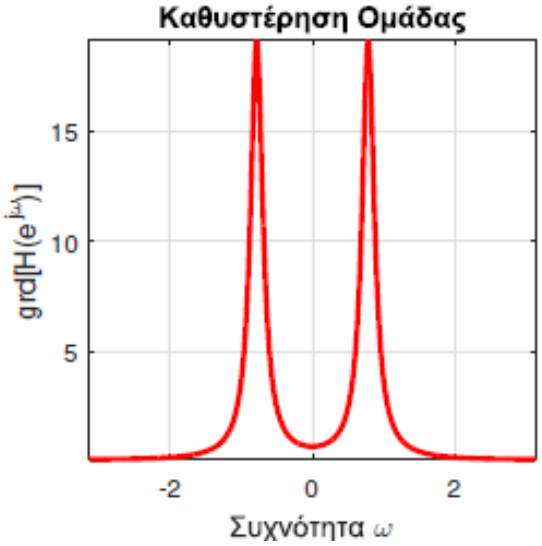
- **All-pass Συστήματα**











© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα **ελάχιστης φάσης**
  - Είναι αιτιατά και ευσταθή, κι έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα

- Ένα οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης με ένα all-pass σύστημα

- Με άλλα λόγια, από ένα δεδομένο σύστημα μπορούμε πάντα να εξάγουμε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης
  - Δηλ. ένα σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους, που να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου!
  - Για την απόκριση φάσης θα μιλήσουμε αργότερα… ☺

- Θα μείνουμε κυρίως στα ευσταθή και αιτιατά ΓΧΑ συστήματα…
  - … αν και το συμπέρασμα ισχύει για κάθε σύστημα με ρητή $H(z)$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

- Από την παραπάνω σχέση άμεσα προκύπτει:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|$$

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

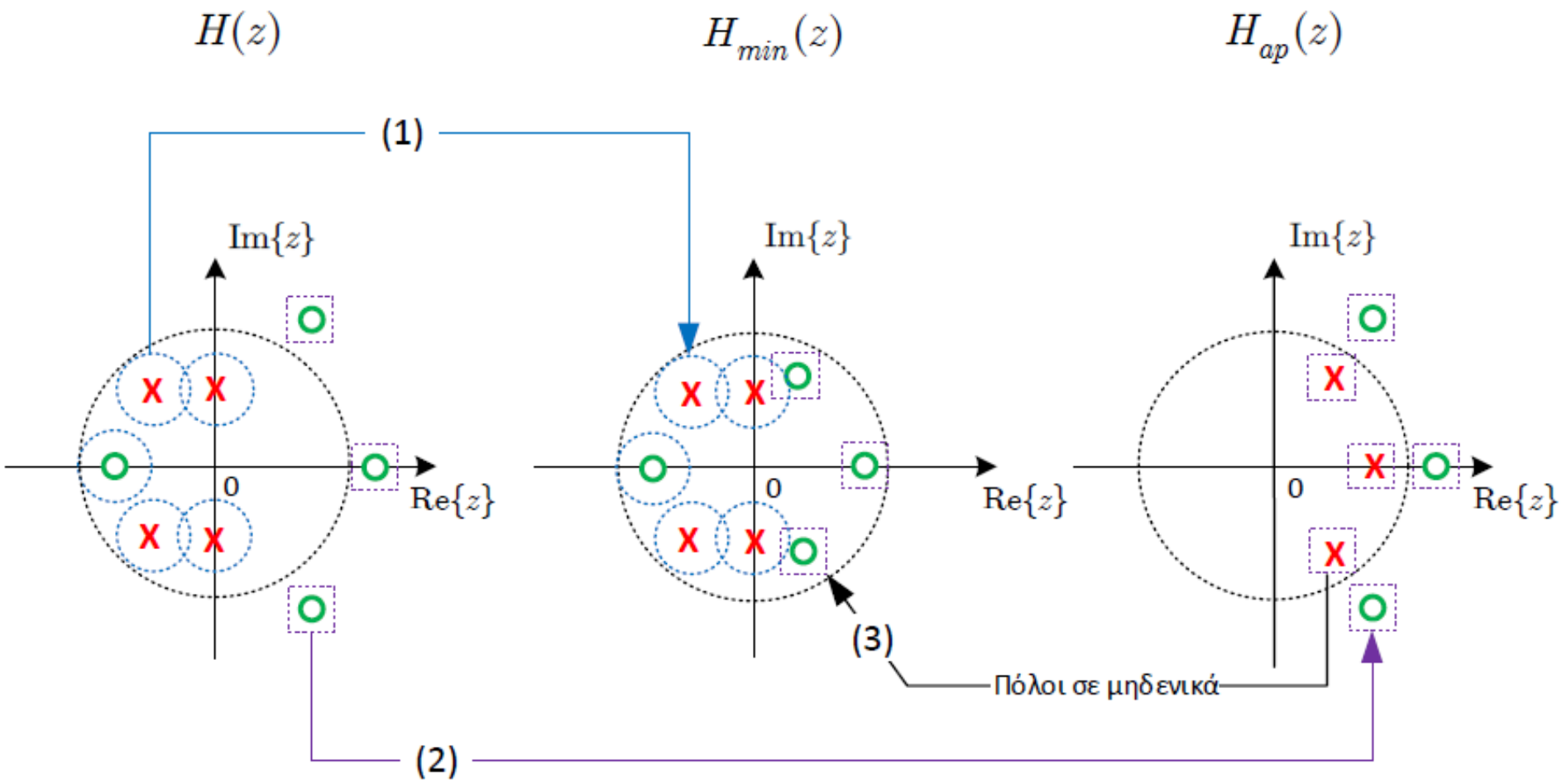
1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρισκονται εκτος του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει ειναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.

2. Το all-pass συστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτριζει το καταλληλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.

3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

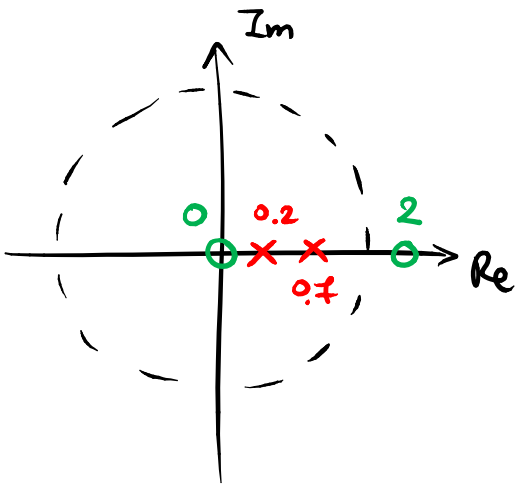


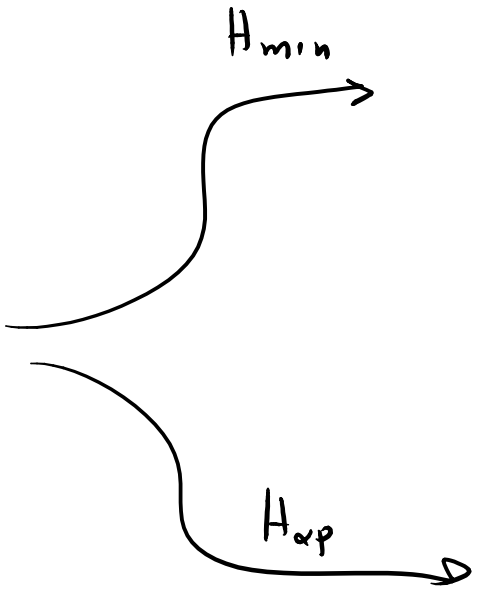
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

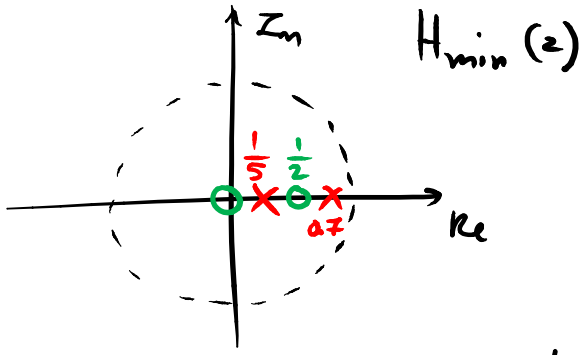
- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

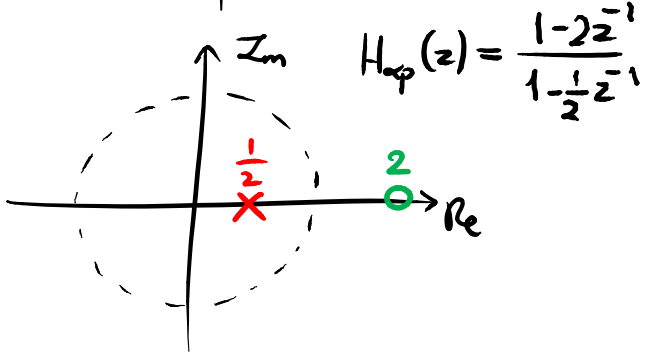
$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

$$= \frac{z^2 - 2z}{(z-0.2)(z-0.7)} = \frac{z(z-2)}{(z-0.2)(z-0.7)}$$









- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

Έχει, $H_{ap}(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Όμως τα $H_{ap}(z)$ έχαν μοναδιαία απόκριση πλάτους όταν είναι της μορφής $\dfrac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$.

Άρα $H_{ap}(z) = \dfrac{-2\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = (-2)\dfrac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Η σταθερά -2 θα μεταφερθεί στο minimum phase. Άρα $H_{ap}(z) = \dfrac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{2}$

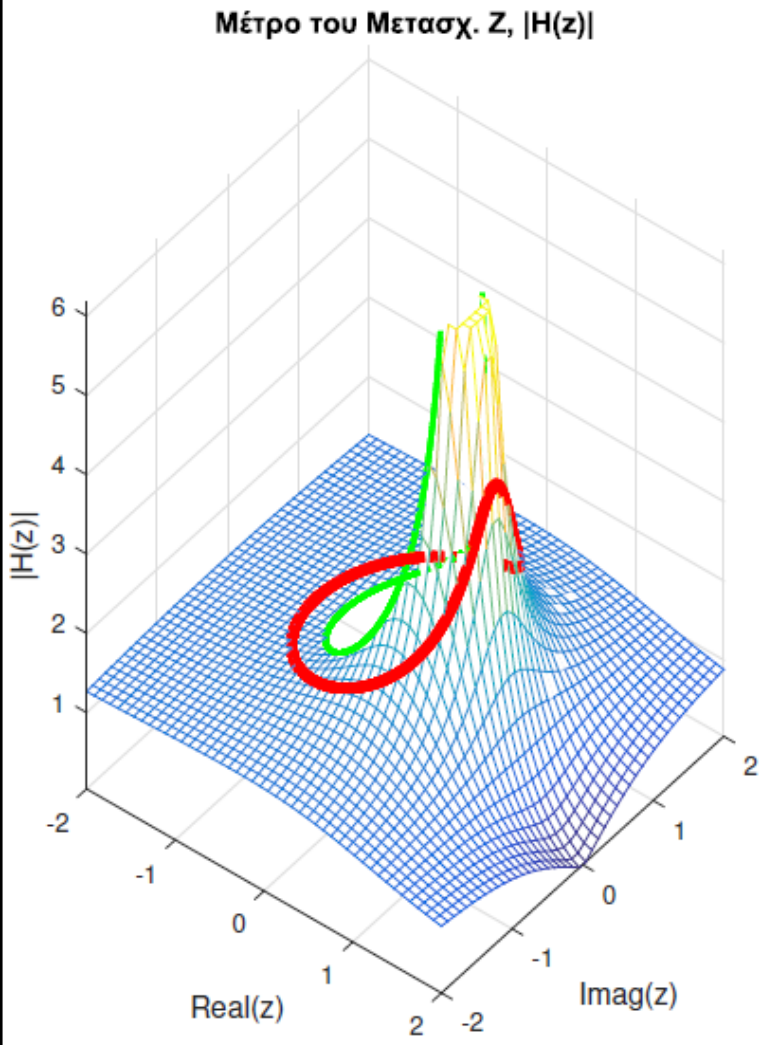
Τέλος,

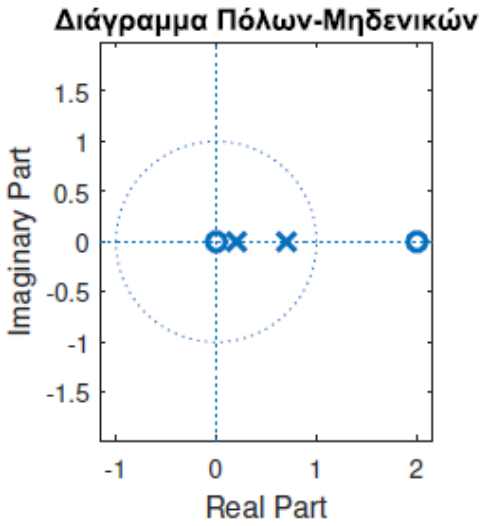
$$H_{min}(z) = -2\,\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1-0.7z^{-1})} = \frac{z^{-1}-2}{(1-0.2z^{-1})(1-0.7z^{-1})},$$

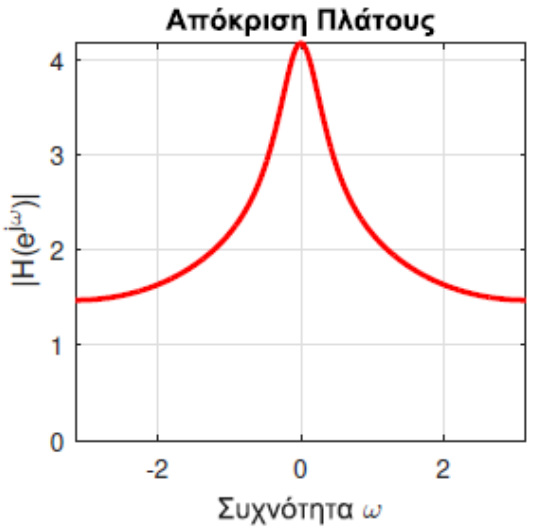
με $|z|>0.7$.

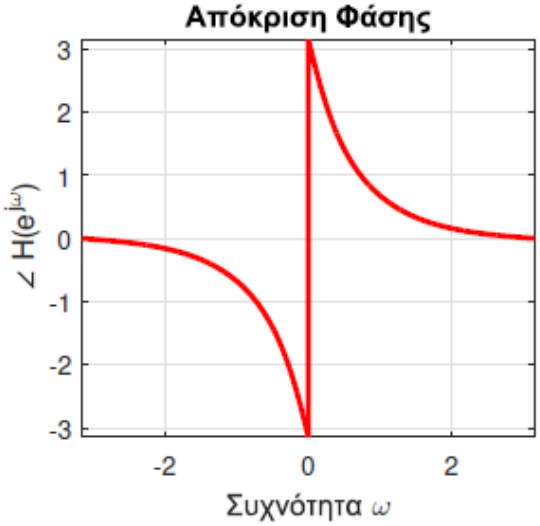
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

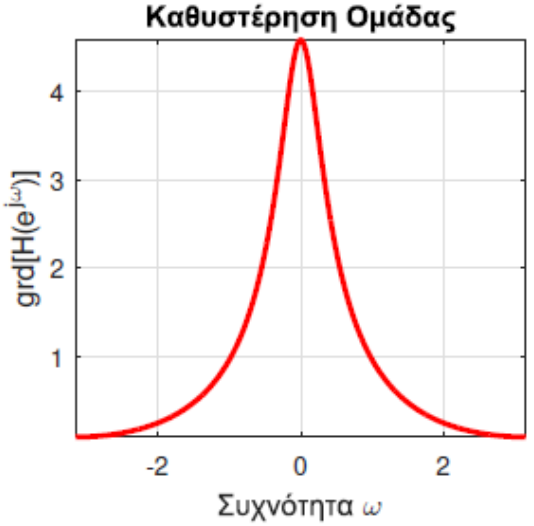
- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:





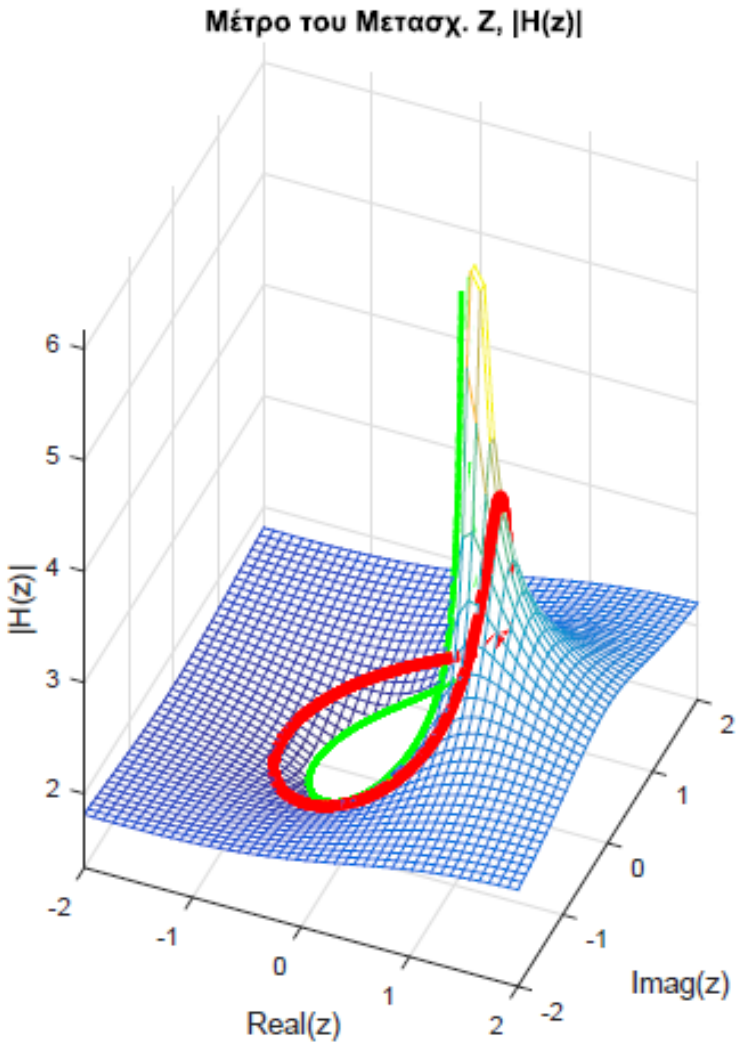


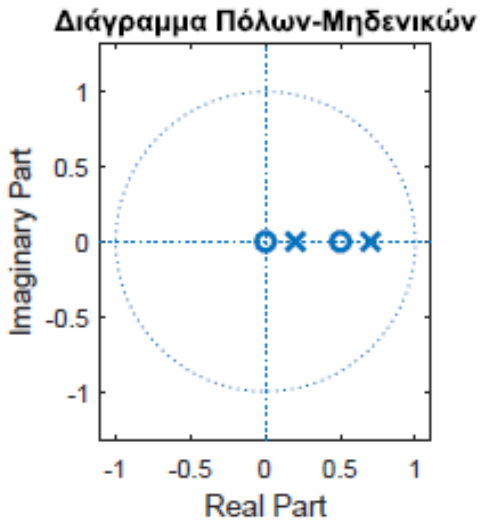


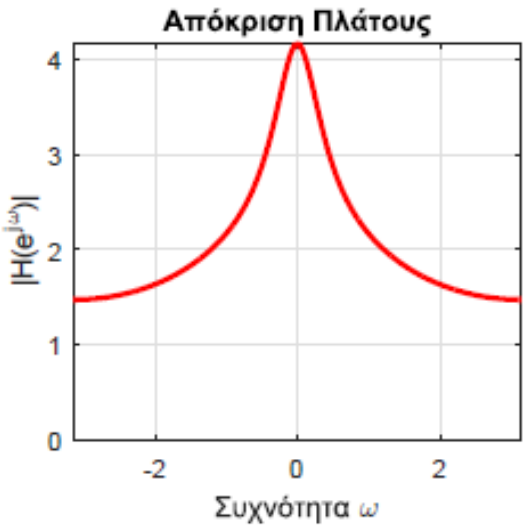


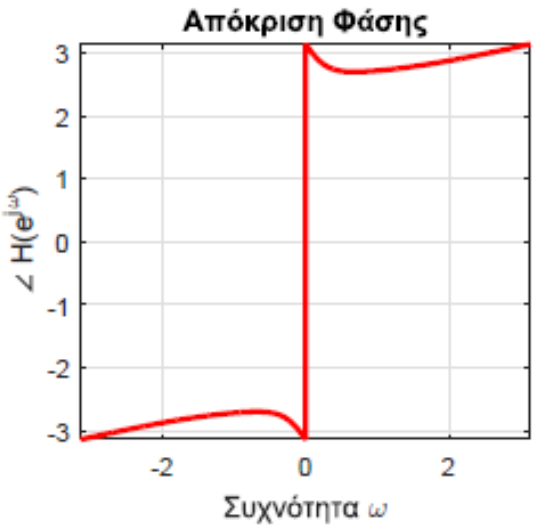
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

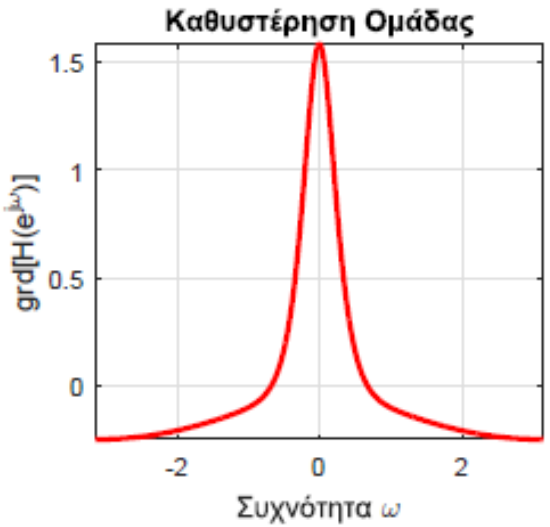
- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:





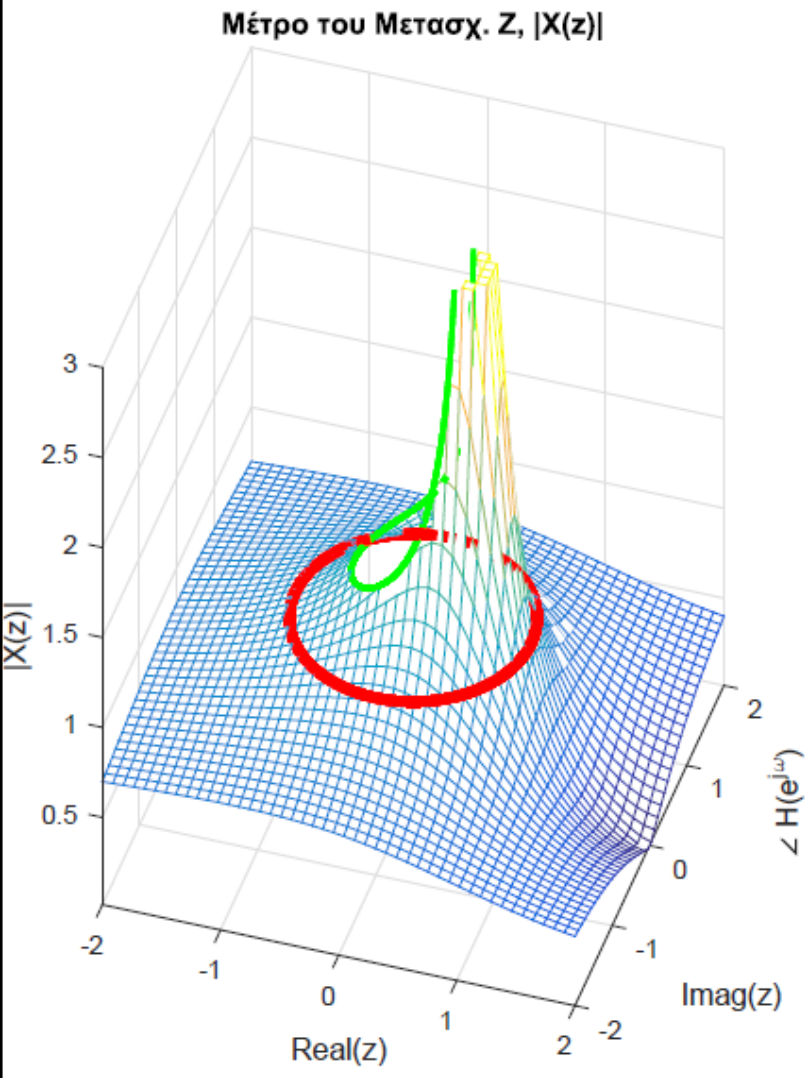




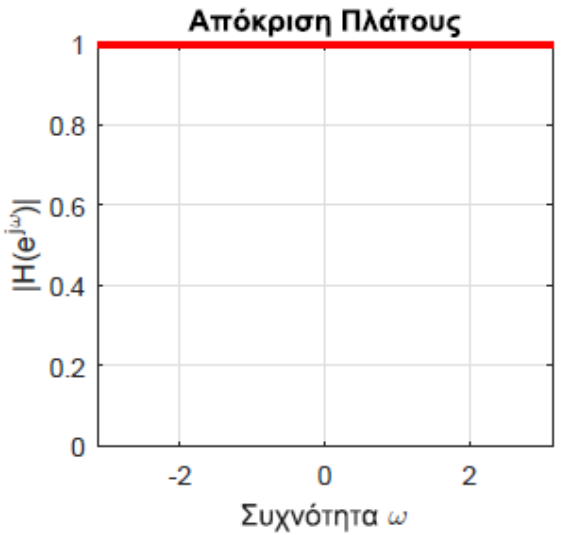


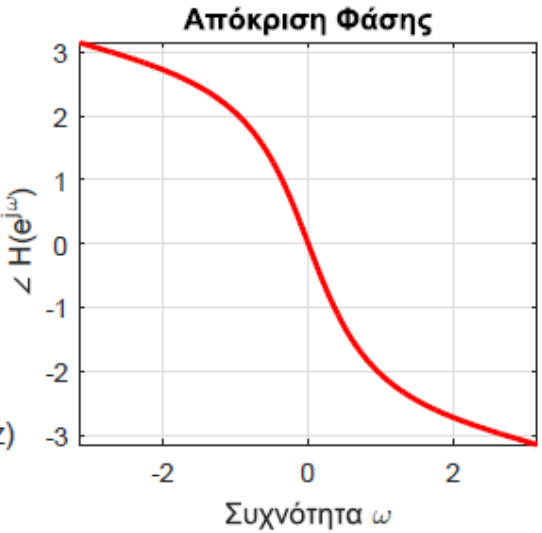
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

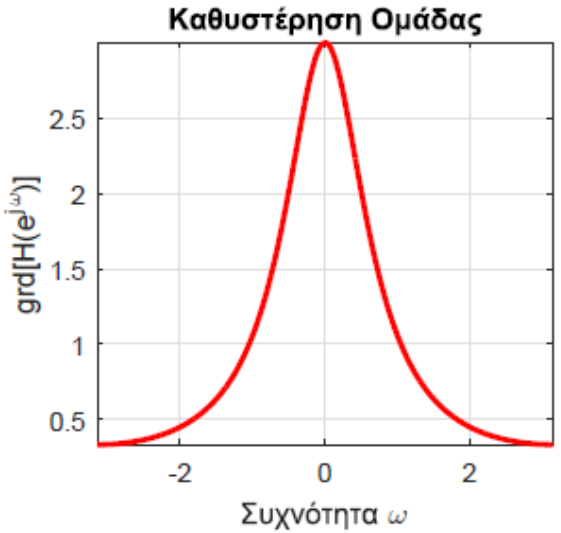
- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:











© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Χρειάζεται απαραίτητα κάθε φορά όλη η αυτή (εύκολη μεν, χρονοβόρα δε) διαδικασία για την εύρεση ενός minimum phase συστήματος?

- Όχι! ☺

- Είδαμε νωρίτερα ότι ένας όρος $1 - az^{-1}$ με a **εκτός** μοναδιαίου κύκλου μπορεί να «καθρεπτιστεί» **εντός**, στη συζυγή αμοιβαία θέση, του μοναδιαίου κύκλου με χρήση του όρου $z^{-1} - a^*$

- Μια τέτοια κίνηση ΔΕΝ αλλάζει την απόκριση πλάτους (slide 9)!

- Οπότε για την εύρεση του minimum phase συστήματος αρκεί να αλλάξουμε τους όρους $1 - az^{-1}$ **εκτός** μοναδιαίου κύκλου με όρους $z^{-1} - a^*$ (αναγκαστικά **εντός** μοναδιαίου κύκλου) !!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

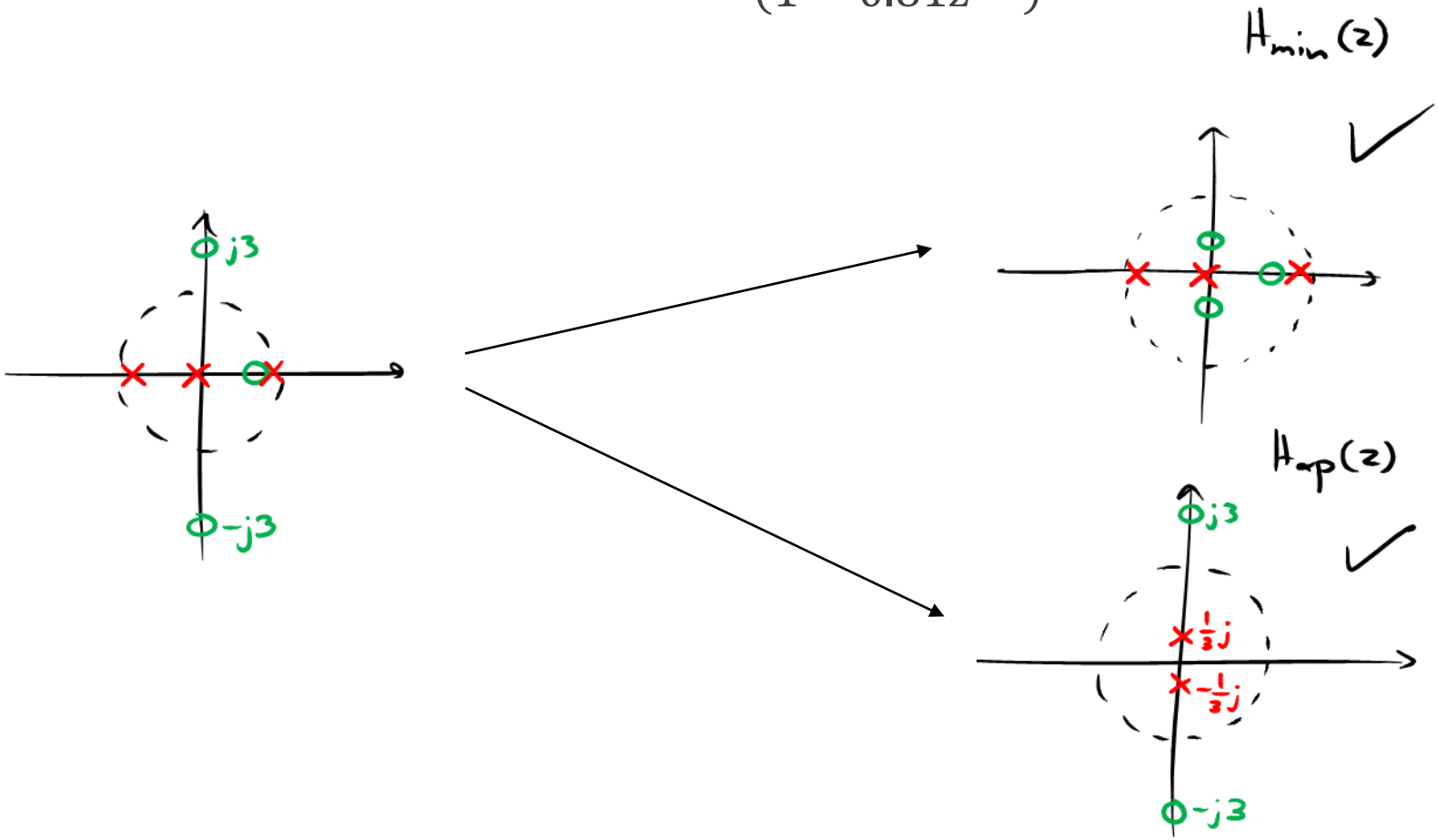
Είναι

$$H(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1-j3z^{-1})(1+j3z^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}$$

$$H_{min}(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(z^{-1}-j3)(z^{-1}+j3)}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}$$!!!

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:

$$\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$$

Είναι $H_{ap}(z) = \dfrac{(1+j3z^{-1})(1-j3z^{-1})}{(1+\frac{1}{3}jz^{-1})(1-\frac{1}{3}jz^{-1})} = \dfrac{j3(\frac{1}{j3}+z^{-1})}{(1+\frac{1}{3}jz^{-1})} \cdot \dfrac{(-j3)(\frac{1}{-j3}+z^{-1})}{1-\frac{1}{3}jz^{-1}}$

$$= (j3)(-j3)\,\frac{z^{-1}+\frac{1}{j3}}{1+\frac{1}{3}jz^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}-1/3j}{1-\frac{1}{3}jz^{-1}}$$

$$= (j3)(-j3)\,\frac{z^{-1}-\frac{1}{3}j}{1+\frac{1}{3}jz^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}+\frac{1}{3}j}{1-\frac{1}{3}jz^{-1}}$$

$$= 9\,\frac{z^{-1}-\frac{1}{3}j}{1+\frac{1}{3}jz^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}+1/3\,j}{1-\frac{1}{3}jz^{-1}}$$

$(+j3)(-j3)$

Οπότε

$$H_{min}(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1-\frac{1}{3}jz^{-1})(1+\frac{1}{3}jz^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1-0.9z^{-1})} = 9\,\frac{(1-0.8z^{-1})(1-\frac{1}{3}jz^{-1})(1+\frac{1}{3}jz^{-1})}{(\ldots)(\ldots)}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:

Οπότε τελικά, $H_{ap}(z) = \dfrac{z^{-1} - \frac{1}{3}j}{1 + \frac{1}{3}j\, z^{-1}} \cdot \dfrac{z^{-1} + \frac{1}{3}j}{1 - \frac{1}{3}j\, z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$

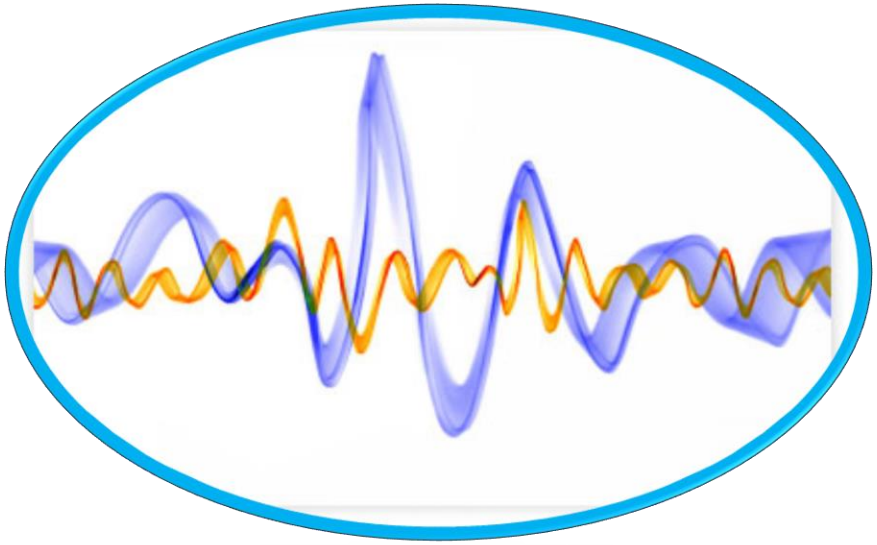
και

$$H_{min}(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(z^{-1} - j3)(z^{-1} + 3j)}{(1 - 0.81\, z^{-2})}, \quad |z| > 0.9$$

Το $H_{min}(z)$ έχει την ίδια απόκριση πλάτους με το $H(z)$!

Επιπλέον, έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα!

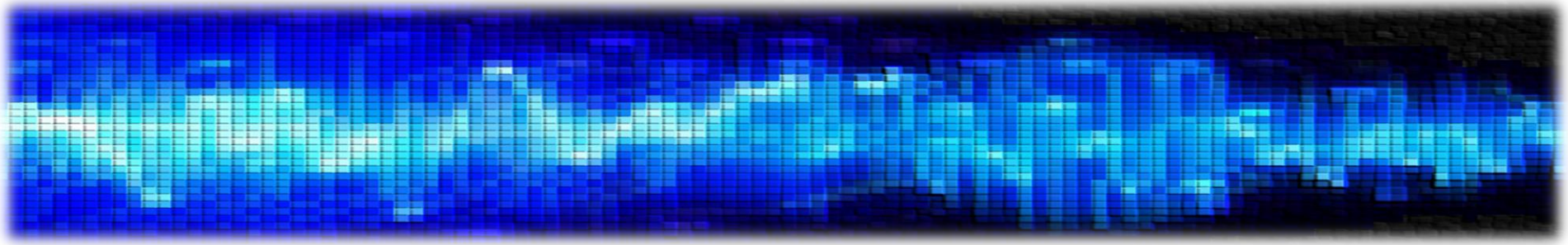
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 17Η



- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα (επανάληψη…)**

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

- Από την παραπάνω σχέση άμεσα προκύπτει:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right| = \left|H_{min}(e^{j\omega})\right|$$

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

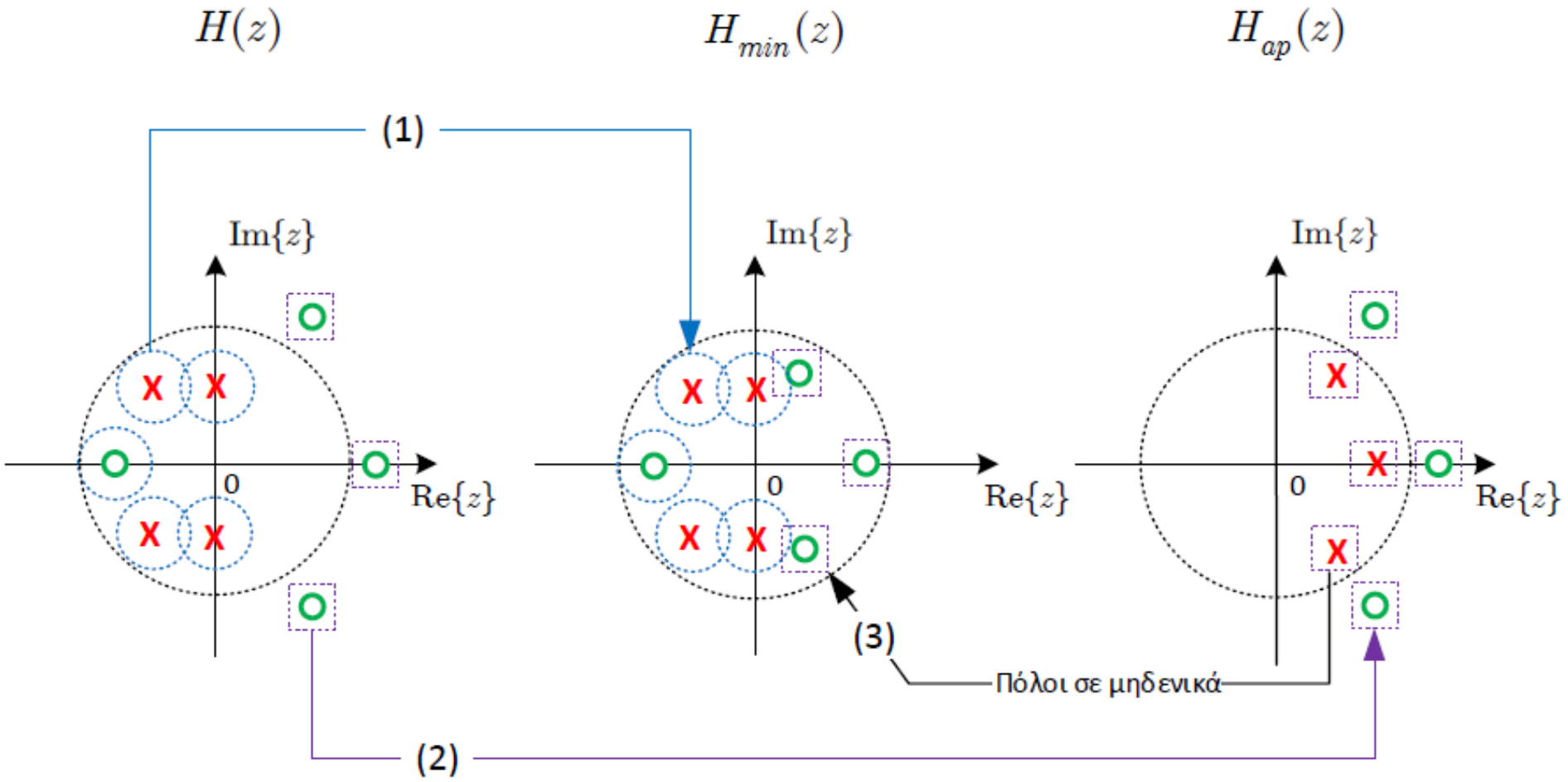
1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρισκονται εκτος του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει ειναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.

2. Το all-pass συστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτριζει το καταλληλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.

3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα (επανάληψη…)**



- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Συστήματα με όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου

- Εναλλακτικά, συστήματα αιτιατά και ευσταθή, και με αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα

- Γιατί τα συστήματα αυτά ονομάζονται ελάχιστης φάσης?

- Η επιλογή του ονόματος προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους

- Ας τη δούμε, μαζί με άλλες δυο σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right) \leq 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) \leq \angle H_{min}(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **απόκριση φάσης με τις μεγαλύτερες τιμές** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Εναλλακτικά, αν ορίσουμε την συνάρτηση «καθυστέρηση φάσης» ως την αρνητική της απόκρισης φάσης

$$\theta(\omega) = -\angle H(e^{j\omega})$$

τότε **το αιτιατό και ευσταθές σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την καθυστέρηση φάσης με τις μικρότερες τιμές** από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης φάσης», αλλά έχει επικρατήσει απλά το «ελάχιστης φάσης»

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H_{min}\left(e^{j\omega}\right) + \angle H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)$$

- Κατά συνέπεια

$$\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = \mathrm{grd}\left[H_{min}\left(e^{j\omega}\right)\right] + \mathrm{grd}\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{grd}\left[H_{ap}\left(e^{j\omega}\right)\right] > 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] > \mathrm{grd}\left[H_{min}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **καθυστέρηση ομάδας με τις μικρότερες τιμές, δηλ. την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας», αλλά δε χρησιμοποιείται αυτός ο όρος

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Μπορεί να δειχθεί ότι η κρουστική απόκριση $h_{min}[n]$ ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και οι κρουστικές αποκρίσεις $h[n]$ άλλων συστημάτων με την ίδια απόκριση πλάτους ικανοποιούν τη σχέση ***μερικής ενέργειας***

$$E(n) \leq E_{min}(n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |h_{min}[k]|^2$$

- Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στα συστήματα ελάχιστης φάσης, η ***ενέργεια* του συστήματος είναι περισσότερο συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της κρουστικής απόκρισης**

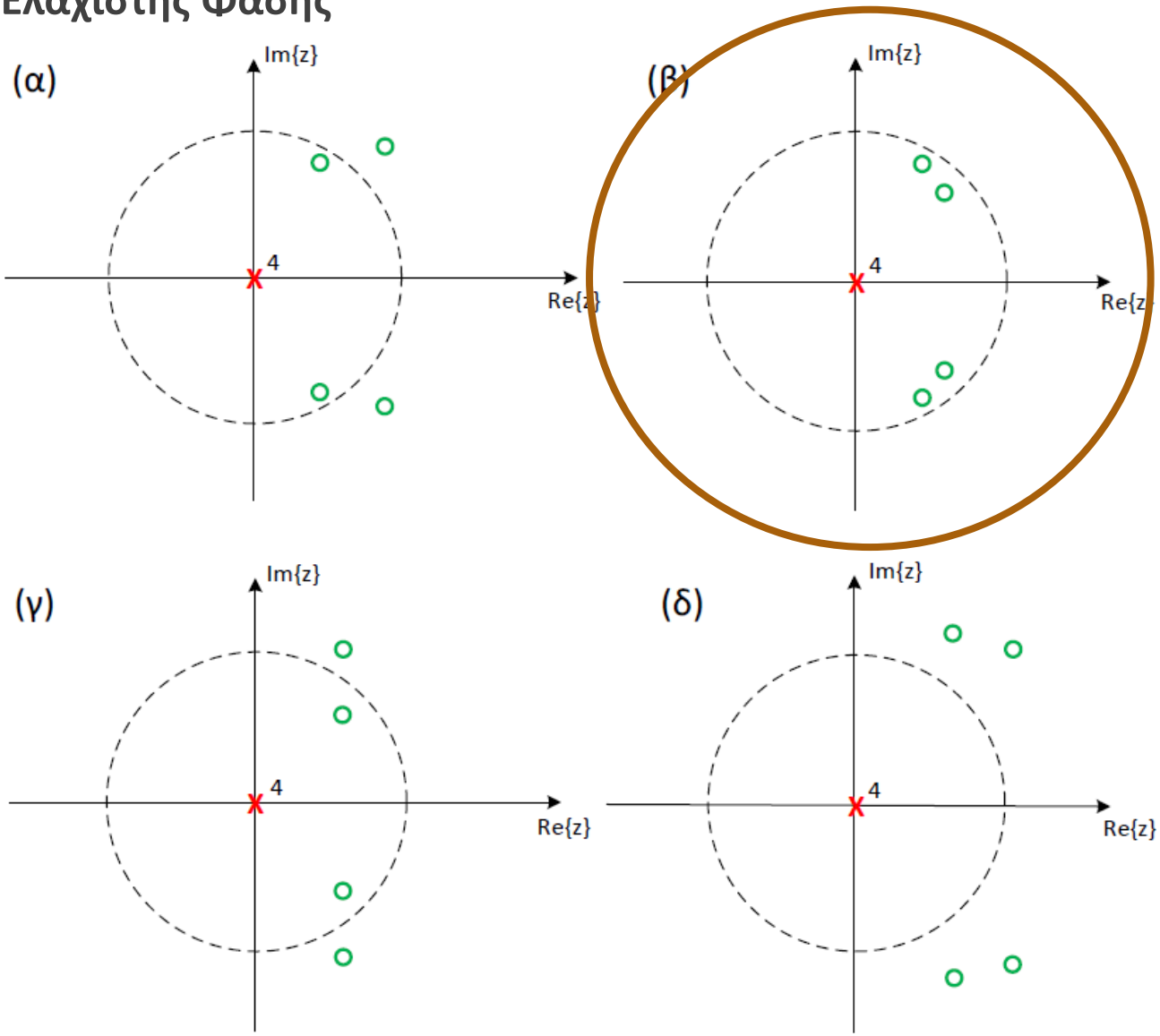
- Όλα τα άλλα συστήματα έχουν την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων διαφορετικά κατανεμημένη και πιο «διάσπαρτη»

- Προσέξτε, η ιδιότητα μιλά για την κατανομή της ενέργειας στα πρώτα δείγματα
  - Όχι για τη συνολική ενέργεια, η οποία είναι ίδια σε όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους!
    - Λόγω φυσικά του θεωρήματος Parseval

- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**



- Ποιο σύστημα από τα τέσσερα είναι ελάχιστης φάσης? ☺

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Αν υπολογίσουμε τις κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με τα προηγούμενα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, τότε παρατηρούμε την παρακάτω εικόνα για την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων αυτών των κρουστικών αποκρίσεων

Μερική ενέργεια συστημάτων

	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n=0$	1.00	0.41	0.65	0.27
$n=1$	5.12	3.32	3.95	2.49
$n=2$	11.21	9.76	10.39	8.58
$n=3$	13.44	13.05	13.30	12.71
$n=4$	13.71	13.71	13.71	13.71

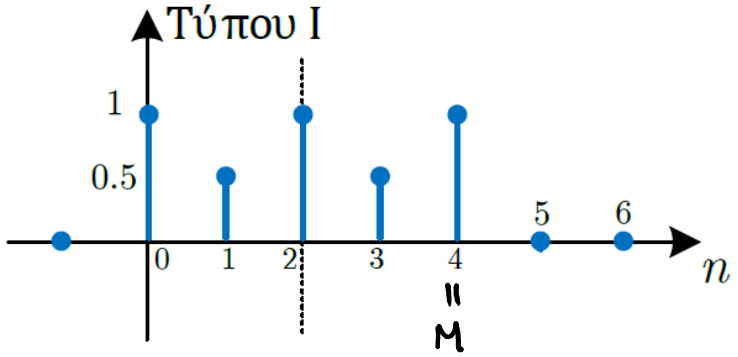
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης**
- Ξέρουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να προκαλέσει σημαντική διαταραχή στη χρονική δομή ενός σήματος που δέχεται στην είσοδό του αν η απόκριση φάσης του δεν είναι σταθερή ή γραμμική
- Συστήματα **γραμμικής** φάσης είναι πολύ επιθυμητά και χρήσιμα στην πράξη
  - Καθυστερούν όλες τις συνιστώσες εισόδου το ίδιο στην έξοδο
  - Δε διαταράσσουν τη χρονική δομή του σήματος εισόδου
- Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση αν $H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{-j(a\omega+\beta)}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$
- Θα μας απασχολήσουν μόνο **FIR αιτιατά συστήματα γραμμικής φάσης**
  - …τα οποία είναι υποχρεωτικά ευσταθή, ως FIR ☺
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι τέτοια συστήματα ικανοποιούν κάποιες συμμετρίες στην κρουστική τους απόκριση
- Υπάρχουν 4 **κατηγορίες** ΓΧΑ FIR συστημάτων γραμμικής φάσης
  - …ανάλογα με το είδος της συμμετρίας της κρουστικής τους απόκρισης
- **Κατηγορίες : «Τύποι»: I, II, III, IV**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου Ι έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M}\ \textbf{άρτιο}$$



- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[M-n]e^{-j\omega(M-n)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{-j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-n\right]\cos(\omega n) + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**
- Οπότε συνολικά

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**
- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$$

$\uparrow$ $M = 4$

Είναι $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{4} h[n] e^{-j\omega n}$

$= h[0] + h[1] e^{-j\omega} + h[2] e^{-j2\omega} + h[3] e^{-j3\omega} + h[4] e^{-j4\omega}$

Όμως $h[0] = h[4]$, $h[1] = h[3]$, οπότε:

$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1] e^{-j\omega} + h[2] e^{-j2\omega} + h[1] e^{-j3\omega} + h[0] e^{-j4\omega}$

$= h[0](1 + e^{-j4\omega}) + h[1](e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}) + h[2] e^{-j2\omega}$

$= h[0] e^{-j2\omega} (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + h[1] e^{-j2\omega} (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) +$

$+ h[2] e^{-j2\omega}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I**

- Παράδειγμα:

$$= e^{-j2\omega}\left(2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos(\omega) + h[2]\right) \qquad (M=4)$$

$$= e^{-j2\omega}\left[\sum_{k=1}^{2} 2h\left[2-k\right]\cos(k\omega) + h[2]\right]$$

που συμφωνεί με τη γενική σχέση

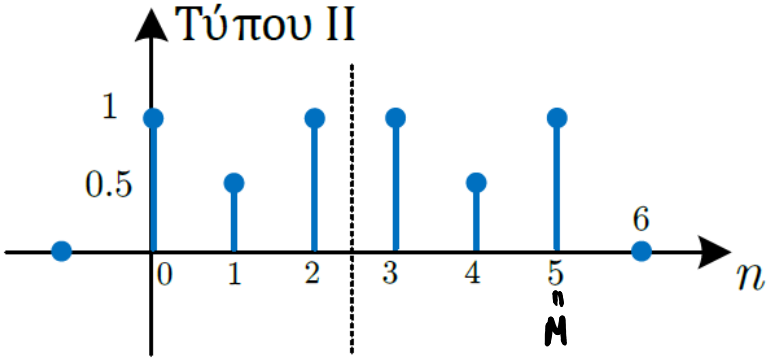
$$H_I(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{M}{2}\omega}\left(\sum_{k=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-k\right]\cos(k\omega) + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου ΙΙ**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου ΙΙ έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M}\ \textbf{περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

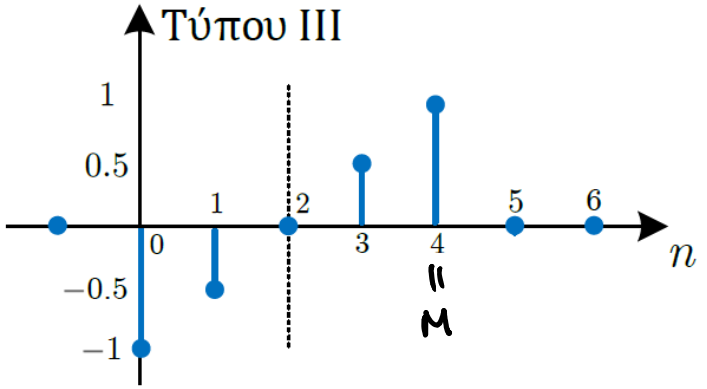
με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου III έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M}\ \textbf{άρτιο}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

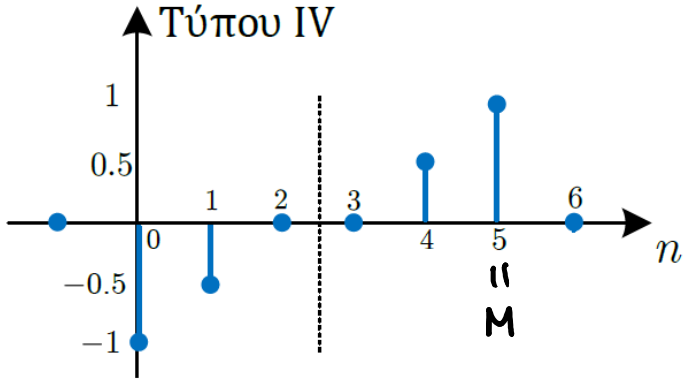
με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M}\ \textbf{περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$$

Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M

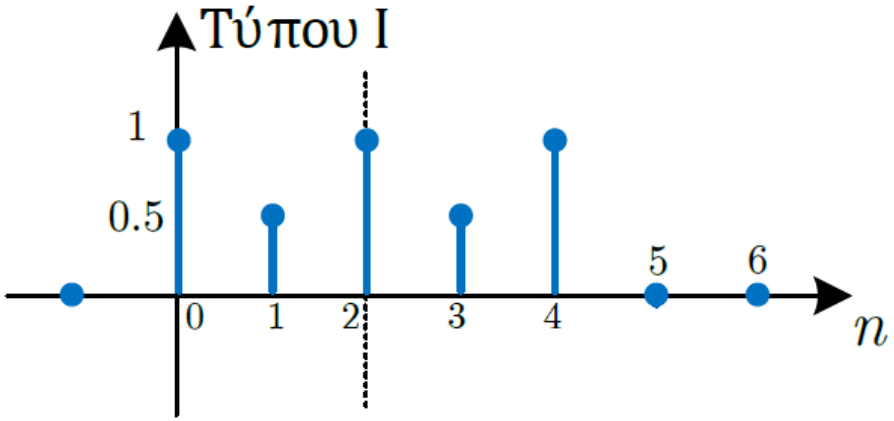
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

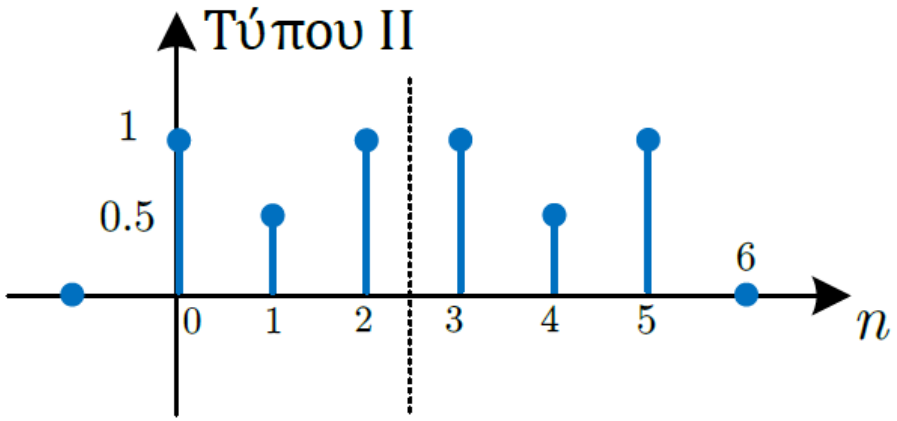
με

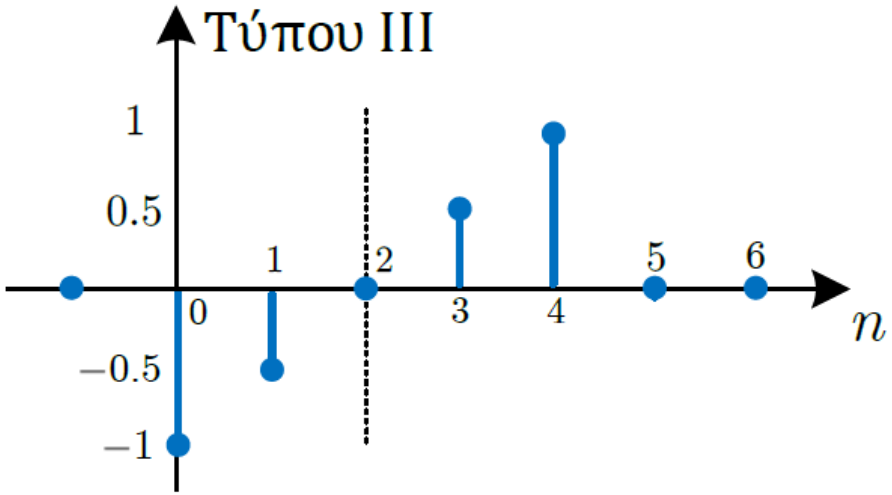
$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

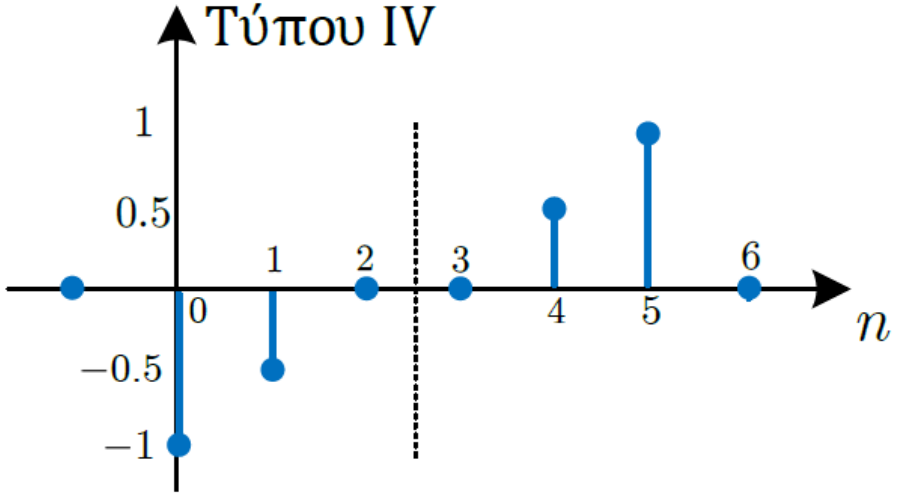
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη**









© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη**
- Συνολικά, η απόκριση συχνότητας των συστημάτων που είδαμε γράφεται

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{j\varphi(\omega)} \sum p_k S(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} A\left(e^{j\omega}\right)$$

- Το $A\left(e^{j\omega}\right)$ είναι πραγματική συνάρτηση του ω και ονομάζεται «ψευδοπλάτος»
  - Ως πραγματική συνάρτηση, η φάση της θα είναι 0 ή $\pm\pi$

- Για $0 \le \omega \le \pi$, η απόκριση φάσης $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ γράφεται

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2}, & \text{τύπου I, II,} \quad A\left(e^{j\omega}\right) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \pi, & \text{τύπου I, II,} \quad A\left(e^{j\omega}\right) < 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2}, & \text{τύπου III, IV,} \quad \mathrm{A}\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2} + \pi, & \text{τύπου III, IV,} \quad \mathrm{A}\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) < 0 \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Οι προηγούμενες σχέσεις δε μας δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση για τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικής φάσης στο χώρο της συχνότητας

- Θα πρέπει να περάσουμε στο χώρο του Z για να λάβουμε αυτήν την πληροφορία

- Προφανώς, για αιτιατά ΓΧΑ συστήματα γραμμικής φάσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο $z = 0$
  - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Τύπου I, II: $h[n] = h[M-n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$
- Τύπου III, IV: $h[n] = -h[M-n] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε ότι:

❑ Αν $z = z_0$ ένα μηδενικό του συστήματος $H(z)$, τότε υποχρεωτικά και το $z = \frac{1}{z_0}$ είναι μηδενικό του συστήματος $\rightsquigarrow H(z_0) = 0 = \pm H(z_0^{-1}) z_0^{-M} \Rightarrow \frac{H(z_0^{-1})}{z_0^M} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow H(z_0^{-1}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0^{-1}$ μηδενικό του συστήματος

  ❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0}\right)$ λέγεται αμοιβαίο

  ❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0^*}\right)$ λέγεται συζυγές αμοιβαίο

- Αν θέλουμε λοιπόν να σχεδιάσουμε ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση $z = z_0$, πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλουμε κι ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$!!!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

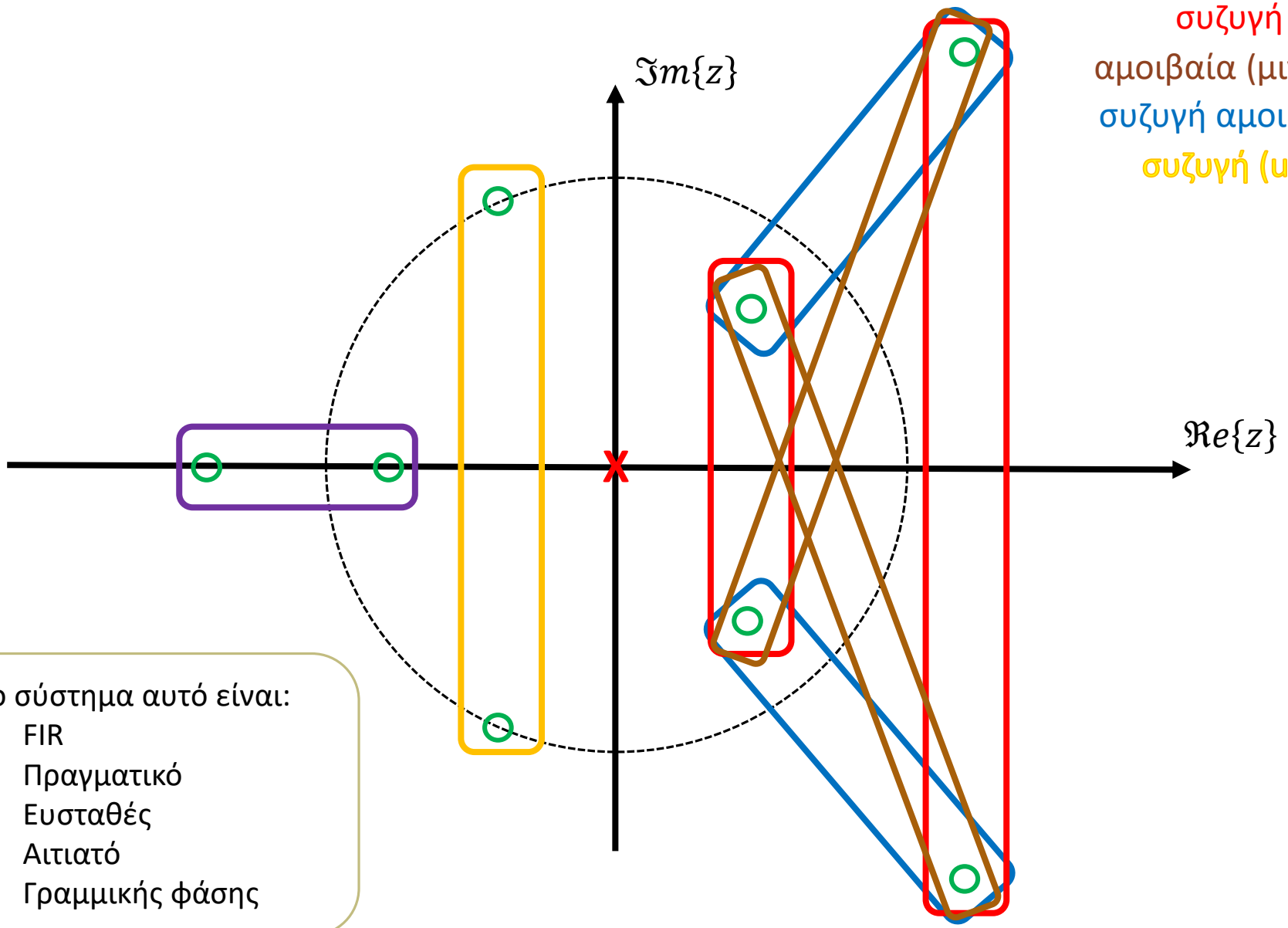
- Το $H(z)$ μπορεί να έχει μηδενικά:
  - συζυγή, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο: $z_k = e^{\pm j\theta_k}$
  - αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα: $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$
  - αμοιβαία, αλλού: $z_k = r_k e^{j\theta_k}, r_k \neq 1$ και $z_k = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$

- Αν επιπλέον το $H(z)$ αντιστοιχεί σε πραγματικό σύστημα ($h[n] \in \mathbb{R}$), τότε το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών (αφού κάθε μιγαδικό μηδενικό θα «φέρνει» μαζί και το συζυγές του, εκτός από το αμοιβαίο του)

$$\left(z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k} \right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

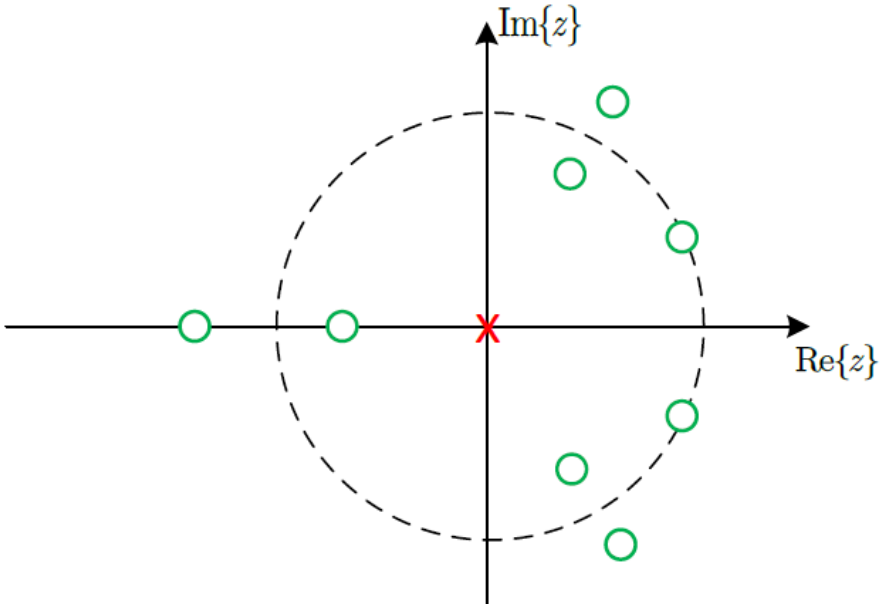


Το σύστημα αυτό είναι:

- FIR
- Πραγματικό
- Ευσταθές
- Αιτιατό
- Γραμμικής φάσης

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$
- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$: ταυτότητα
- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

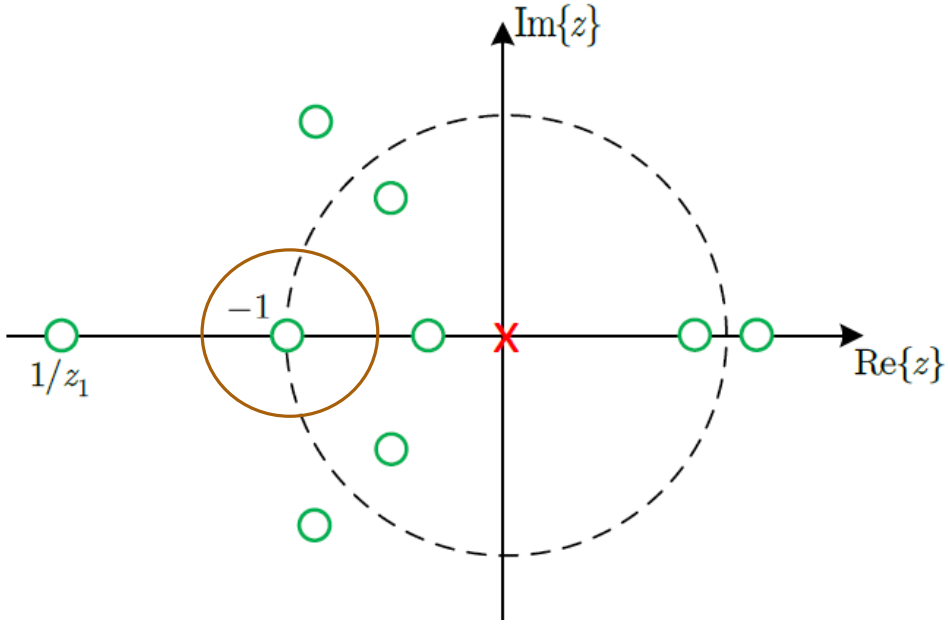
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$

- Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = 1$: ταυτότητα

- Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{II}\left(e^{j\pi}\right) = 0$!



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

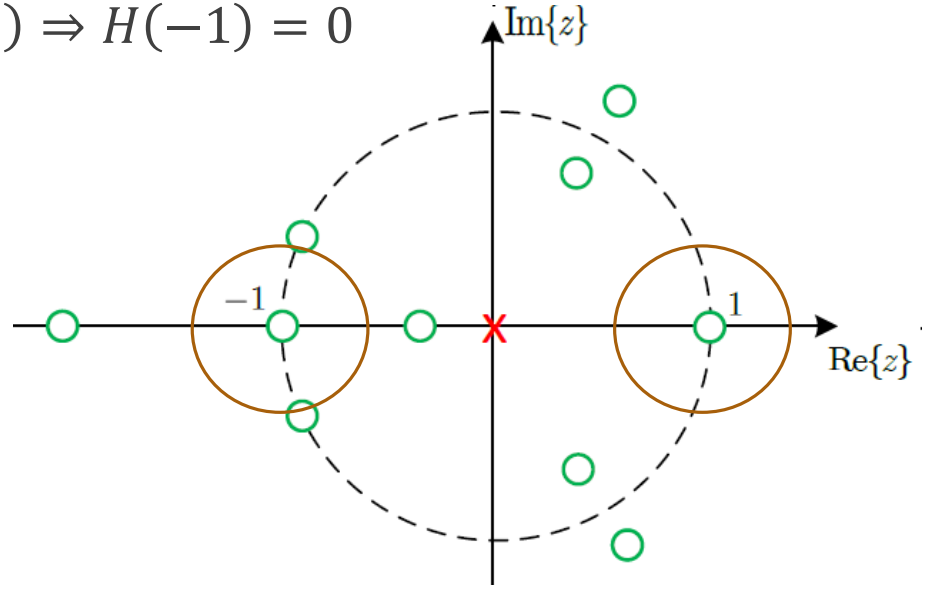
$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{III}(e^{j0}) = 0$!

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{III}(e^{j\pi}) = 0$!



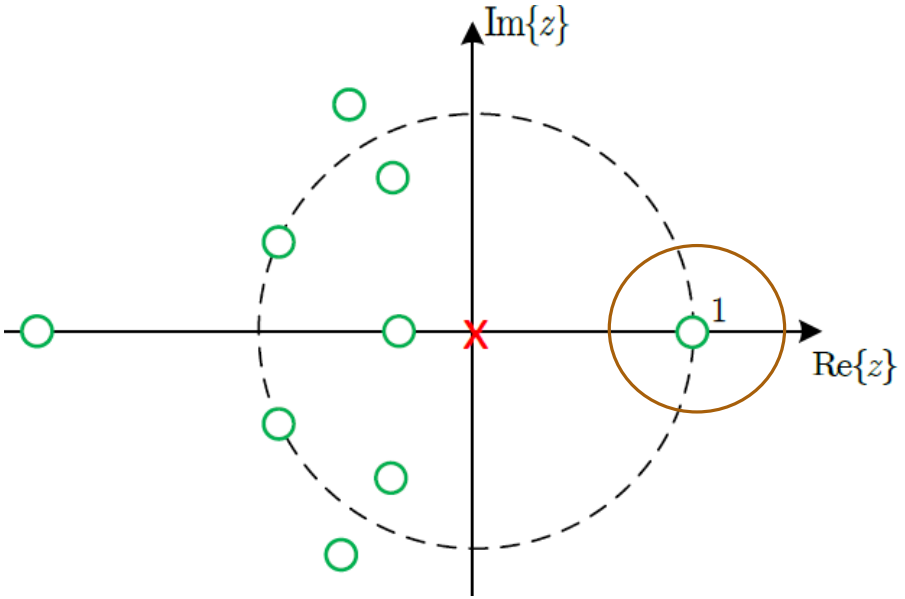
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{IV}\left(e^{j0}\right) = 0$!

- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



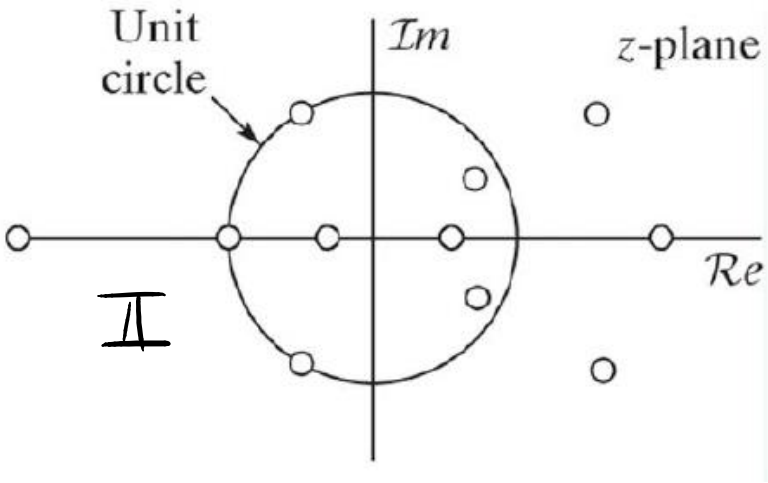
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

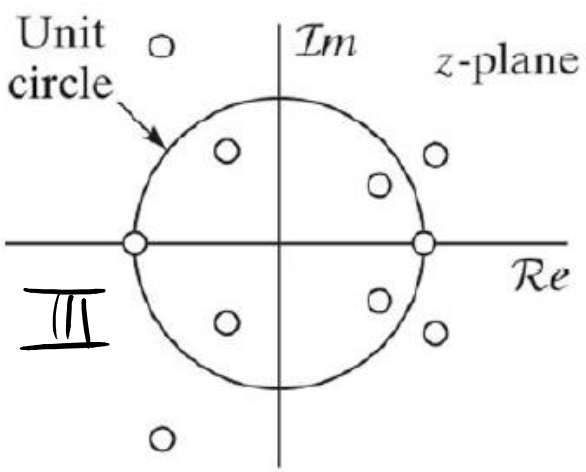
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη**

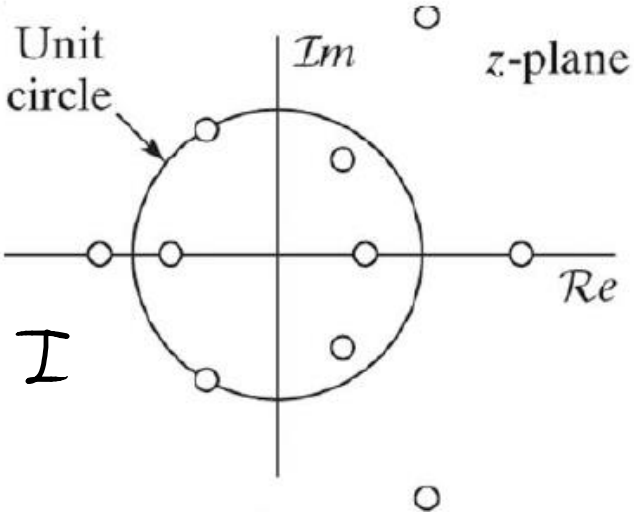
Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M	**Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M**
$H_{III}(e^{j0}) = 0, H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

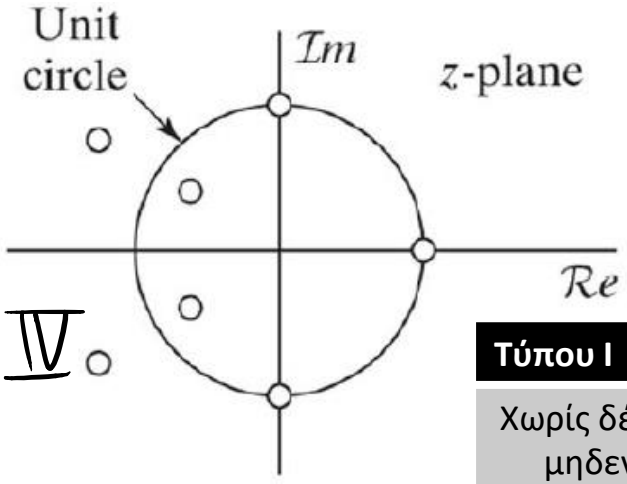
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**







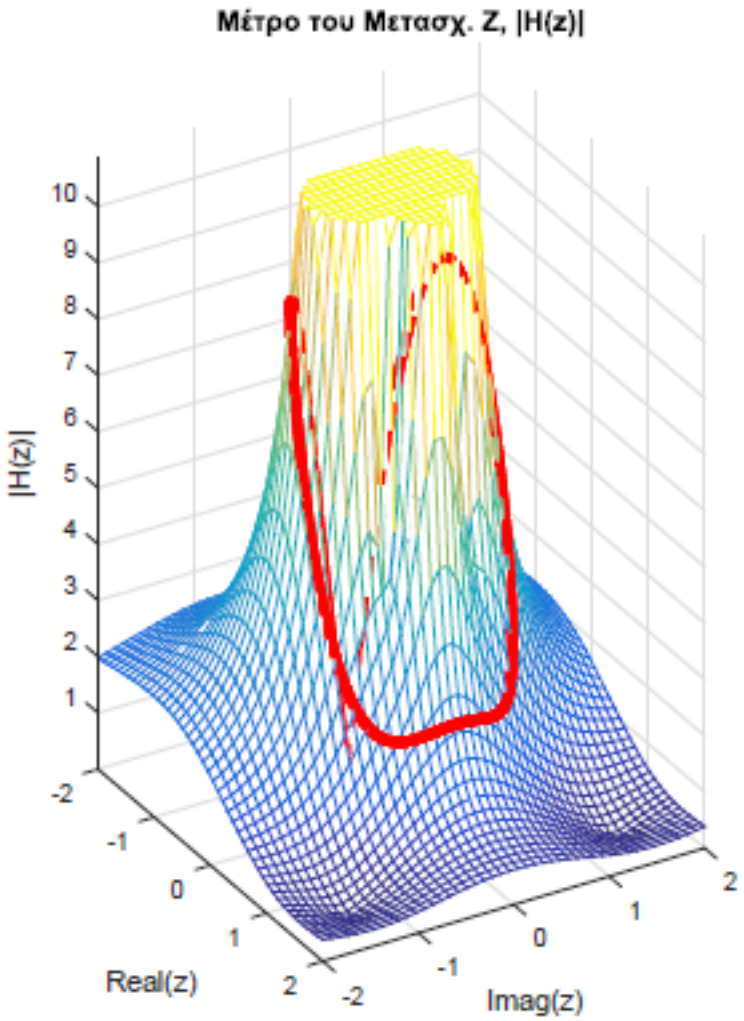


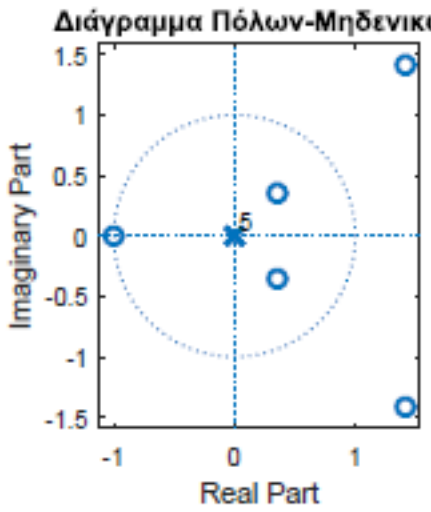
Τύπου I	Τύπου II
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III	**Τύπου IV**
$H_{III}(e^{j0}) = 0,$ $H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

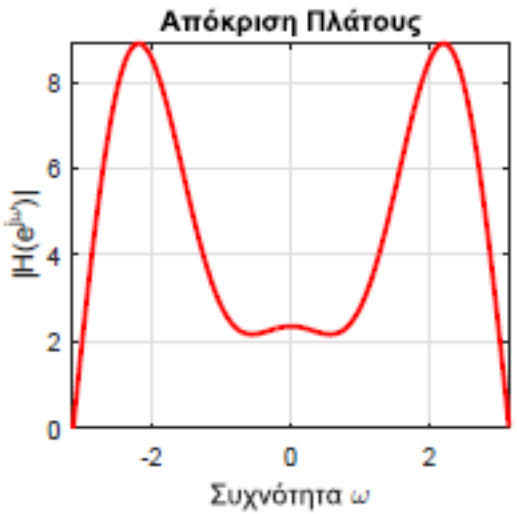
- Αναγνωρίζετε τους τύπους των συστημάτων γραμμικής φάσης;

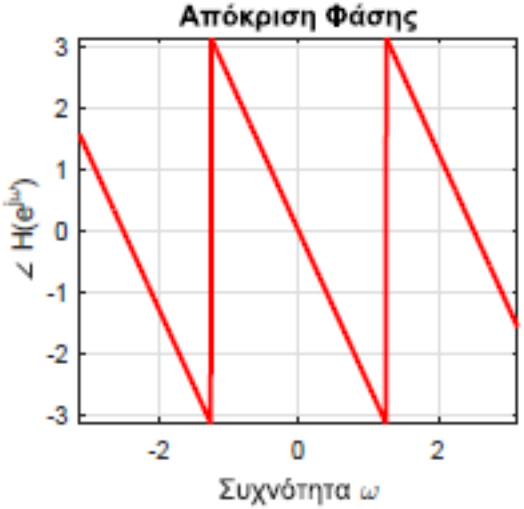
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

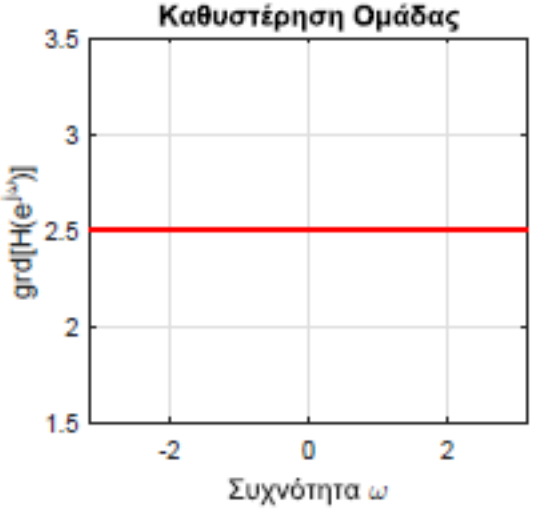
Τύπου II







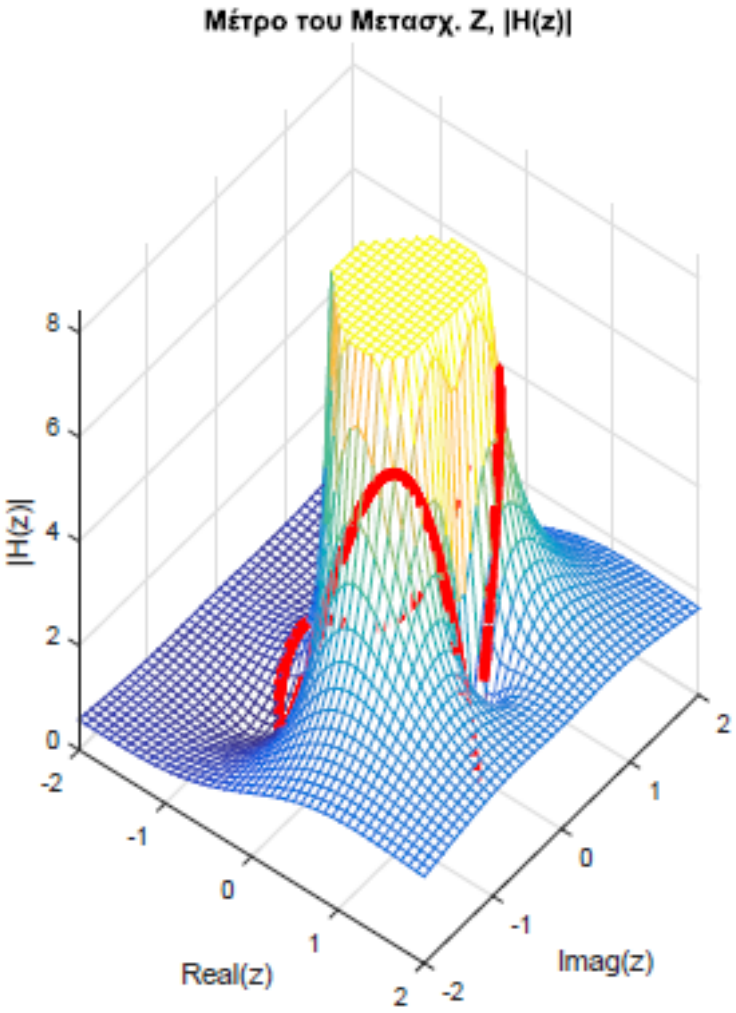


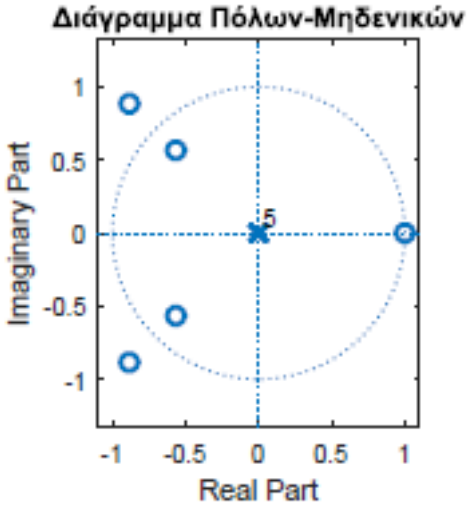


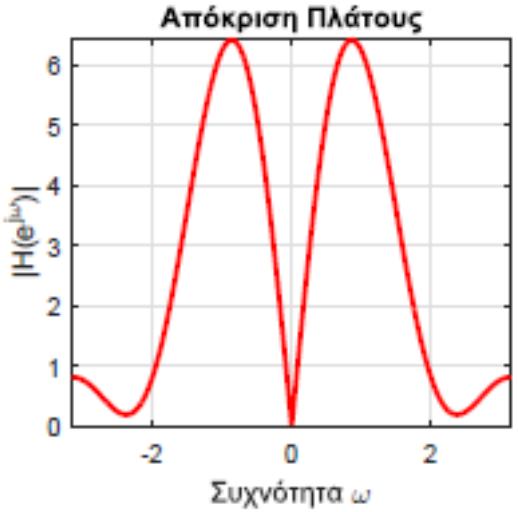
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

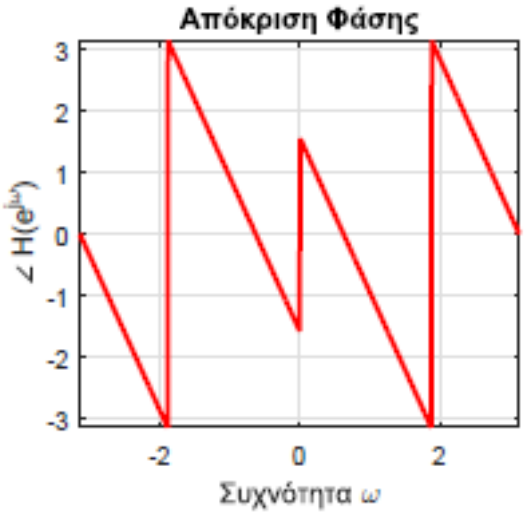
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

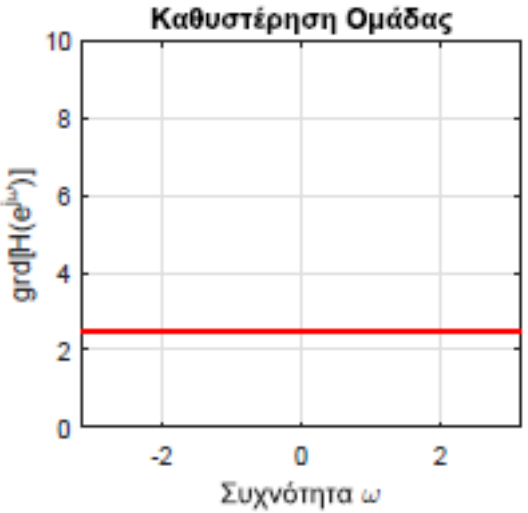
Τύπου IV











© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων:
  - ενός όρου ελάχιστης φάσης

$$H_{min}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \quad , \qquad |c_k| < 1$$

  - ενός όρου μέγιστης φάσης

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

  - ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H_{uc}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_o}{2}} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z) H_{uc}(z) H_{max}(z)$$

με

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1}) z^{-M_i}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}, \qquad |z| > 0.8$$

Γράψτε το σε μορφή $H(z) = H_{min}(z)H_{linear}(z)$

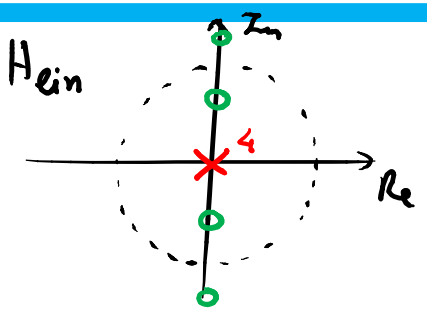
Linear phase : μηδενικά στις θέσεις $z = 2j$, $z = -2j$

Minimum phase : μηδενικό $z = \frac{1}{2}$, πόλοι : $z = 0.8$, $z = -0.8$, $z = 0$

Για να είναι έγκυρο το σύστημα γραμμικής φάσης, θα πρέπει να έχει και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = \frac{1}{2}j$, $z = -\frac{1}{2}j$.

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**



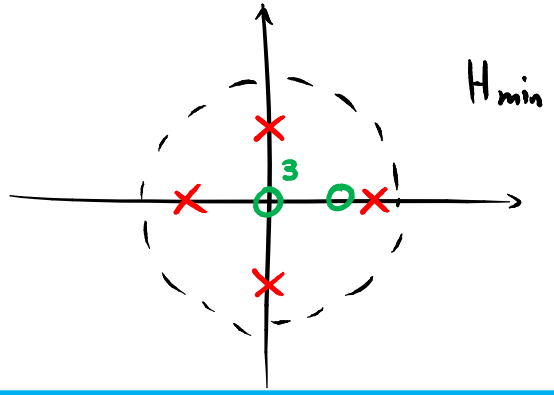
- Παράδειγμα:

Οπότε το σύστημα γραμμικής φάσης θα είναι:

$$H_{lin}(z) = (1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right), \quad |z|>0$$

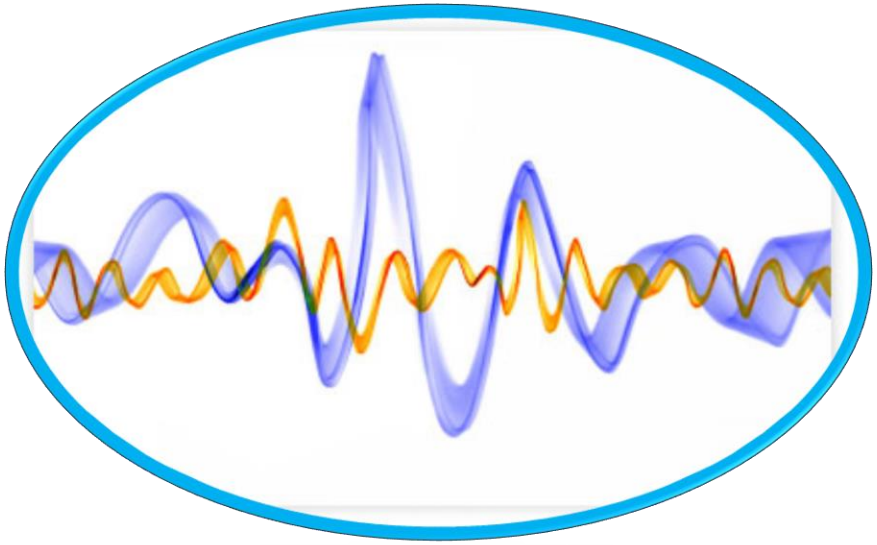
Στο ελάχιστης φάσης θα πρέπει να αλλάξω τα δυο μηδενικά στις θέσεις $z=\frac{1}{2}j$, $z=-\frac{1}{2}j$. Βάζω πόλους στις αντίστοιχες θέσεις:

$$H_{min}(z) = \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1+0.8z^{-1})(1-0.8z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right)}, \quad |z|>0.8$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

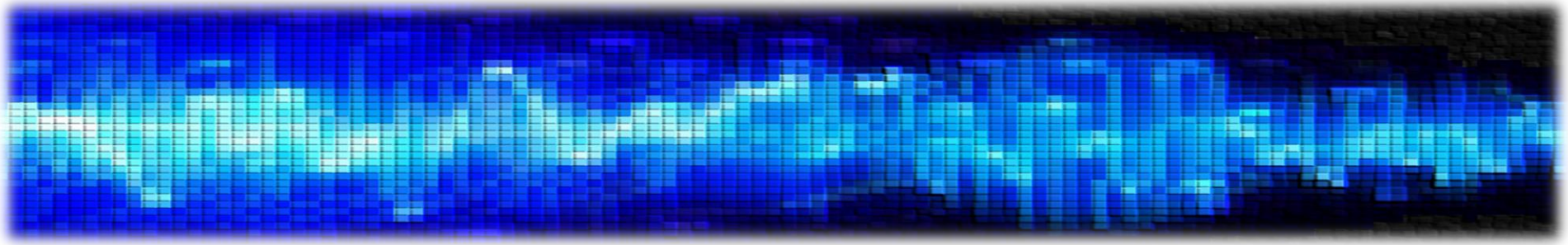
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 18Η



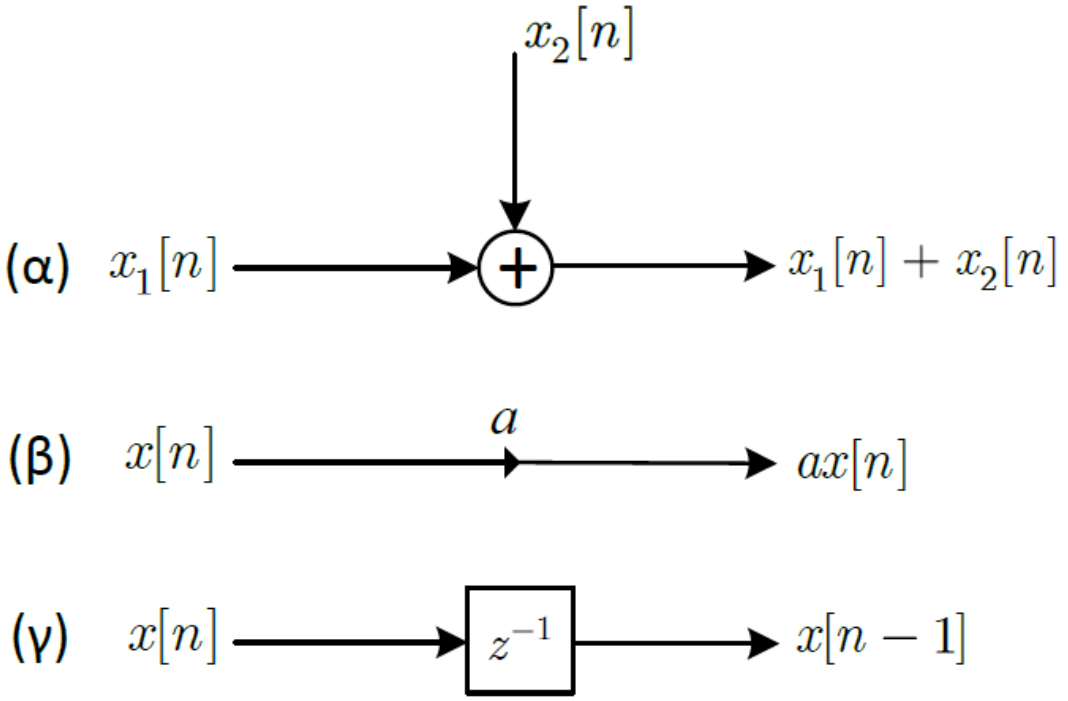
- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Για να υλοποιήσουμε ένα σύστημα πρέπει να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ή την εξίσωση διαφορών σε μια δομή που πραγματοποιείται από την υπάρχουσα τεχνολογία

- Βασικοί δομικοί λίθοι:
  - ❑ Πρόσθεση
  - ❑ Πολλαπλασιασμός
  - ❑ Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Έστω η εξίσωση διαφορών $y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = b_0 x[n]$
- Έχουμε πολλές επιλογές για την υλοποίησή της
- Κόστος:
  - ❑ Πλήθος πράξεων
  - ❑ Πλήθος θέσεων μνήμης
  - ❑ Ευρωστία σε πεπερασμένη αριθμητική ακρίβεια
- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$

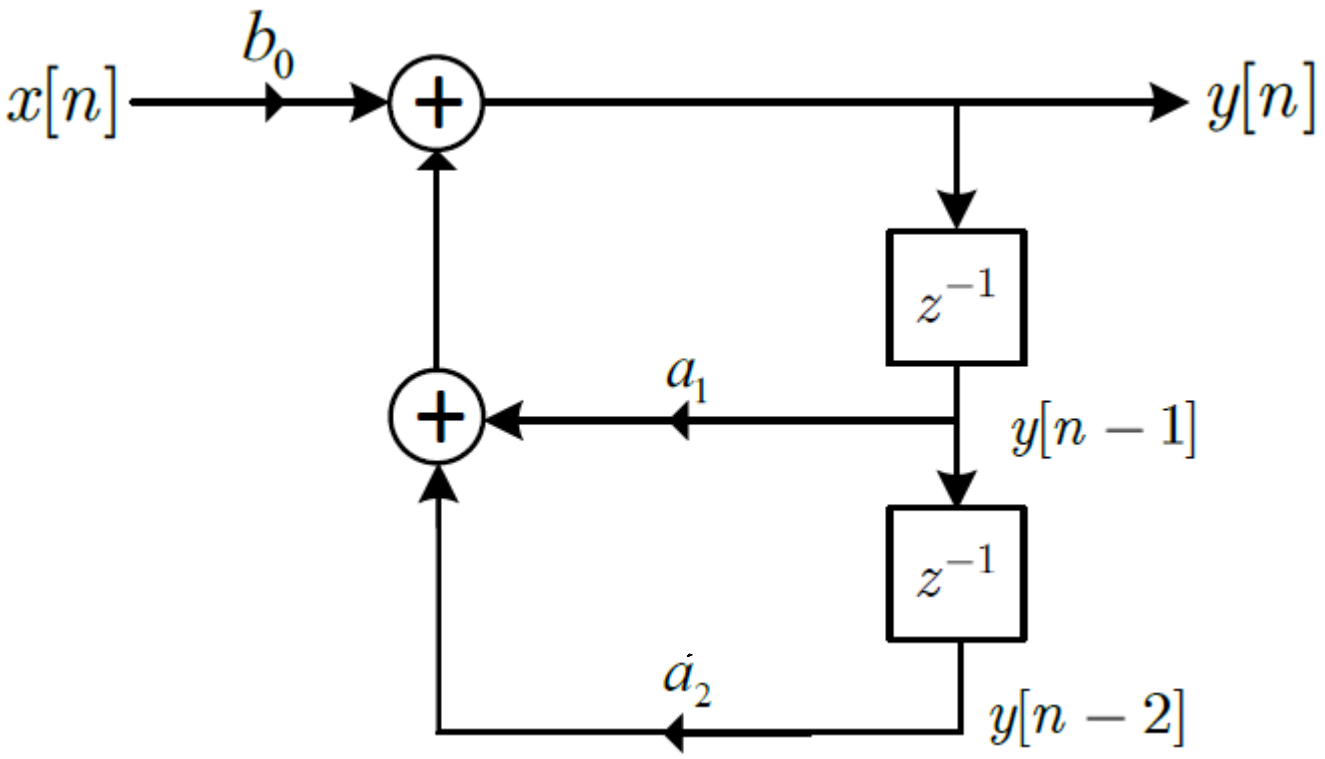
- Με βάση την εξίσωση διαφορών, μπορούμε κατασκευάσουμε μια δομή που την υλοποιεί

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Για μεγαλύτερης τάξης εξίσωσης διαφορών

$$y[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Ξαναγράφουμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Δυο υπο-εξισώσεις:

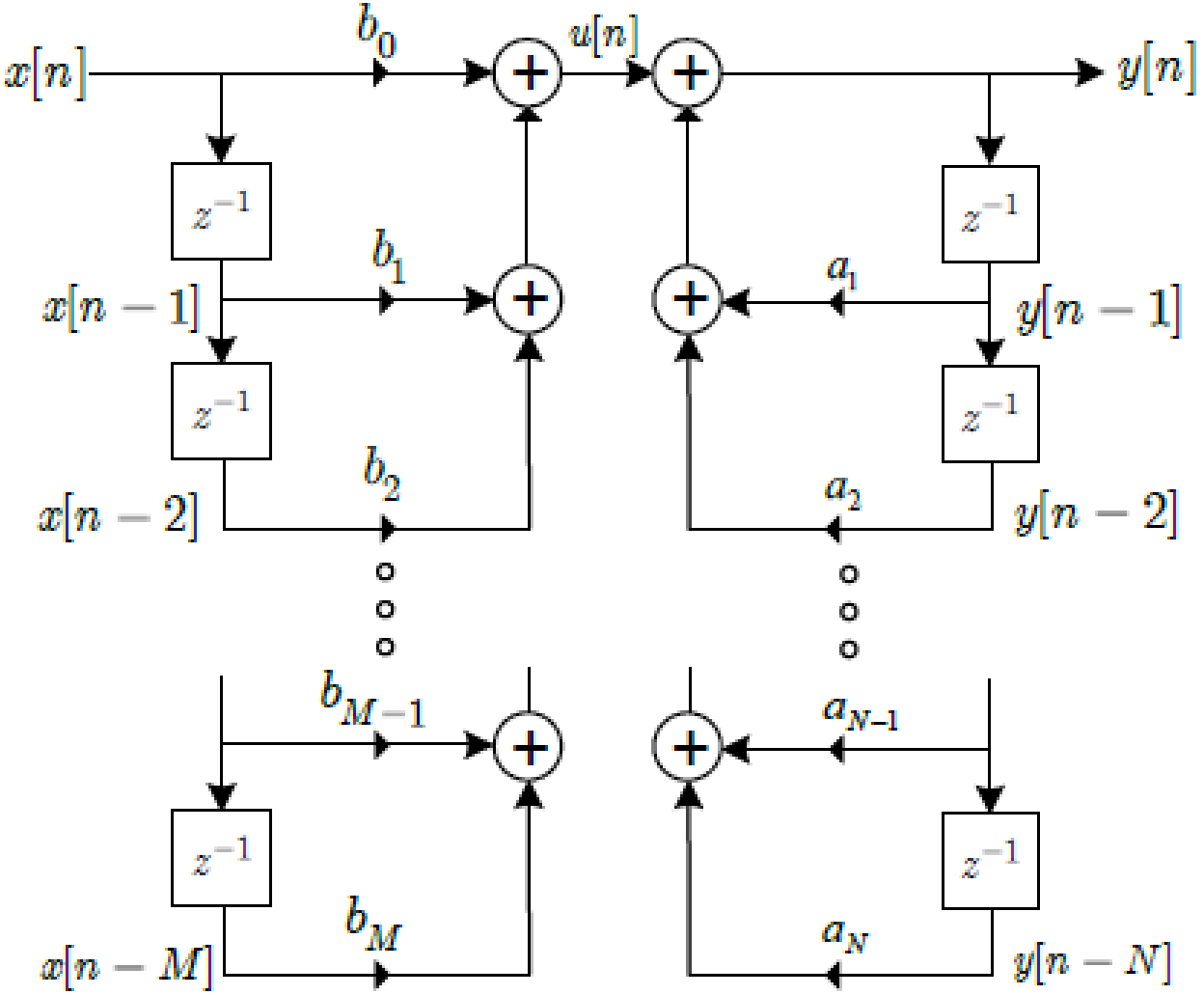
$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

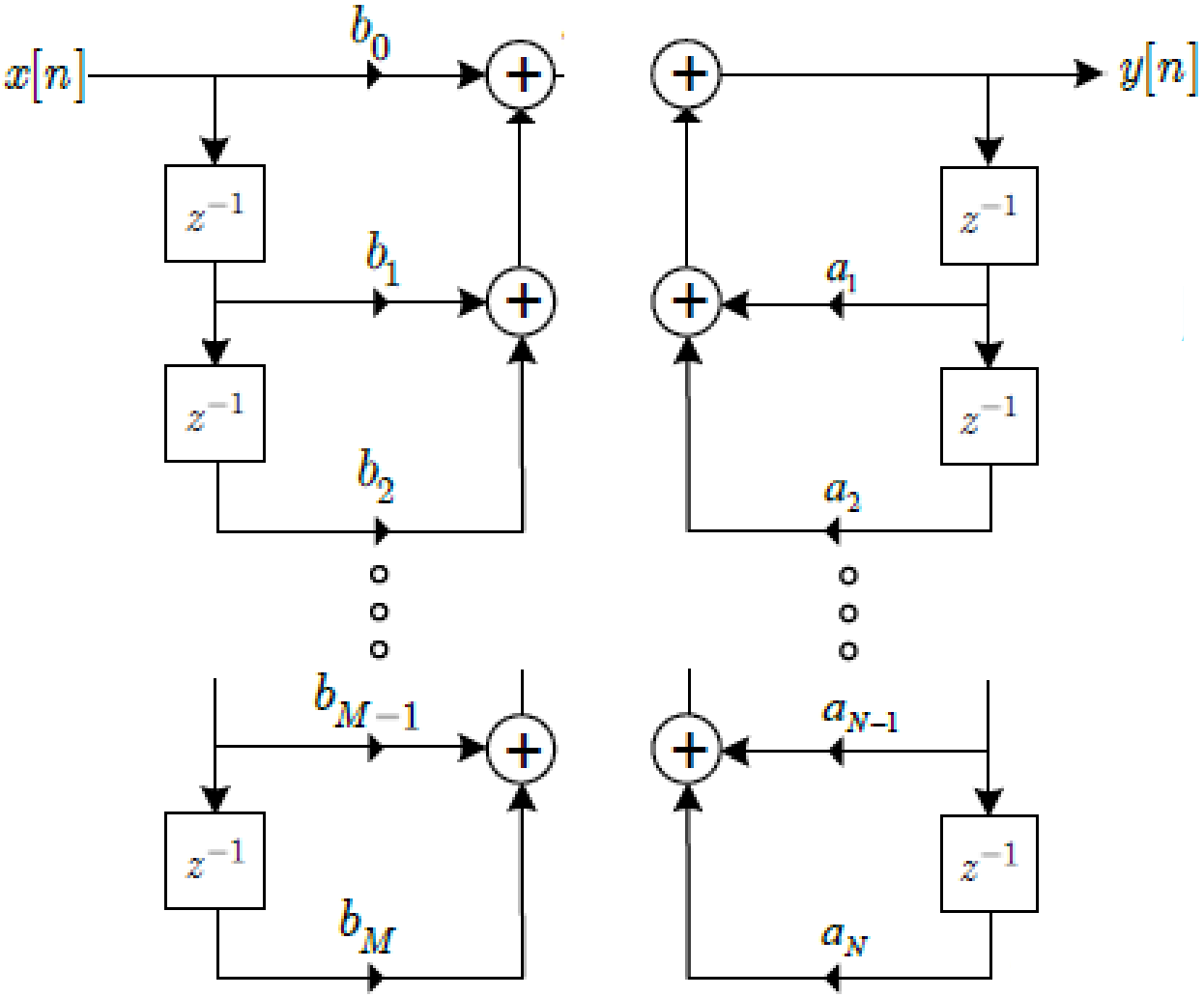
$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

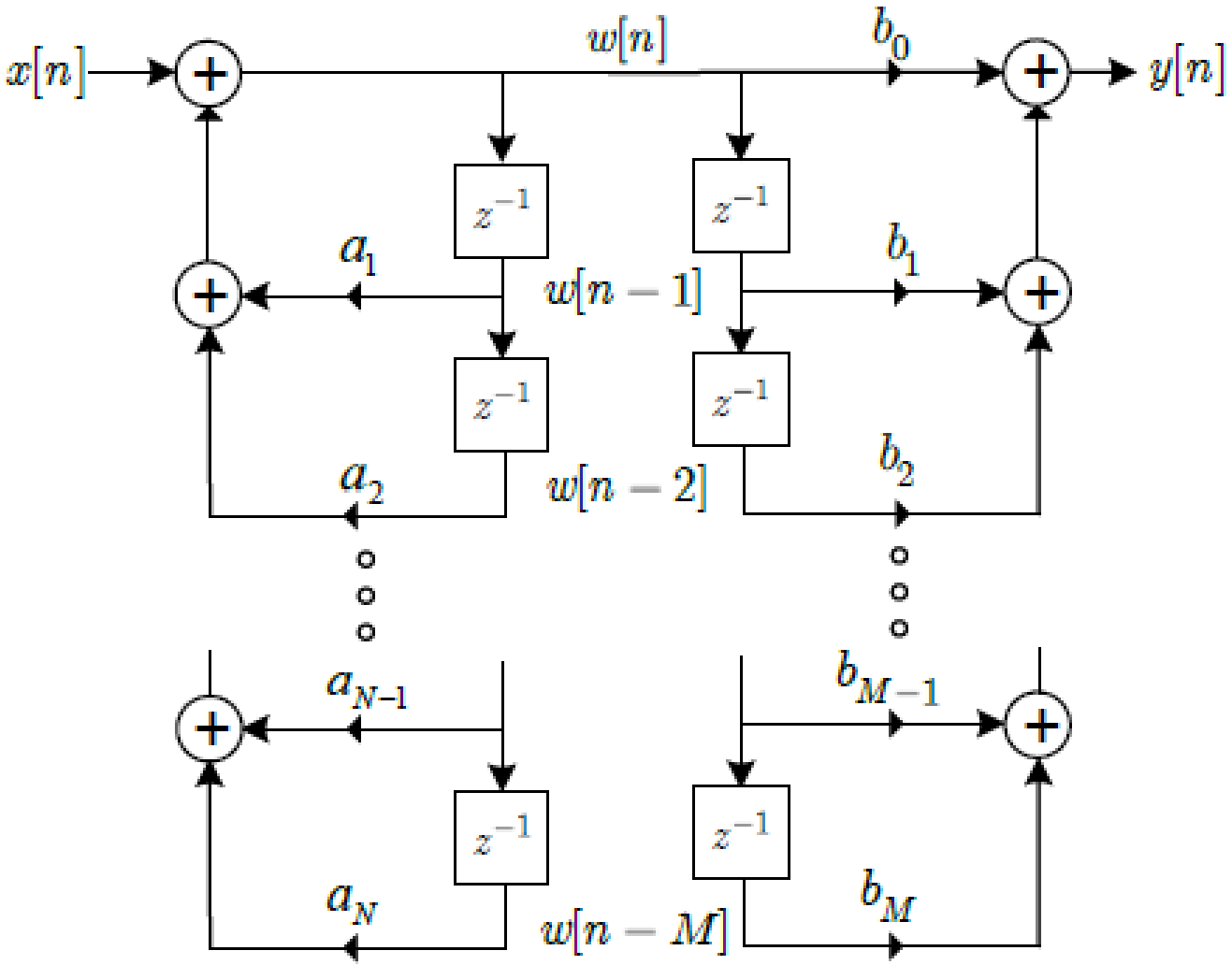
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



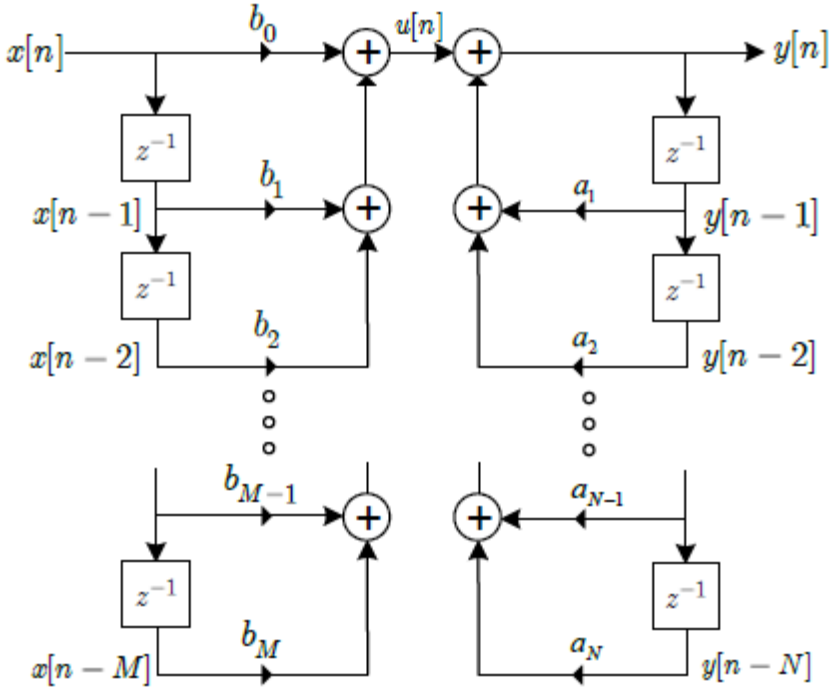
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

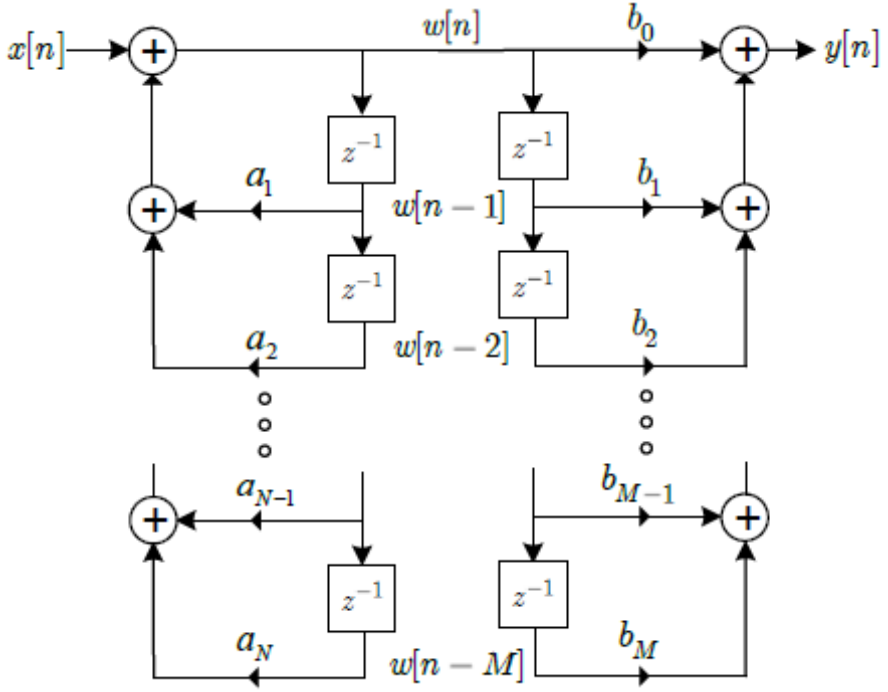
$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

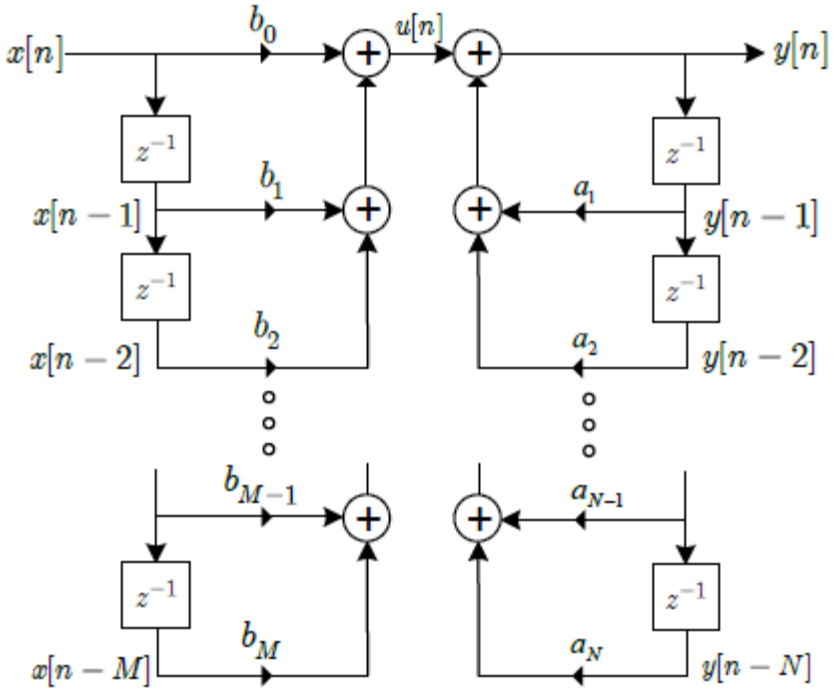


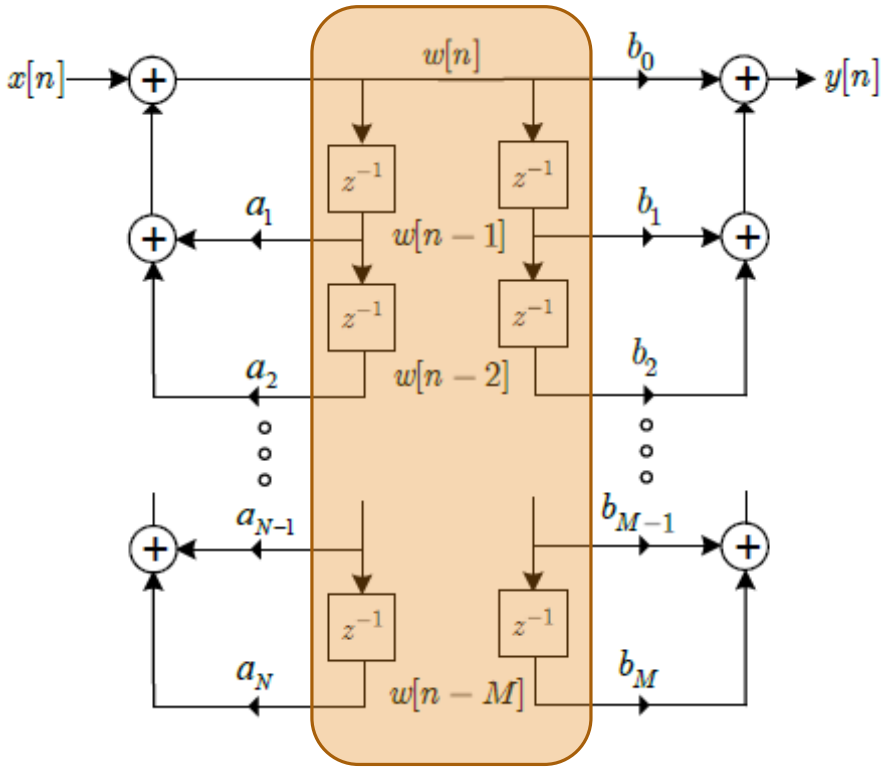


- Βασικές διαφορές των δυο υλοποιήσεων
  - ❑ Στην πρώτη, υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά και μετά οι πόλοι
  - ❑ Στη δεύτερη, υλοποιούνται πρώτα οι πόλοι και μετά τα μηδενικά

- Θεωρητικά, οι δυο υλοποιήσεις είναι ισοδύναμες
  - ❑ Πρακτικά, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές! (λόγω υλοποίησης σε πεπερασμένη ακρίβεια)

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

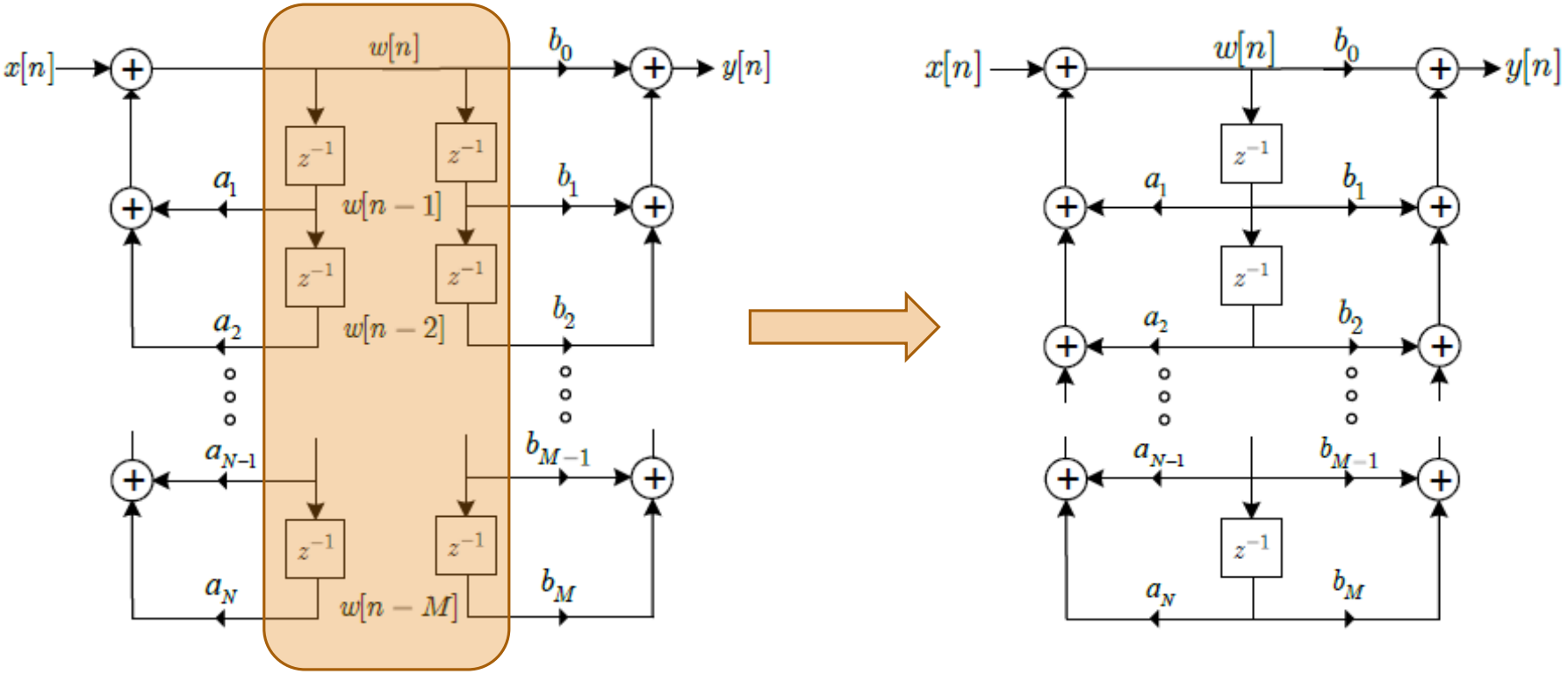




- Παρατήρηση:
  - **Οι μεταβλητές $w[n-k]$ αποθηκεύονται δυο φορές στη δεύτερη υλοποίηση!**
  - Μπορούμε να «γλιτώσουμε» τις μισές θέσεις μνήμης!
  - Μπορούμε να μοιράσουμε τις ίδιες θέσεις μνήμης και στους δυο κλάδους

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**



- Η νέα υλοποίηση, που χρησιμοποιεί τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων καθυστέρησης (μνήμης) αναφέρεται ως **κανονική μορφή** (canonical form) ή **Direct Form II**

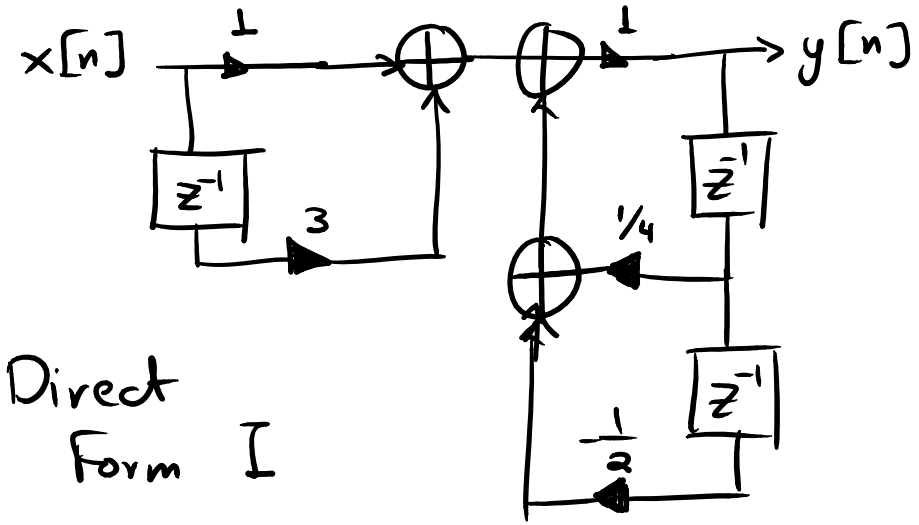
- Η μη κανονική μορφή στο αριστερό σχήμα ονομάζεται **Direct Form I**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου** $\left(y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-2]+x[n]+3x[n-1]\right)$
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

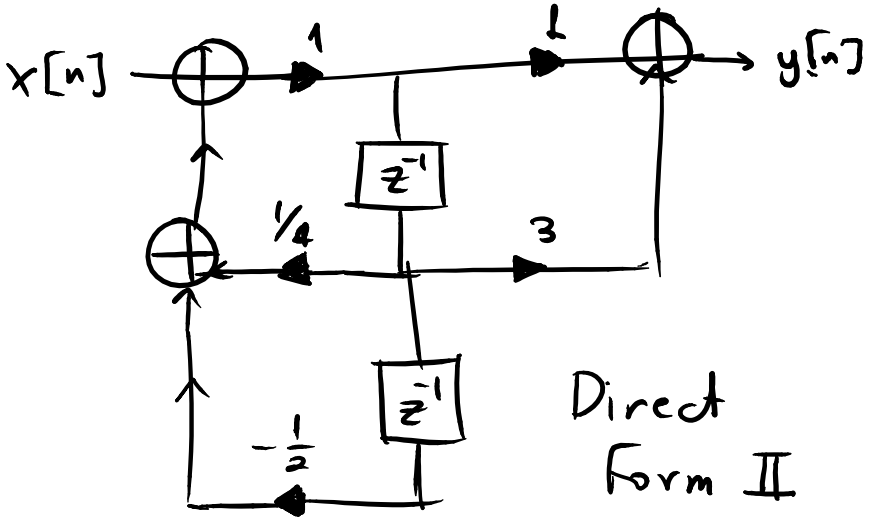
$$H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{1+3z^{-1}}{1-\left(\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



Direct Form I

3 αθροιστές, 3 μνήμες, 3 πολ/στες



Direct Form II

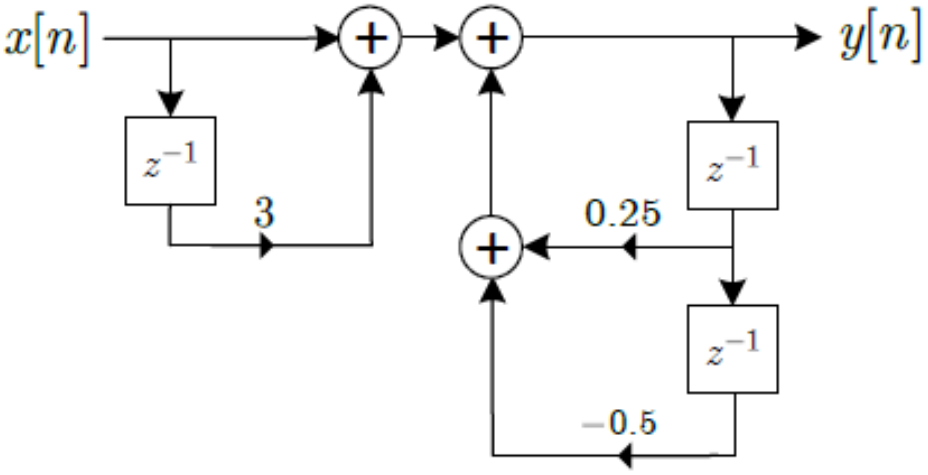
3 αθροιστές, 2 μνήμες, 3 πολ/στες

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

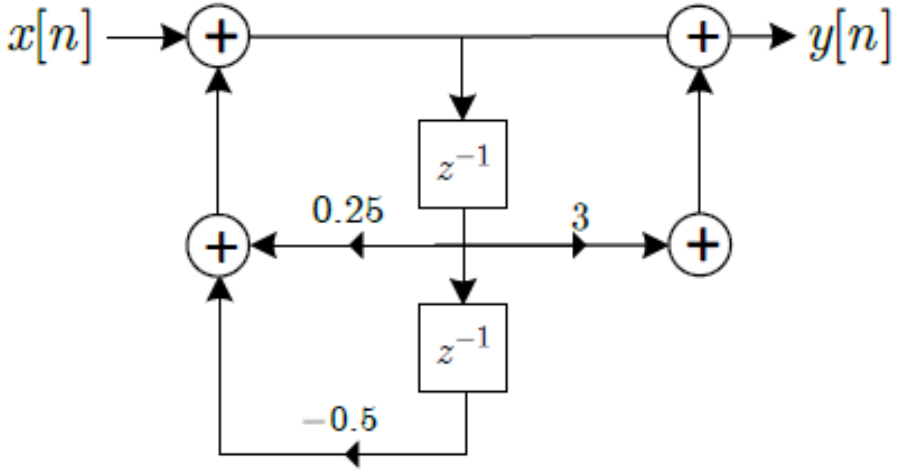
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



(α)



(β)

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Γνωρίζουμε ότι τα συστήματα χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες: FIR, IIR
- Ας δούμε πόσο διαφέρουν οι υλοποιήσεις ανάλογα με την κατηγορία
- Ξεκινάμε με τα IIR
- Θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις ενός IIR συστήματος
- Πώς επιλέγουμε την κατάλληλη;

  - ✓ **Πλήθος πολλαπλασιασμών → χρονοβόρα πράξη**
  - ✓ **Πλήθος καθυστερήσεων → κόστος σε μνήμη**
  - ✓ Εμβαδό, απλότητα, και αρθρωτή υλοποίηση → σημασία σε VLSI υλοποιήσεις
  - ✓ Καταμερισμός αλγορίθμου, επικοινωνία επεξεργαστών → πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον
  - ✓ Ευρωστία σε πεπερασμένη ακρίβεια → προτίμηση από πιο οικονομικές υλοποιήσεις

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Μορφή σε σειρά (cascade form)

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-e_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2, \quad M = M_1 + 2M_2$

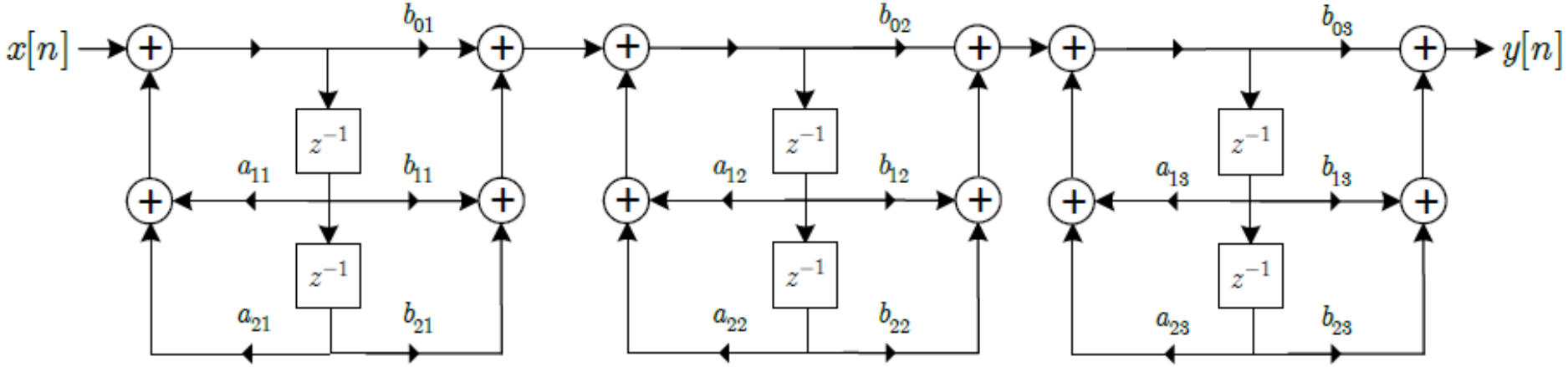
- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Μορφή σε σειρά (cascade form)
- Παράδειγμα 6ης τάξης



- Οργανωμένο σε υποσυστήματα δευτέρας τάξης Direct Form II

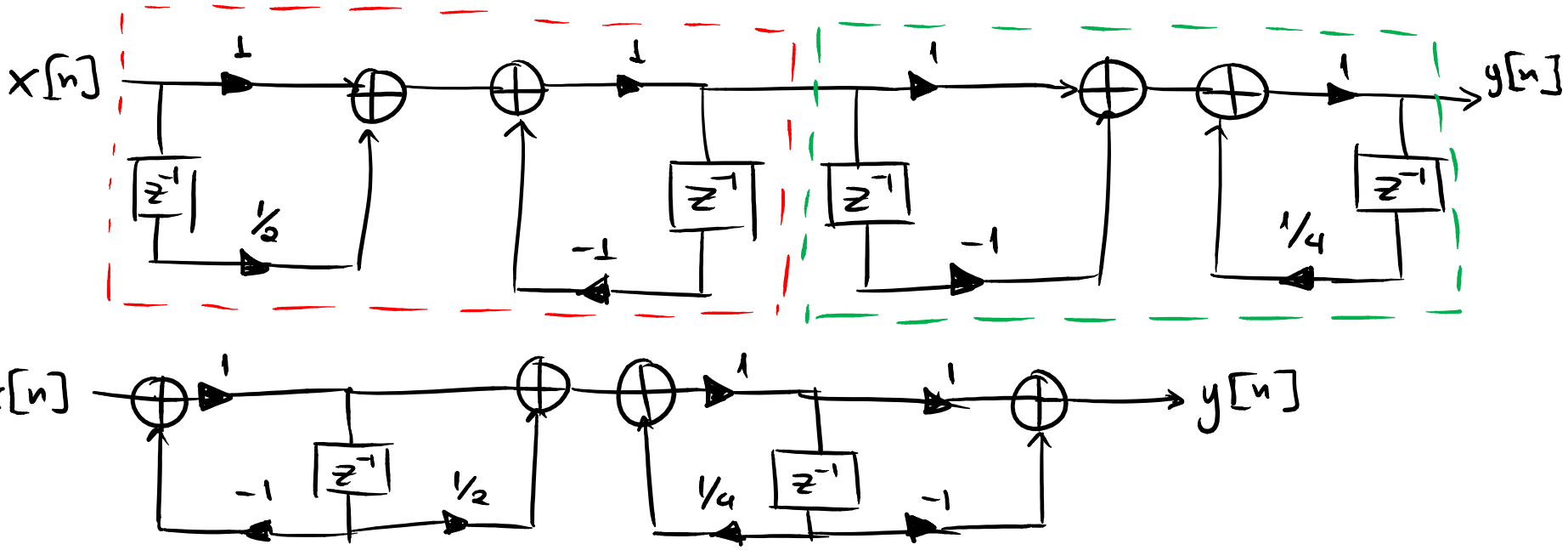
$$H(z) = \prod_{k=1}^{3} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

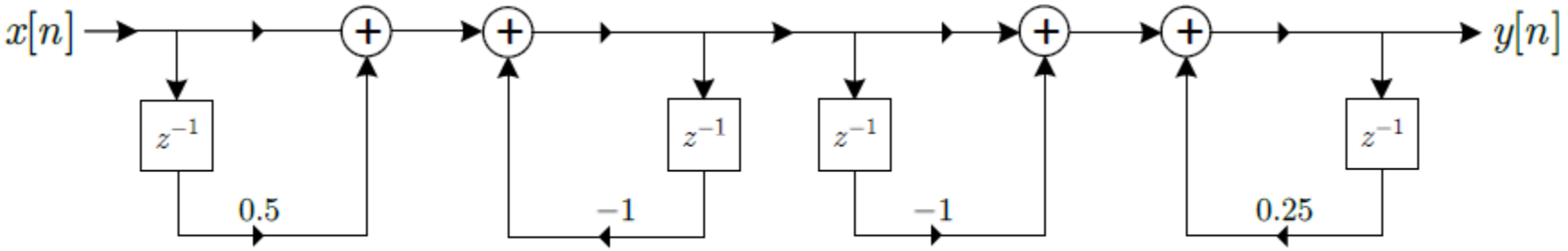
Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων και αναφέρετε το κέρδος σε πολλαπλασιασμούς ή/και θέσεις μνήμης



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

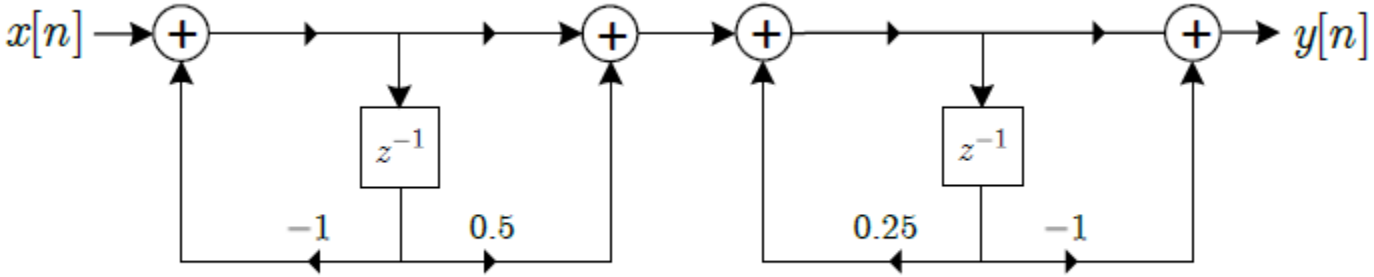
$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων



(α)

Κέρδη: 2 θέσεις μνήμης



(β)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
  - Προκύπτει από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2$

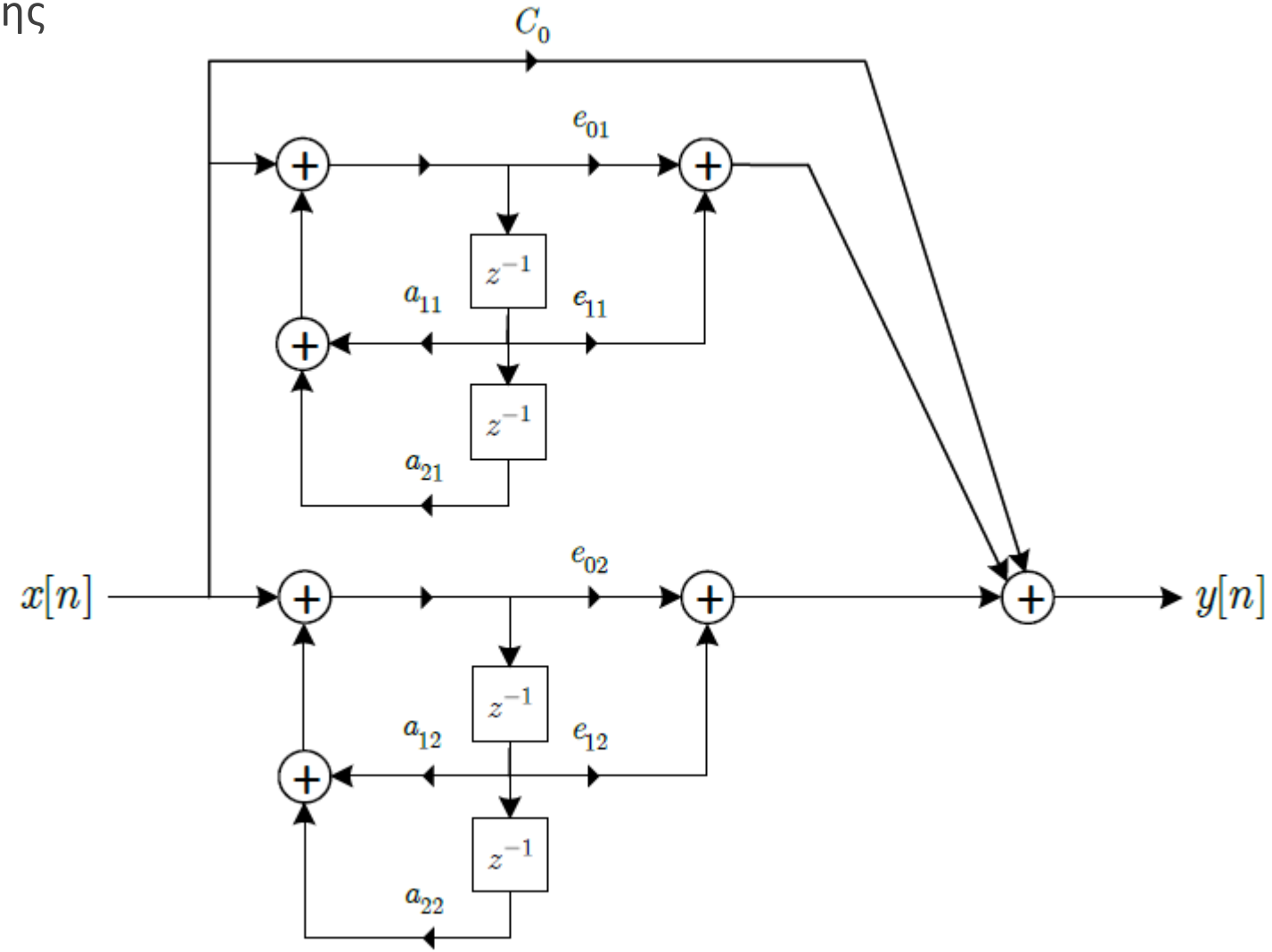
- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
- Παράδειγμα 4ης τάξης



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

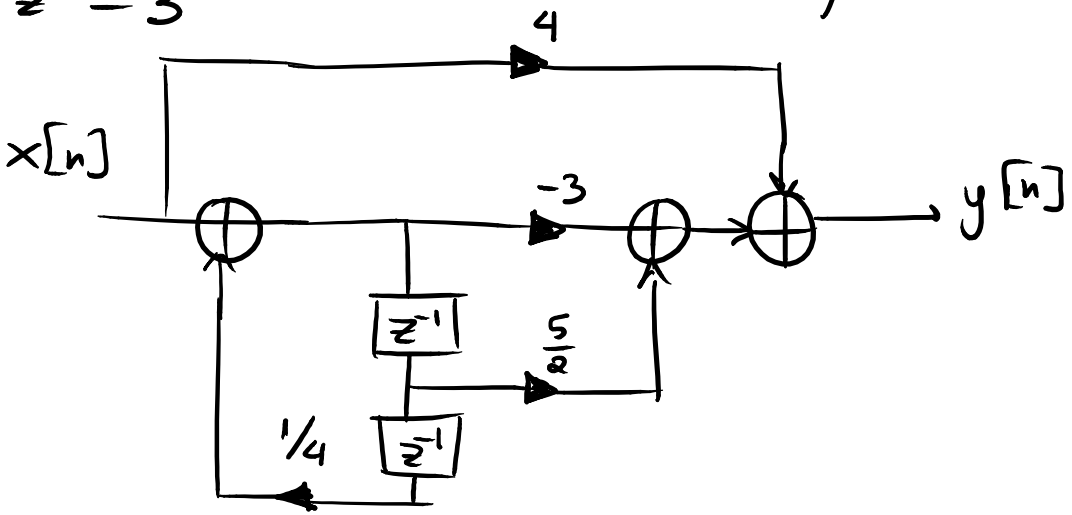
- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης

$$-z^{-2} + 2.5z^{-1} + 1 \;\Big|\; -0.25z^{-2} + 1$$
$$-(-z^{-2} + 4) \qquad\qquad 4$$
$$2.5z^{-1} - 3$$

$$H(z) = 4 + \frac{\frac{5}{2}z^{-1} - 3}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

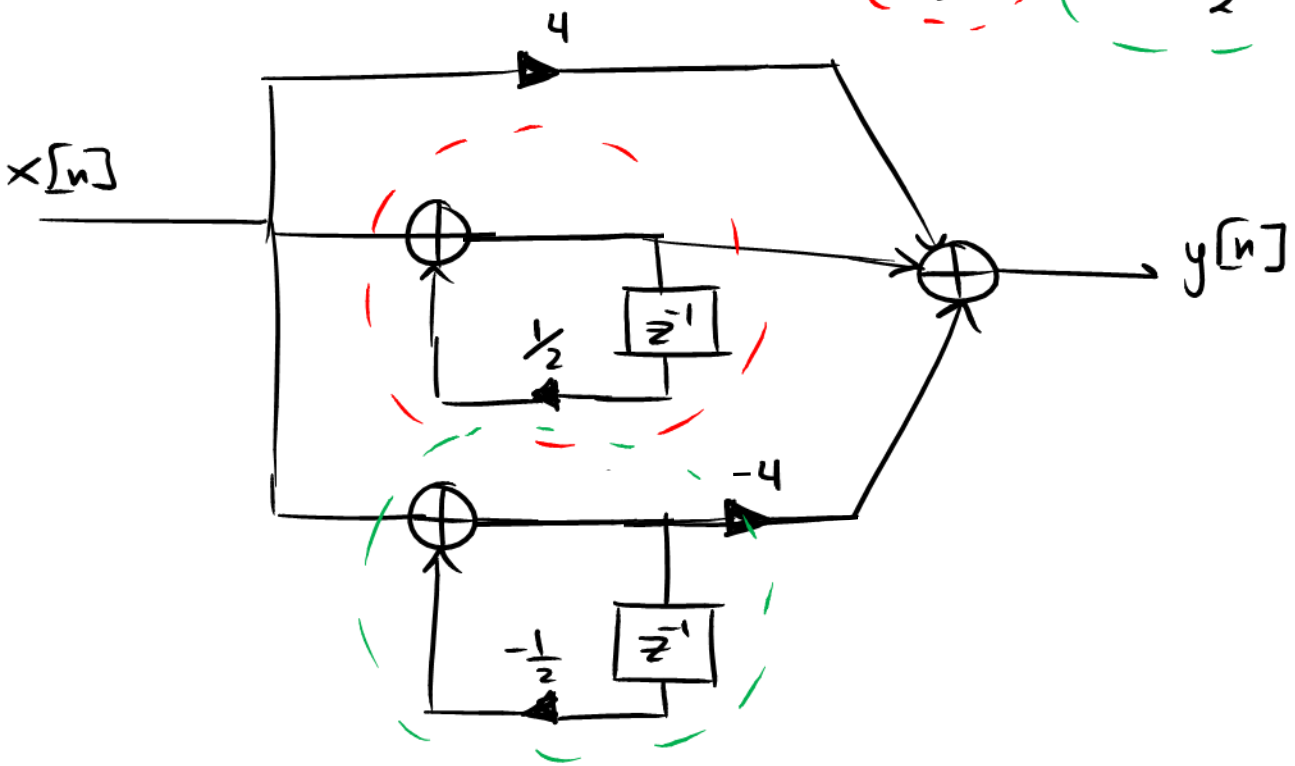


- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

$$H(z) = 4 + \frac{-3 + \frac{5}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} = 4 + \frac{A}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} \quad (\text{Βρίσκω } A, B)$$

$$= 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

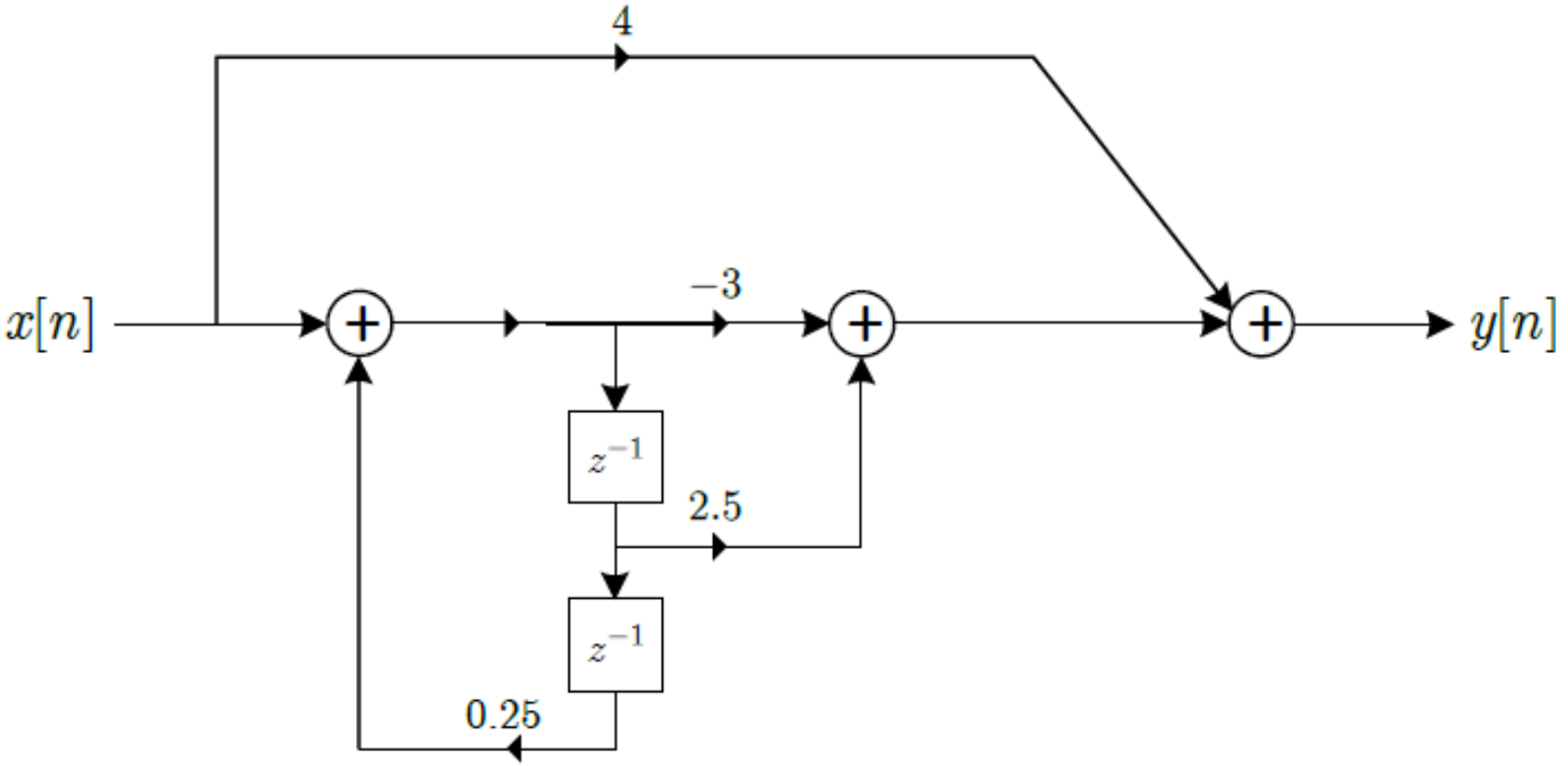


© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης

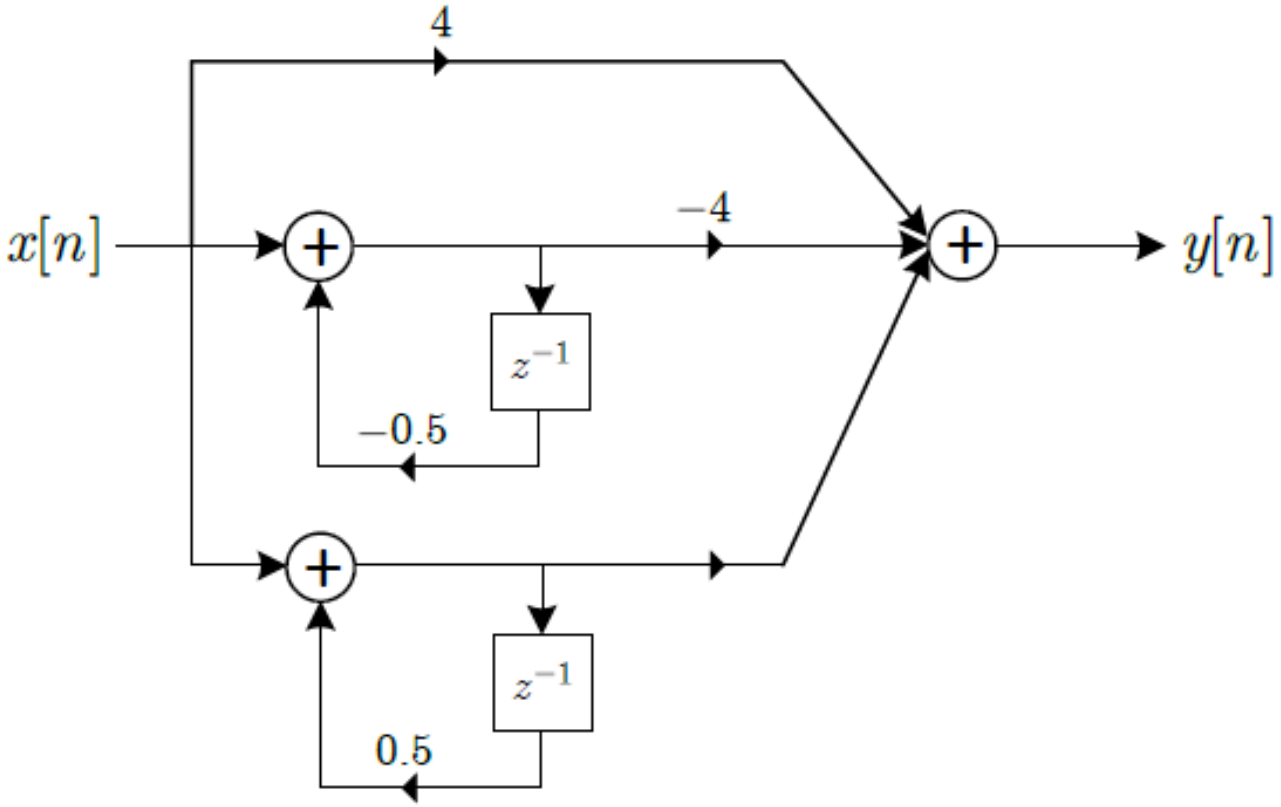


© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

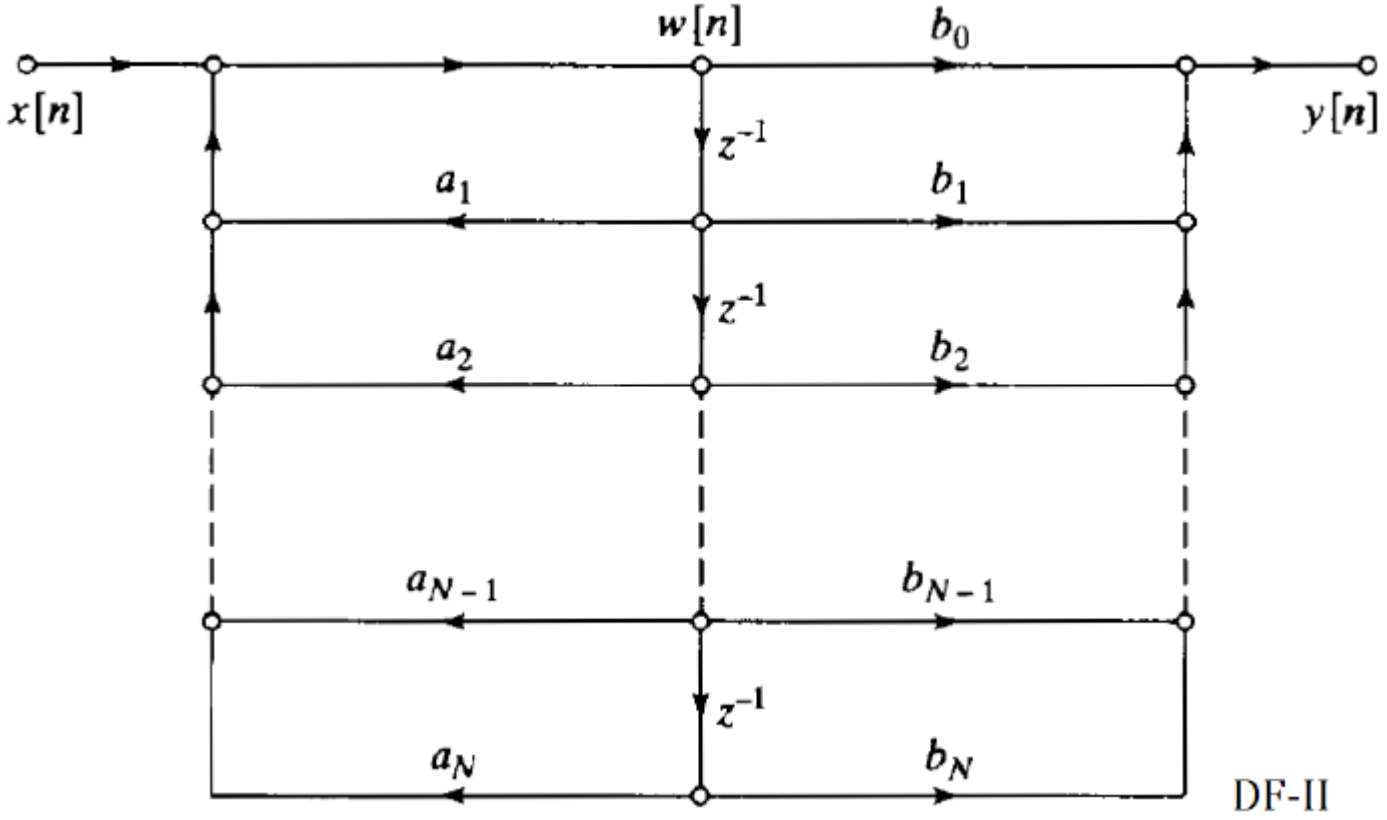
$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- Τα διαγράμματα που σχεδιάζουμε ως τώρα μπορούν εναλλακτικά να αναπαρασταθούν ως γράφοι
- Για παράδειγμα, ο γράφος ενός γενικού IIR συστήματος σε Direct Form II



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- Η θεωρία γράφων μας προσφέρει μια διαδικασία που ονομάζεται αναστροφή (reversal) που μας δίνει μερικές εναλλακτικές μορφές δομών, με ενδιαφέρουσες ιδιότητες

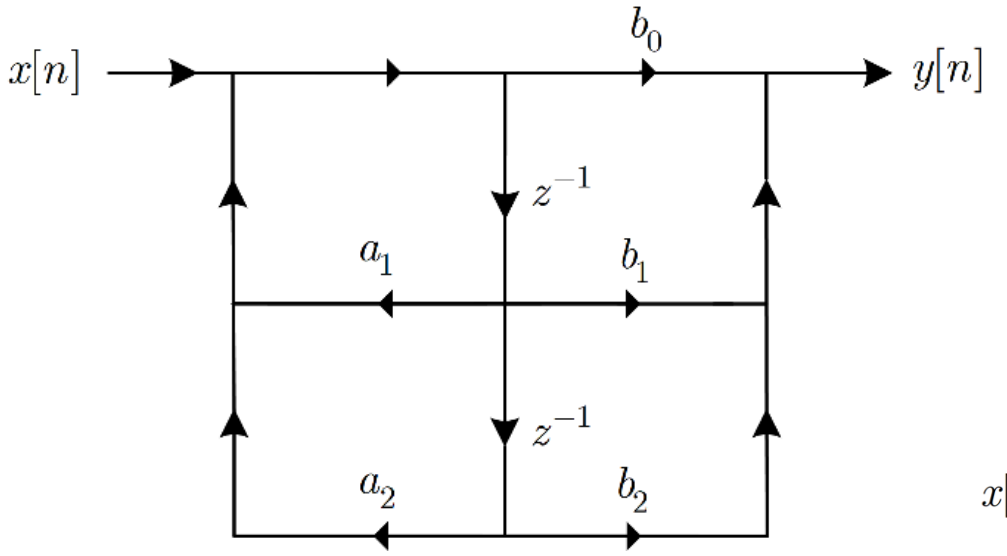
- **Σχεδίαση Ανάστροφης Μορφής**

1. Αναστρέφουμε τη φορά όλων των κλάδων του διαγράμματος
   Κάθε αθροιστής μετατρέπεται σε διακλάδωση, και το αντίστροφο
2. Αλλάζουμε θέση μεταξύ εισόδου και εξόδου
3. Επανασχεδιάζουμε το διάγραμμα, αναστρέφοντάς το ώστε να παρουσιάζεται η είσοδος στα αριστερά και η έξοδος στα δεξιά

- Ας το δούμε στην πράξη

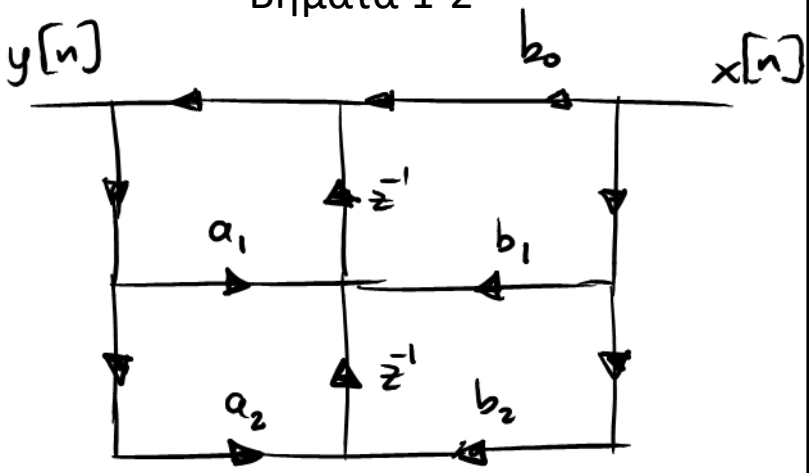
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- Έστω ότι μας δίνεται ο Direct Form II γράφος όπως παρακάτω

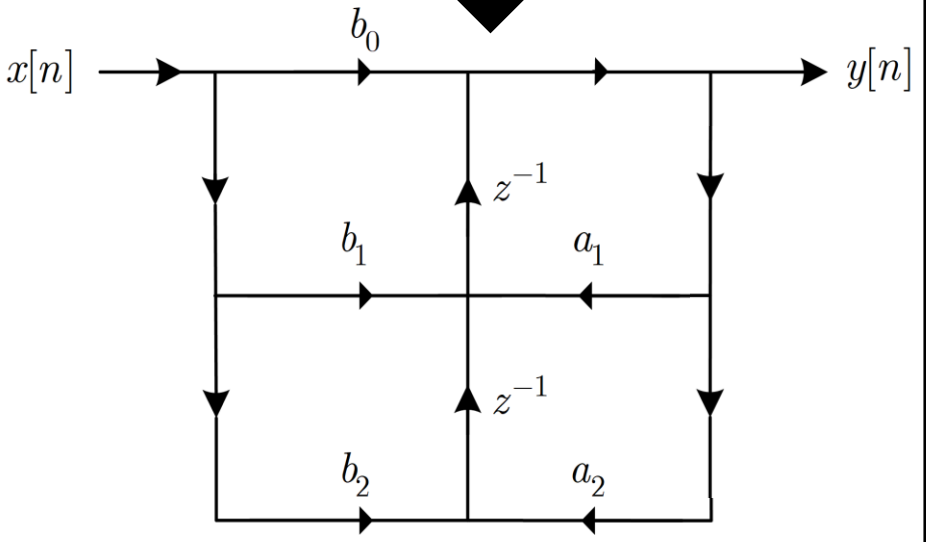


- Αν εφαρμόσουμε τα βήματα που περιγράφ πριν, παίρνουμε το νέο διάγραμμα που φαί στα δεξιά
- Προσέξτε ότι καταφέραμε χωρίς προσθήκη μνήμης να υλοποιήσουμε πρώτα τα μηδενι και μετά τους πόλους!! ☺

Βήματα 1-2

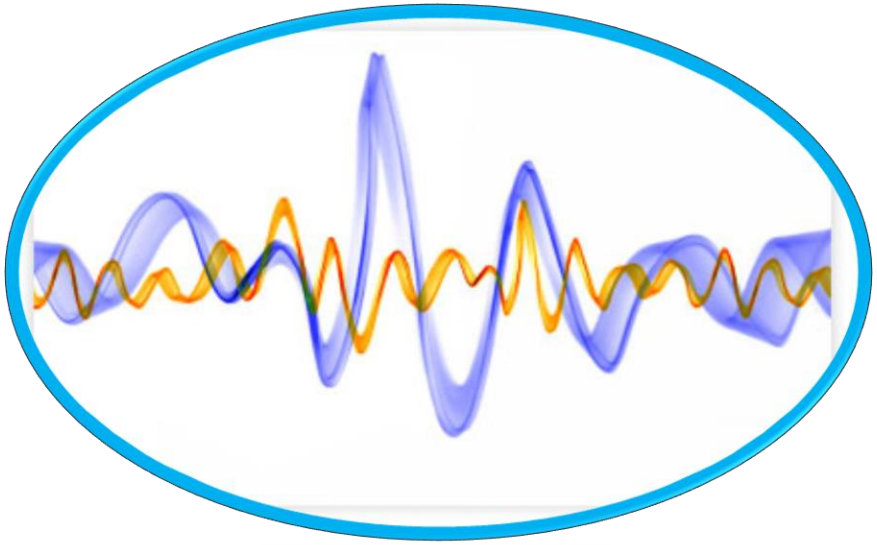


Βήμα 3



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

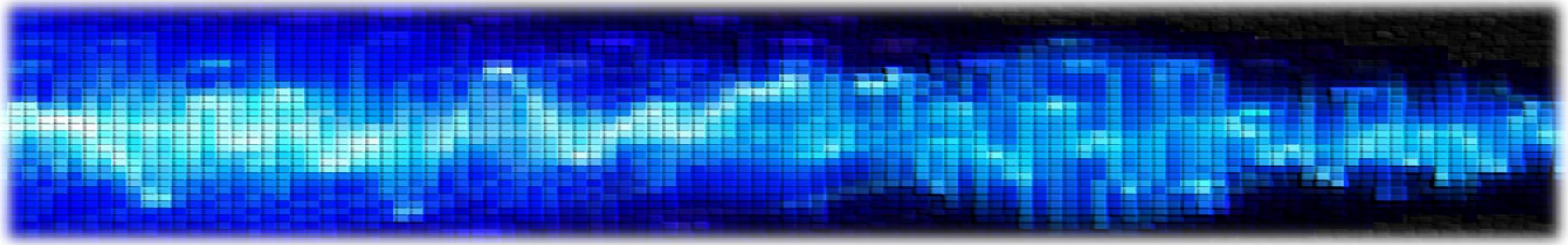
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 19Η

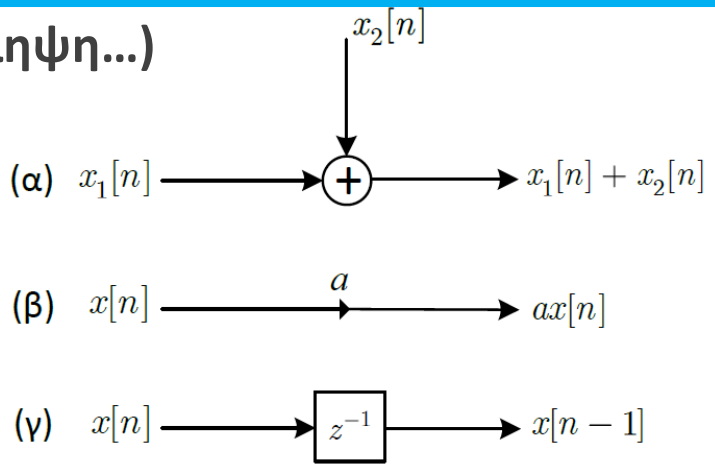


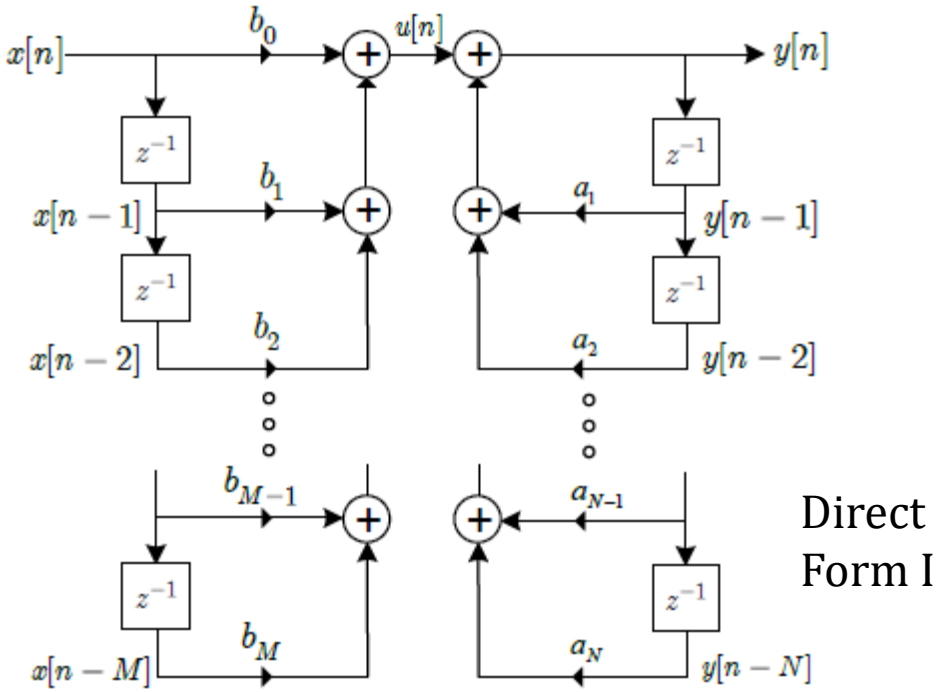
- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

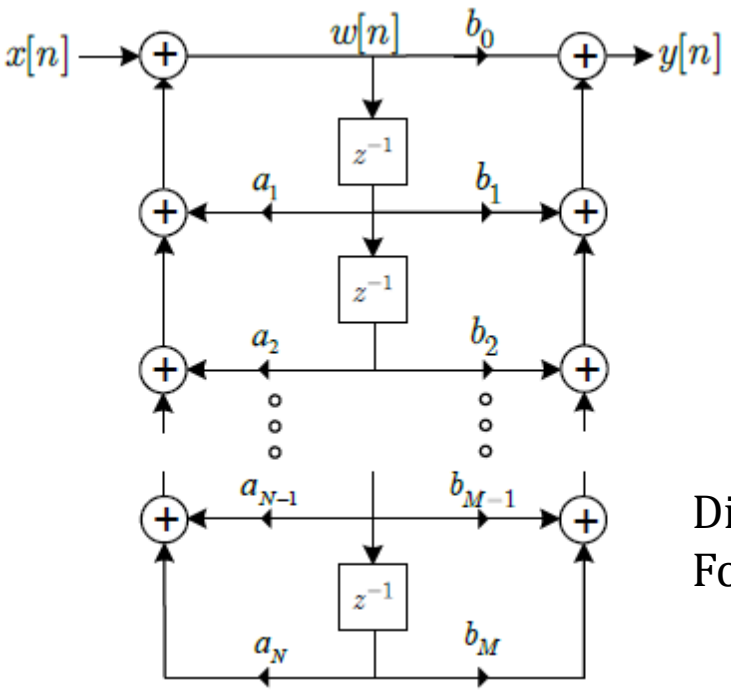
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου (επανάληψη…)**

- Βασικοί δομικοί λίθοι:
  - ❑ Πρόσθεση
  - ❑ Πολλαπλασιασμός
  - ❑ Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)





Direct Form I



Direct Form II

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου (επανάληψη…)**
- **Μορφή σε σειρά**

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-e_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2, \quad M = M_1 + 2M_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Παράλληλη Μορφή**

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2}\frac{B_k(1-e_k z^{-1})}{(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s}\frac{e_{0k} + e_{1k}z^{-1}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

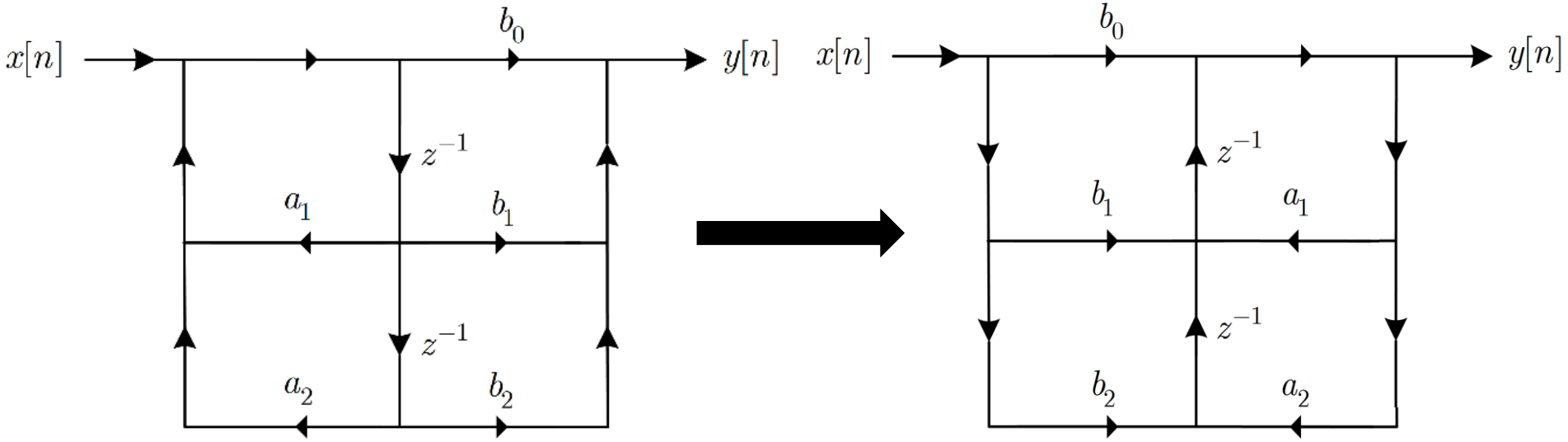
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου (επανάληψη…)**
- Ανάστροφη μορφή (transposed form)
- **Σχεδίαση Ανάστροφης Μορφής**

➢ Αναστρέφουμε τη φορά όλων των κλάδων του διαγράμματος
  ❑ Κάθε αθροιστής μετατρέπεται σε διακλάδωση, και το αντίστροφο

➢ Αλλάζουμε θέση μεταξύ εισόδου και εξόδου

➢ Επανασχεδιάζουμε το διάγραμμα, αναστρέφοντάς το ώστε να παρουσιάζεται η είσοδος στα αριστερά και η έξοδος στα δεξιά



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Ως τώρα υλοποιούμε εξισώσεις διαφορών ή συναρτήσεις μεταφοράς με χρήση διάφορων δομών
- Είναι πολύ ενδιαφέρον και το αντίστροφο!
  - Δηλ. να αναλύουμε μια δεδομένη υλοποίηση και να βρίσκουμε την εξίσωση διαφορών ή τη συνάρτηση μεταφοράς που υλοποιεί
- Προς αυτό υπάρχουν μερικοί απλοί κανόνες που μας διευκολύνουν

I. Τοποθετούμε ενδιάμεσες μεταβλητές στην έξοδο κάθε αθροιστή (πλην αυτού που σχετίζεται με την έξοδο)

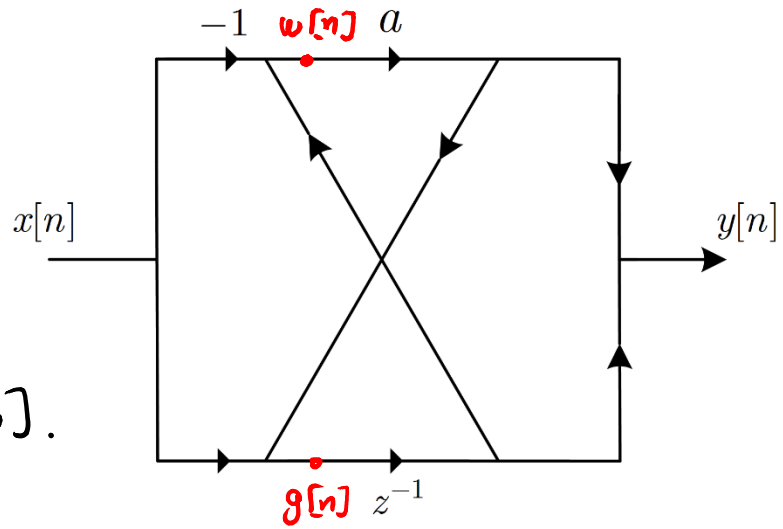
II. Γράφουμε τις εξισώσεις διαφορών στο πεδίο του χρόνου

III. Μετατρέπουμε τις εξισώσεις στο χώρο του Z

IV. Λύνουμε ως προς $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από το διάγραμμα. Βρείτε το σύστημα $H(z)$ το οποίο υλοποιεί.



Θέταμε ενδιάμεσες μεταβλητές $g[n], w[n]$.

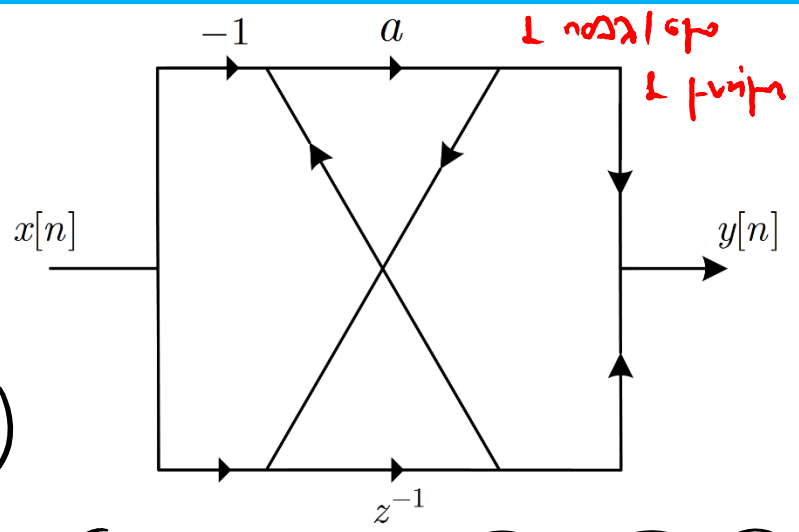
Οι εξισώσεις είναι:

$$\left.\begin{aligned} w[n] &= -x[n] + g[n-1] \\ g[n] &= x[n] + a\,w[n] \\ y[n] &= a\,w[n] + g[n-1] \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \left.\begin{aligned} W(z) &= -X(z) + z^{-1}G(z) \\ G(z) &= X(z) + a\,W(z) \quad (3) \\ Y(z) &= a\,W(z) + z^{-1}G(z) \quad (1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(z) = -X(z) + z^{-1}\left(X(z) + a\,W(z)\right) = -X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-1}a\,W(z)$$

$$\Rightarrow W(z) - z^{-1}a\,W(z) = X(z)\left(z^{-1} - 1\right) \Leftrightarrow \boxed{W(z) = X(z)\,\frac{z^{-1}-1}{1-a\,z^{-1}}} \quad (2)$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:



$$Y(z) = aX(z)\frac{z^{-1}-1}{1-az^{-1}} + z^{-1}G(z) \overset{(3)}{=}$$

$$= aX(z)\frac{z^{-1}-1}{1-az^{-1}} + z^{-1}\left(X(z) + aW(z)\right)$$

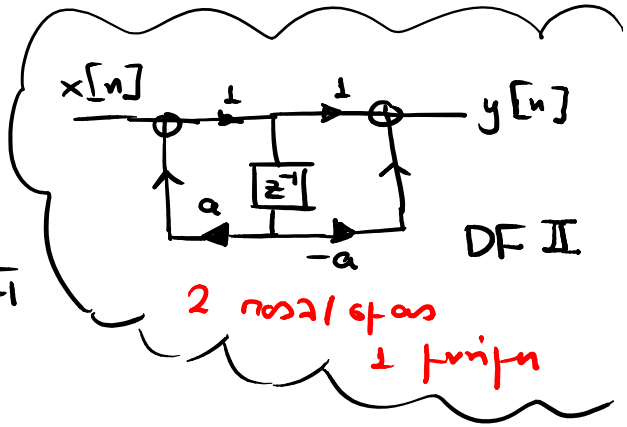
$$= X(z)\frac{az^{-1}-a}{1-az^{-1}} + z^{-1}X(z) + z^{-1}aW(z) \overset{(2)}{=}$$

$$= X(z)\frac{az^{-1}-a}{1-az^{-1}} + z^{-1}X(z) + z^{-1}aX(z)\frac{z^{-1}-1}{1-az^{-1}}$$

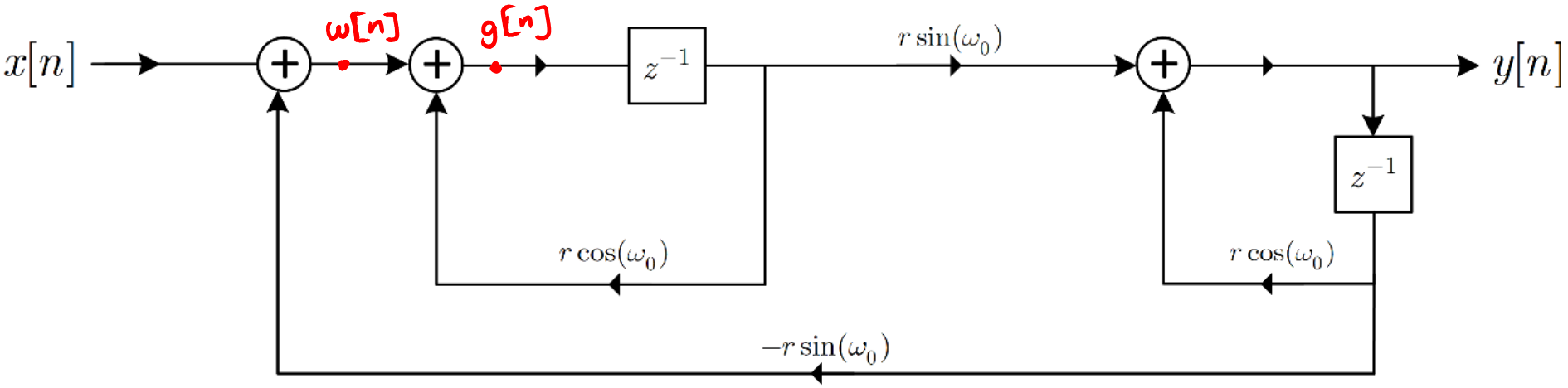
$$= \left(\frac{az^{-1}-a}{1-az^{-1}} + z^{-1} + z^{-1}a\frac{z^{-1}-1}{1-az^{-1}}\right)X(z)$$

$$= \frac{az^{-1}-a+z^{-1}(1-az^{-1})+az^{-2}-az^{-1}}{1-az^{-1}}X(z) = \underbrace{\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}}_{H(z)}X(z)$$

$H(z)$: all-pass system



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από το διάγραμμα. Βρείτε το σύστημα $H(z)$ το οποίο υλοποιεί.



Έχουμε:

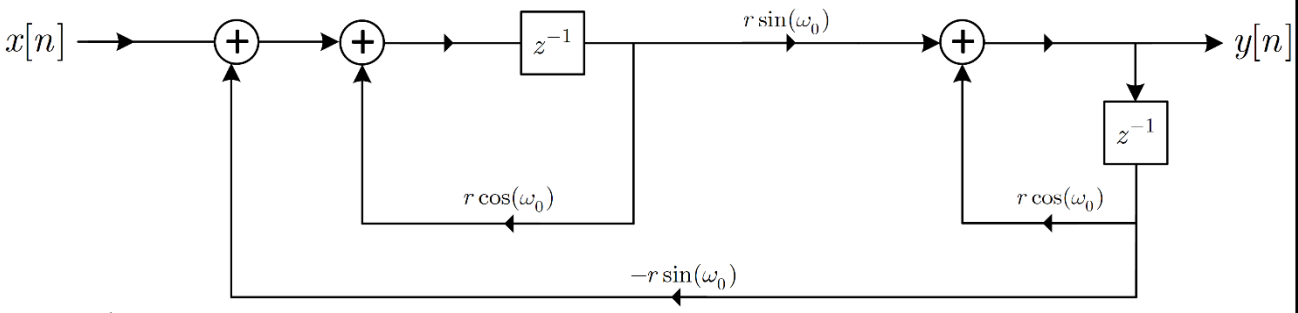
$$w[n] = x[n] - r\sin(\omega_0)\, y[n-1]$$
$$g[n] = w[n] + g[n-1]\cdot r\cos(\omega_0)$$
$$y[n] = r\sin(\omega_0)\, g[n-1] + r\cos(\omega_0)\cdot y[n-1]$$

$\xrightarrow{Z}$

$$\Rightarrow \quad W(z) = X(z) - z^{-1} r\sin(\omega_0)\, Y(z) \quad ①$$
$$G(z) = W(z) + z^{-1} r\cos(\omega_0)\, G(z) \quad ②$$
$$Y(z) = z^{-1} r\sin(\omega_0)\, G(z) + z^{-1} r\cos(\omega_0)\, Y(z) \Rightarrow$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:



$$Y(z) - r\cos(\omega_0) z^{-1} Y(z) = z^{-1} r\sin(\omega_0) G(z)$$

$$Y(z)\left(1 - r\cos(\omega_0) z^{-1}\right) = z^{-1} r\sin(\omega_0) G(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1} r\sin(\omega_0)}{1 - r\cos(\omega_0) z^{-1}} G(z) \quad (3)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $G(z) = X(z) - z^{-1} r\sin(\omega_0) Y(z) + z^{-1} r\cos(\omega_0) G(z)$

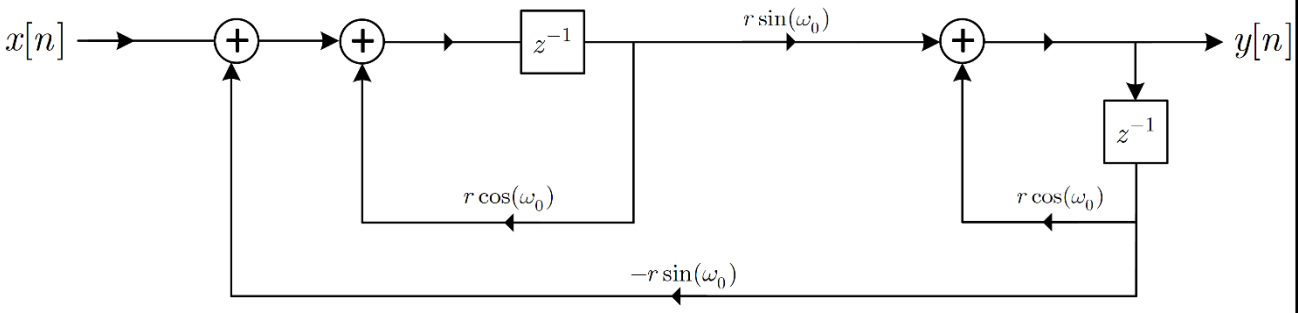
$$\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right) G(z) = X(z) - z^{-1} r\sin(\omega_0) Y(z)$$

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} r\cos\omega_0} X(z) - \frac{z^{-1} r\sin\omega_0}{1 - z^{-1} r\cos\omega_0} Y(z) \quad (4)$$

(3) $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $Y(z) = \frac{z^{-1} r\sin(\omega_0)}{\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right)^2} X(z) - \frac{z^{-2} r^2 \sin^2(\omega_0)}{\left(1 - z^{-1} r\cos(\omega_0)\right)^2} Y(z)$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:



$$\Rightarrow \left(1+\frac{z^{-2}r^2\sin^2(\omega_0)}{(1-r\cos(\omega_0)z^{-1})^2}\right)Y(z)=\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{(1-r\cos(\omega_0)z^{-1})^2}X(z)\rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2\cos^2(\omega_0)z^{-2}+r^2\sin^2(\omega_0)z^{-2}}{(1-r\cos(\omega_0)z^{-1})^2}Y(z)=\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{(1-r\cos(\omega_0)z^{-1})^2}X(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}{(1-r\cos(\omega_0)z^{-1})^2}Y(z)=\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{(1-r\cos(\omega_0)z^{-1})^2}X(z)$$

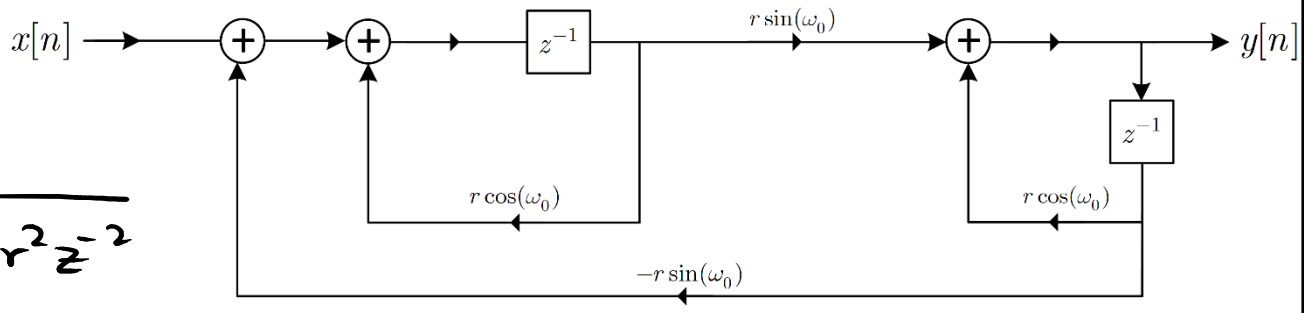
$$\Rightarrow Y(z)=\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}X(z)$$

$$H(z)$$

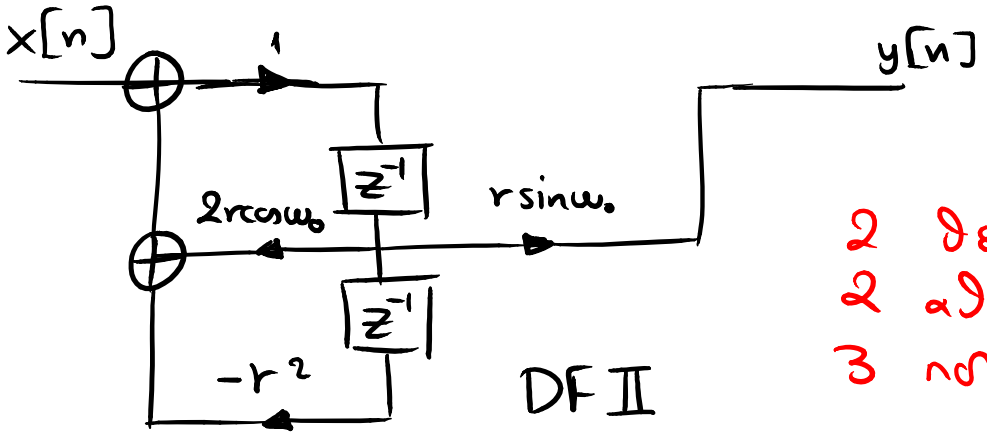
- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

$$H(z) = \frac{r\sin(\omega_0)\, z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



2 θέσεις μνήμης
3 αθροιστές
4 πολ/στες



2 θέσεις μνήμης
2 αθροιστές
3 πολ/στες

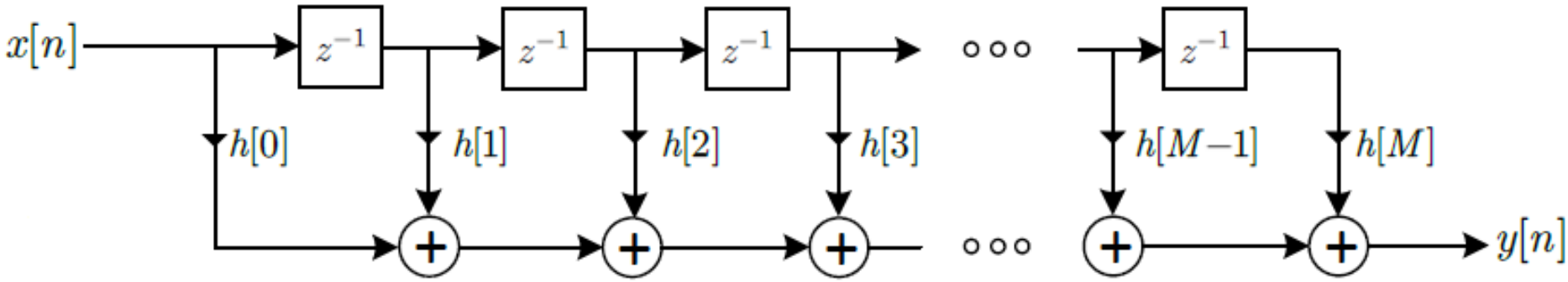
- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Για τα FIR συστήματα, καταλαβαίνετε ότι λόγω της απουσίας πόλων, τα Direct Form I και II που γνωρίσαμε «ενώνονται» σε μια μορφή, Direct Form

- Η γενική εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

- Η Direct Form υλοποίηση είναι η παρακάτω

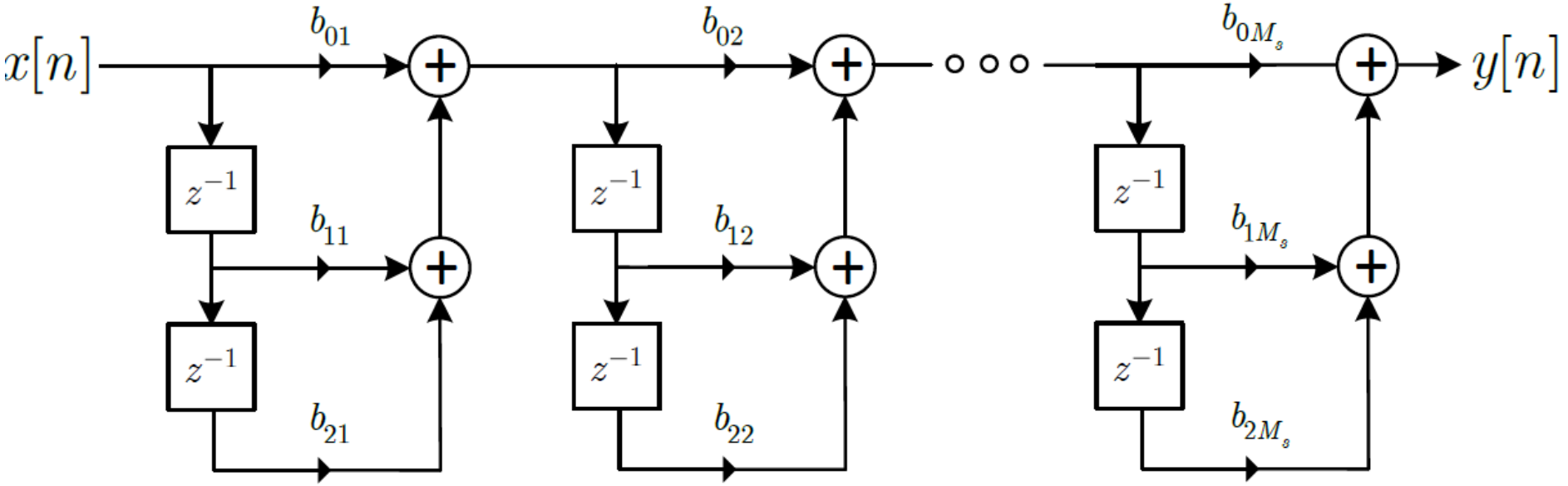


- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Μορφή σε Σειρά (cascade form)

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2})$$

με $M_s = \left\lfloor \frac{M+1}{2} \right\rfloor$

- Μια γενική υλοποίηση σε σειρά φαίνεται παρακάτω



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- Για να σχεδιάσουμε αποδοτικές δομές για συστήματα γραμμικής φάσης πρέπει να εκμεταλλευτούμε τις συμμετρίες τους

$$h[M-n] = h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \quad \text{Τύπου I, II}$$

$$h[M-n] = -h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \quad \text{Τύπου III, IV}$$

- Οποιαδήποτε συμμετρία κι αν ισχύει, μπορούμε να μειώσουμε το πλήθος των **πολλαπλασιασμών** σχεδόν στο μισό!

- Ας δούμε πως μπορούμε να τα γράψουμε με κατάλληλο τρόπο

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης
- Έστω M άρτιος, οπότε ξεκινάμε με τα τύπου I και III
- Τύπου I:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] + x[n-(M-k)]) + h\left[\frac{M}{2}\right] x\left[n - \frac{M}{2}\right]$$

- Τύπου III:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

- Έστω M περιττός, οπότε μιλάμε για τύπου II, IV
- Τύπου II:

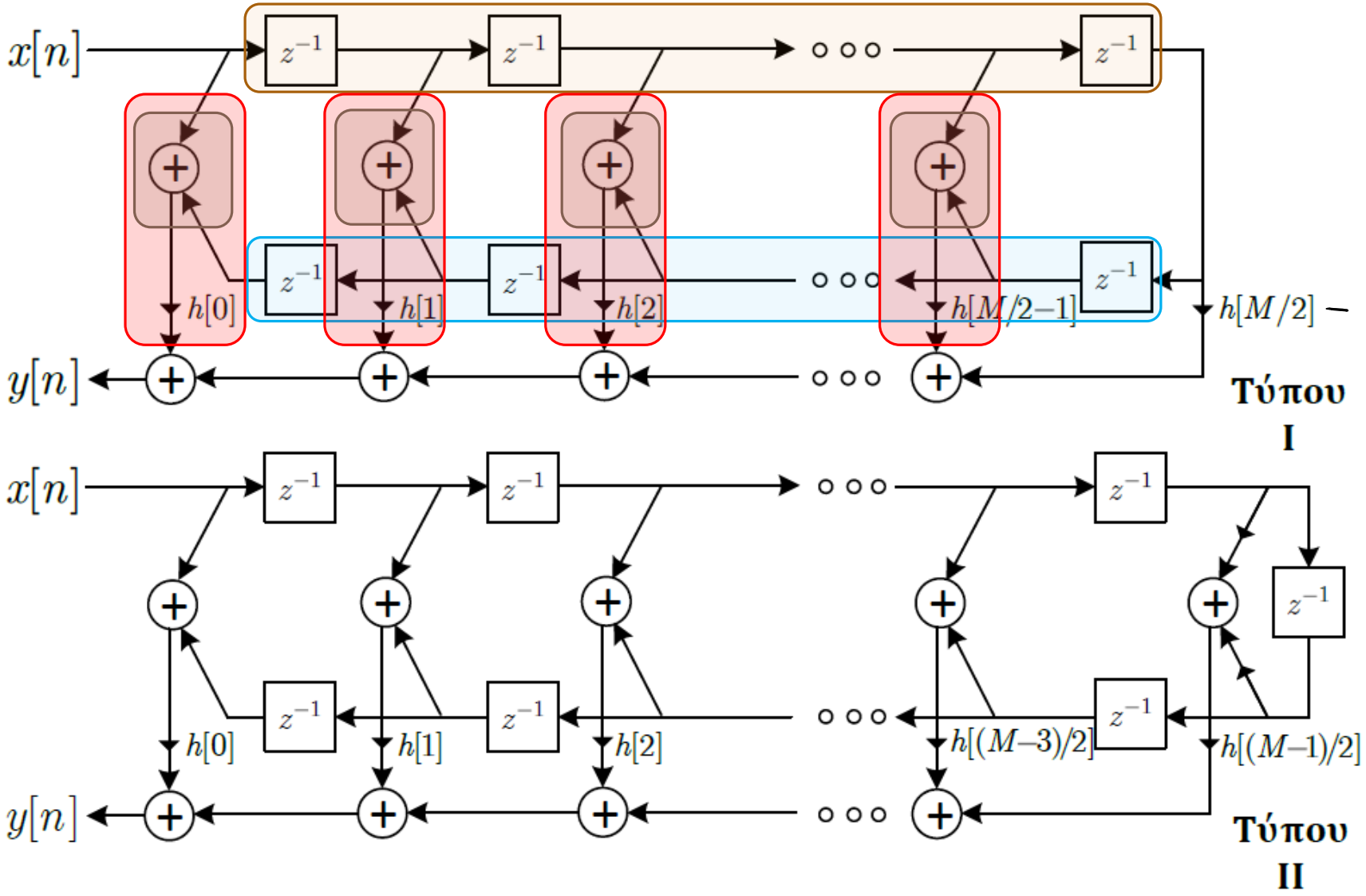
$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] + x[n-M+k])$$

- Τύπου IV:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

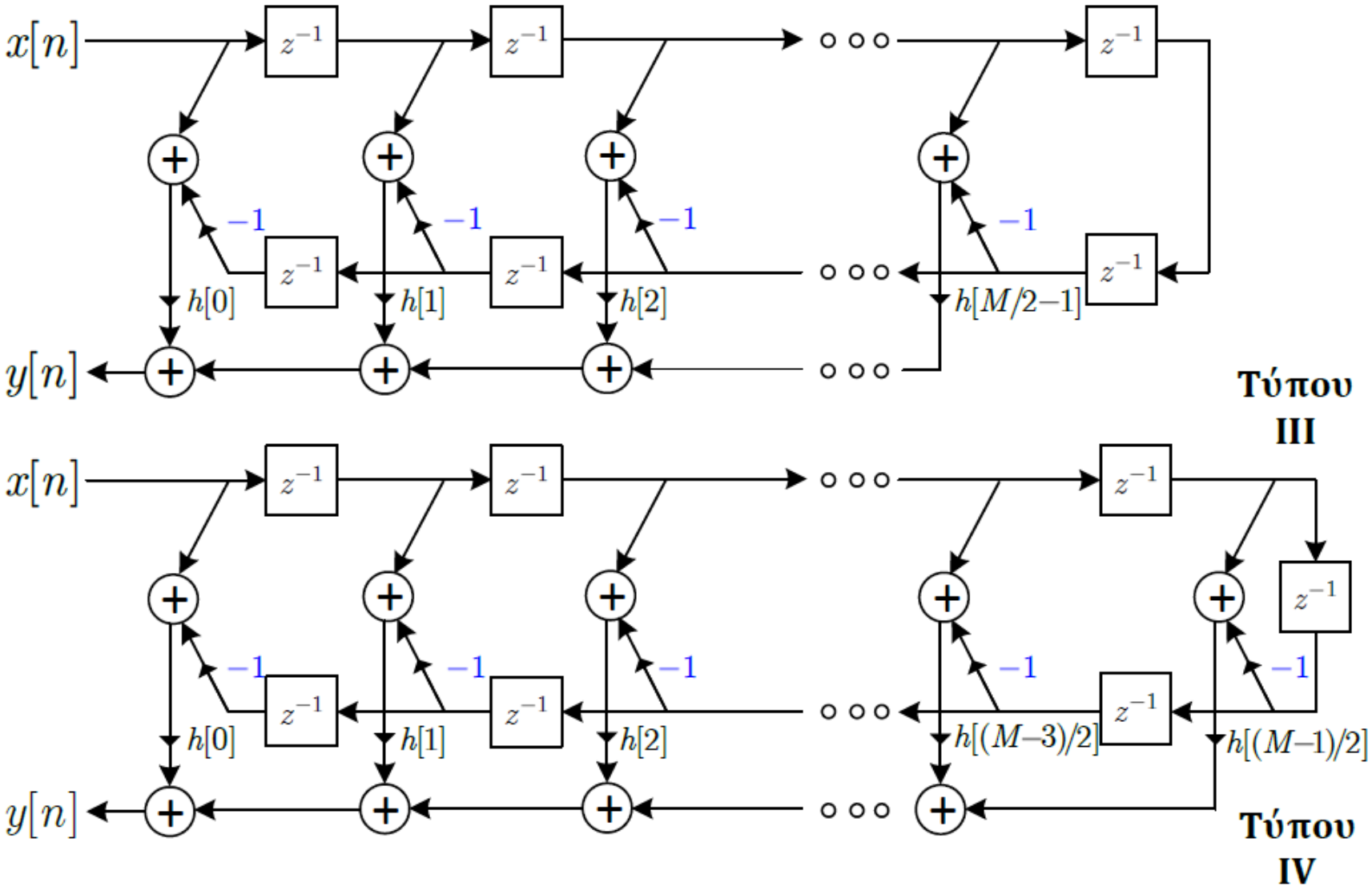
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης



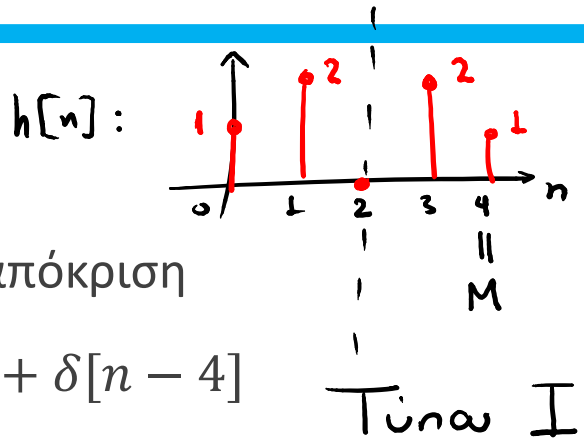
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

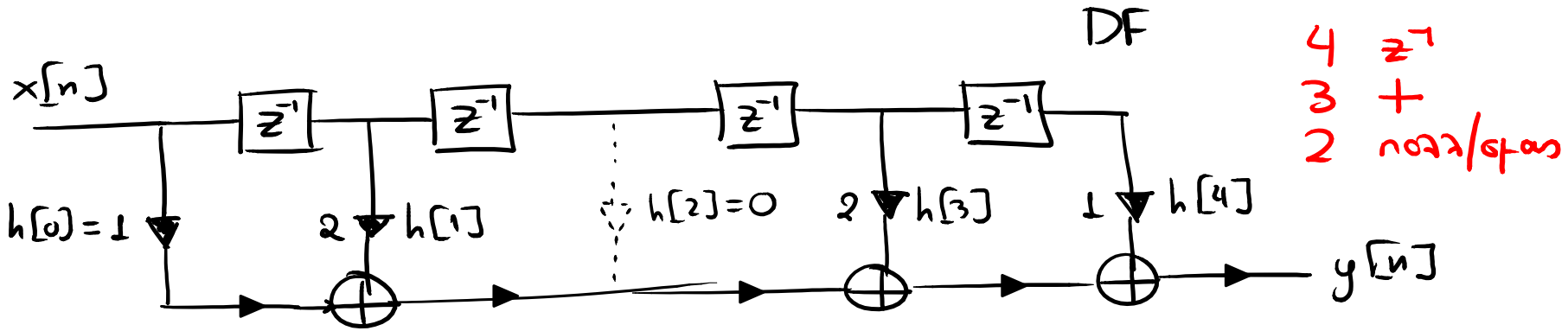


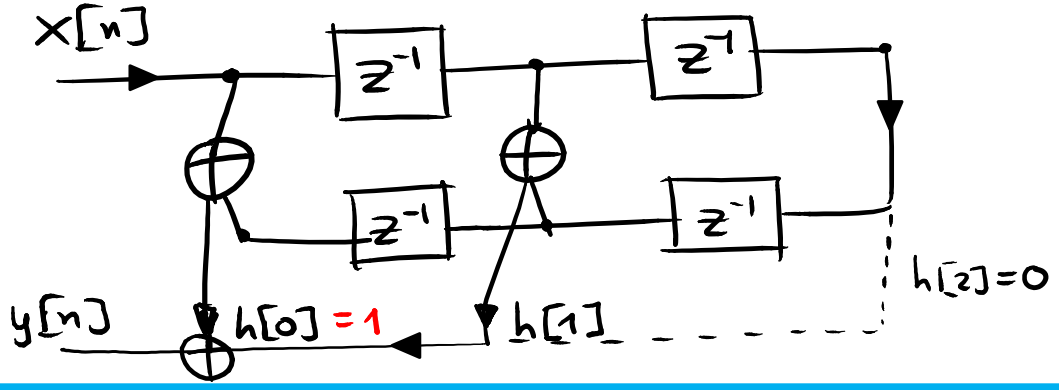
- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

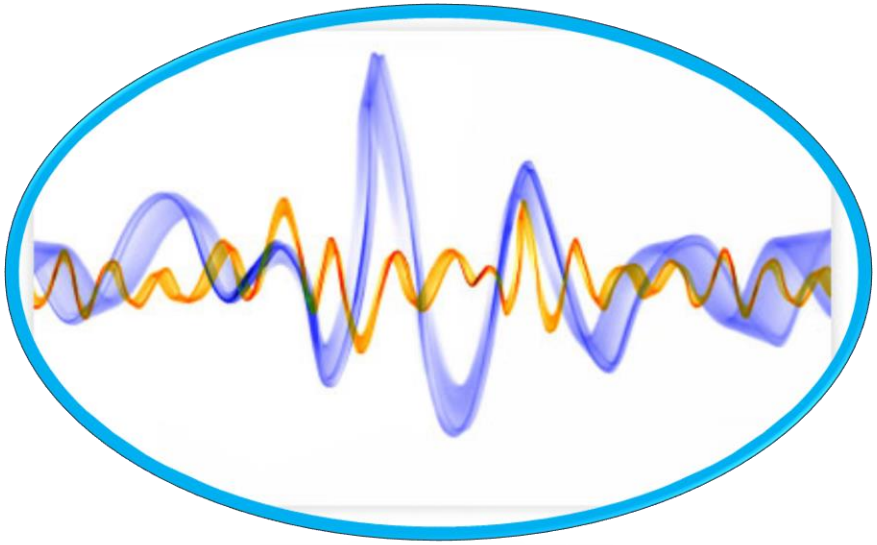


Συζητήστε και σχεδιάστε τη βέλτιστη υλοποίηση





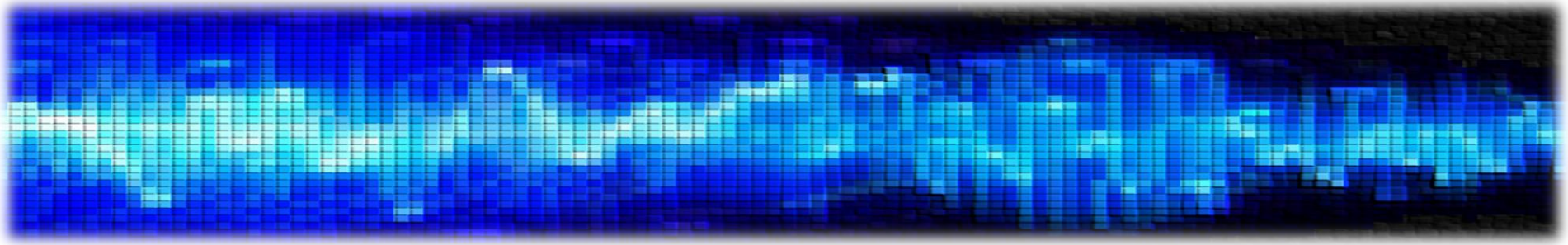
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

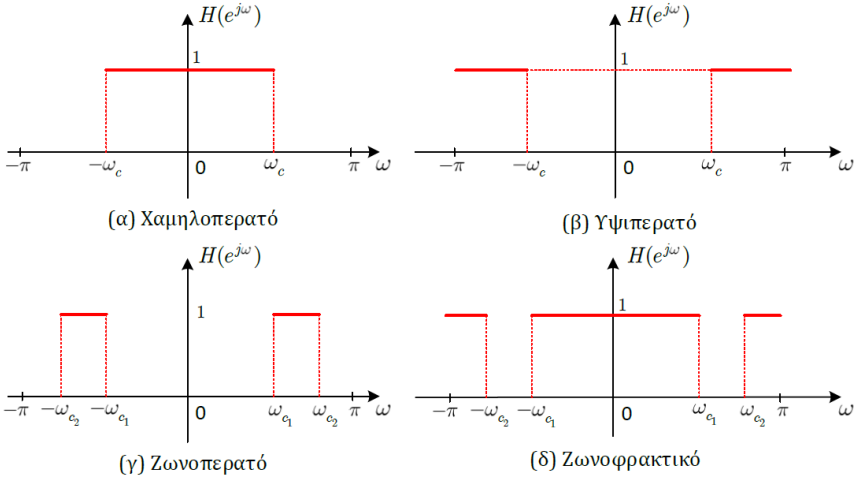
ΔΙΑΛΕΞΗ 20Η



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Τα φίλτρα είναι μια πολύ σημαντική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων
- Έχουμε ήδη δει τα περίφημα **ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
  - Περνούν συγκεκριμένες συχνότητες στην έξοδό τους
  - Αποκόπτουν κάποιες άλλες



- Θα δώσουμε έμφαση στη σχεδίαση **αιτιατών** φίλτρων επιλογής συχνοτήτων (μη ιδανικών)
  - Τα συμπεράσματα γενικεύονται και για μη αιτιατά φίλτρα
- Η σχεδίαση περιλαμβάνει τρία στάδια
  1. Προδιαγραφές του συστήματος
  2. Προσέγγιση προδιαγραφών από ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
  3. Πραγματοποίηση του συστήματος σε υλικό ή λογισμικό
- Θα δώσουμε βάρος στο 1ο και στο 2ο βήμα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**

- Επειδή ο «αναλογικός» κόσμος προηγήθηκε αρκετά του «ψηφιακού» ☺ , υπάρχει συσσωρευμένη τεχνογνωσία για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων…
  - … με την έννοια ότι αφορούν συστήματα συνεχούς χρόνου

- Μια ιδέα είναι να εκμεταλλευτούμε την τεχνογνωσία αυτή και να προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε ένα αναλογικό φίλτρο σε «ψηφιακό» (διακριτού χρόνου)

- Ας δούμε λοιπόν πρώτα πως θα γινόταν αυτή η διαδικασία στο συνεχή χρόνο
  - Δηλ. πώς θα σχεδιάζαμε ένα φίλτρο στο συνεχή χρόνο

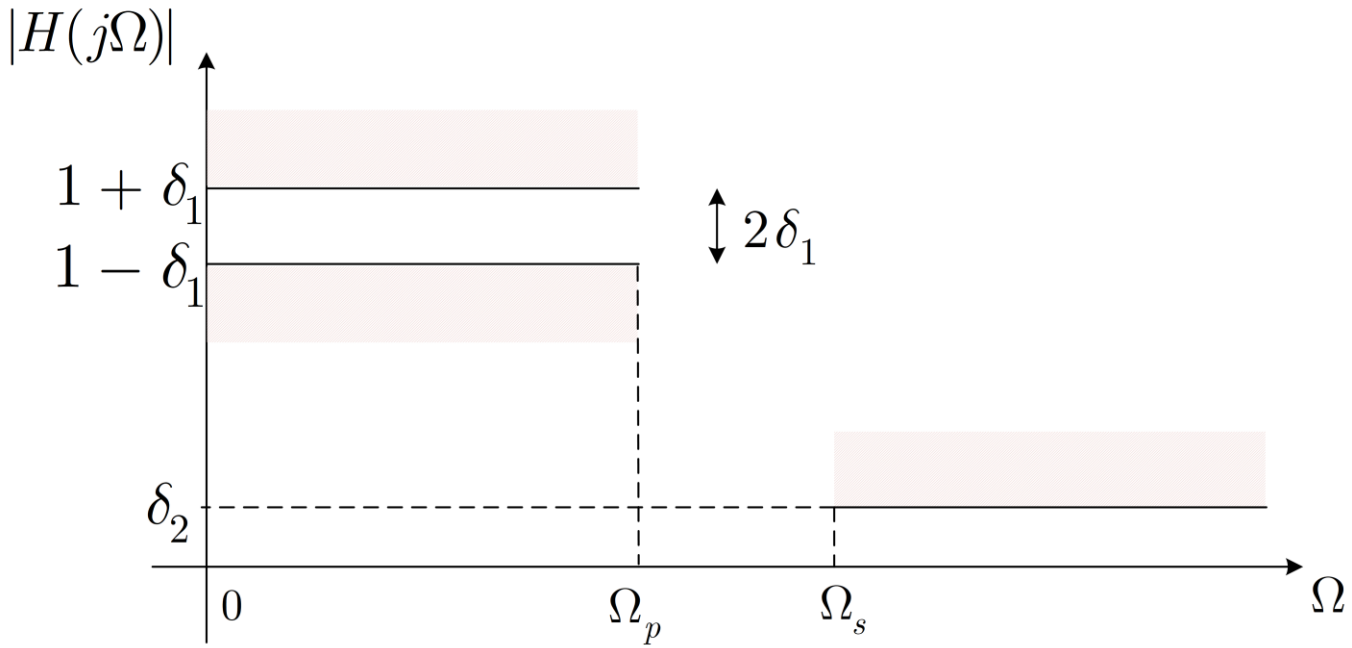
- Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τις προδιαγραφές του στο χώρο της συχνότητας

- Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε μια γενική συνάρτηση στο χώρο της συχνότητας που τις ικανοποιεί
  - Θα λύσουμε κάποια συστήματα για να συγκεκριμενοποιήσουμε τη συνάρτηση αυτή

- Τέλος θα μετατρέψουμε το σύστημα στο χώρο του Laplace (! ΘΘ)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

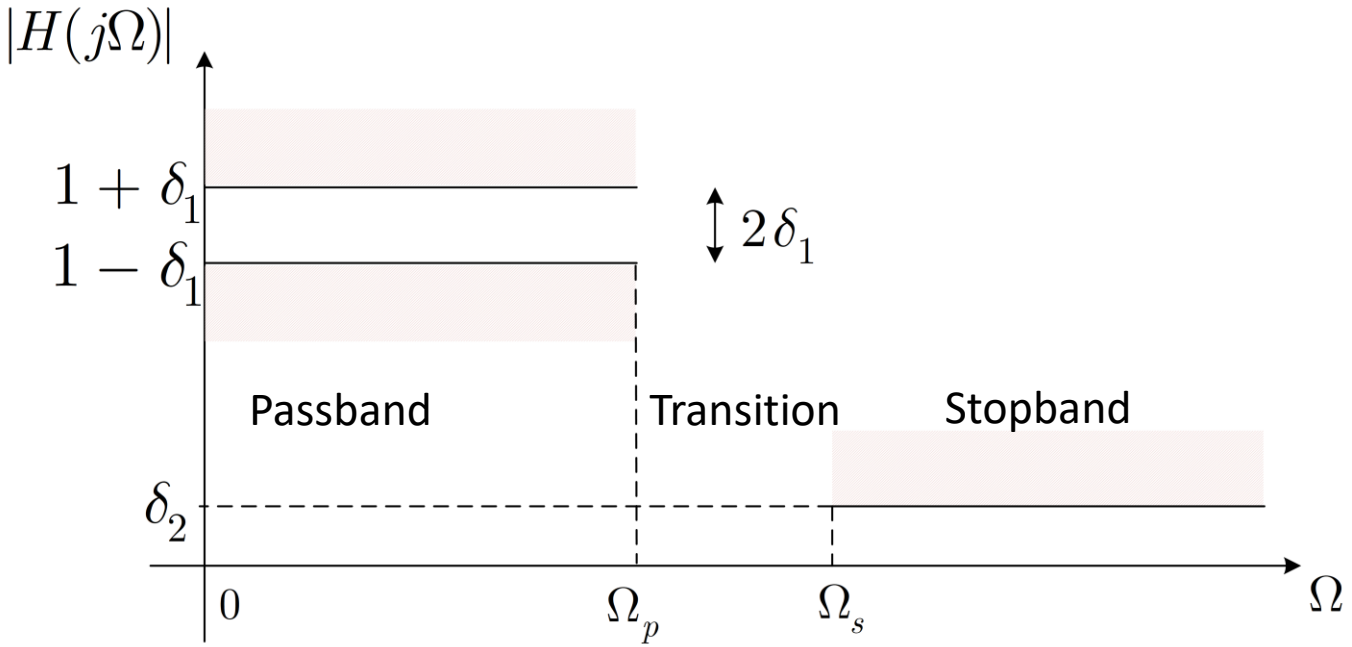
- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο στο συνεχή χρόνο
- Θα συμβολίσουμε τη συχνότητα που αντιστοιχεί στο συνεχή χρόνο με $\Omega = 2\pi f$
- Ξεκινάμε με τις προδιαγραφές του φίλτρου



- Ω_p: pass-band cutoff frequency
- Ω_s: stop-band cutoff frequency

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

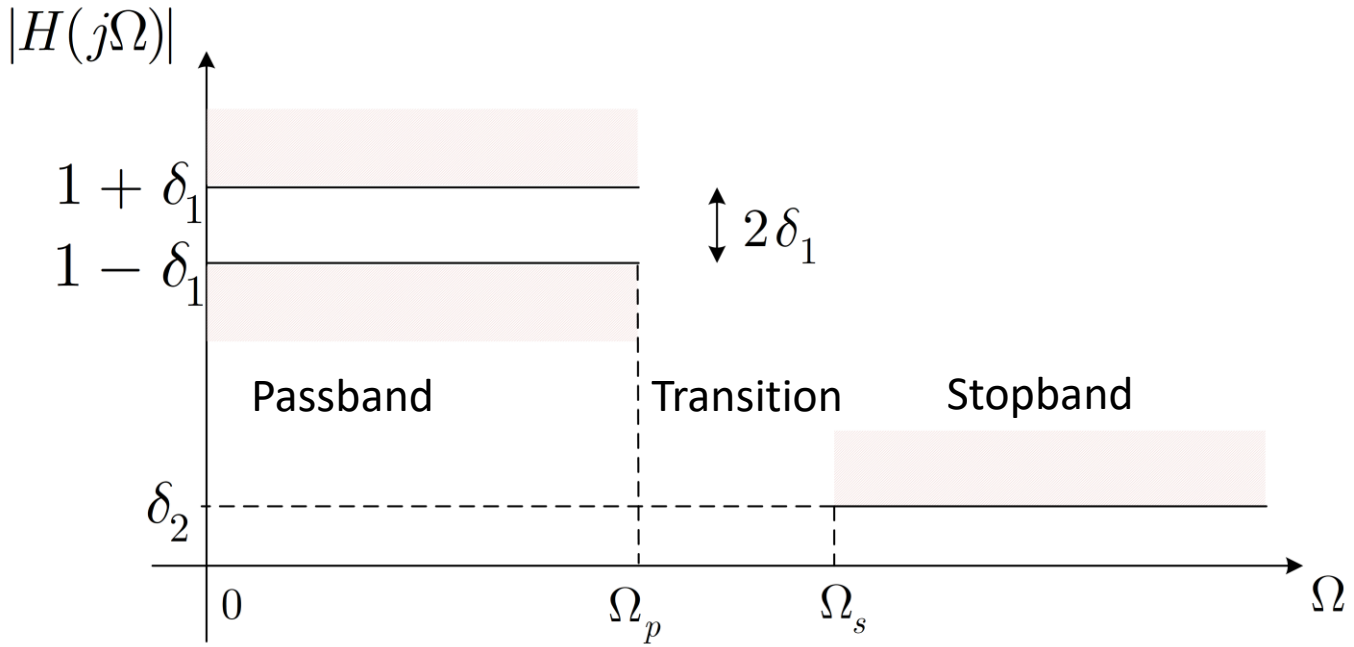
- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**



- Ω_p: pass-band cutoff frequency
- Ω_s: stop-band cutoff frequency
- Η ζώνη μεταξύ Ω_p και Ω_s ονομάζεται μεταβατική ζώνη (transition band)
- δ_1, δ_2 είναι κι αυτά προδιαγραφές του φίλτρου
- Παρατηρήστε ότι αφήνουμε «περιθώριο» δ_1 εκατέρωθεν της μονάδας γιατί δε γίνεται να κατασκευάσουμε ιδανικά φίλτρα (όμοια για το δ_2)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

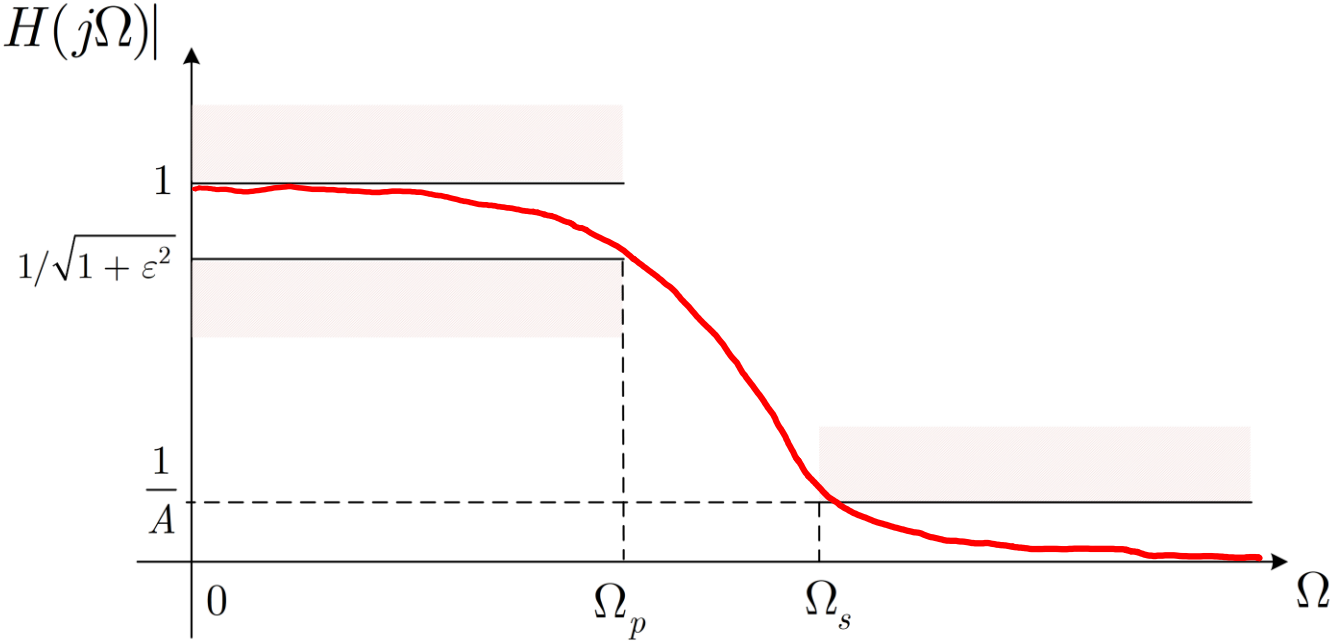
- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**



- Έστω ότι $\delta_1 = 0.01$, άρα $1+\delta_1 = 1.01$ και $1-\delta_1 = 0.99$
- Επίσης, έστω ότι $\delta_2 = 10^{-3}$
- Αυτές είναι οι προδιαγραφές μας, μαζί με επιλογή για τις Ω_p, Ω_s
- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική σημειογραφία για τις προδιαγραφές

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική μορφή προδιαγραφών



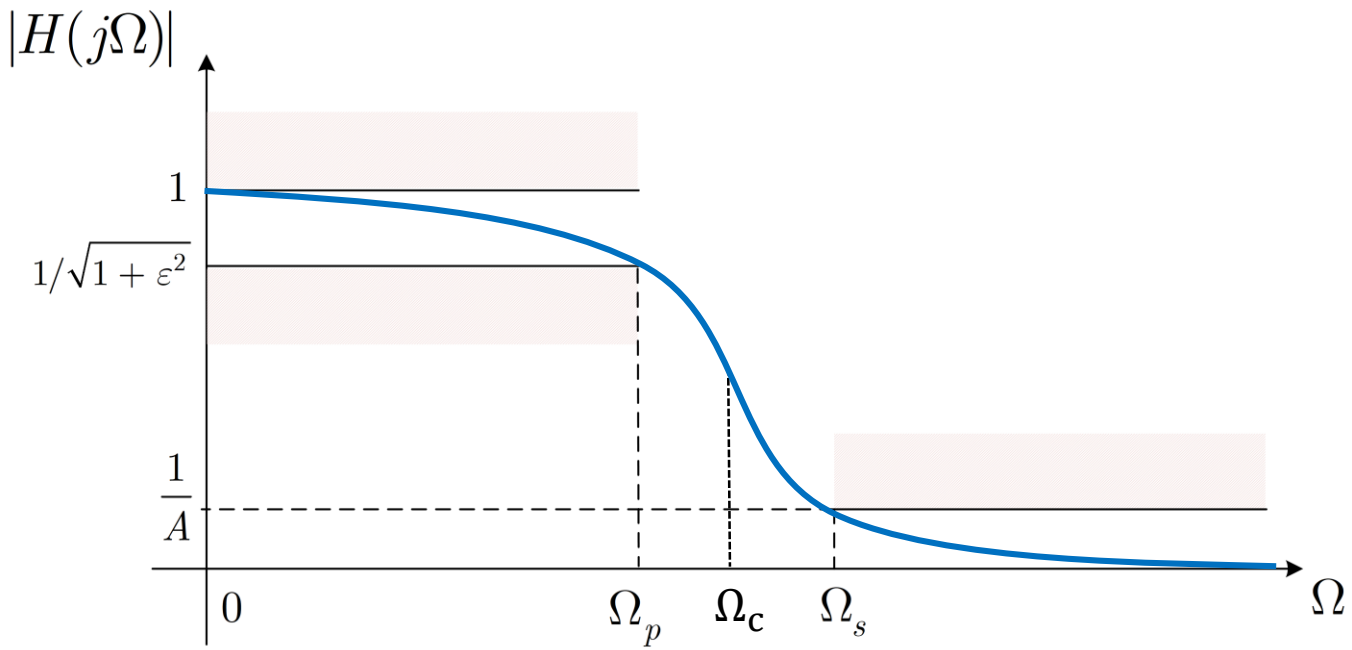
- Θέλουμε το φίλτρο μας να ξεκινά από τη μονάδα για $\Omega = 0$ και να πέφτει πολύ λίγο ως τη pass-band cutoff frequency
- Στη stop-band cutoff frequency, η απόκριση πλάτους θέλουμε να έχει (μικρή) τιμή $\frac{1}{\mathrm{A}}$
- Μπορούμε να ψάξουμε για μια απόκριση πλάτους (συνάρτηση) που να είναι μονότονη
- Ζητάμε λοιπόν μια εξίσωση που να μπορεί να δεχθεί τις προδιαγραφές μας! ☺

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Το περίφημο φίλτρο Butterworth είναι μονότονο και δίνεται από τη σχέση

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

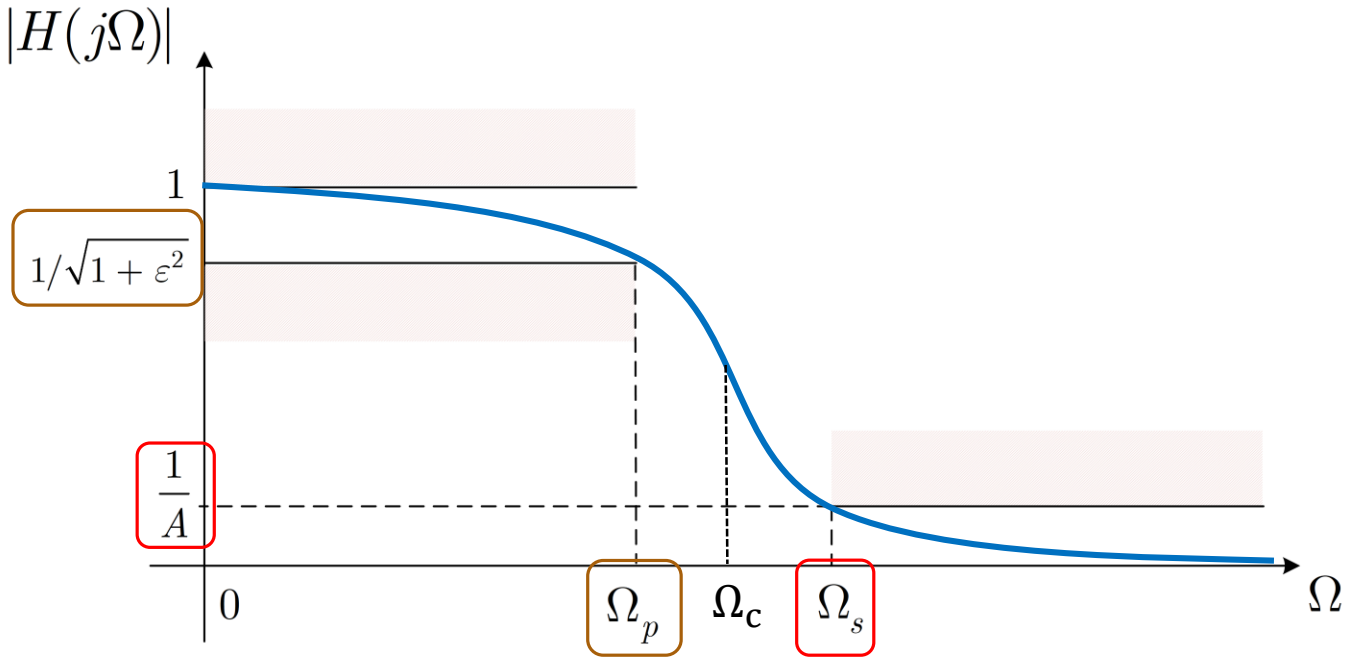
με Ω_c τη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου και N την τάξη του φίλτρου

- Ζητάμε τα Ω_c, N που να ικανοποιούν τις προδιαγραφές μας: $A, \varepsilon, \Omega_p, \Omega_s$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**



- Θέλουμε

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**

$$\left|H(j\Omega_p)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

- Έχουμε ένα 2x2 σύστημα ως προς N, Ω_c
- Αν (για ευκολία) θέσουμε $\kappa = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$ και $\kappa_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$, τότε λύνοντας ως προς N:

$$N = \frac{\log\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)}{\log\left(\frac{1}{\kappa}\right)}$$

- Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απαραίτητα ακέραιος αριθμός!
  - Επιλέγουμε το άνω ακέραιο μέρος (αν N=5.36 ➔ N=6)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**

$$\left|H\left(j\Omega_p\right)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

- Για $N = 6$, βρίσκουμε το Ω_c και έχουμε την πλήρη μορφή του φίλτρου Butterworth που ικανοποιεί τις προδιαγραφές μας!
- Όμως το φίλτρο είναι της μορφής $|H(j\Omega)|^2$, εμείς θέλουμε την απόκριση πλάτους
- Έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(s)H(-s)\Big|_{s=j\Omega}$$

- Άρα

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**

- Το σύστημα γράφεται ως

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N}+(j\Omega_c)^{2N}}$$

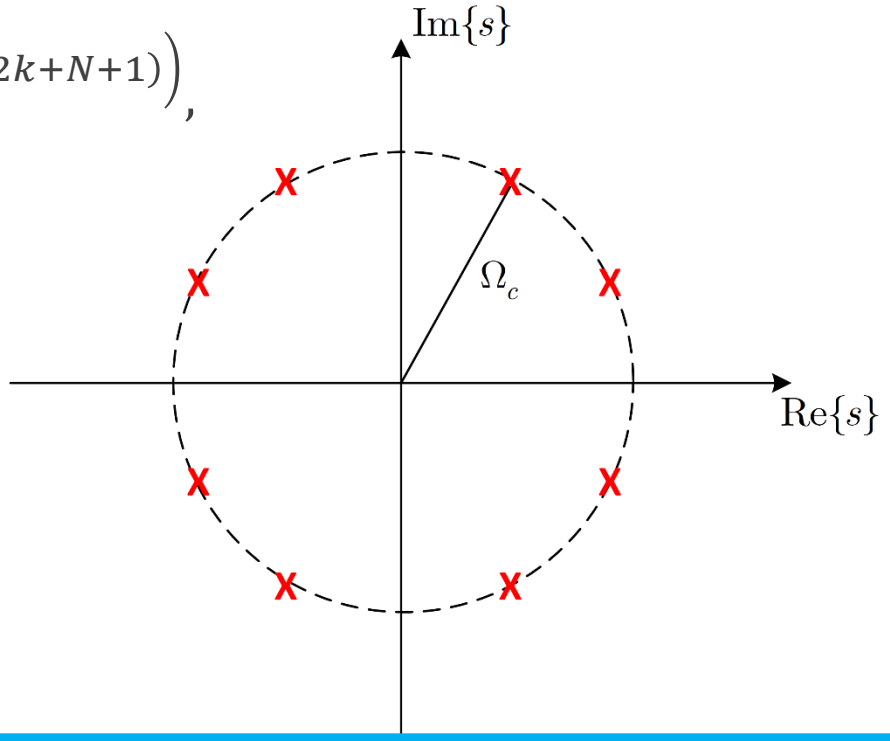
κι έχει μόνο πόλους στο μιγαδικό επίπεδο!

- Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)\right)},$$

με $k = 0,1,\dots,2N-1$

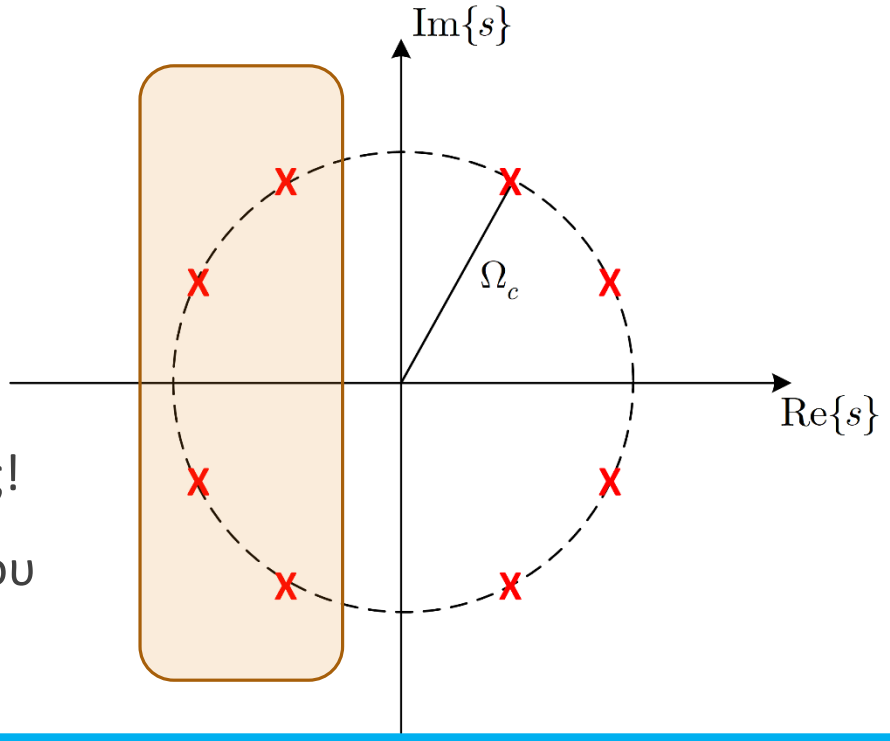
- Οι πόλοι βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας Ω_c!



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους που αντιστοιχούν στο $H(s)$
- Θέλουμε φυσικά ένα σύστημα που να είναι ευσταθές και αιτιατό
- Για να είναι τέτοιο, πρέπει οι πόλοι να βρίσκονται στο **αριστερό** ημιεπίπεδο
- Έτσι, ξέρουμε τους πόλους και τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$!

$$H(s) = \Omega_c^N \prod_{\substack{k: \\ \mathrm{Re}\{s_k\} < 0}} \frac{1}{(s - s_k)}$$



- Οπότε υπολογίσαμε το σύστημα συνεχούς χρόνου με βάση κάποιες προδιαγραφές
- Μα εμάς μας ενδιαφέρει ο διακριτός χρόνος!
- Μπορούμε να φέρουμε το $H(s)$ στο χώρο του μετασχ. Z??? ☺

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Μπορούμε να φέρουμε το $H(s)$ στο χώρο του μετασχ. Z ???
- ΝΑΙ! ☺
- Και μάλιστα με δυο διαφορετικές μεθόδους

- Μέθοδος Impulse Invariance
  - a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς χρόνου

- Μέθοδος Bilinear Transformation
  - a.k.a «συμπίεση» του άξονα $0 \leq \Omega \leq +\infty$ στο $0 \leq \omega \leq \pi$!!

- Ας τις δούμε μια-μια…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method

- Έστω ότι έχουμε μια κρουστική απόκριση $h(t)$ η οποία περιγράφει ένα επιθυμητό σύστημα στο συνεχή χρόνο

- Αν τη δειγματοληπτήσουμε με περίοδο T_d τότε παίρνουμε ένα δειγματοληπτημένο σήμα

$$h(nT_d) = h(t)\Big|_{t=nT_d} \leftrightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{T_d}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j(\Omega - k\Omega_d))$$

- Αυτή είναι μια έκφραση του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου με όρους μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου! ☺

- Ξέρουμε ότι κατά τη δειγματοληψία

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_d} = \frac{\Omega}{f_d} = \Omega T_d \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

Το ίδιο ακριβώς!

- Άρα

$$h[n] = T_d h(nT_d) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} - k\frac{2\pi}{T_d}\right)\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method
- Βήμα 1: Ορίζουμε προδιαγραφές για το φίλτρο μας στον «ψηφιακό» χώρο
- Βήμα 2: Μετατρέπουμε τις προδιαγραφές στον «αναλογικό» χώρο συχνοτήτων

$$\Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

- Βήμα 3: Βρίσκουμε το σύστημα $H(s)$ που αντιστοιχεί στις προδιαγραφές μας: έστω ότι

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \leftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t)$$

- Βήμα 4: Δειγματοληπτούμε την κρουστική απόκριση $h(t)$:

$$h[n] = T_d h(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k n T_d} u(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^{N} A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]$$

- Βήμα 5: Εφαρμόζουμε μετασχ. Z στην κρουστική απόκριση $h[n]$:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} Z^{-1}}$$

- Παρατηρήστε ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση των πόλων στο χώρο του Laplace με το χώρο του Z
- Ξεκάθαρα, **κάθε πόλος s_k αντιστοιχεί σε έναν πόλο $e^{s_k T_d}$!!!**
- Είναι

$$z_k = e^{s_k T_d} = e^{(\sigma_k + j\Omega_k) T_d} = e^{\sigma_k T_d} e^{j\Omega_k T_d} = e^{\sigma_k T_d} e^{j\omega_k}$$

- Παρατηρήστε ότι:

❑ Αν $\sigma_k > 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| > 1$

❑ Αν $\sigma_k = 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| = 1$

❑ Αν $\sigma_k < 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| < 1$

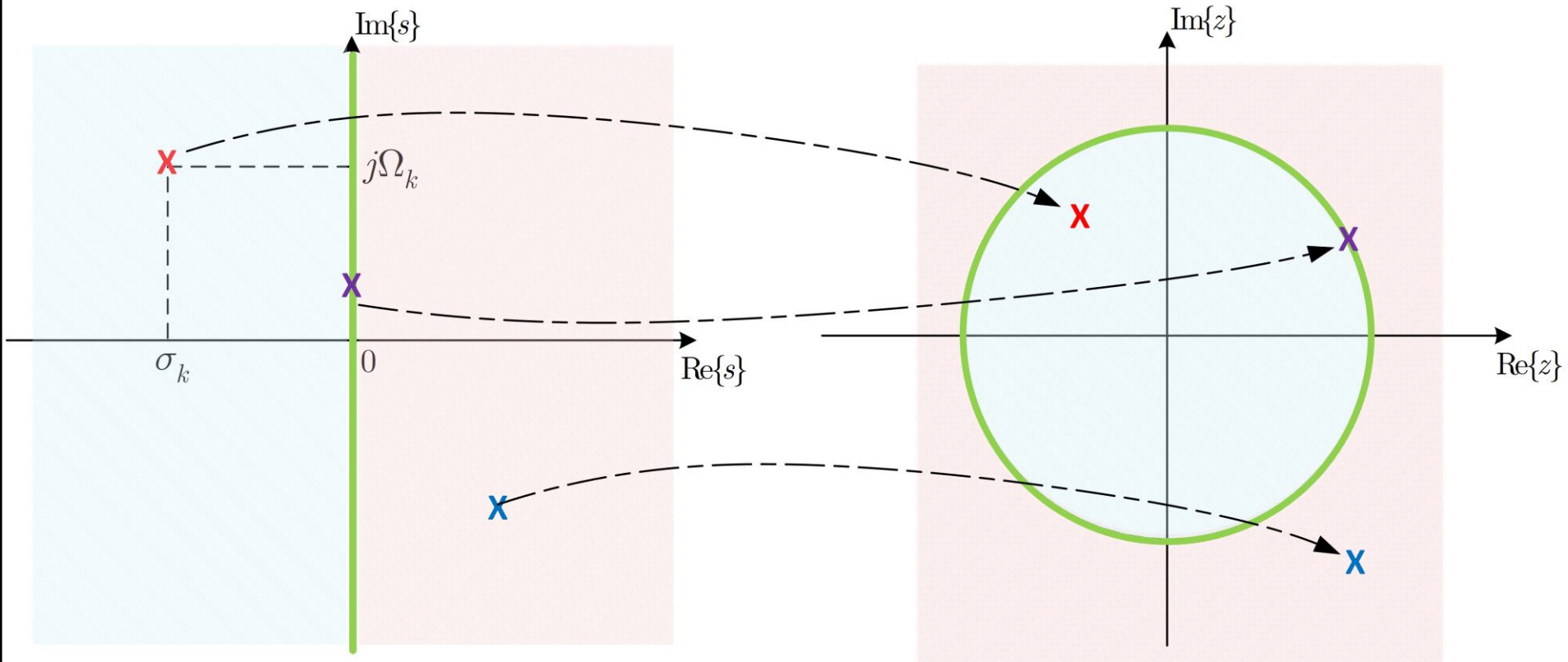
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method

❑ Αν $\sigma_k > 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| > 1$

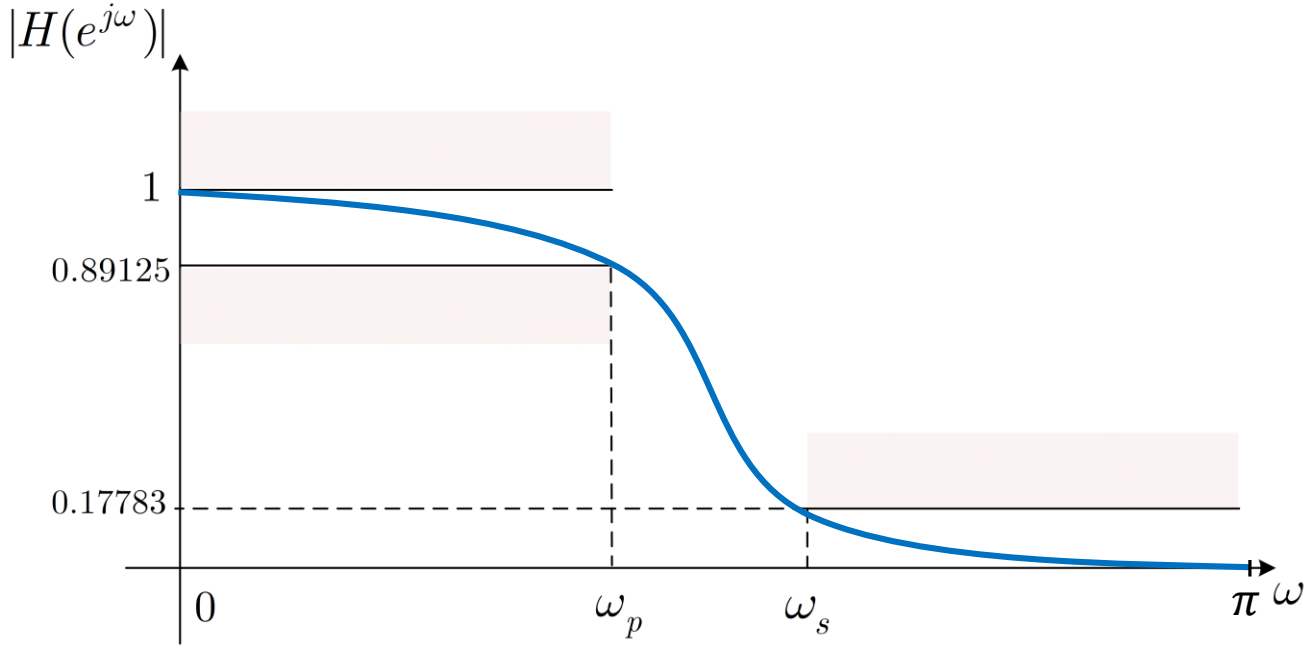
❑ Αν $\sigma_k = 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| = 1$

❑ Αν $\sigma_k < 0$, τότε $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| < 1$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method
- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα
- Έστω ότι θέλουμε ένα φίλτρο όπως στο σχήμα - ας πούμε ένα lowpass Butterworth



με $\omega_p = 0.2\pi, \omega_s = 0.3\pi$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$
$$0.17783 \geq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \quad : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1 : 0 \le \omega \le 0.2\pi$$
$$0.17783 \ge \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| : 0.3\pi \le \omega \le \pi$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η παράμετρος T_d δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση
  - Θέτουμε $T_d = 1$ (δείτε το παράρτημα στο τέλος της διάλεξης)

- Μετατρέπουμε τις «ψηφιακές» συχνότητες σε «αναλογικές»: $\Omega = \frac{\omega}{T_d} = \omega$
  - $\Omega_p = 0.2\pi, \Omega_s = 0.3\pi$

- Οι προδιαγραφές γίνονται

$$0.89125 \le |H(j\Omega)| \le 1 : 0 \le \Omega \le 0.2\pi$$
$$0.17783 \ge |H(j\Omega)| : 0.3\pi \le \Omega \le \pi$$

- Οι προδιαγραφές γράφονται

$$0.89125 = \left|H\left(j\Omega_{\mathrm{p}}\right)\right| = |H(j0.2\pi)|$$
$$0.17783 = |H(j\Omega_s)| = |H(j0.3\pi)|$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method
- Αντικαθιστώντας την εξίσωση του φίλτρου Butterworth και λύνοντας το 2x2 σύστημα καταλήγουμε στο $N = 5.8858, \Omega_c = 0.70474$
- Θέλουμε ακέραιο $N \Rightarrow N = 6$
- Υπολογίζουμε ξανά τη συχνότητα $\Omega_c = 0.7032$
- Με αυτά τα νούμερα μπορούμε να δείξουμε ότι οι προδιαγραφές μας ικανοποιούνται ακριβώς στη μια συχνότητα (Ω_p ή Ω_s) ενώ υπερκαλυπτόμαστε στην άλλη (Ω_p ή Ω_s)!
- Χρειάζεται να βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός αιτιατού και ευσταθούς συστήματος
- Ξανά

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.7032}\right)^{12}} = \frac{(j0.7032)^{12}}{s^{12} + (j0.7032)^{12}}$$

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032 e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \qquad k = 0,1,2, \dots, 11$$

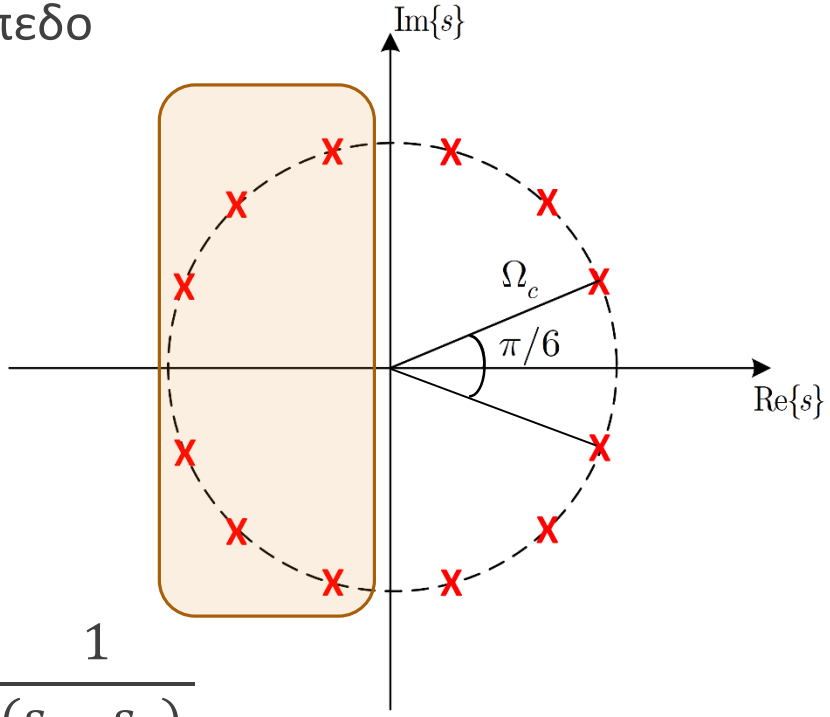
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032 e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \qquad k = 0,1,2,\dots,11$$

- Κρατούμε μόνο αυτούς στο αριστερό ημιεπίπεδο
  - Δίνουν ευσταθές και αιτιατό σύστημα



- Το σύστημα δίνεται ως

$$H(s) = \Omega_c^6 \prod_{k=1}^{6} \frac{1}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{A_k}{(s - s_k)}$$

- Για κάθε όρο $\frac{A_k}{s - s_k}$ βάζουμε έναν όρο $\frac{A_k}{1 - e^{s_k} z^{-1}}$ στο χώρο του Z

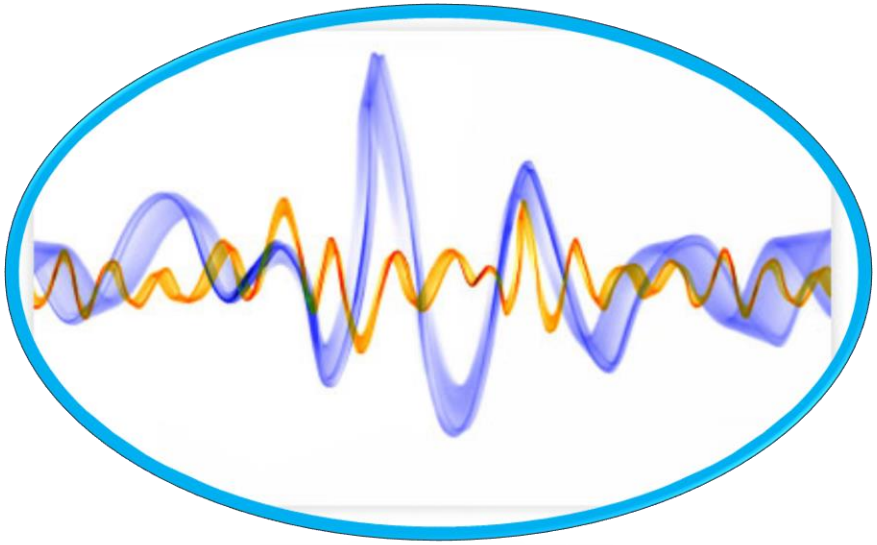
$$H(z) = \frac{0.28 - 0.44z^{-1}}{1 - 1.29z^{-1} + 0.69z^{-2}} + \frac{-2.14 + 1.14z^{-1}}{1 - 1.06z^{-1} + 0.36z^{-2}} + \frac{1.85 - 0.63z^{-1}}{1 - 0.99z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

- Προσέξτε ότι δεν κάναμε ρητά δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης συνεχούς χρόνου! Ούτε καν την υπολογίσαμε!
- Ξέρουμε ότι η μέθοδος απλά κάνει pole mapping $s_k \rightarrow e^{s_k}$!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

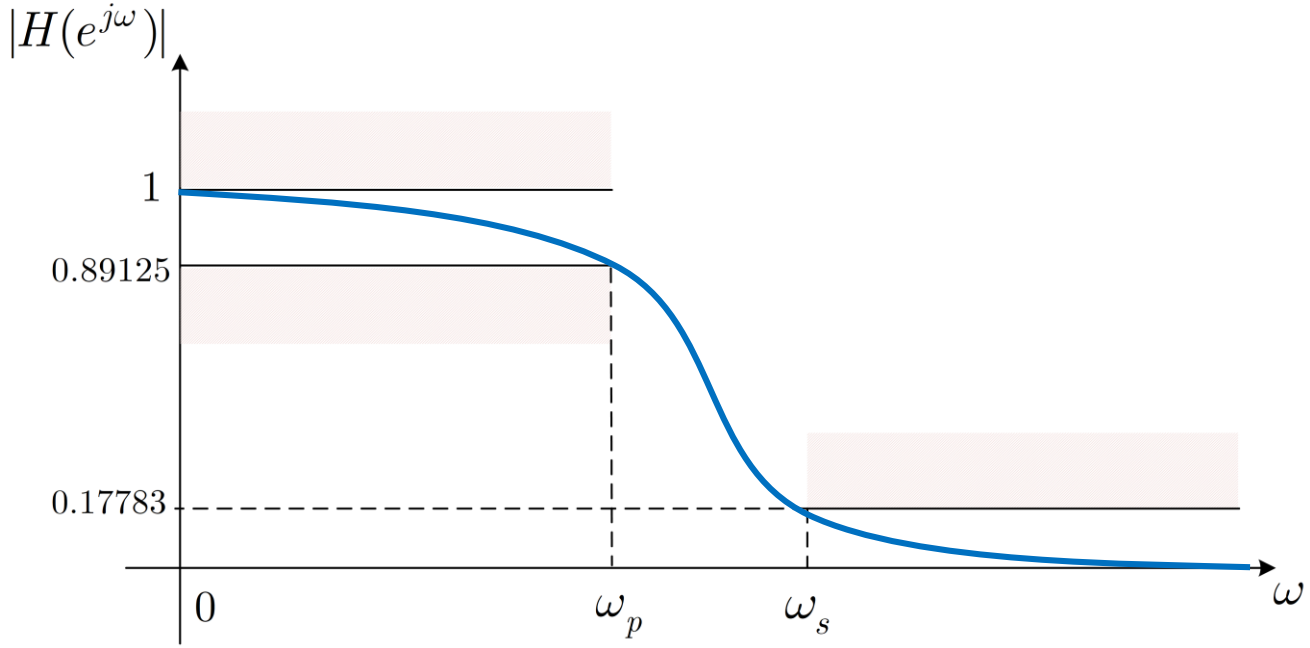
Παράρτημα

(σχετικά με την παράμετρο T_d)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method
- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα
- Έστω ότι θέλουμε ένα φίλτρο όπως στο σχήμα - ας πούμε ένα lowpass Butterworth



με $\omega_p = 0.2\pi, \omega_s = 0.3\pi$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$
$$0.17783 \geq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \quad : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method
- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1 : 0 \le \omega \le 0.2\pi$$
$$0.17783 \ge \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| : 0.3\pi \le \omega \le \pi$$

- Μετατρέπουμε τις «ψηφιακές» συχνότητες σε «αναλογικές»: $\Omega = \frac{\omega}{T_d}$
  - $\Omega_p = \frac{0.2\pi}{T_d}$, $\Omega_s = \frac{0.3\pi}{T_d}$

- Οι προδιαγραφές γίνονται

$$0.89125 \le |H(j\Omega)| \le 1 : 0 \le \Omega \le \frac{0.2\pi}{T_d}$$
$$0.17783 \ge |H(j\Omega)| : \frac{0.3\pi}{T_d} \le \Omega \le \frac{\pi}{T_d}$$

- Οι προδιαγραφές γράφονται

$$(0.89125)^2 = \left|H\left(j\Omega_{\mathrm{p}}\right)\right|^2 = \left|H\left(\frac{j0.2\pi}{T_d}\right)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}}$$

$$(0.17783)^2 = |H(j\Omega_s)|^2 = \left|H\left(\frac{j0.3\pi}{T_d}\right)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method
- Αντικαθιστώντας την εξίσωση του φίλτρου Butterworth και λύνοντας το 2x2 σύστημα καταλήγουμε στο $N = 5.8858, \Omega_c T_d = 0.70474$
- Θέλουμε ακέραιο $N \Rightarrow N = 6$
- Υπολογίζουμε ξανά το $\Omega_c T_d = 0.7032 \Rightarrow \Omega_c = \frac{0.7032}{T_d}$
- Χρειάζεται να βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός αιτιατού και ευσταθούς συστήματος
- Ξανά

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\frac{0.7032}{T_d}}\right)^{12}}$$

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

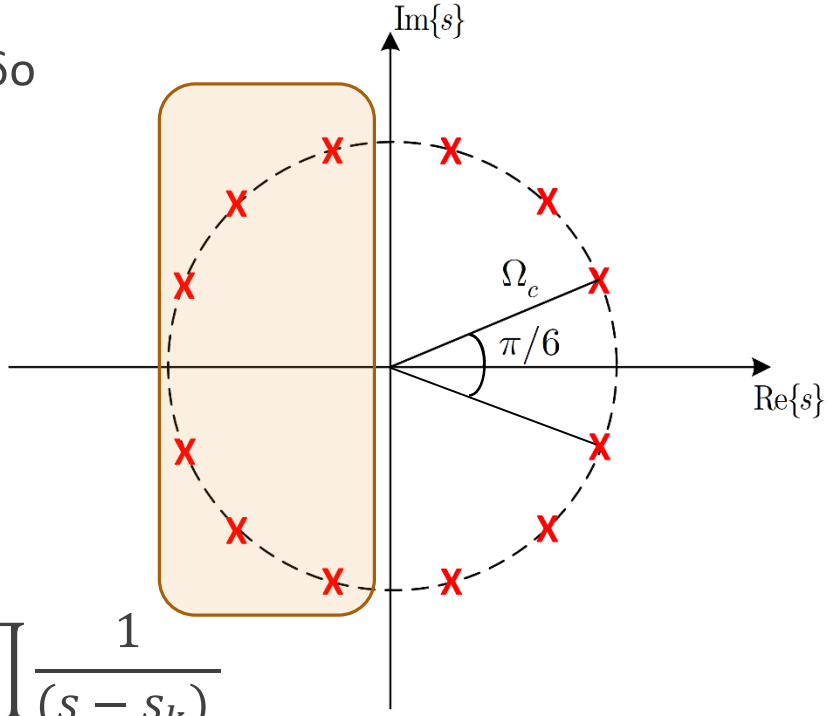
$$s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \qquad k = 0,1,2,\dots,11$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method
- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \qquad k = 0,1,2,\dots,11$$

- Κρατούμε μόνο αυτούς στο αριστερό ημιεπίπεδο
  - Δίνουν ευσταθές και αιτιατό σύστημα



- Το σύστημα δίνεται ως

$$H(s) = \left(\frac{\Omega_c}{T_d}\right)^6 \prod_{k=1}^{6} \frac{1}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{\left(\frac{0.7032}{T_d}\right)^6}{\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j7\pi}{12}}\right)\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j9\pi}{12}}\right)\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j11\pi}{12}}\right)\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j13\pi}{12}}\right)\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j15\pi}{12}}\right)\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j17\pi}{12}}\right)}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων** – Impulse Invariance Method

$$H(s)=\frac{\left(\frac{0.7032}{T_d}\right)^6}{\left(s-\frac{0.7032}{T_d}e^{\frac{j7\pi}{12}}\right)\left(s-\frac{0.7032}{T_d}e^{\frac{j9\pi}{12}}\right)\left(s-\frac{0.7032}{T_d}e^{\frac{j11\pi}{12}}\right)\left(s-\frac{0.7032}{T_d}e^{\frac{j13\pi}{12}}\right)\left(s-\frac{0.7032}{T_d}e^{\frac{j15\pi}{12}}\right)\left(s-\frac{0.7032}{T_d}e^{\frac{j17\pi}{12}}\right)}$$

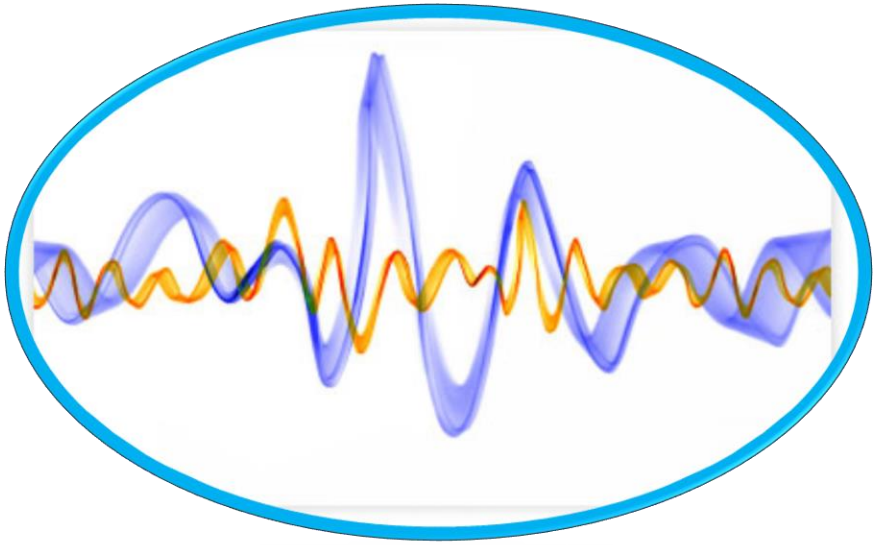
- Μερικά κλάσματα: για κάθε όρο $\frac{A_k}{s-s_k}$ βάζουμε ένα όρο $\frac{A_k T_d}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}}$ στο χώρο του Z
- Βλέπετε ότι οι πόλοι $s_k=\frac{0.7032}{T_d}e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, k=1,\dots,6$ πολλαπλασιάζονται με T_d όταν μεταφέρονται στο χώρο του Z
  - Άρα η τιμή του T_d δεν έχει σημασία!
- Άρα

$$H(z)=\frac{0.28-0.44z^{-1}}{1-1.29z^{-1}+0.69z^{-2}}+\frac{-2.14+1.14z^{-1}}{1-1.06z^{-1}+0.36z^{-2}}+\frac{1.85-0.63z^{-1}}{1-0.99z^{-1}+0.25z^{-2}}$$

- Προσέξτε ότι δεν κάναμε ρητά δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης συνεχούς χρόνου! Ούτε καν την υπολογίσαμε!
- Ξέρουμε ότι η μέθοδος απλά κάνει pole mapping $s_k \to e^{s_k T_d}$!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

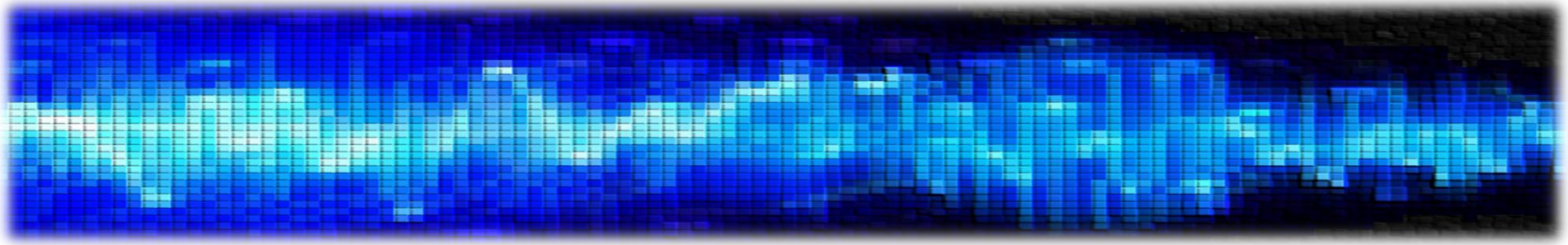
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 21η



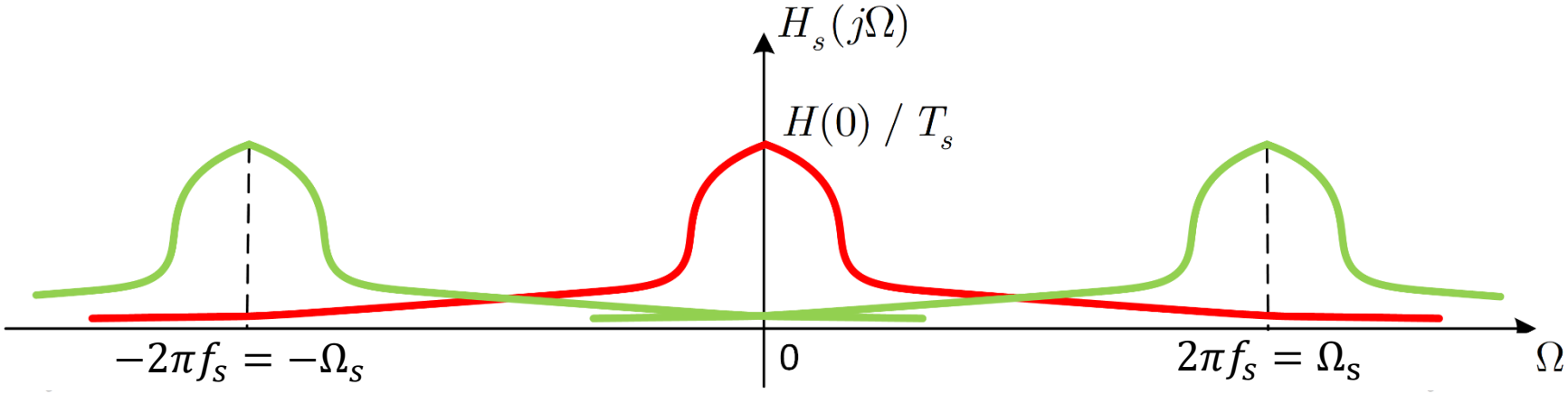
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Έχουμε ήδη δει μια μέθοδο σχεδίασης ψηφιακών-από-αναλογικά φίλτρα
  - Τη Μέθοδο Impulse Invariance
- Ποιο είναι το βασικό πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο?
- Ότι το αναλογικό φίλτρο **δεν** είναι band-limited
  - Δεν «ζει» μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων γύρω από το μηδέν
- Θυμηθείτε την ιδιότητα της κλιμάκωσης στο χρόνο για το μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου
  - «Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, τότε είναι άπειρης διάρκειας στη συχνότητα, και το αντίστροφο»
- Η ιδιότητα αυτή μας λέει ότι ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα στο συνεχή χρόνο (όπως είναι όλα τα σήματα «εκεί έξω» ☺) θα έχει άπειρου πλήθους μη μηδενικές συχνότητες, δηλ. ΔΕ θα είναι band-limited
- Άρα κατά τη δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης, θα υπάρχει πάντα το φαινόμενο του aliasing!
  - Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος ανά $k\Omega_s$ θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!



- Η τεχνική που θα συζητήσουμε στη συνέχεια αποφεύγει το πρόβλημα του aliasing χρησιμοποιώντας έναν αλγεβρικό μετασχηματισμό μεταξύ των μεταβλητών s και z
- Τι ακριβώς κάνει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προσπαθεί να «χωρέσει» τον άξονα $-\infty \leq \Omega \leq +\infty$ στον άξονα $-\pi \leq \omega \leq \pi$!
- Ως εκ τούτου, η αντιστοίχιση των μεταβλητών $\Omega \rightarrow \omega$ **δεν** είναι γραμμική, όπως ήταν στην προηγούμενη μέθοδο του Impulse Invariance
- Άρα η τεχνική αυτή, που ονομάζεται **Bilinear Transformation**, είναι κατάλληλη όταν αυτή η «αναδίπλωση» (warping) του άξονα «αναλογικής» συχνότητας είναι αποδεκτή

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**

- Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται ως

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

δηλ.

$$H(z) = H_c\left[\frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)\right]$$

- Κι εδώ έχουμε την παράμετρο T_d, όπως και στην προηγούμενη μέθοδο

- Κι εδώ όμως μπορούμε να δείξουμε ότι η παράμετρος αυτή δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση
  - Θα την κρατήσουμε για λόγους πληρότητας

- Λύνοντας ως προς z:

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right)s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$

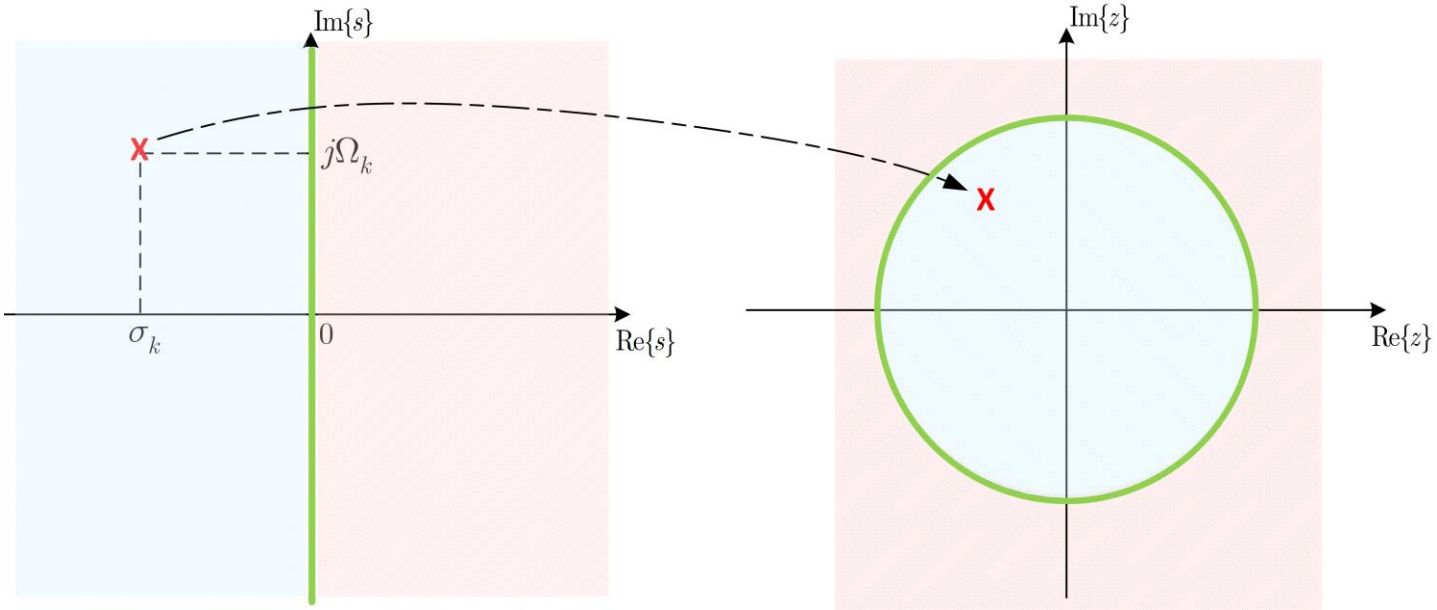
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right)s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$

- Παρατηρήστε ότι:
  - ❑ Αν $\sigma < 0$, τότε $|z| < 1$
  - ❑ Αν $\sigma > 0$, τότε $|z| > 1$
  - ❑ Αν $\sigma = 0$, τότε $|z| = 1$

Ίδια «ιδέα» με την αντιστοίχιση της προηγούμενης μεθόδου, Impulse Invariance (όχι σαν αλγεβρική αντιστοίχιση όμως)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**
- Ας δούμε πως μπορούμε να συσχετίσουμε τις μεταβλητές Ω, ω

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}\right) = \frac{2j}{T_d}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- Οπότε

$$\sigma = 0 \quad , \quad \Omega = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

ή

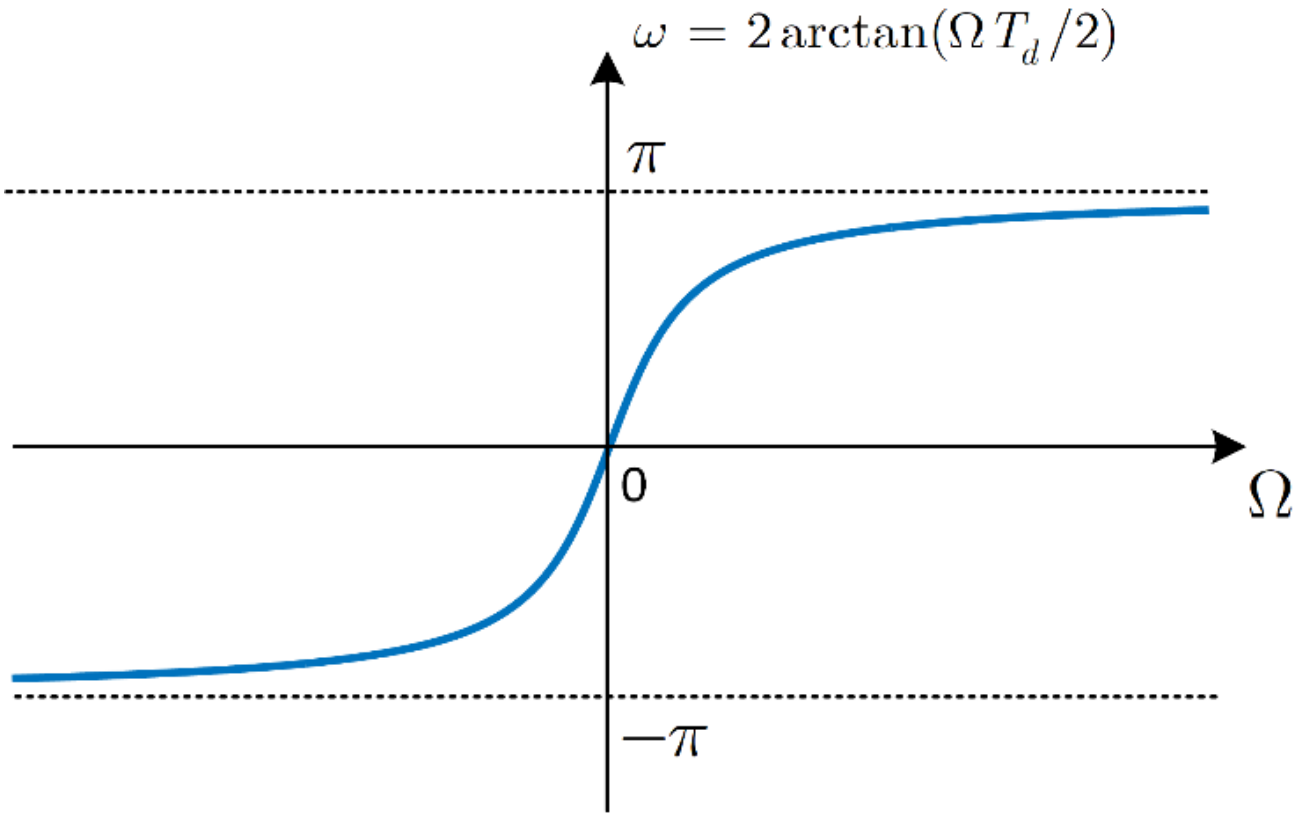
$$\omega = 2\arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$

- Πώς μοιάζει αυτή η μη γραμμική αντιστοίχιση των δυο συχνοτήτων?
- Πώς αντιστοιχίζεται η «αναλογική» απόκριση πλάτους στην «ψηφιακή»?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**

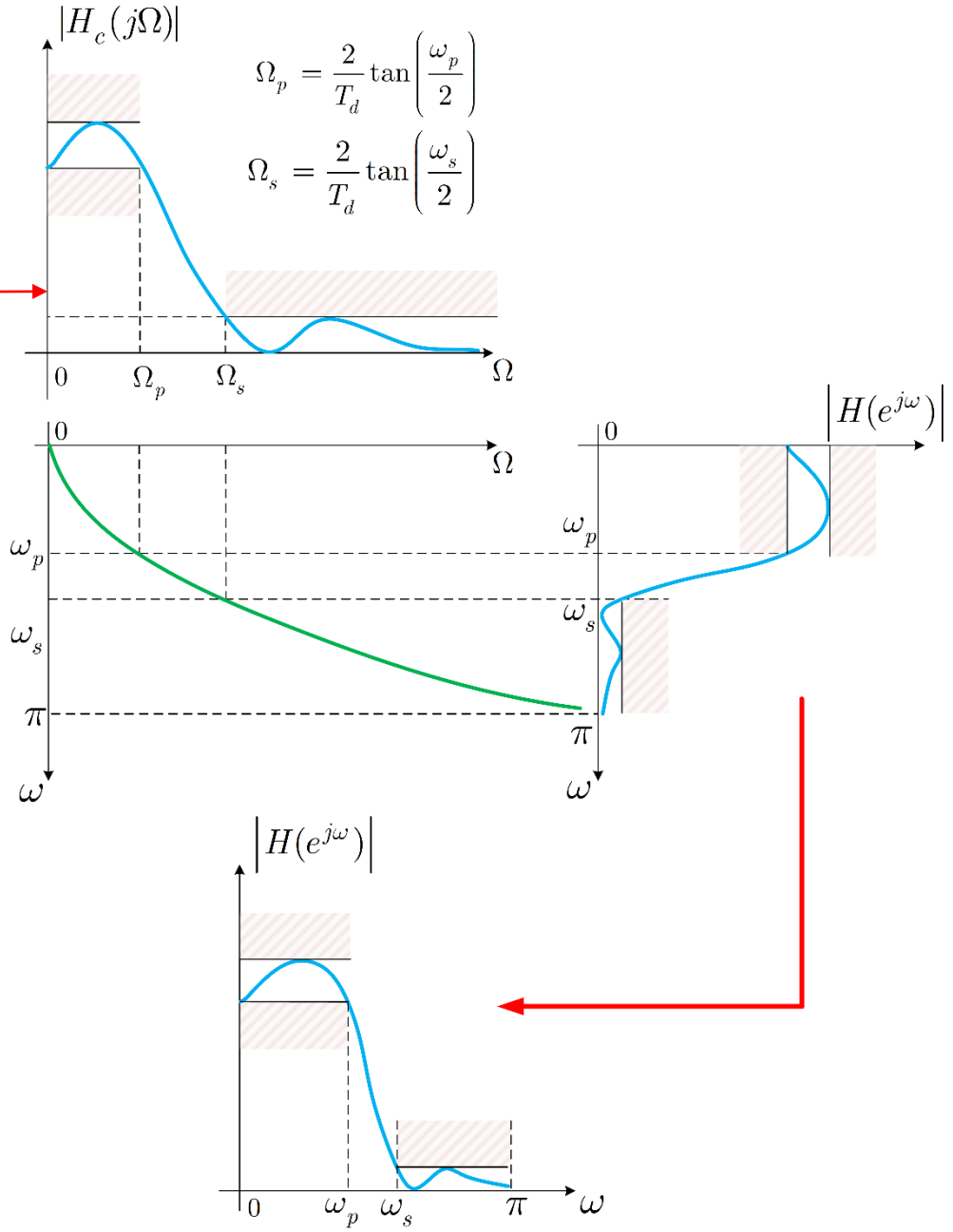
$$\omega = 2\arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

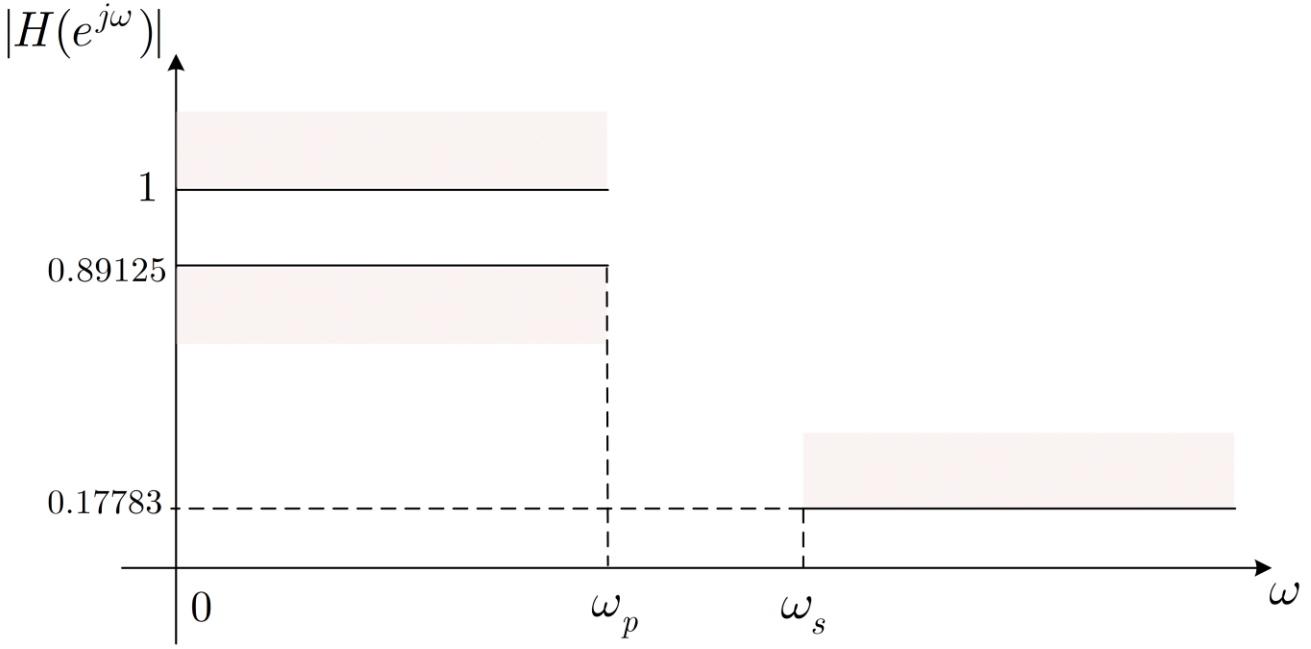
- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**

Προδιαγραφές ω_p, ω_s στο **διακριτό** χρόνο μετατρέπονται στο **συνεχή** χρόνο



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα σχεδίασης (ίδιο με την προηγ. μέθοδο)



- Ας ζητήσουμε $\omega_p = 0.2\pi, \omega_s = 0.3\pi$ και ας θεωρήσουμε $T_d = 1$
- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$
$$0.17783 \geq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \quad : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**

- Μετασχηματίζουμε τις προδιαγραφές μας από $\omega \to \Omega = 2\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$:

$$0.89125 \le |H(j\Omega)| \le 1 : 0 \le \Omega \le 2\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$0.17783 \ge |H(j\Omega)| \quad : 2\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \le \Omega \le 2\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

- Θέλουμε ξανά μια εξίσωση που να δέχεται τις προδιαγραφές μας!
  - Ας επιλέξουμε ξανά το φίλτρο Butterworth

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Εφαρμόζουμε προδιαγραφές:

$$1 + \left(\frac{2\tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2\mathrm{N}} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2\mathrm{N}} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**
- Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $N = 5.305 \rightarrow N = 6, \Omega_c = 0.766$
- Για να βρούμε ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα συνεχούς χρόνου, έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) \Rightarrow |H(s)|^2 \Big|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

- Οι πόλοι του συστήματος

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.766}\right)^{12}}$$

δίνονται ως

$$s_k = 0.766e^{j\frac{\pi}{12}(2k+5)}, \qquad k = 0,1, \dots, 11$$

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους οι οποίοι μας δίνουν ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(s)$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

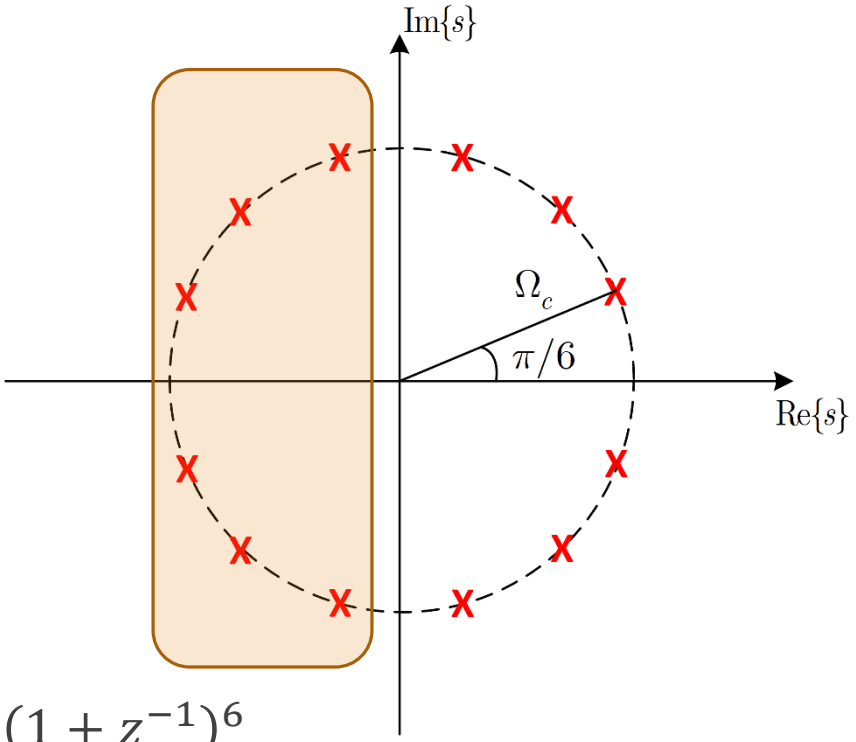
- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**
- Επιλέγω τους πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο
- Τότε το σύστημά μας θα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{\Omega_c^6}{(s^2 + 0.39s + 0.58)(s^2 + 1.08s + 0.58)(s^2 + 1.48s + 0.58)}$$

- Ο Bilinear Transformation δίνει:

$$s = \frac{2}{T_d}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow s = 2\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

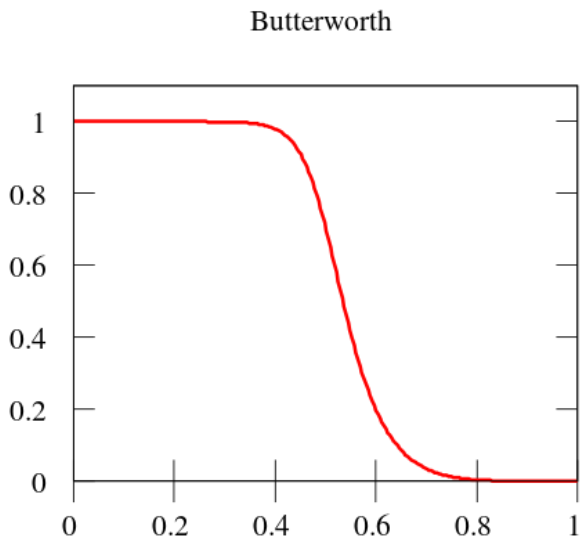
- Το σύστημά μας στο χώρο του μετασχ. Z θα είναι:

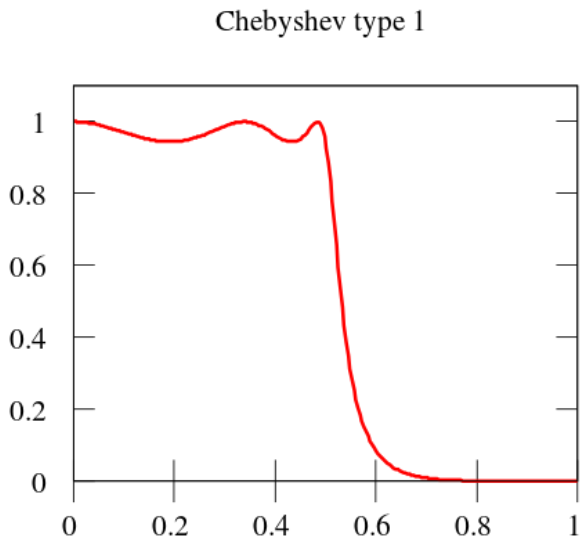


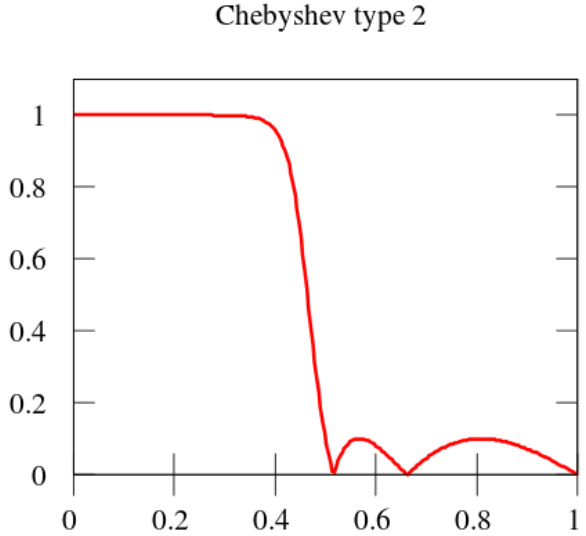
$$H(z) = \frac{0.000738(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.26z^{-1} + 0.72z^{-2})(1 - 1.01z^{-1} + 0.35z^{-2})(1 - 0.90z^{-1} + 0.21z^{-2})}$$

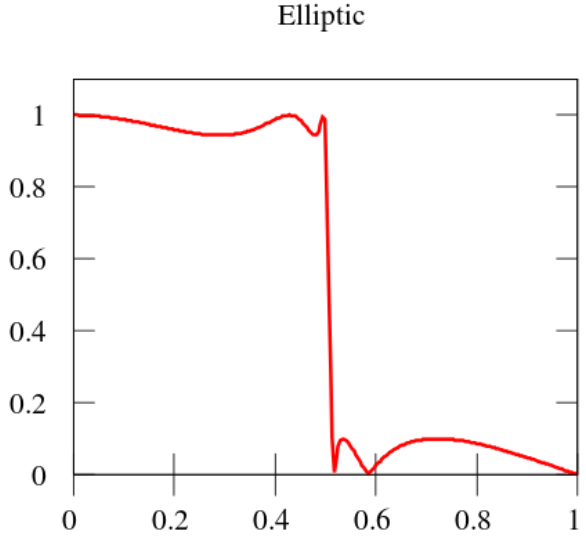
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Υπάρχουν πολλές εξισώσεις (φίλτρα) στις οποίες μπορούμε να θέσουμε τις προδιαγραφές μας
- Chebyshev (I, II)
- Elliptic
- Butterworth
- Bessel
- Optimum “L”
- Gaussian
- Hourglass
- Raised-cosine
- και πολλά άλλα! ☺









© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων - Σύνοψη**

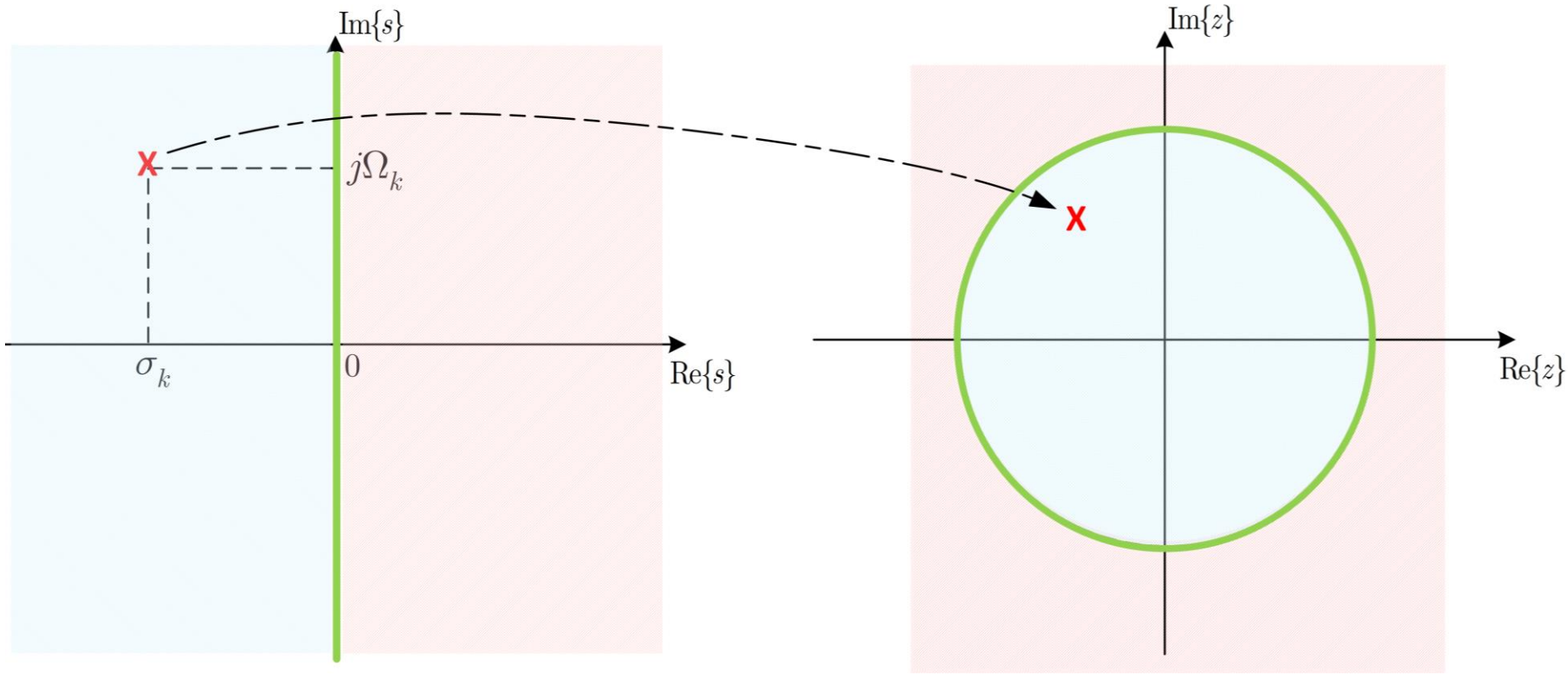
- Έχουμε δει ήδη δυο μεθόδους κατασκευής ψηφιακών φίλτρων IIR μέσω του πεδίου του συνεχούς χρόνου
  - ... και του μετασχ. Laplace

- Μέθοδος Impulse Invariance
  - a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς χρόνου
  - Γραμμική αντιστοιχία συχνότητας Ω σε ω
  - Η διαδικασία αυτή αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο $e^{s_k T_d}$ στο χώρο του μετασχ. Z

- Μέθοδος Bilinear Transformation
  - a.k.a «συμπίεση» του άξονα $0 \leq \Omega \leq +\infty$ στο $0 \leq \omega \leq \pi$!!
  - Μη γραμμική αντιστοιχία της αναλογικής με την ψηφιακή συχνότητα
  - Η διαδικασία αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο $\frac{1+\frac{T_d s_k}{2}}{1-\frac{T_d s_k}{2}}$ στο χώρο του μετασχ. Z

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

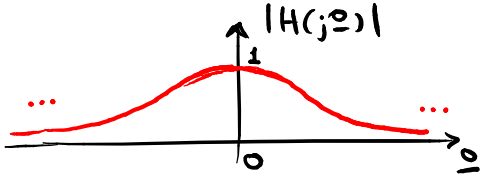
- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Σύνοψη**
- Και οι δυο μέθοδοι αντιστοιχίζουν πόλους από το μιγαδικό επίπεδο s στο μιγαδικό επίπεδο z



- Μήπως αντιστοιχίζονται με παρόμοιο τρόπο και τα μηδενικά?
- Γενικά, πως εφαρμόζονται οι μέθοδοι για ένα τυχαίο σύστημα στο χώρο του s?

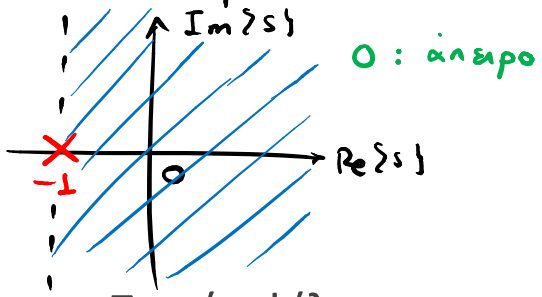
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το σύστημα



$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1$$

- $s+1=0 \Rightarrow s=-1$: πόλος
- $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0 \Rightarrow s=\infty$: μηδενικό



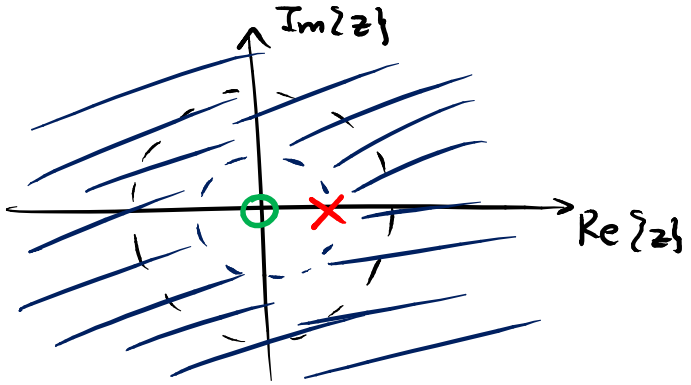
Εφαρμόστε τις μεθόδους που μάθατε για να βρείτε το μετασχ. Z ενός φίλτρου διακριτού χρόνου που το υλοποιεί

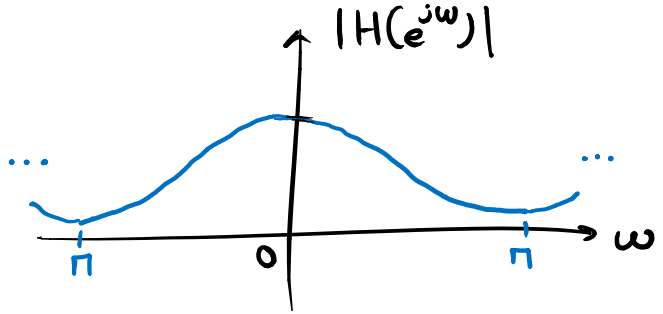
Μέθοδος Impulse Invariance: $\frac{A_k}{s-s_k} \longrightarrow \frac{A_k}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}}$

Οπότε $H(z) = \frac{1}{1-e^{-T_d} z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-T_d}}$

Πόλος : $z = \left(\frac{1}{e}\right)^{T_d}$

Μηδενικό : $z = 0$

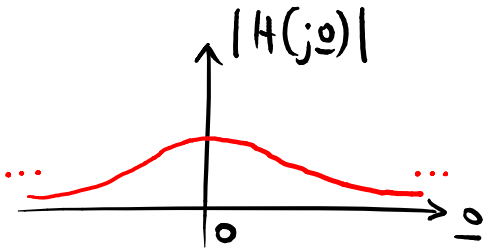




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων**
- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$



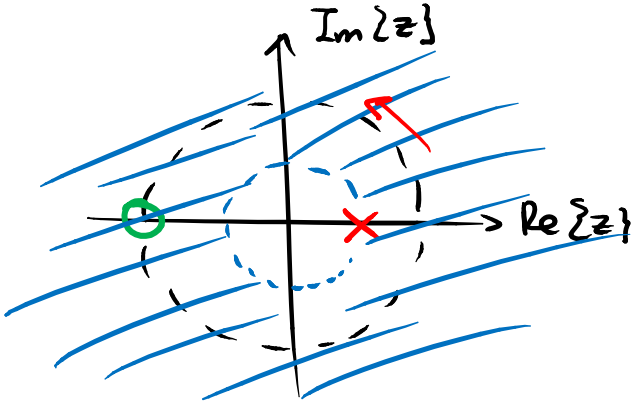
Bilinear Transformation:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{\frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \dots$$

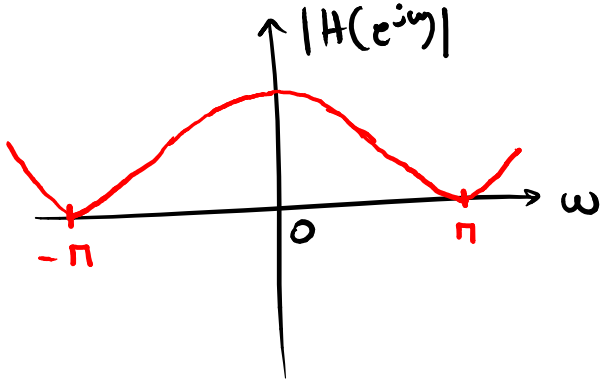
$$= \frac{T_d(1+z^{-1})}{(2+T_d)+(T_d-2)z^{-1}} = \frac{T_d(z+1)}{(2+T_d)z+(T_d-2)}$$

→ Πόλος: $z = \frac{2-T_d}{2+T_d}$

Μηδενικό: $z = -1$

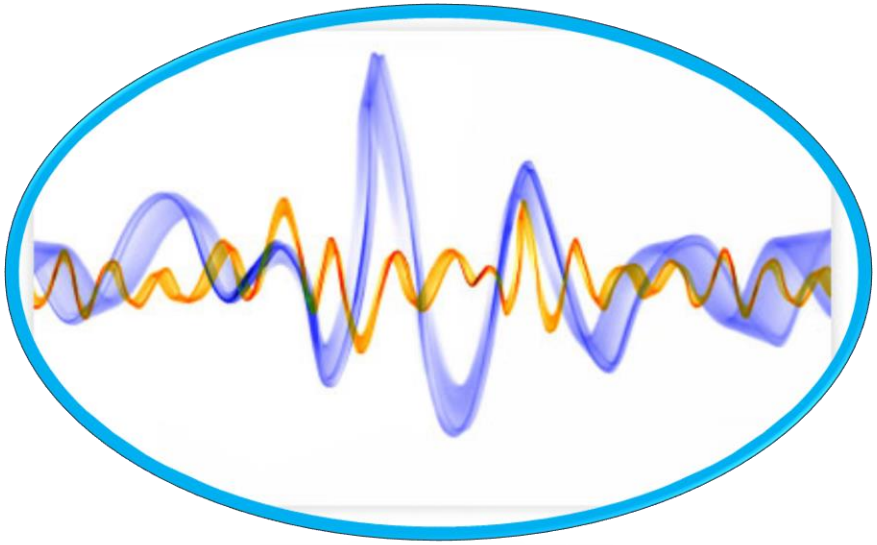


~



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

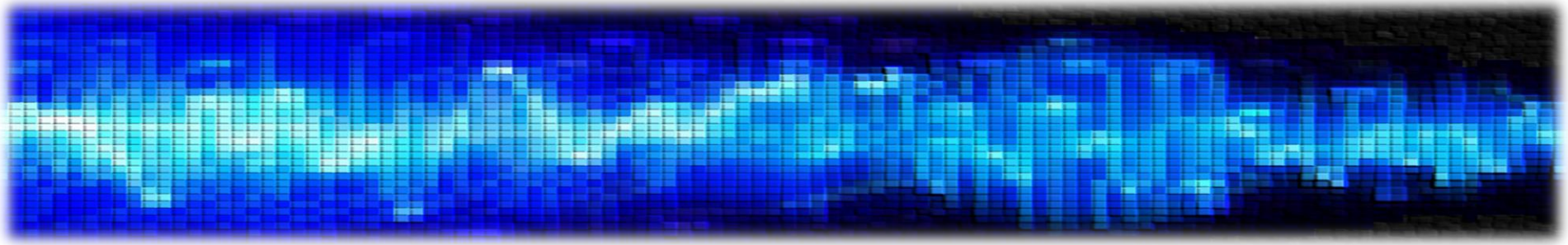
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 22Η



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Είδαμε λοιπόν ότι υπάρχει μεγάλη γκάμα φίλτρων που υλοποιούνται ως IIR φίλτρα διακριτού χρόνου
  - Βασιζόμαστε ιδιαίτερα στις γνώσεις μας από το συνεχή χρόνο
- Αντιθέτως, για τα FIR φίλτρα βασιζόμαστε σχεδόν αποκλειστικά στο διακριτό χρόνο!
- Αυτό σημαίνει ότι στη σχεδίαση FIR φίλτρων προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την κατάλληλη απόκριση σε συχνότητα κατευθείαν στο διακριτό χρόνο
- Η πιο απλή μέθοδος σχεδίασης ονομάζεται η ***μέθοδος του παραθύρου***
- Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις σχέσεις

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \leftrightarrow h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

για μια ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$

- Τα ιδανικά φίλτρα $h_d[n]$ ξέρετε ότι έχουν άπειρης διάρκειας κρουστική απόκριση και είναι και μη αιτιατά!
- Μπορούμε να πάρουμε μια καλή προσέγγισή τους «κόβοντας» σε μικρότερο τμήμα την ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

- Το νέο σύστημα θα έχει κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

- Δηλ. έχουμε κρατήσει $M+1$ δείγματα από την ιδανική κρουστική απόκριση

- Το παραπάνω μπορεί να ιδωθεί ως ο πολλαπλασιασμός της ιδανικής κρουστικής απόκρισης με ένα τετραγωνικό παλμό («παράθυρο») διάρκειας $M+1$, δηλ.

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

με

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

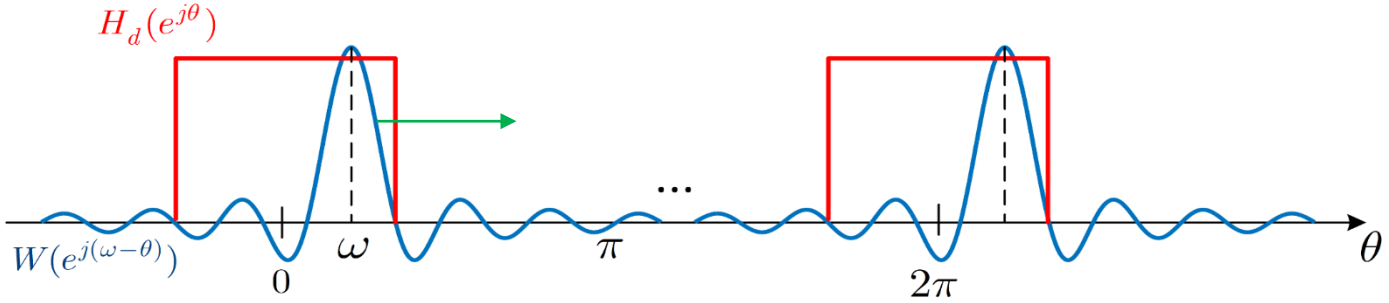
- Στο χώρο του Fourier το γινόμενο γίνεται συνέλιξη:

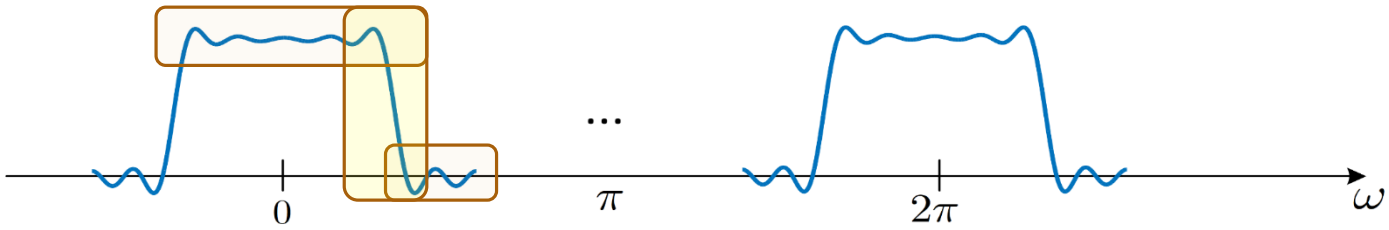
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier $H_d(e^{j\omega})$ του ιδανικού φίλτρου $h_d[n]$ συνελίσσεται ☺ στη συχνότητα (περιοδικά) με το μετασχ. Fourier $W(e^{j\omega})$ του παραθύρου $w[n]$

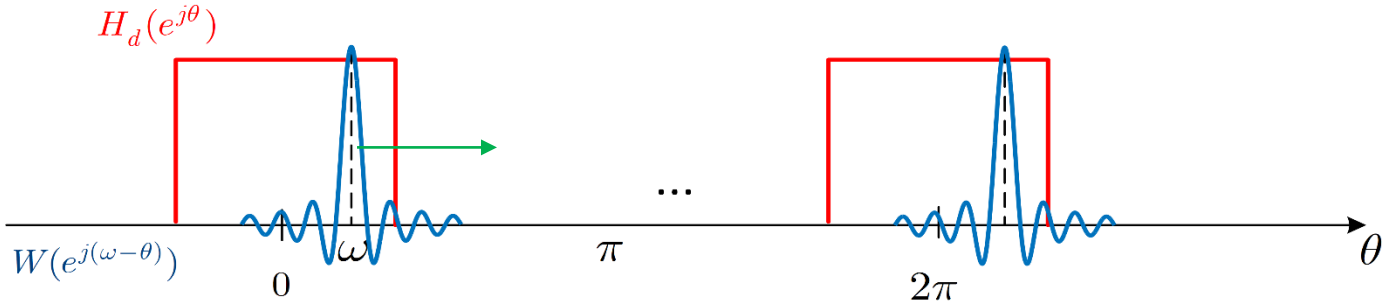
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

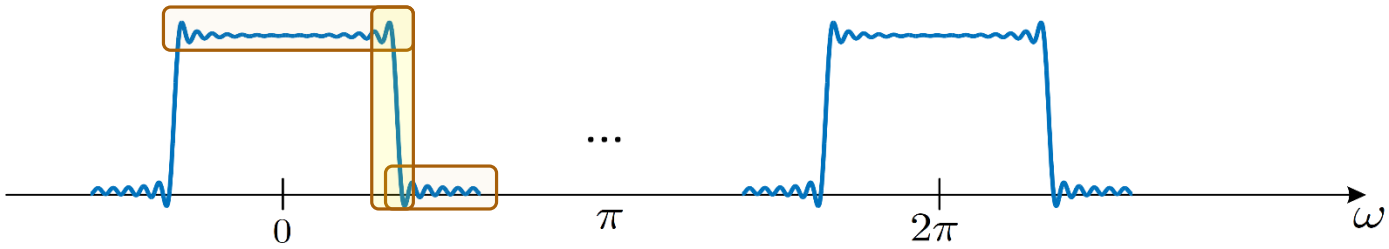
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων





Ένα μικρό σε διάρκεια τετραγωνικό παράθυρο στο χρόνο θα έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα (μπλε καμπύλη)





Ένα μεγαλύτερο σε διάρκεια τετραγωνικό παράθυρο στο χρόνο θα έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα (μπλε καμπύλη)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

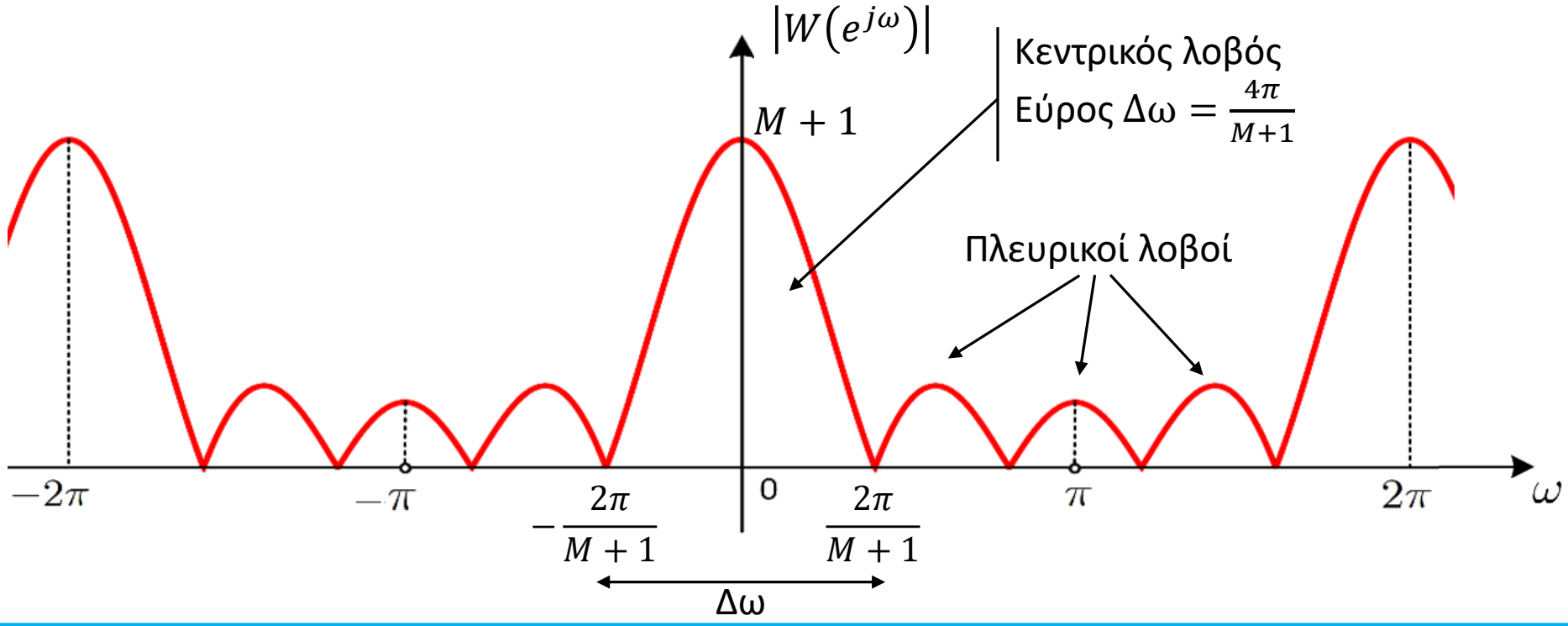
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Ιδανικά, αν $w[n] = 1, \forall n$ τότε ο μετ. Fourier του θα ήταν $W\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\delta(\omega)$
- Θα θέλαμε λοιπόν το επιλεχθέν παράθυρο $w[n]$ να πλησιάζει όσο γίνεται το ιδανικό
- Σε αυτήν την περίπτωση, ο μετασχ. Fourier του θα πλησιάζει όλο και πιο πολύ στη συνάρτηση Δέλτα $2\pi\delta(\omega)$
- Άρα θέλουμε ένα παράθυρο όσο το δυνατόν μικρότερο σε διάρκεια στο χρόνο για να μην έχουμε πολλές πράξεις κατά την υλοποίηση…
- … και ταυτόχρονα να έχει όσο γίνεται στενότερο φάσμα, δηλ. να έχει συγκεντρωμένο όλο το φασματικό περιεχόμενο γύρω από μια συχνότητα
  - Γιατί αυτό? Ώστε η συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας να αναπαράγει όσο γίνεται πιστότερα την επιθυμητή απόκριση συχνότητας
- Όπως καταλαβαίνετε, αυτές είναι αντικρουόμενες προδιαγραφές! ☺

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Ας δούμε λίγο το τετραγωνικό παράθυρο
- Γνωρίζουμε ότι

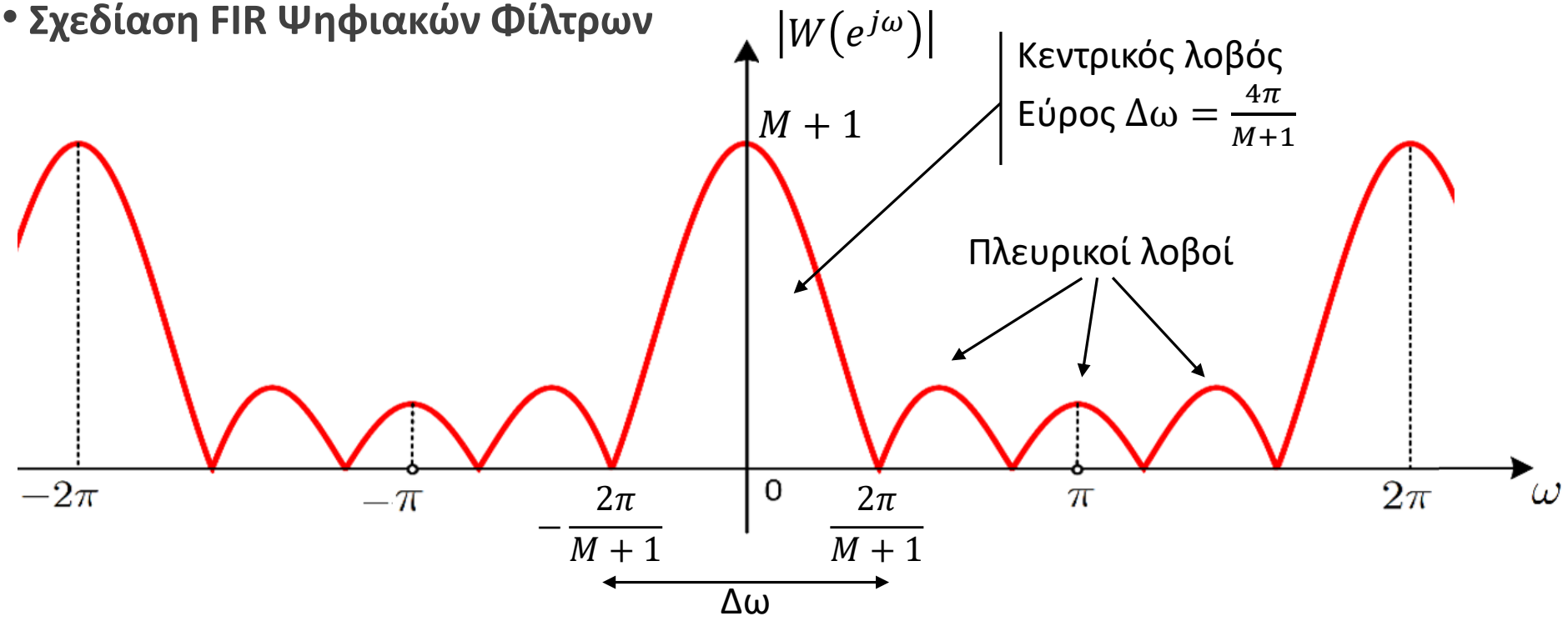
$$W(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

- Φάσμα πλάτους



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

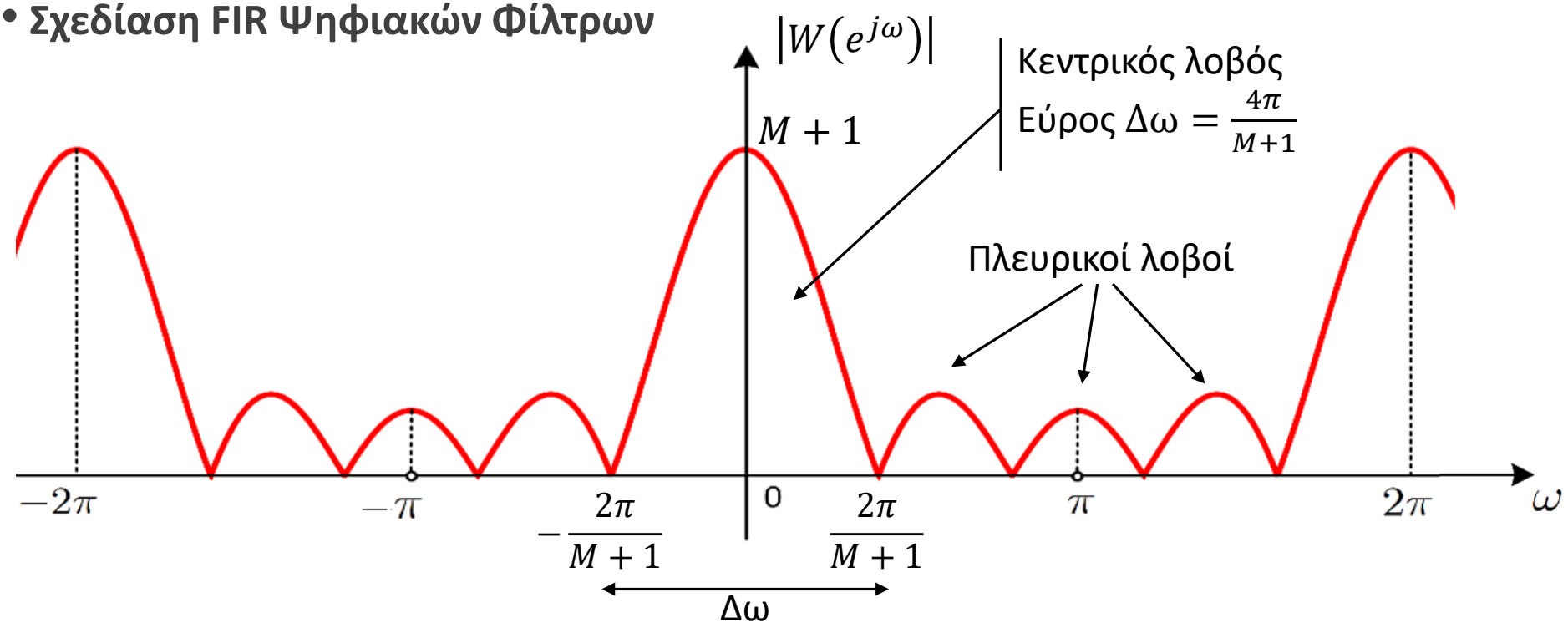
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



- Όταν το M αυξάνει, το «ύψος» του κεντρικού λοβού μεγαλώνει και το εύρος του μικραίνει
- Οι πλευρικοί λοβοί έχουν «ύψος» που δεν εξαρτάται ουσιαστικά από το M αλλά από το σχήμα του παραθύρου
- Όμως το εμβαδό κάτω από τους λοβούς παραμένει σταθερό με την αύξηση του M!
- Η συνέλιξη $\frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$ θα παράγει ισχυρές ταλαντώσεις κάθε φορά που οι πλευρικοί λοβοί περνούν από την ασυνέχεια του $H_d(e^{j\omega})$!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



- Αν όμως χρησιμοποιήσουμε κάποιο παράθυρο που δεν είναι τόσο «απότομο» στα άκρα του όπως το τετραγωνικό, τότε μπορούμε να μειώσουμε αυτά τα φαινόμενα
  - Οι ασυνέχειες του τετραγωνικού παραθύρου χρειάζονται υψηλές συχνότητες για να «συντεθούν»
- Τέτοια παράθυρα «σβήνουν» σταδιακά προς το μηδέν στα άκρα τους στο χρόνο (περιορίζουν την ασυνέχεια)
- Κόστος? «Φαρδύτερος» κεντρικός λοβός ↔ «μακρύτερη» μετάβαση γύρω από την ασυνέχεια του ιδανικού φίλτρου
- Κέρδος? Χαμηλότεροι πλευρικοί λοβοί ↔ μικρότερες ταλαντώσεις γύρω απ' την ασυνέχεια
- Ας δούμε μερικά τέτοια γνωστά παράθυρα…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

- Τετραγωνικό

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Τριγωνικό (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{2n}{M}, & 0 \le n \le M/2 \\ 2 - \dfrac{2n}{M}, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hamming

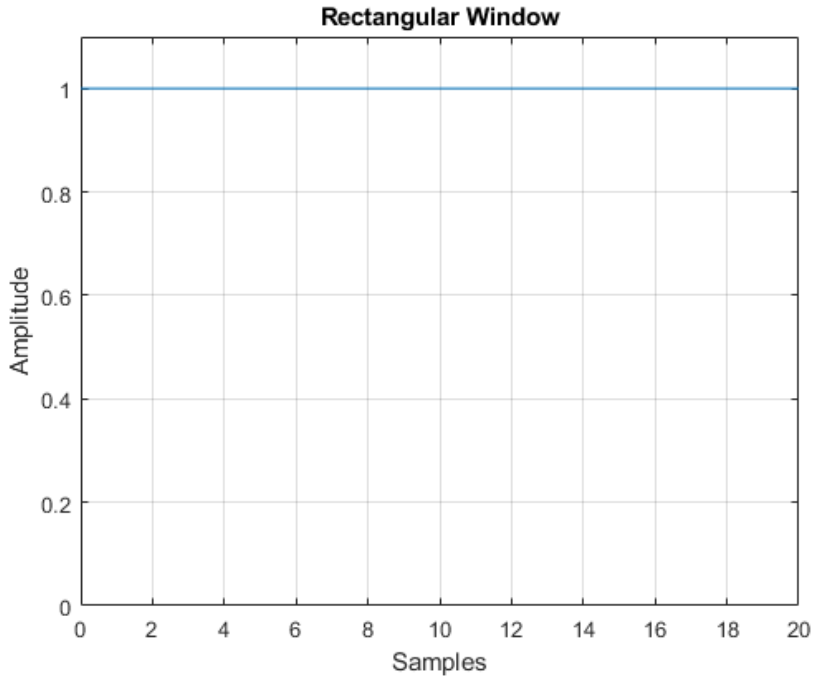
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

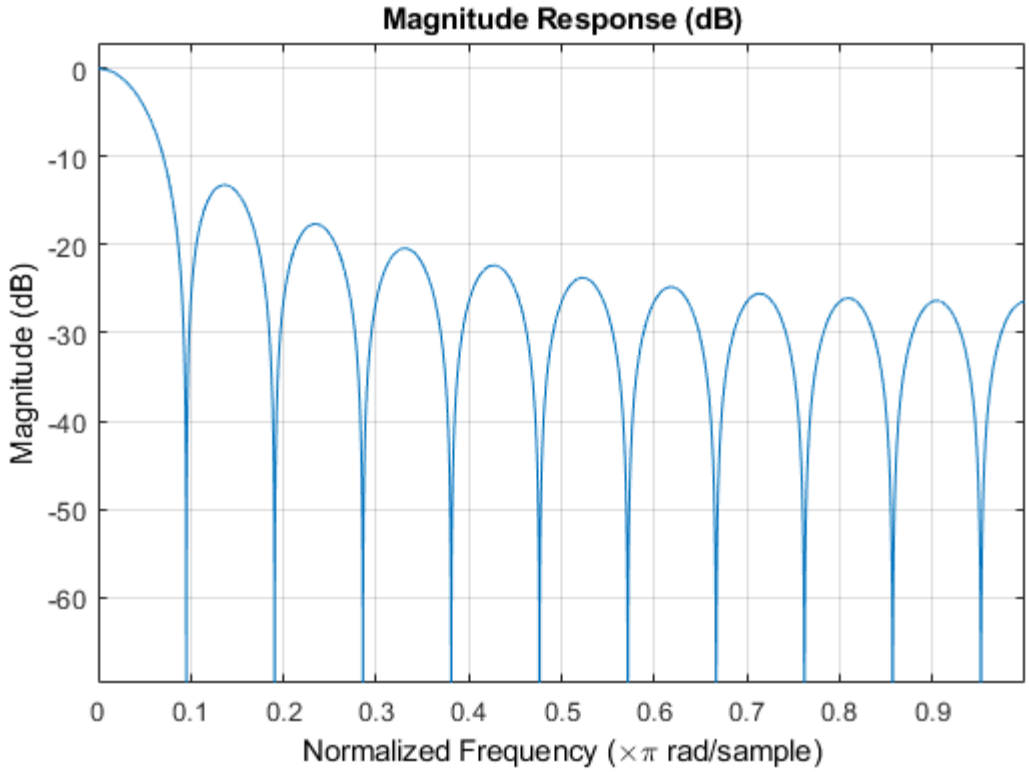
- Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) + 0.08\cos\left(\dfrac{4\pi n}{M}\right), & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

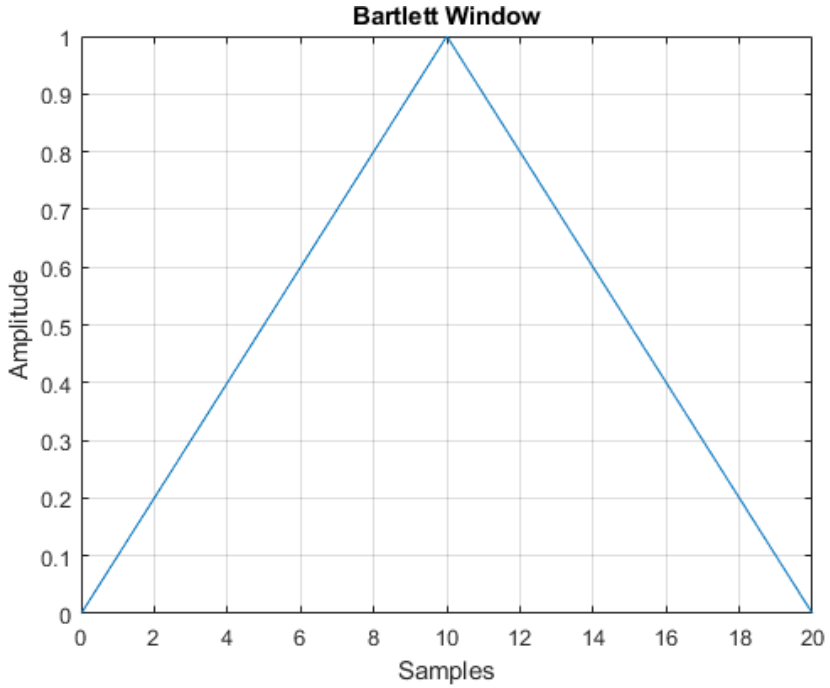
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Τετραγωνικό παράθυρο

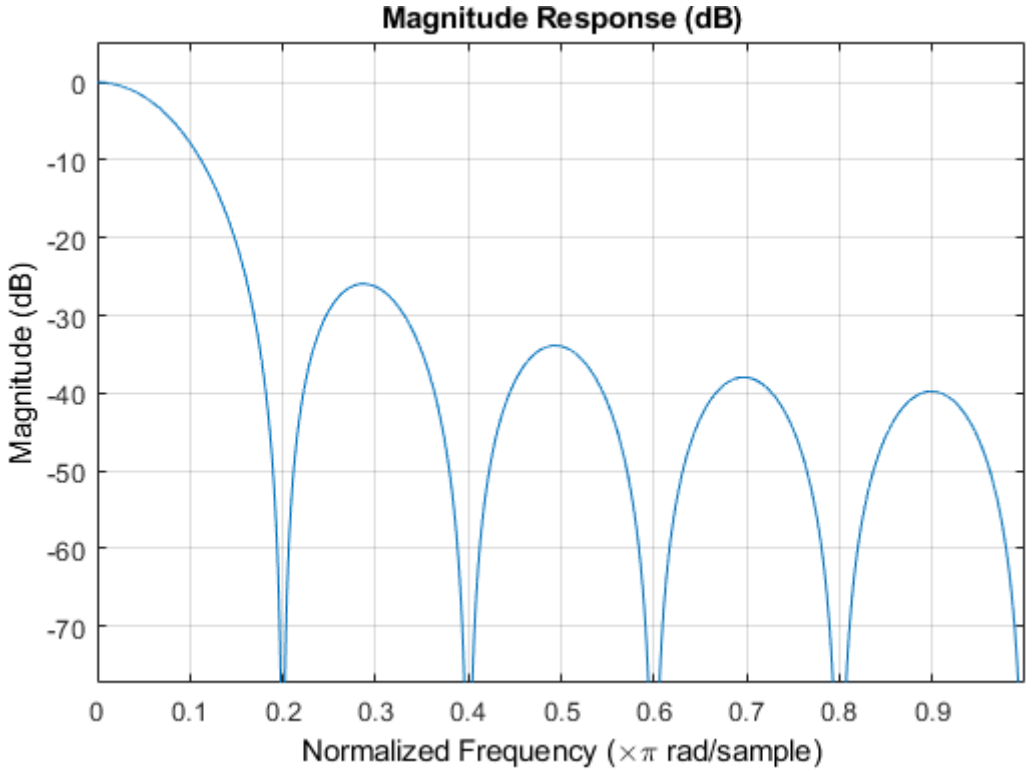




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

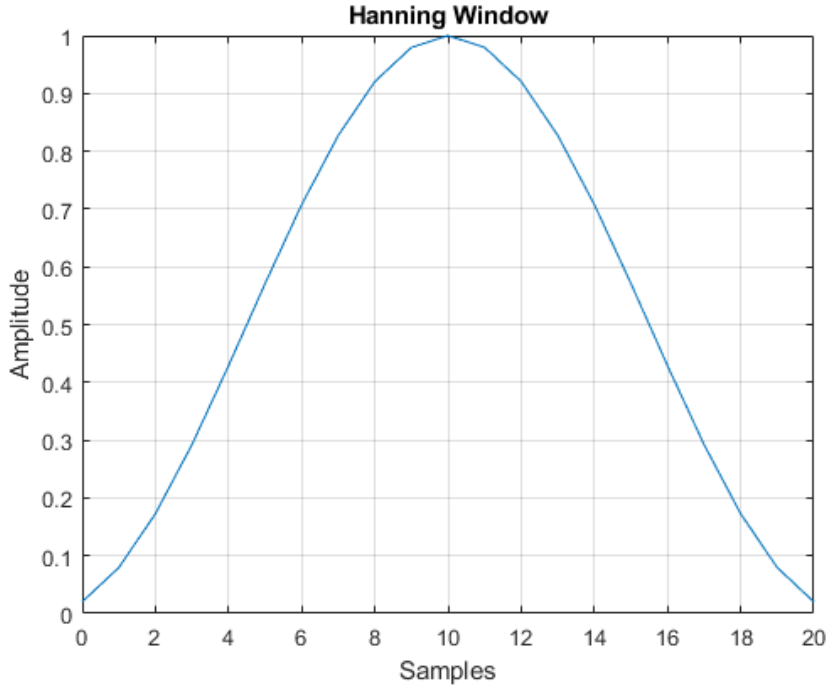
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Τριγωνικό (Bartlett) παράθυρο

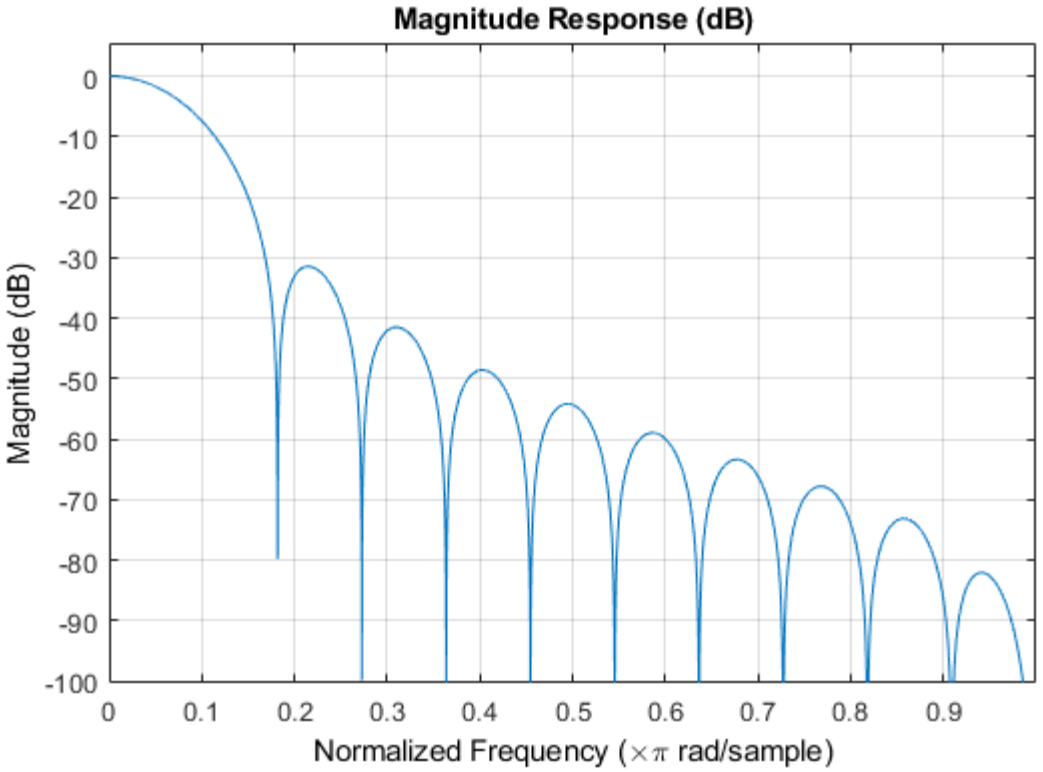




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

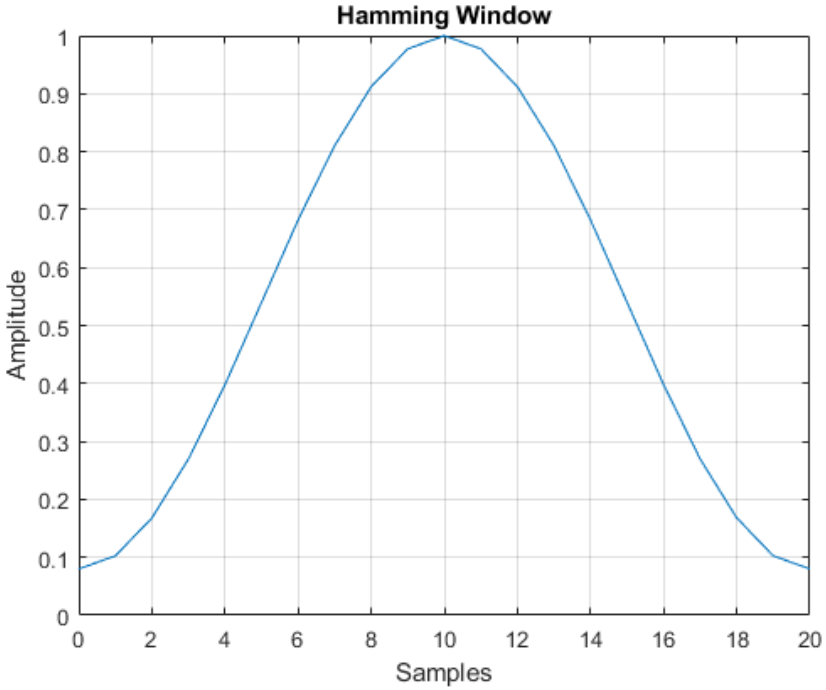
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Παράθυρο Hanning

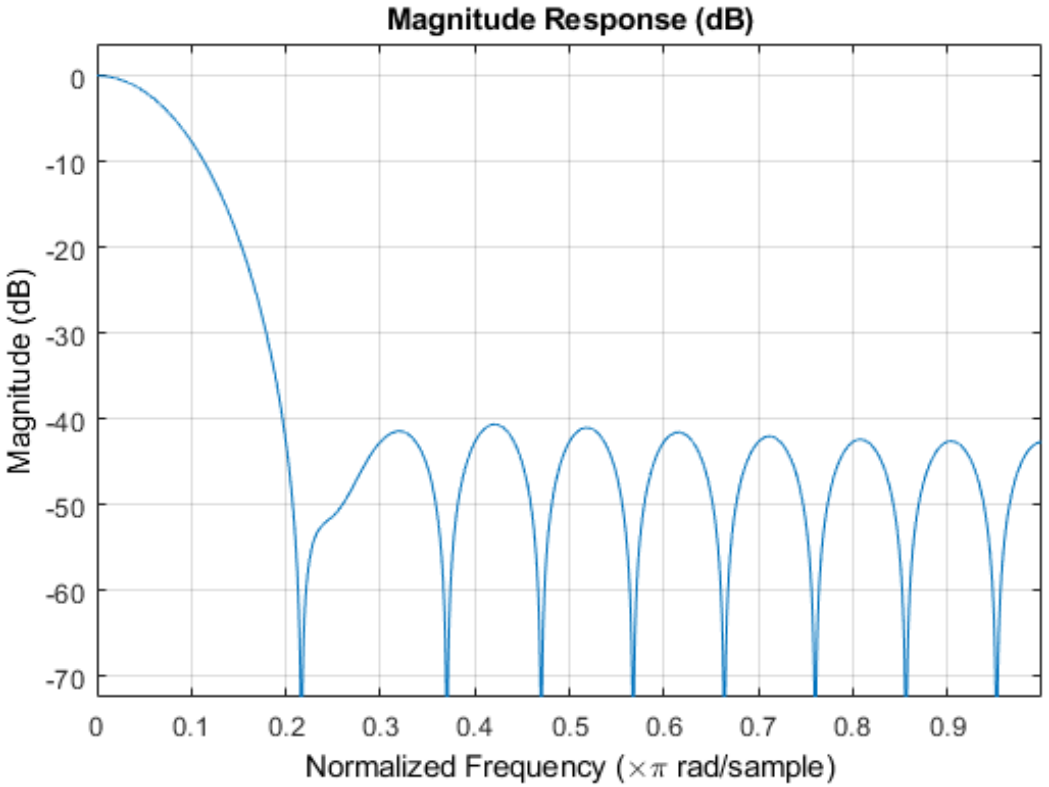




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

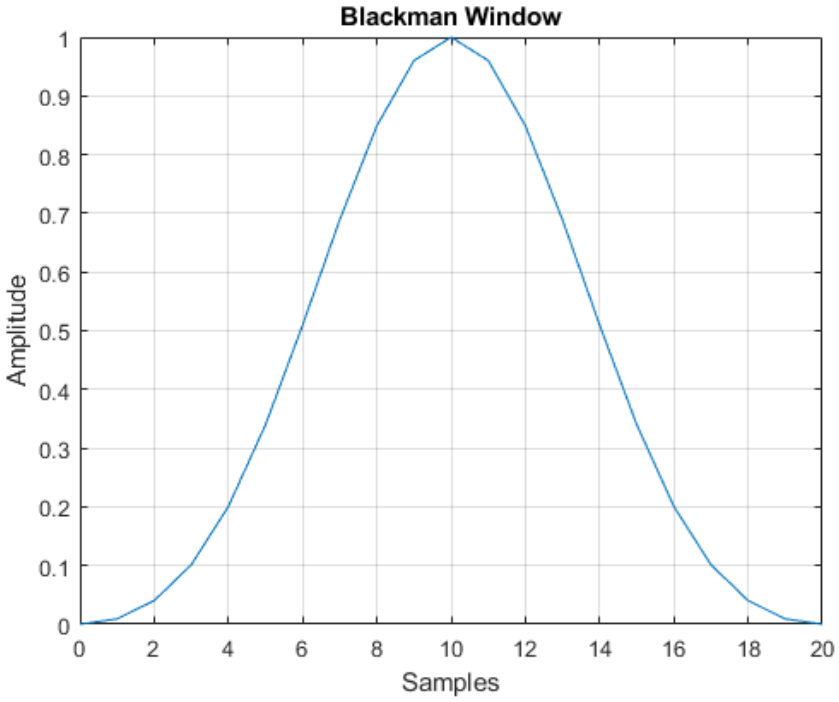
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Παράθυρο Hamming

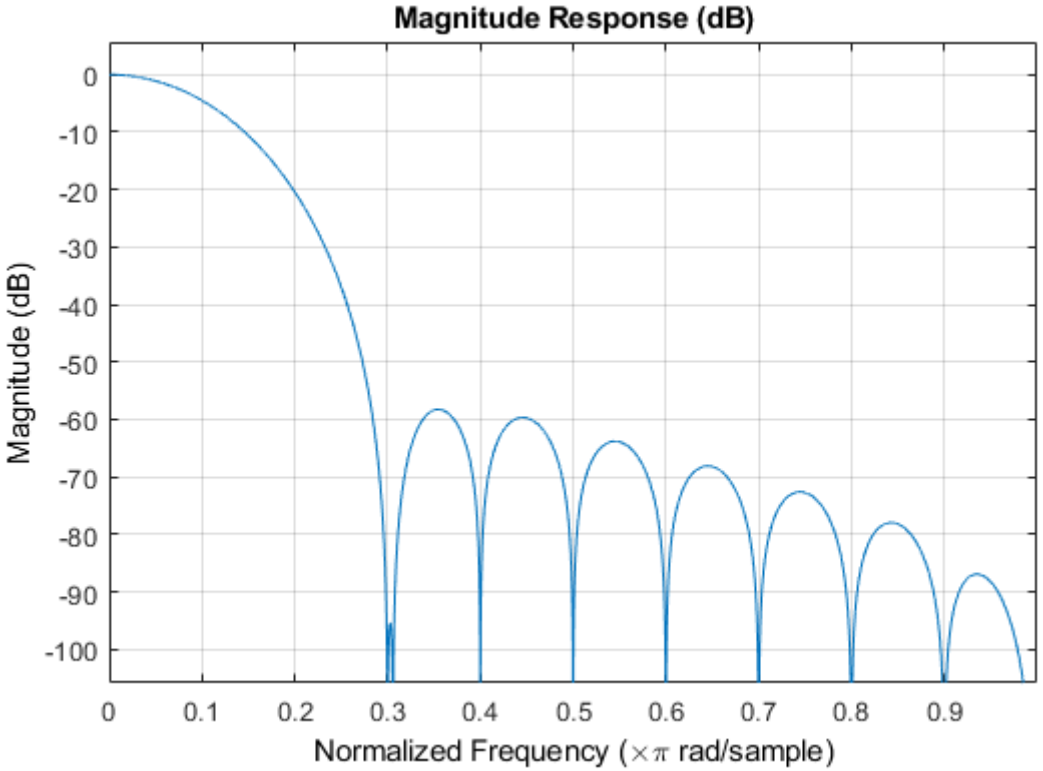




© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Παράθυρο Blackman





© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Ιδιότητες Παραθύρων

Τύπος Παραθύρου	Σχετικό πλάτος πλευρικών λοβών	Εύρος κεντρικού λοβού (προσέγγιση)
Τετραγωνικό	-13 dB	$\frac{4\pi}{M+1}$
Τριγωνικό (Bartlett)	-25 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Blackman	-57 dB	$\frac{12\pi}{M}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Μιλήσαμε πολύ για τα συστήματα γραμμικής φάσης
- Όλα τα προηγούμενα παράθυρα ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση
- Προσέξτε ότι σε όλα ισχύει

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \le n \le M \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases} \leftrightarrow W(e^{j\omega}) = \underbrace{A_{even}(e^{j\omega})}_{\in \Re} e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

- Έστω ότι η επιθυμητή κρουστική απόκριση είναι γραμμικής φάσης, δηλ.

$$h_d[M-n] = h_d[n]$$

- Στο χώρο του Fourier

$$H_d(e^{j\omega}) = \underbrace{H_{even}(e^{j\omega})}_{\in \Re} e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

- Αν το παράθυρο είναι συμμετρικό (αντίστοιχα για αντισυμμετρικό), τότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{even}(e^{j\theta}) A_{even}(e^{j(\omega-\theta)})\, e^{-\frac{j\theta M}{2}} e^{-\frac{j(\omega-\theta)M}{2}} d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{H_{even}(e^{j\theta}) A_{even}(e^{j(\omega-\theta)})}_{\in \Re} d\theta\right) e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

- Έχετε καταλάβει ότι υπάρχει ένα trade-off μεταξύ εύρους κεντρικού λοβού και περιοχής πλευρικών λοβών

- Το trade-off αυτό μπορεί να ποσοτικοποιηθεί αναζητώντας το παράθυρο που είναι "βέλτιστα" συγκεντρωμένο γύρω από τη συχνότητα $\omega = 0$

- Ο Kaiser βρήκε μια σχεδόν βέλτιστη λύση που υλοποιείται από μια γνωστή και εύκολη στην υλοποίηση συνάρτηση
  - Την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel $I_0(x)$, μηδενικής τάξης και 1ου είδους

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos(t)}dt$$

- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left[\dfrac{n-\frac{M}{2}}{\frac{M}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

με $I_0(.)$ την περίφημη συνάρτηση Bessel που αναφέρθηκε

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left[\dfrac{n-\frac{M}{2}}{\frac{M}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

- Δυο παράμετροι: μήκος σήματος παραθύρου $M+1$, παράμετρος σχήματος β

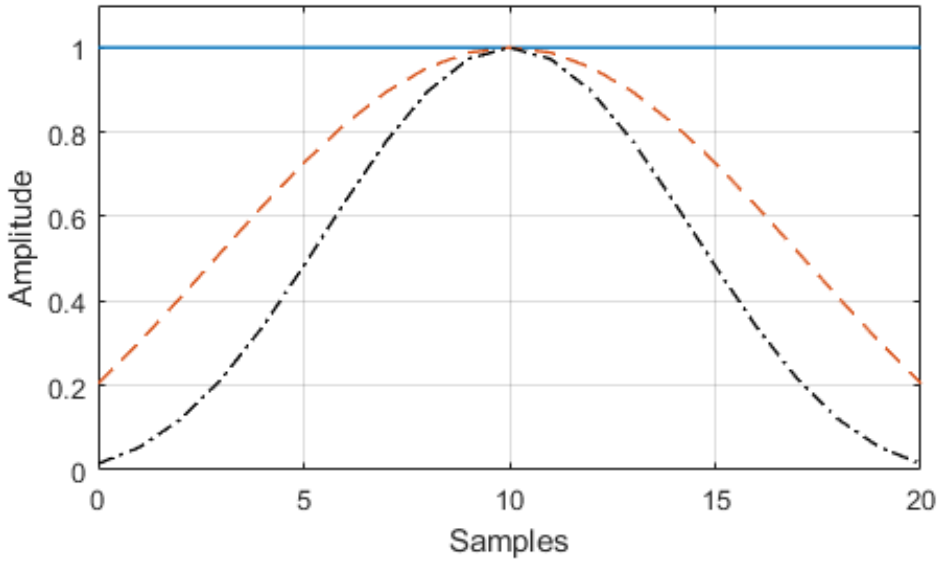
- «Παίζοντας» με τις τιμές των παραμέτρων μπορούμε να ελέγξουμε το εύρος του λοβού και το πλάτος των πλευρικών λοβών

- Ας δούμε μερικές τιμές του παραθύρου

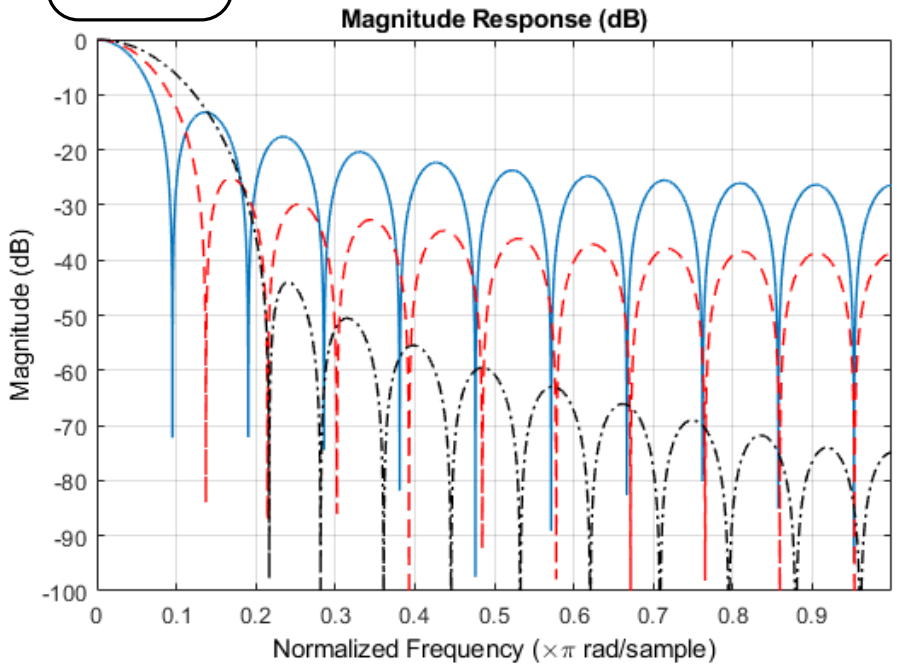
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

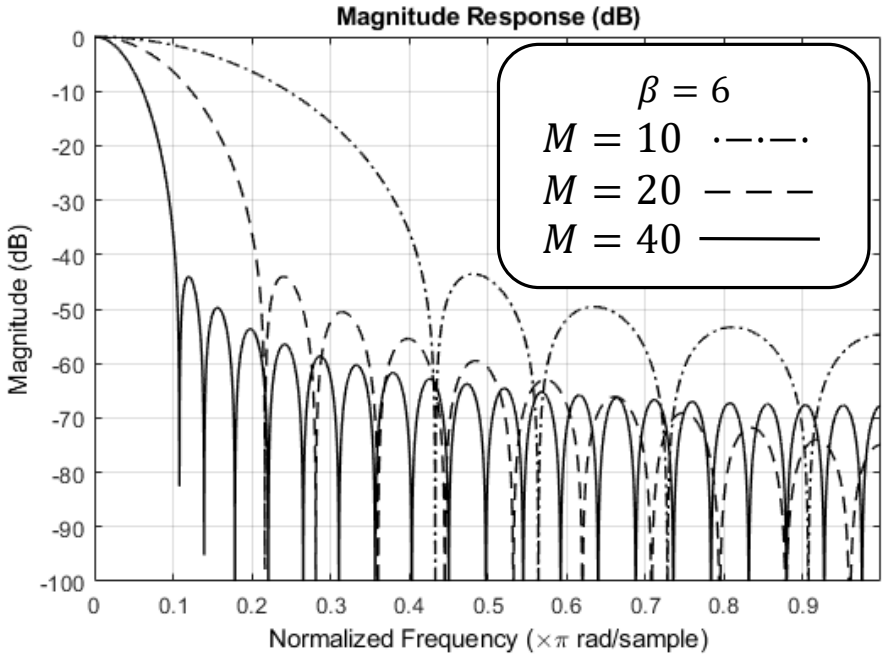
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

$\beta = 0$
$\beta = 3$
$\beta = 6$



$\beta = 0$
$\beta = 3$
$\beta = 6$



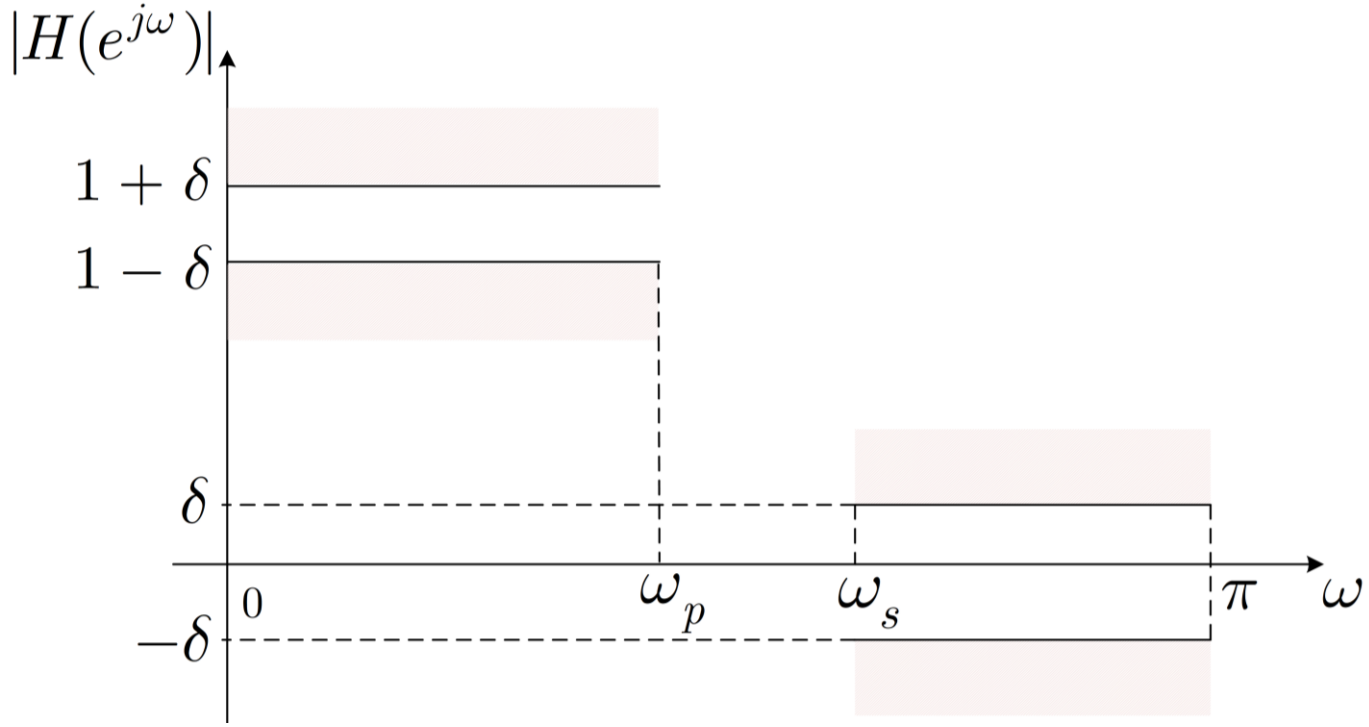


© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

- Ο Kaiser έκανε εκτενή πειράματα και κατέληξε σε κλειστούς τύπους που επιτρέπουν στο σχεδιαστή να προβλέψει τις τιμές των M, β που απαιτούνται για συγκεκριμένες προδιαγραφές ενός φίλτρου επιλογής συχνοτήτων

- Έστω δ η προδιαγραφή του παρακάτω χαμηλοπερατού φίλτρου (δεδομένη)

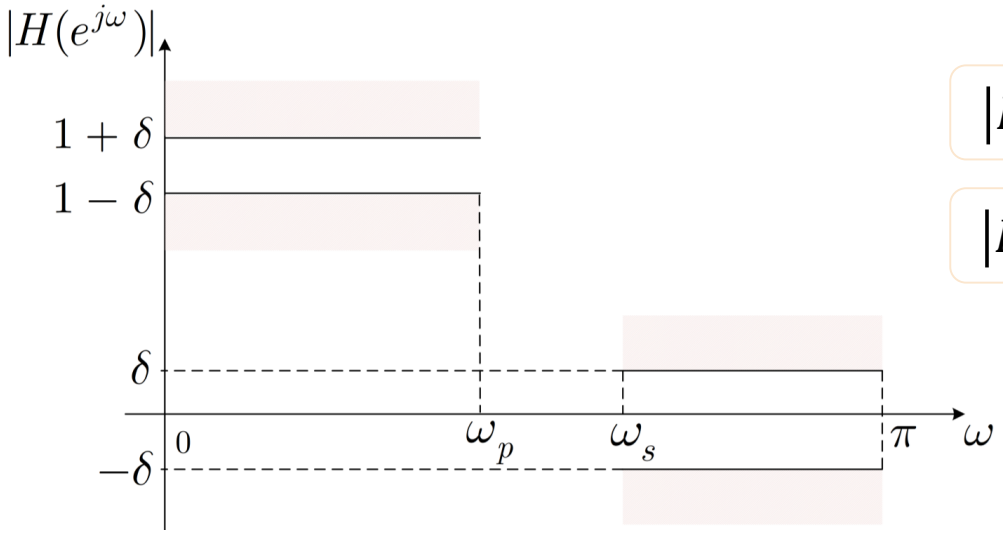


- Τότε η ω_p ορίζεται ως η μέγιστη συχνότητα που ικανοποιεί: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \geq 1-\delta$

- Τότε η ω_s ορίζεται ως η μικρότερη συχνότητα που ικανοποιεί: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq \delta$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



$$|H(e^{j\omega})| \geq 1-\delta$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta$$

- Το εύρος ζώνης μετάβασης είναι $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$
- Αν $A = -20\log_{10}\delta$, τότε ο Kaiser βρήκε την τιμή του β για δεδομένες τιμές του A

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

- Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα σχεδίασης lowpass φίλτρου γραμμικής φάσης με συχνότητα αποκοπής $\frac{\pi}{2}$ με παράθυρο Kaiser
- **Βήμα 1**: Ορίζουμε τις προδιαγραφές

$$\omega_p = 0.4\pi, \qquad \omega_s = 0.6\pi, \qquad \delta = 0.001$$

- **Βήμα 2**: Βρίσκουμε τη συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \frac{(\omega_p + \omega_s)}{2} = 0.5\pi$
- **Βήμα 3**: $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi \ , \ A = -20\log_{10}\delta = 60$
- **Βήμα 4**: $\beta = 0.1102(A - 8.7) = 5.653$
- **Βήμα 5**: Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega} = 36.21 \rightarrow M = 37$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- **Βήμα 6**: Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου μας, πολλαπλασιάζοντας το παράθυρο με την κρουστική απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου γραμμικής φάσης
- Μπορείτε να δείξετε ότι το ιδανικό φίλτρο γραμμικής φάσης της μορφής

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-\frac{j\omega M}{2}}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

έχει κρουστική απόκριση

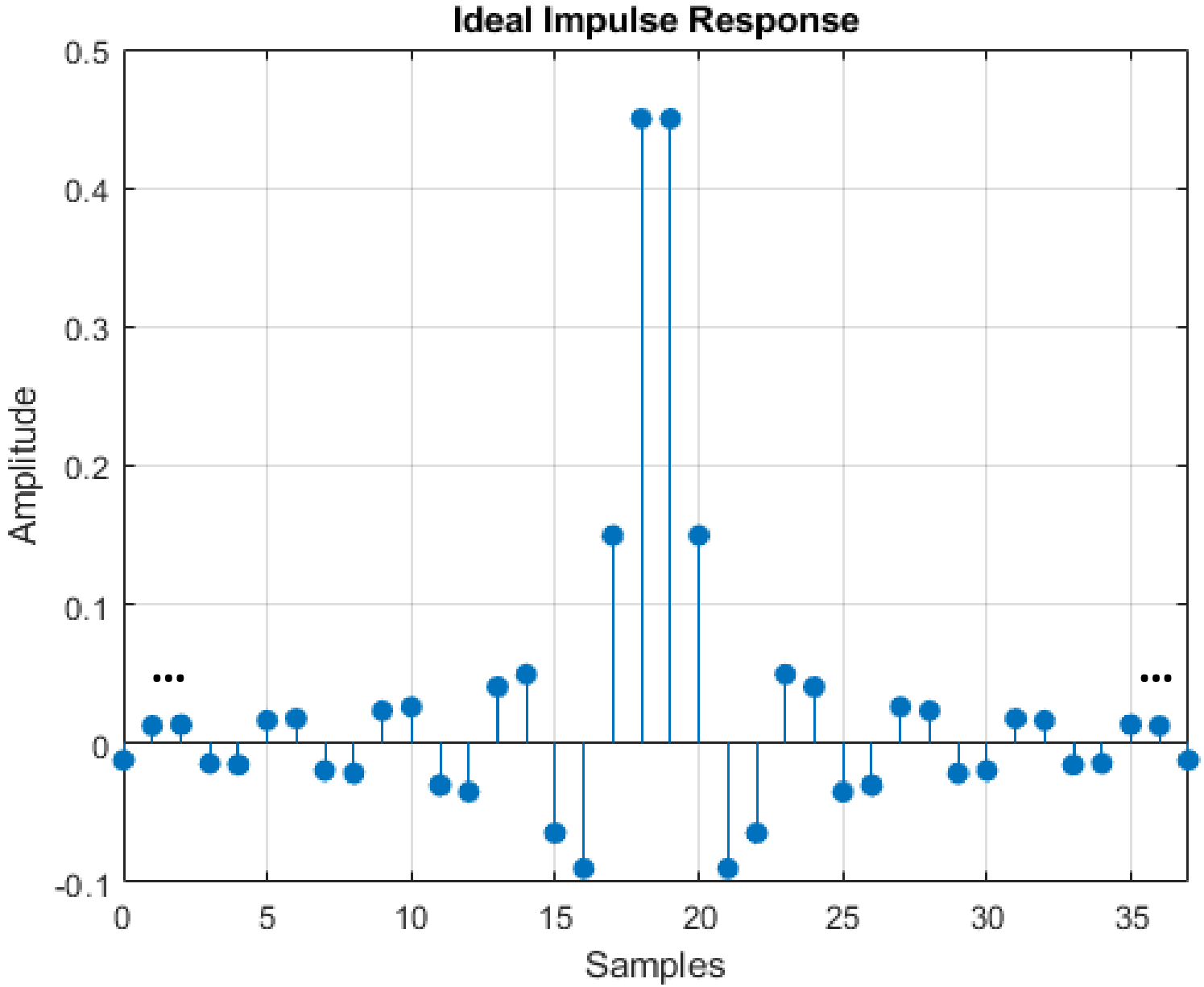
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\left(\omega_c\left(n-\frac{M}{2}\right)\right)}{\pi\left(n-\frac{M}{2}\right)}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Άρα

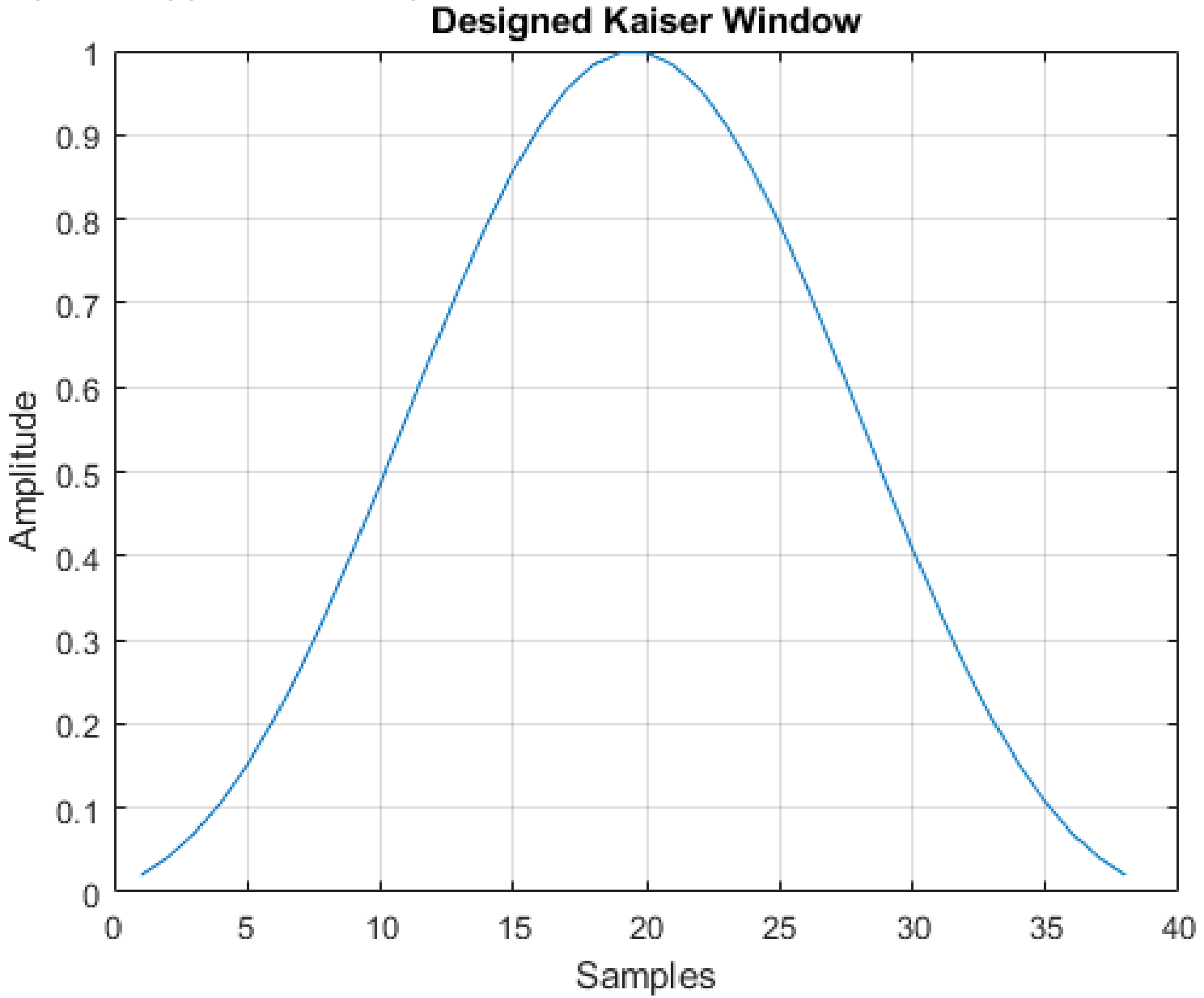
$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(0.5\pi\left(n-\frac{37}{2}\right)\right)}{\pi\left(n-\frac{37}{2}\right)} \dfrac{I_0\left(5.653\sqrt{1-\left[\frac{n-\frac{37}{2}}{\frac{37}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(5.653)}, & 0 \le n \le 37 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

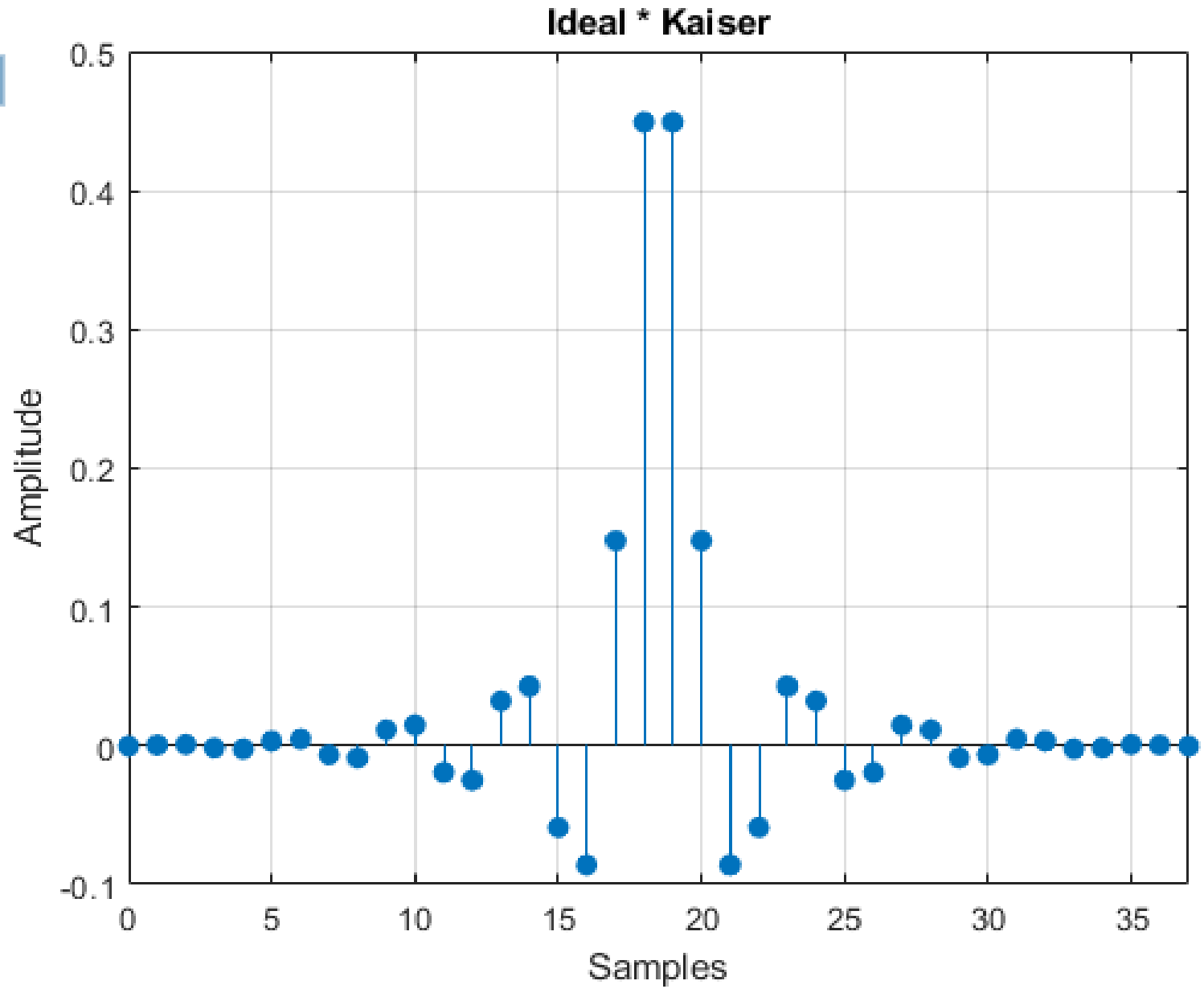


- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



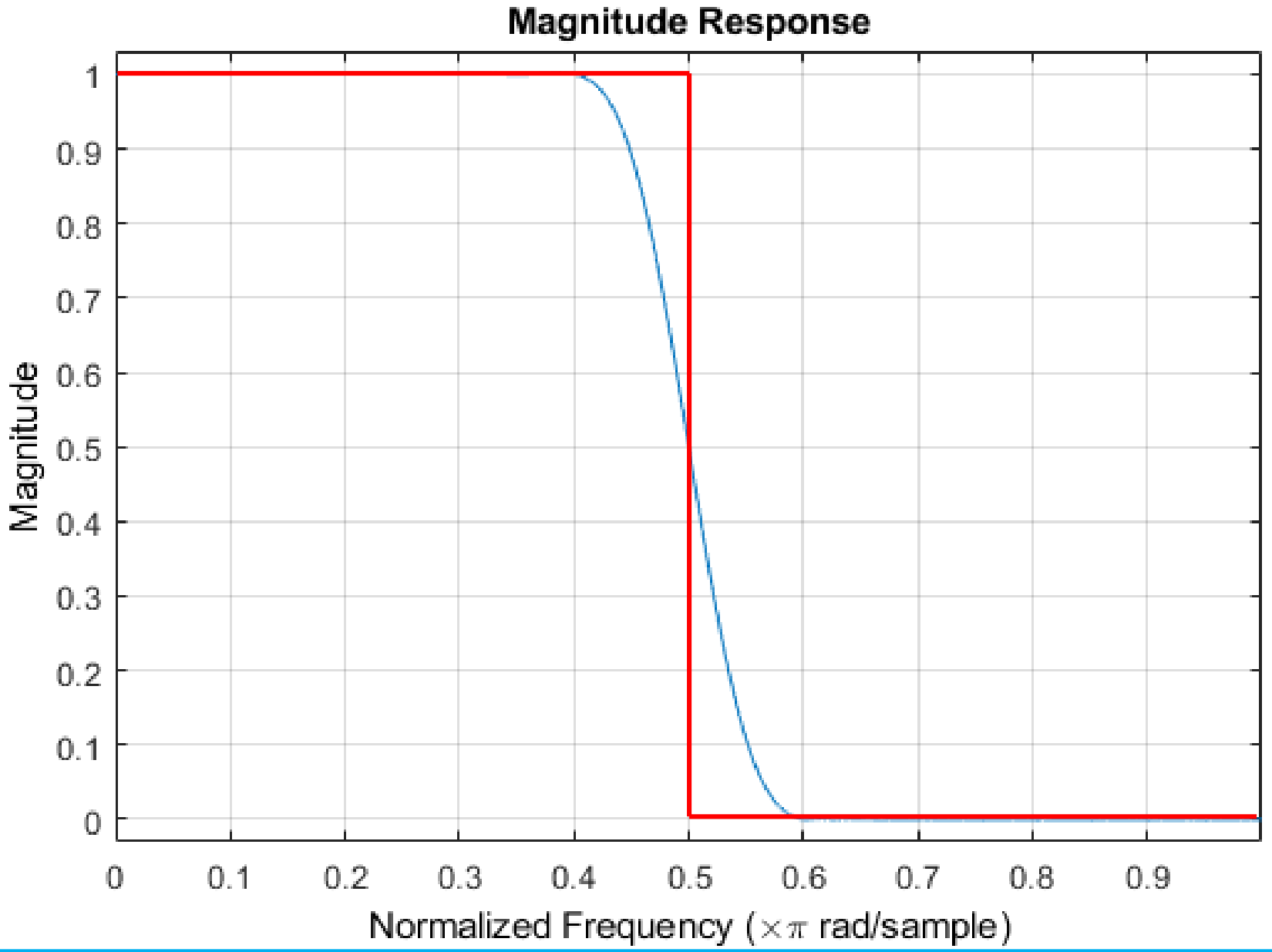
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



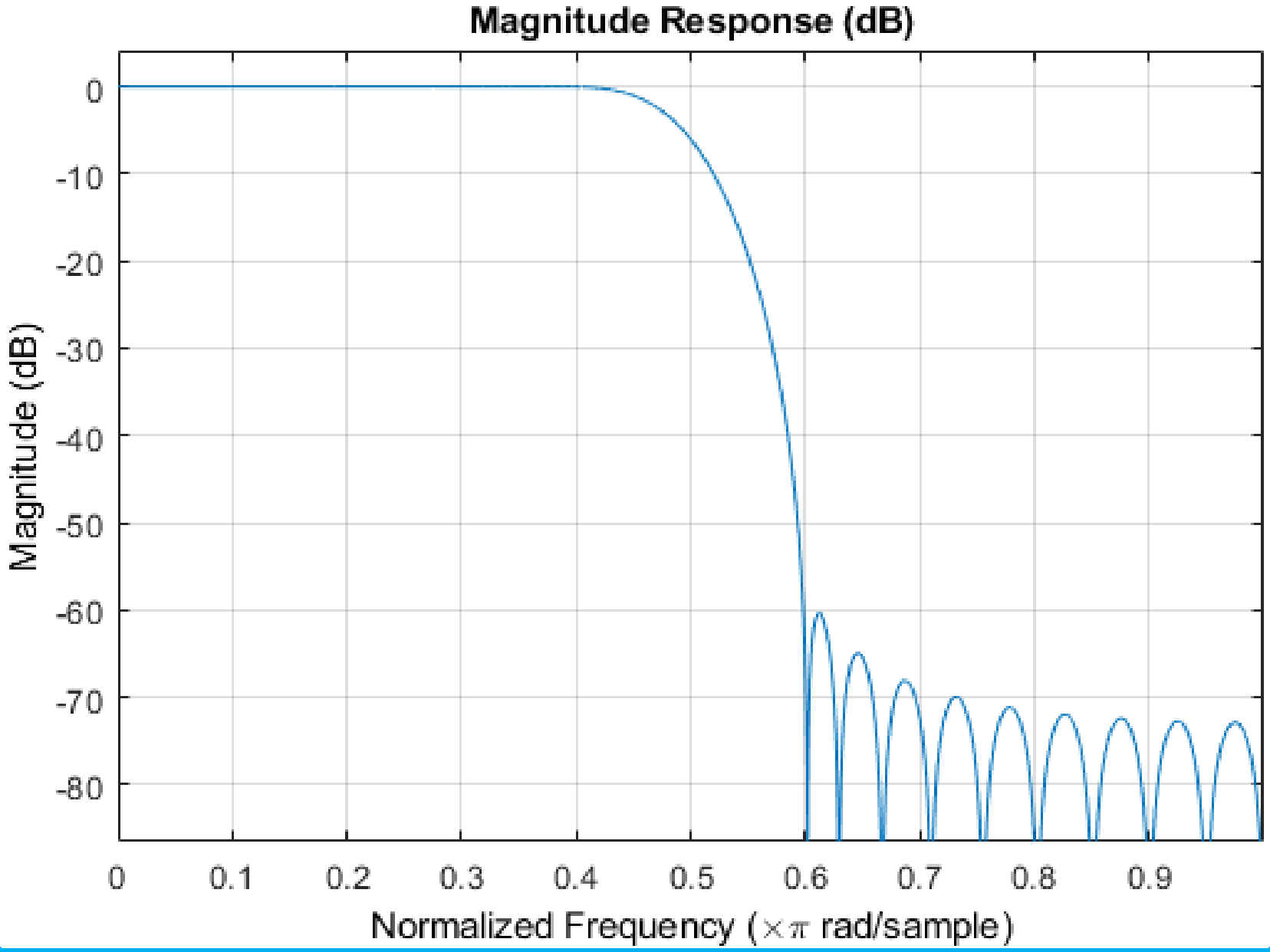
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



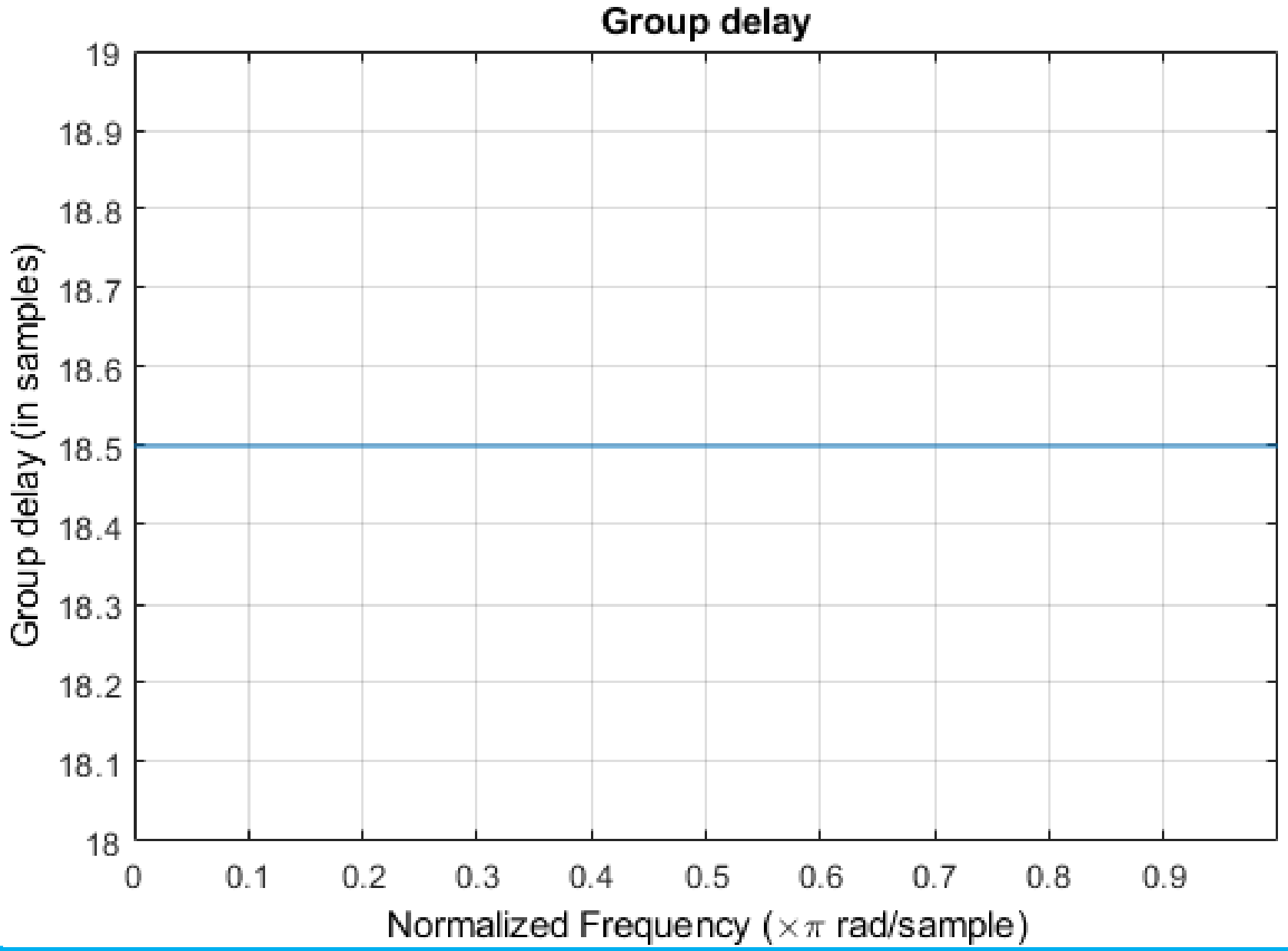
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



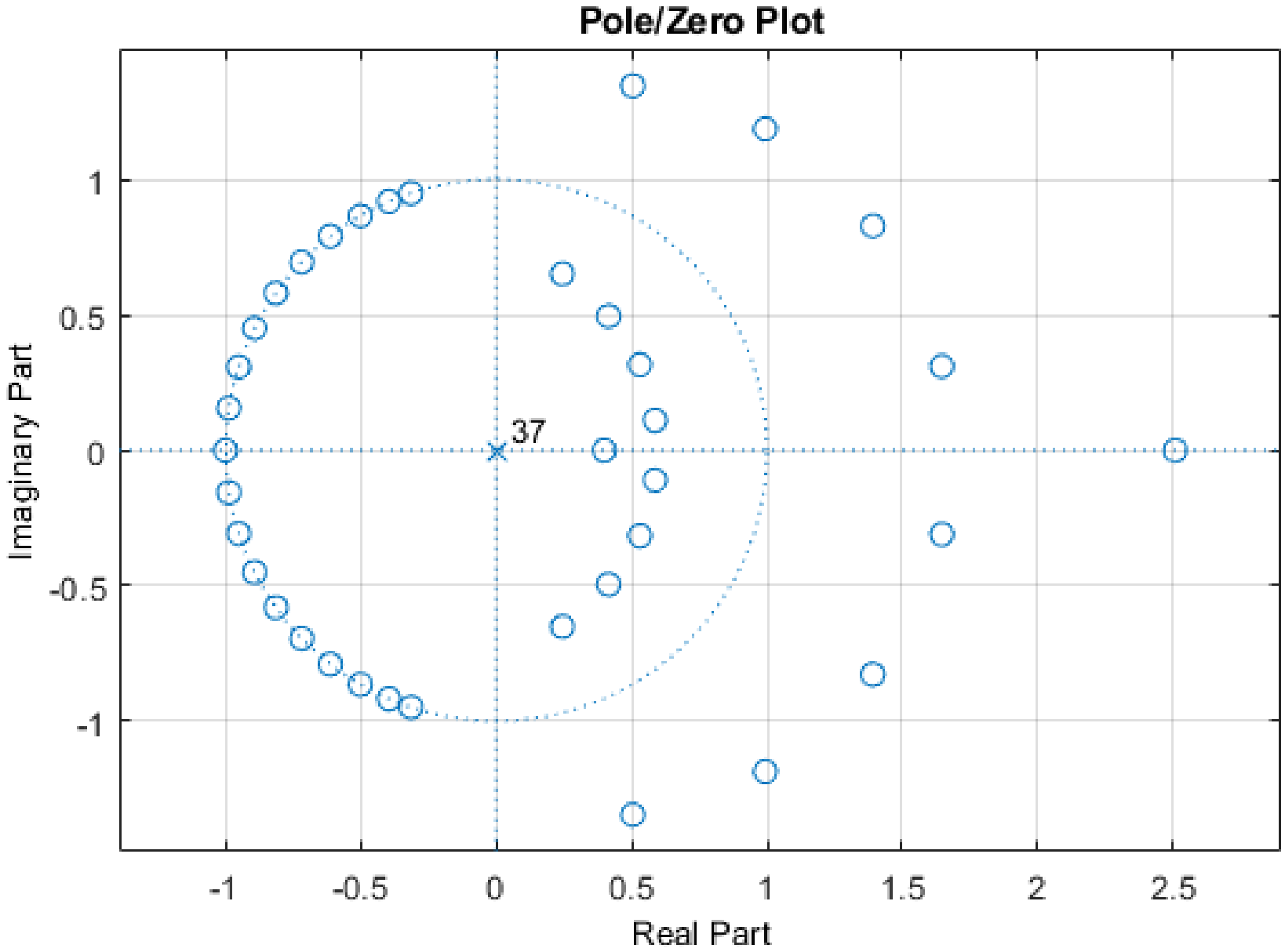
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



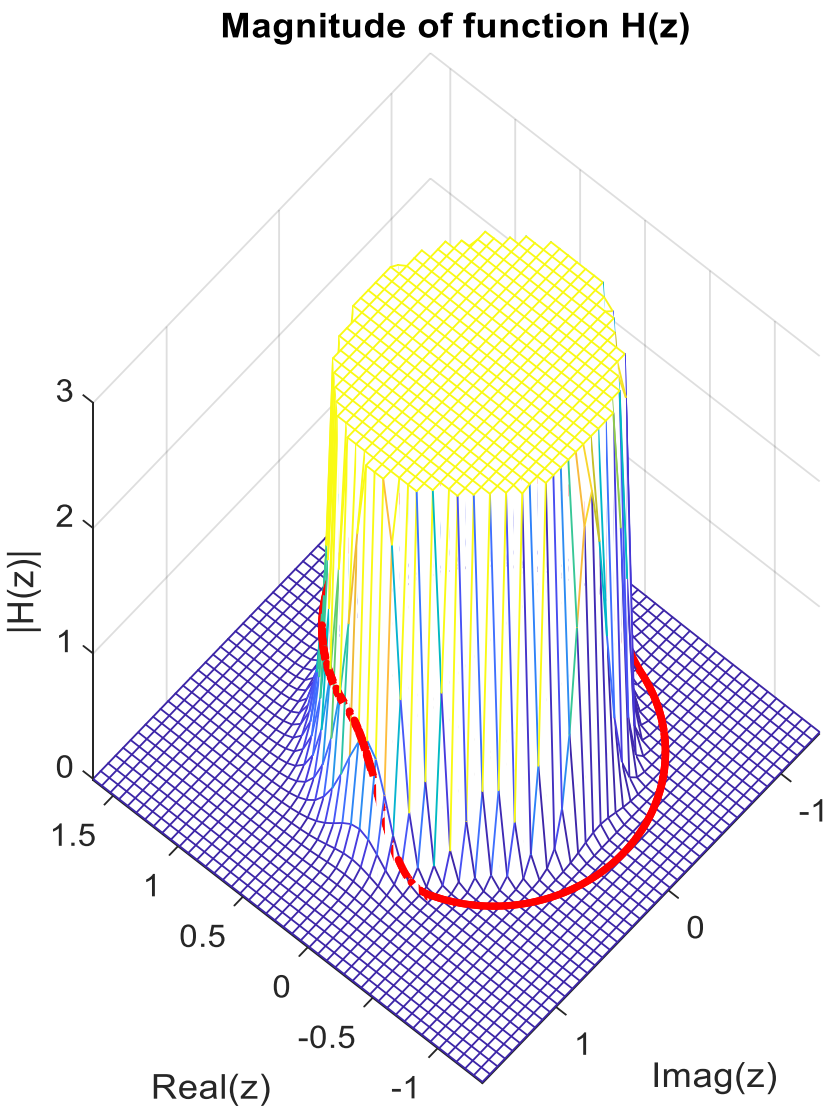
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

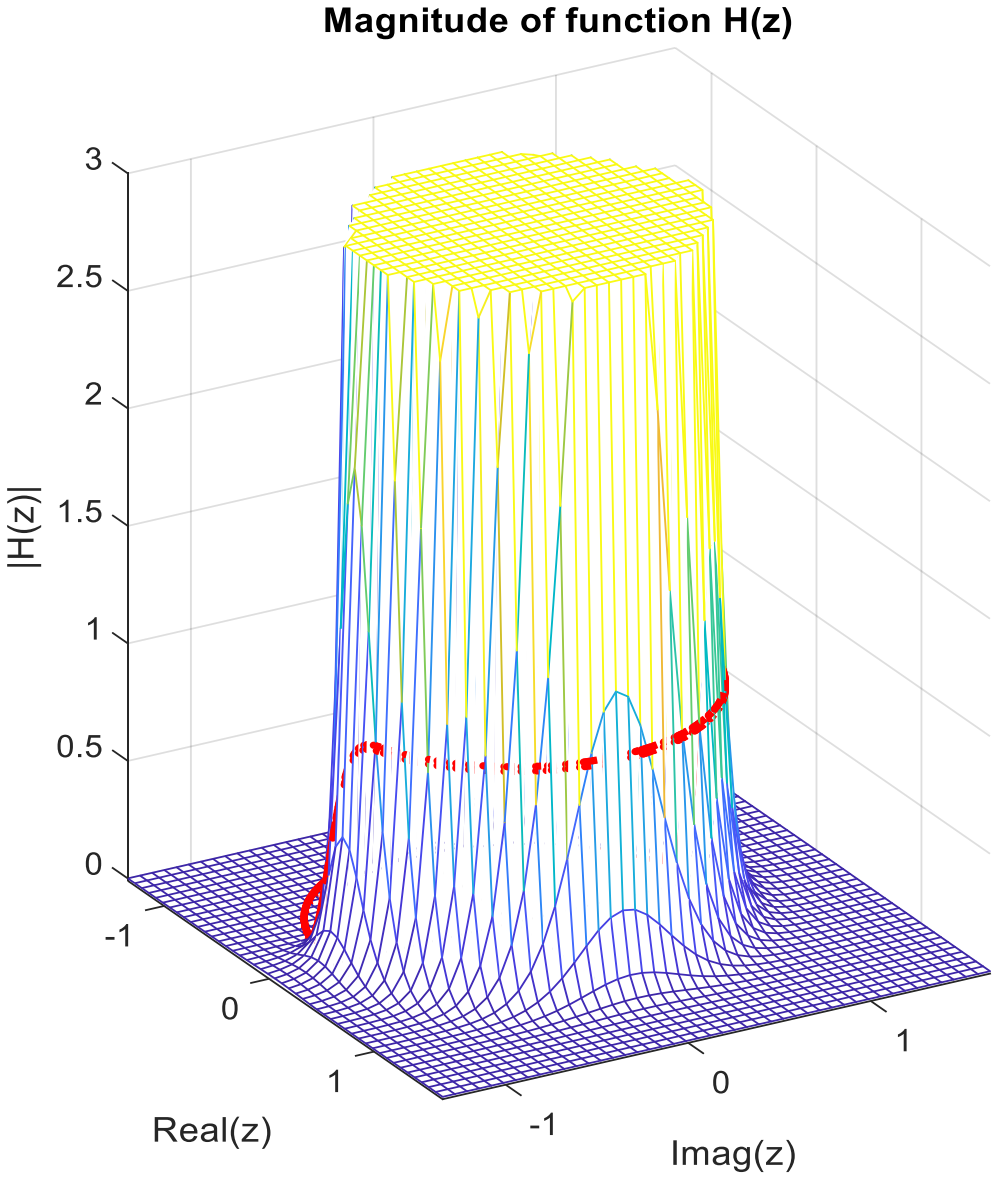
- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

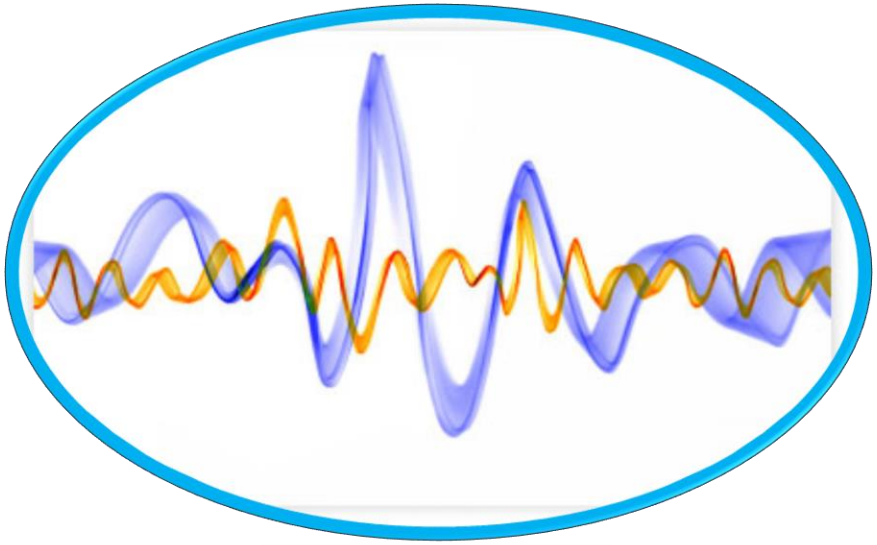
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων





© Καφεντζής Γιώργος, PhD

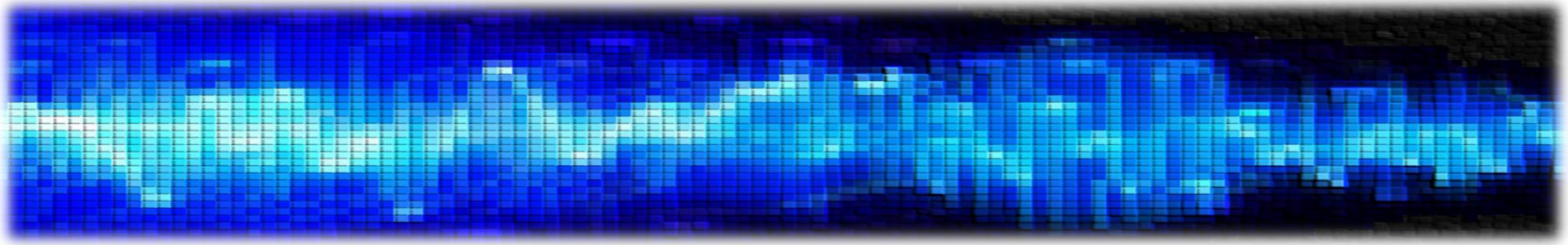
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 23Η



- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Ο Η/Υ είναι μια μηχανή που αποθηκεύει διακριτές τιμές
- Ιδανικά θα θέλαμε να μπορούμε να επεξεργαστούμε όχι μόνο το πεδίο του χρόνου αλλά και το πεδίο της συχνότητας!
  - Όμως η τελευταία είναι συνεχής μεταβλητή (ω) και μπορούμε μόνο αριθμητικά να την προσεγγίσουμε
    - …όπως κάναμε στα παραδείγματα Octave του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου
- **Ερώτημα**: τι θα συμβεί άραγε αν δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$?
- Ξέρουμε από το θεώρημα της Δειγματοληψίας του Shannon ότι δειγματοληψία στον ένα χώρο (χρόνο) οδηγεί σε περιοδικότητα στον άλλο χώρο (συχνότητα)
- Γνωρίζουμε επίσης από τη θεωρία Fourier συνεχούς χρόνου ότι περιοδικότητα στον ένα χώρο (χρόνο) οδηγεί σε «δειγματοληψία» στον άλλο (διακριτές συχνότητες)
- Αν τώρα δειγματοληπτήσουμε το χώρο της συχνότητας (ο οποίος είναι από τη φύση του περιοδικός!), λογικά θα πρέπει να λάβουμε ένα περιοδικό σήμα στο χώρο του χρόνου (ο οποίος είναι διακριτός)!
- Ας μιλήσουμε για όλα αυτά με περισσότερη λεπτομέρεια ☺

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Δειγματοληπτούμε N φορές μέσα σε μια περίοδο 2π

- Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ακολουθία διακριτών τιμών $X[k]$ του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, δειγματοληπτώντας τον σε συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/N$, με $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Λόγω της περιοδικότητας του $X(e^{j\omega})$, και τα δείγματα του, $X[k]$, θα επαναλαμβάνονται κι αυτά ανά N

- Άρα έχουμε ένα **περιοδικό διακριτό** φάσμα $X[k] = X[k+N]$
  - Επιβεβαιώστε το!

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Τέτοια φάσματα αντιστοιχούν σε ***περιοδικά σήματα*** **διακριτού χρόνου**

$$x[n] = x[n + N]$$

- Είναι λογικό, καθώς πήραμε (δειγματοληπτήσαμε σε) πεπερασμένες συχνότητες οι οποίες είναι όλες ακέραια πολλαπλάσια της $2\pi/N$
- Άρα θα υπάρχει κάποιο περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου που θα έχει ως φάσμα την περιοδική ακολουθία τιμών $X[k]$
- Ας βρούμε ποιο είναι αυτό το περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Η περιγραφή περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου μπορεί να περιγραφεί μέσω των Σειρών Fourier Διακριτού Χρόνου

- Θα κάνουμε μια παράκαμψη ☺

- Δεδομένου ότι θέλουμε να ανακατασκευάσουμε το σήμα στο χρόνο μόνο από N δείγματα, το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου θα μετατραπεί ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \rightarrow \hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}\frac{2\pi}{N}$$

- Έτσι, το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί σε αυτές τις N, το πλήθος, συχνότητες γράφεται ως

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Το παραπάνω αποτελεί το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier διακριτού χρόνου (αλλά ας κάνουμε ότι δεν το ξέρουμε ☺)

- Παρατηρήστε ότι $\hat{x}[n] = \hat{x}\,[n+N]$
  - Πράγματι το σήμα μας είναι **περιοδικό στο χρόνο**!
  - Θα το συμβολίζουμε με $x_p[n]$ ($\hat{x}[n] = x_p[n]$)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Έστω λοιπόν

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

με $k = 0, \dots, N-1$

- Αντικαθιστώντας το $X[k]$:

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{-\frac{jk2\pi n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]e^{-\frac{j2\pi kl}{N}}\right)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi k(n-l)}{N}}\right]$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]d_p[n-l] \longrightarrow x[n] * d_p[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1-a^N}{1-a}$$

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$d_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} = \begin{cases} 1, & n = lN \\ 0, & n \neq lN \end{cases}$$

- Το παραπάνω σήμα γράφεται με χρήση συναρτήσεων Δέλτα, ως

$$d_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta[n - lN]$$

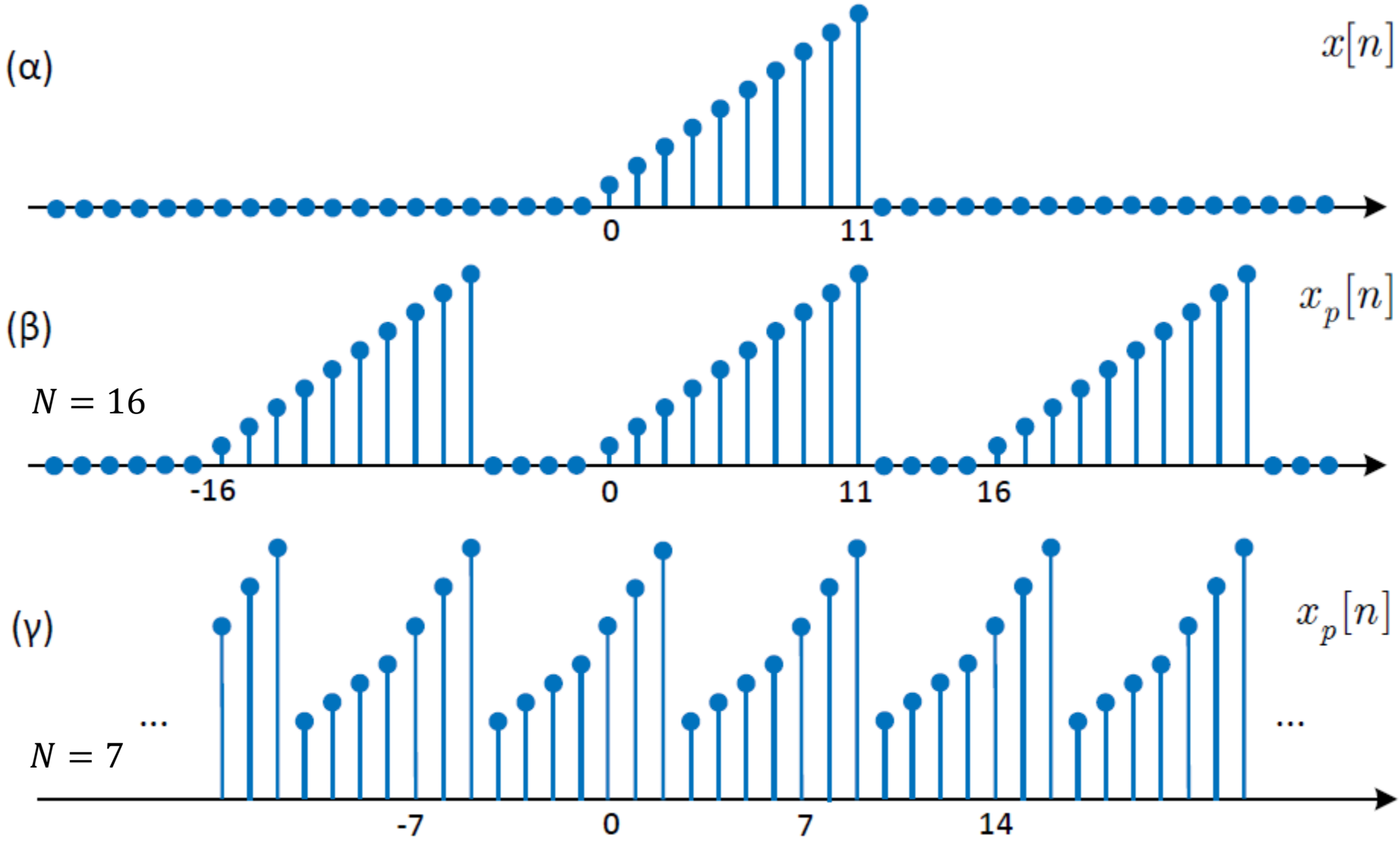
- Άρα το περιοδικό σήμα γράφεται ως

$$x_p[n] = x[n] * d_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n - lN]$$

- Ξεκάθαρα ☺ βλέπουμε ότι το περιοδικό σήμα μας είναι μια επανάληψη του απεριοδικού σήματος $x[n]$ (του οποίου το μετασχ. Fourier δειγματοληπτήσαμε σε N σημεία) ανά N δείγματα, με N να αποτελεί την περίοδο του περιοδικού σήματος **αλλά και** την περίοδο δειγματοληψίας του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου!! ☺
- Μπορείτε να φανταστείτε τι συμβαίνει για διάφορες τιμές του N?
  - Δηλ. ποιο περιοδικό σήμα στο χρόνο συνθέτουμε για διάφορες τιμές του N?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**



- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Καταλαβαίνετε ότι μια «κακή» επιλογή του N μπορεί να οδηγήσει σε **time-aliasing**
  - … που είναι το ακριβώς αντίστοιχο του frequency aliasing που γνωρίζετε από το θεώρημα της δειγματοληψίας
    - Επικάλυψη των γειτονικών επαναλήψεων του $x[n]$

- Μπορούμε να αποφύγουμε το time-aliasing μόνο στην περίπτωση που το σήμα $x[n]$ έχει πεπερασμένη διάρκεια

- Αν το σήμα έχει διάρκεια N_L τότε αρκεί να επιλέξουμε N τέτοιο ώστε
$$N \geq N_L$$

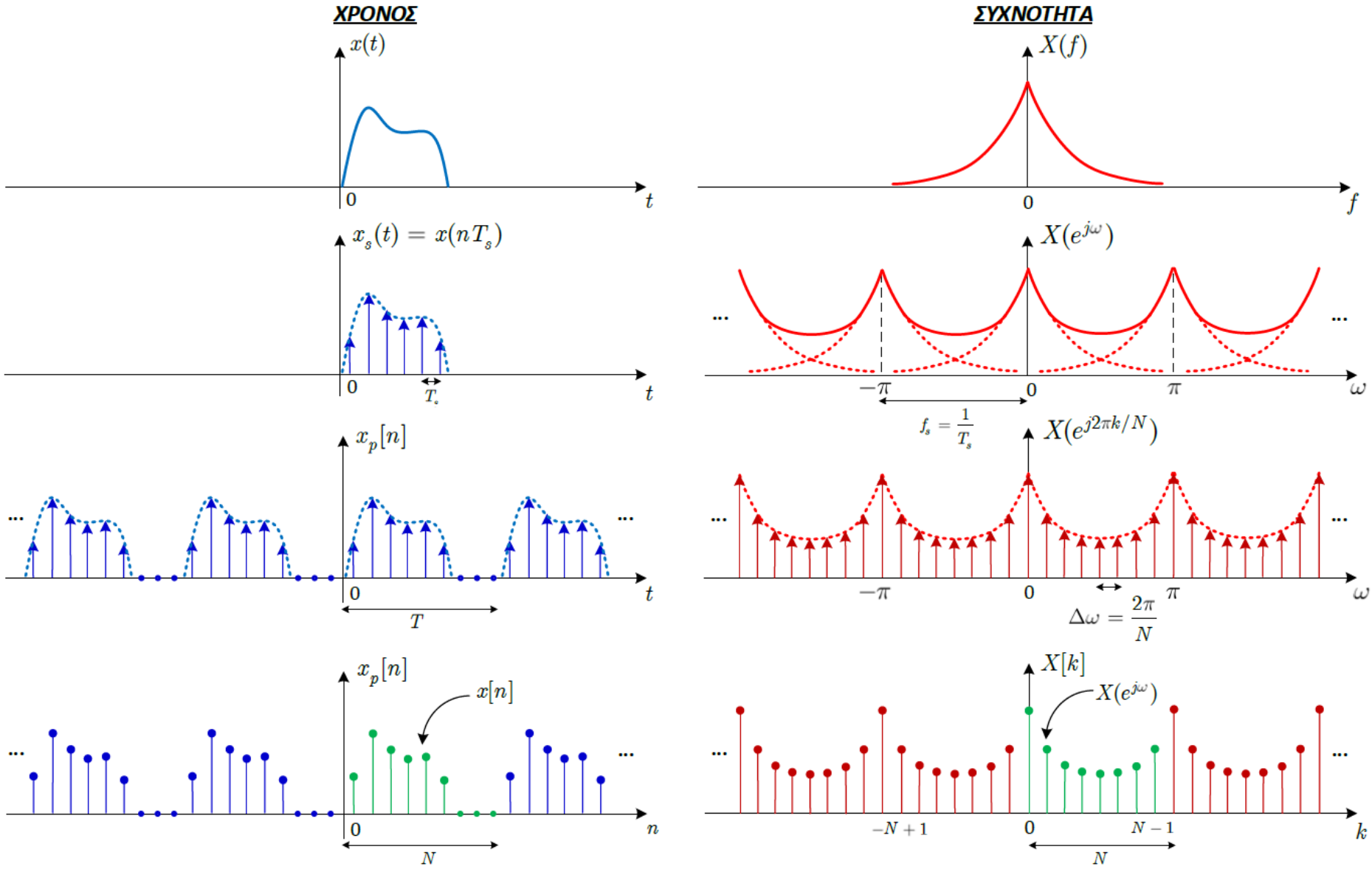
- Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος δειγματοληψίας του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο αυτό αν θέλουμε να μπορούμε να συσχετίσουμε το απεριοδικό σήμα $x[n]$ με τους συντελεστές $X[k]$

- Πως το συσχετίζουμε? Απομονώνοντας μια περίοδο από το περιοδικό σήμα $x_p[n]$
  - Η διάρκεια της θα είναι N

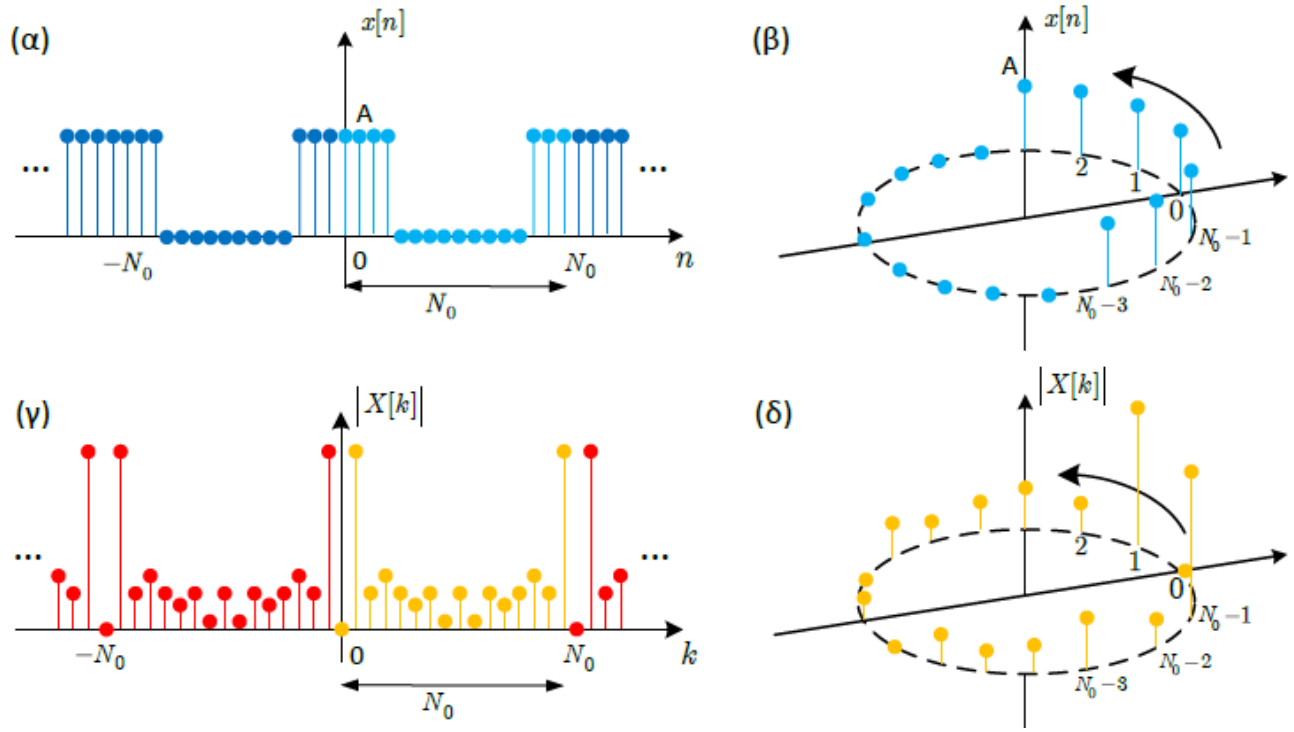
- Ας συνοψίσουμε…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**



- **Διακριτός Μετασχ. Fourier**:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- **Αντίστρ. Διακριτός Μετασχ. Fourier:**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Είναι εμφανές ότι μπορούμε να πάρουμε το Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ από τα δείγματα $X[k]$ του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier
  - Η διαδικασία μοιάζει πολύ με την ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματα του (θεώρημα δειγματοληψίας)

- Η αποκοπή μιας περιόδου από το περιοδικό σήμα $x_p[n]$ το οποίο έχει τους συντελεστές Fourier $X[k]$ ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του με ένα τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας N:

$$x[n] = x_p[n]w[n]$$

με

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

- Ο μετασχ. Fourier του γινομένου ισοδυναμεί με συνέλιξη των μετασχ. Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left[X_p(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})\right]$$

- Γνωρίζουμε ότι

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j\omega(N-1)}{2}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left[X_p(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})\right]$$

με

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j\omega(N-1)}{2}}$$

- Ποιος είναι ο μετασχ. Fourier $X_p(e^{j\omega})$ του περιοδικού σήματος $x_p[n]$?
- Έχουμε ήδη εκφράσει το περιοδικό σήμα σε ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier διακριτού χρόνου, οπότε:

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \leftrightarrow X_p(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

- Συνολικά:

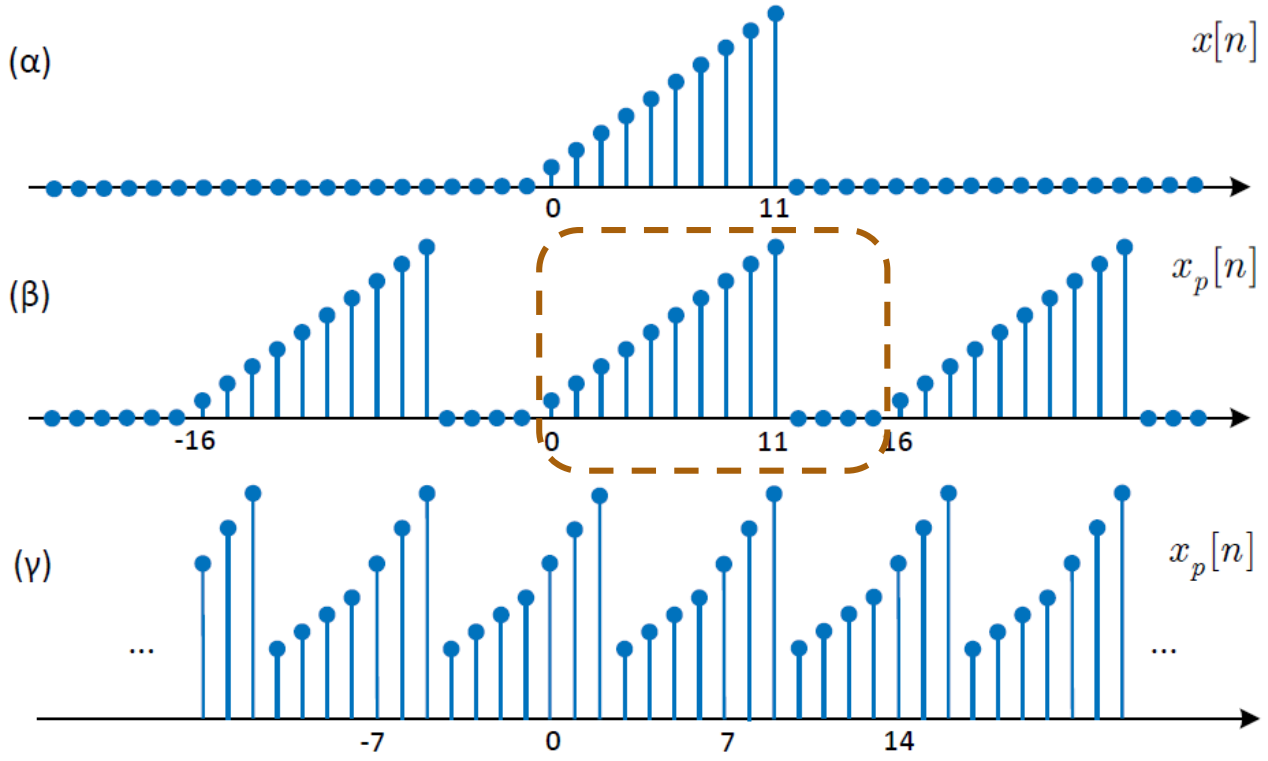
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\frac{\sin\left(\frac{\omega N - 2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega N - 2\pi k}{2N}\right)} e^{-\frac{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)(N-1)}{2}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Δεδομένου ότι τηρούμε τον περιορισμό για $N \geq N_L$, ίσως σκεφτείτε ότι για αρκετά μεγάλη επιλογή του N, τα δείγματα του Διακριτού Μετασχ. Fourier θα είναι τόσο κοντά μεταξύ τους που θα μπορούμε να έχουμε μια καλή προσέγγιση του φάσματος του Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου

- Αυτό είναι προφανώς σωστή σκέψη! Αλλά σε ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο Διακριτός Μετασχ. Fourier με τα «παραπανίσια» δείγματα?



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Εύκολα μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι για $N > N_L$, έχουμε το περίφημο **zero-padding** στο πεδίο του χρόνου
  - Εμφανίζονται μηδενικά μετά το τέλος του σήματος. Πόσα όμως?
  - Όσα και τα «παραπανίσια» δείγματα (σε σχέση με τη διάρκεια του απεριοδικού σήματος) που πήραμε κατά τη δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας

- Το zero-padding στο χρόνο προσφέρει απλώς ένα Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier που είναι πιο «ευπαρουσίαστος» (πλησιάζει περισσότερο σαν γραφική παράσταση στο Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου)

- Το zero-padding **ΔΕΝ** προσθέτει καμιά επιπλέον πληροφορία για το σήμα
  - Άλλωστε απλώς βάζουμε μηδενικά στο τέλος του…

- Είναι κοινό λάθος να θεωρείται πως το zero-padding «*βελτιώνει την ανάλυση του Διακριτού Μετασχ. Fourier*»

- Ανάλυση σημαίνει διακριτική ικανότητα, κάτι που δε συμβαίνει με το zero-padding

- Ο λόγος αυτής της παρανόησης οφείλεται εν πολλοίς σε παραδείγματα όπως το παρακάτω

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Έστω ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου του σήματος

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases} \leftrightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j3\omega}{2}}$$

- Ας υπολογίσουμε το Διακριτό Μετασχ. Fourier για διάφορες τιμές του N και ας συγκρίνουμε με το φάσμα (πλάτους και φάσης) του $W(e^{j\omega})$

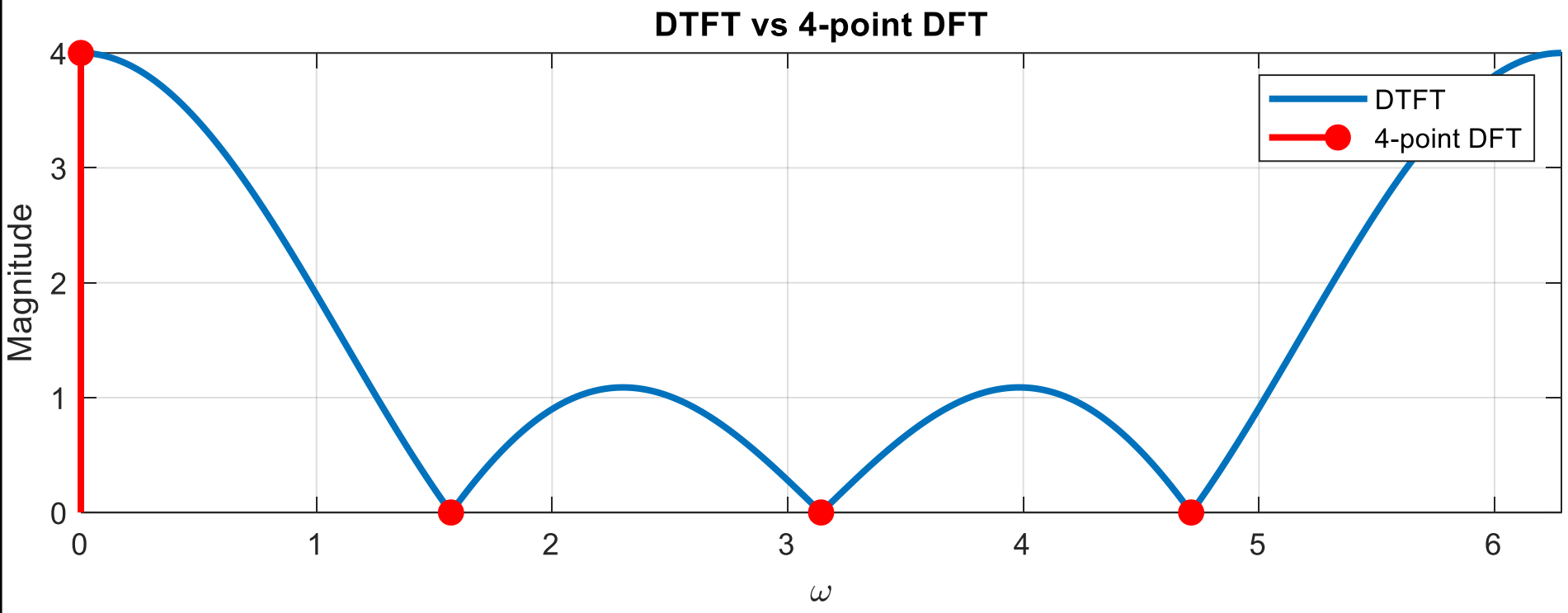
- Ενδεικτικός κώδικας:

```
x = ones(1,4);
% N-point FFTs
X1 = fft(x, 4);
X2 = fft(x, 8);
X3 = fft(x, 64);
k1 = (0:3)*2*pi/4;
k2 = (0:7)*2*pi/8;
k3 = (0:63)*2*pi/64;
% DTFT
w = linspace(0, 2*pi, 1200);
DTFT = (sin(2*w)./sin(w/2)).*exp(-1i*3*w/2);
% Magnitudes
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k1, abs(X1),'r');
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k2, abs(X2),'r');
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k3, abs(X3),'r');
% Phases
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k1, angle(X1),'r');
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k2, angle(X2),'r');
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k3, angle(X3),'r');
```

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

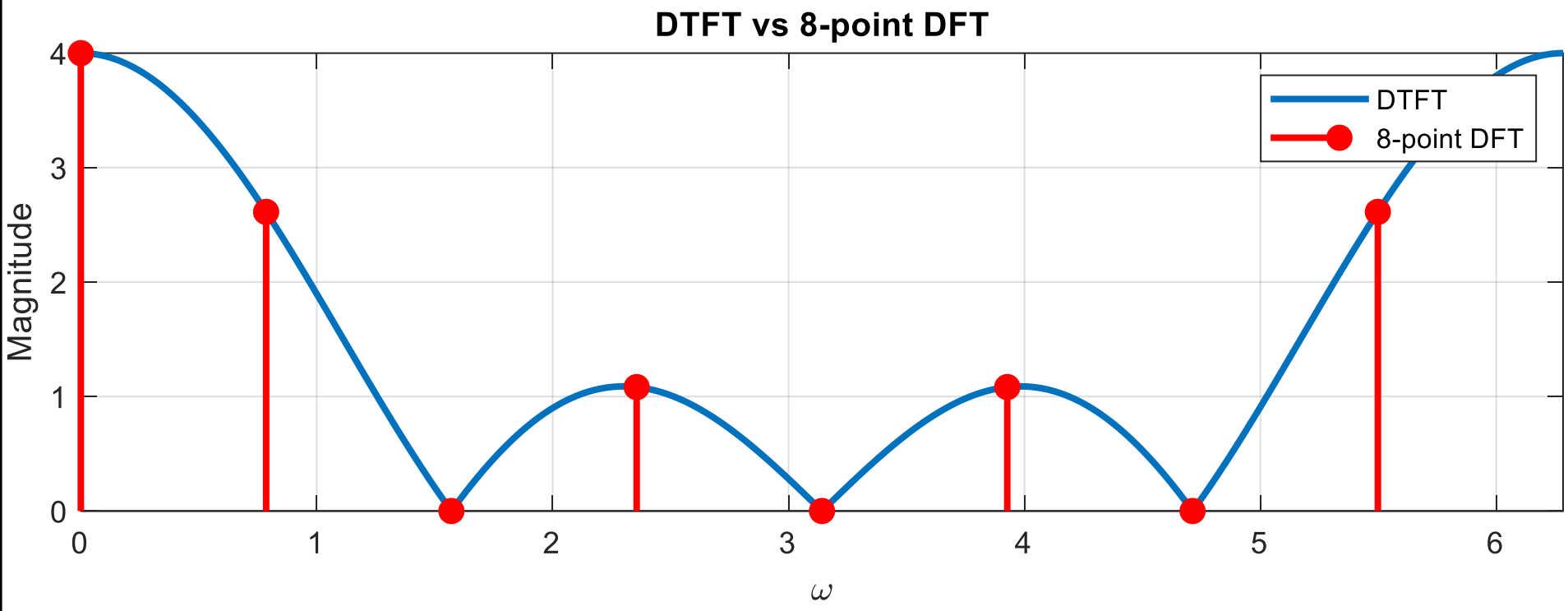
- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Φάσμα πλάτους



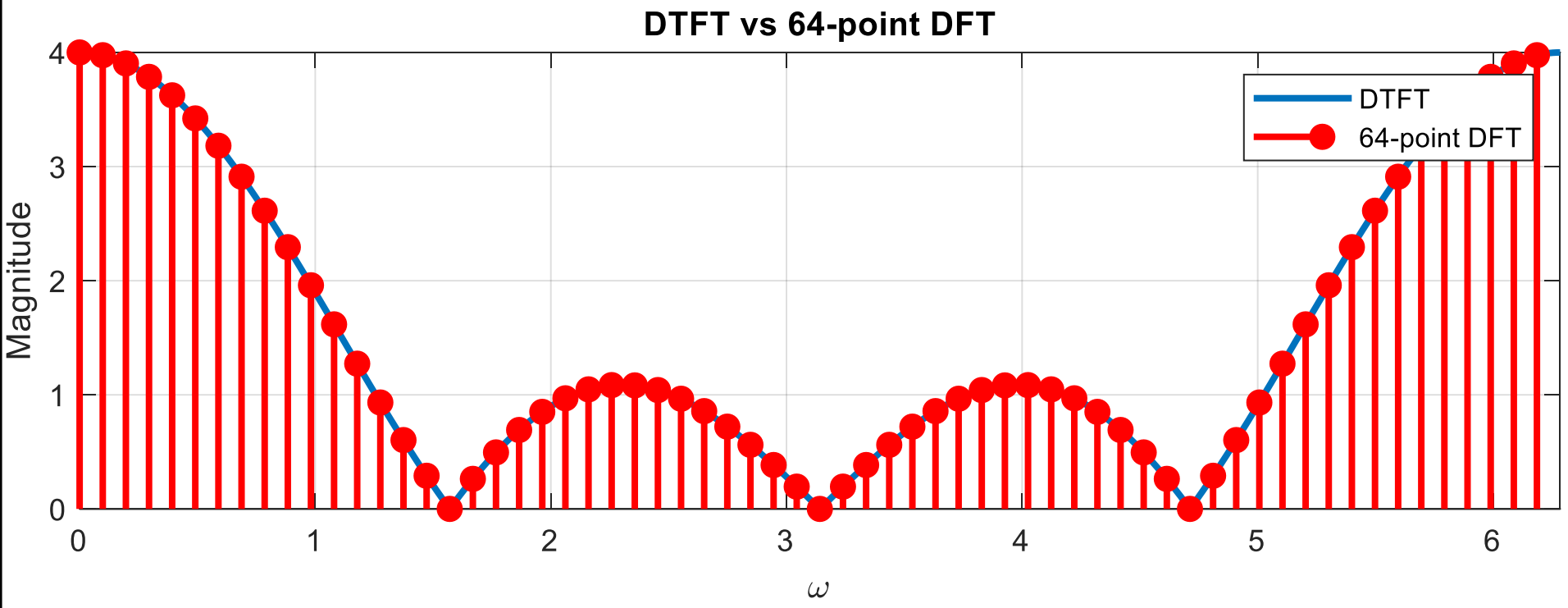
- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Φάσμα πλάτους



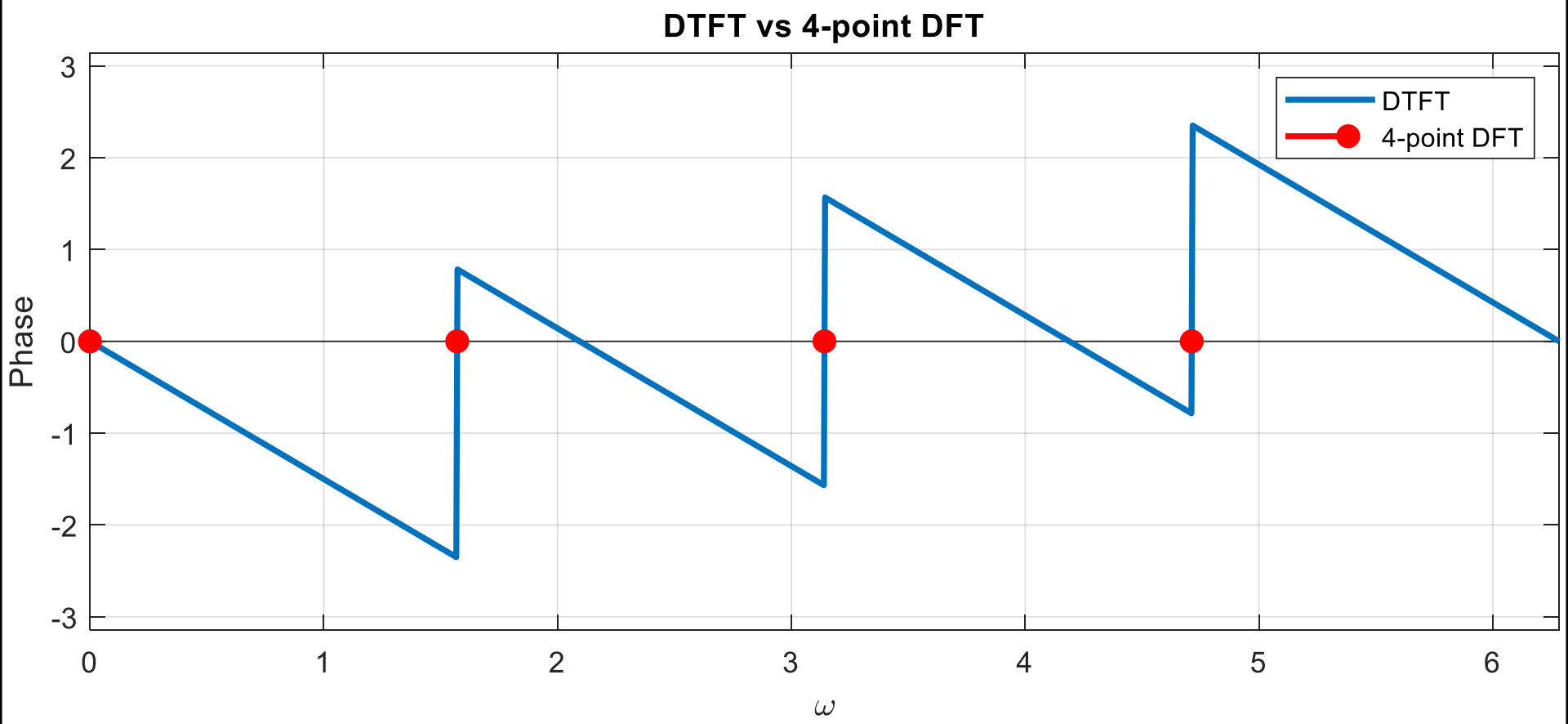
- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Φάσμα πλάτους



• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

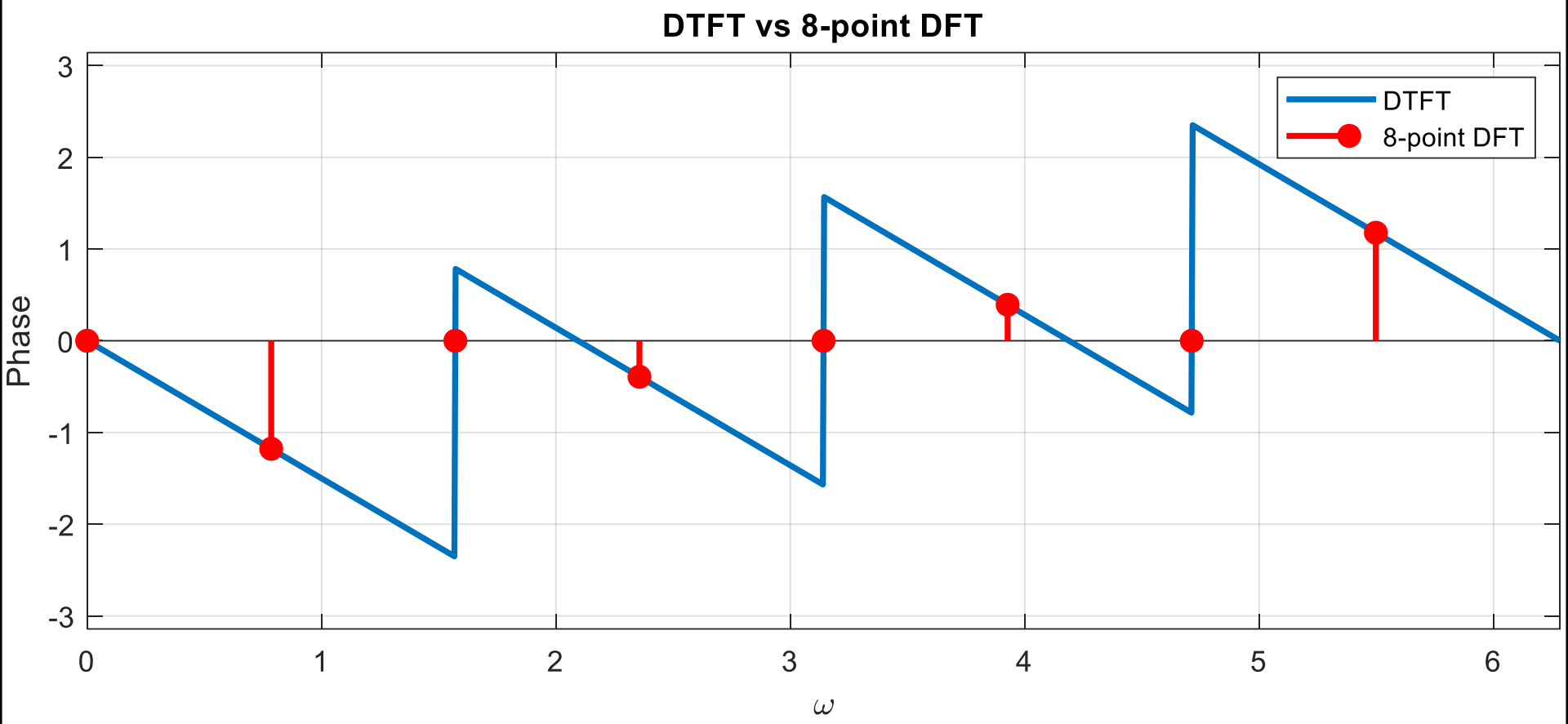
Φάσμα φάσης



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

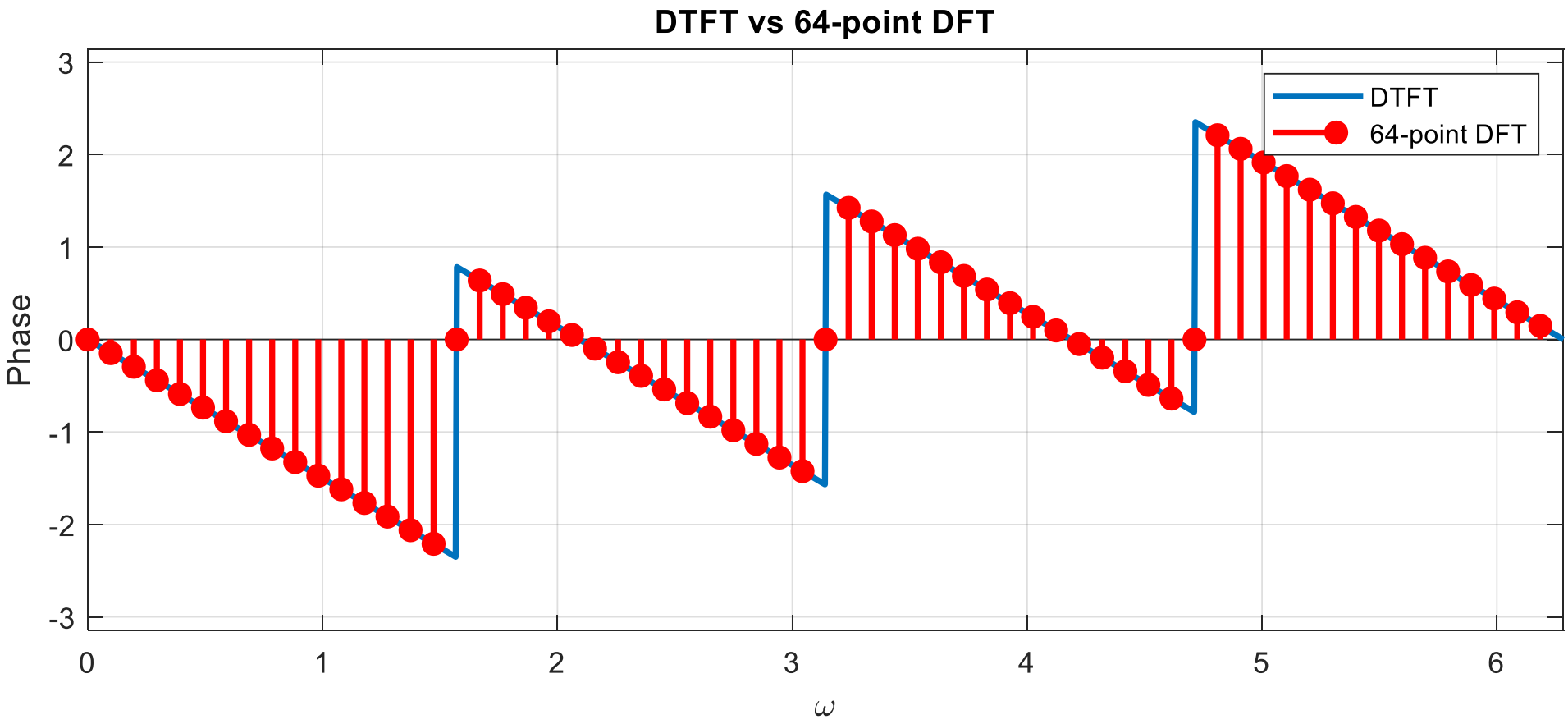
Φάσμα φάσης



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα φάσης



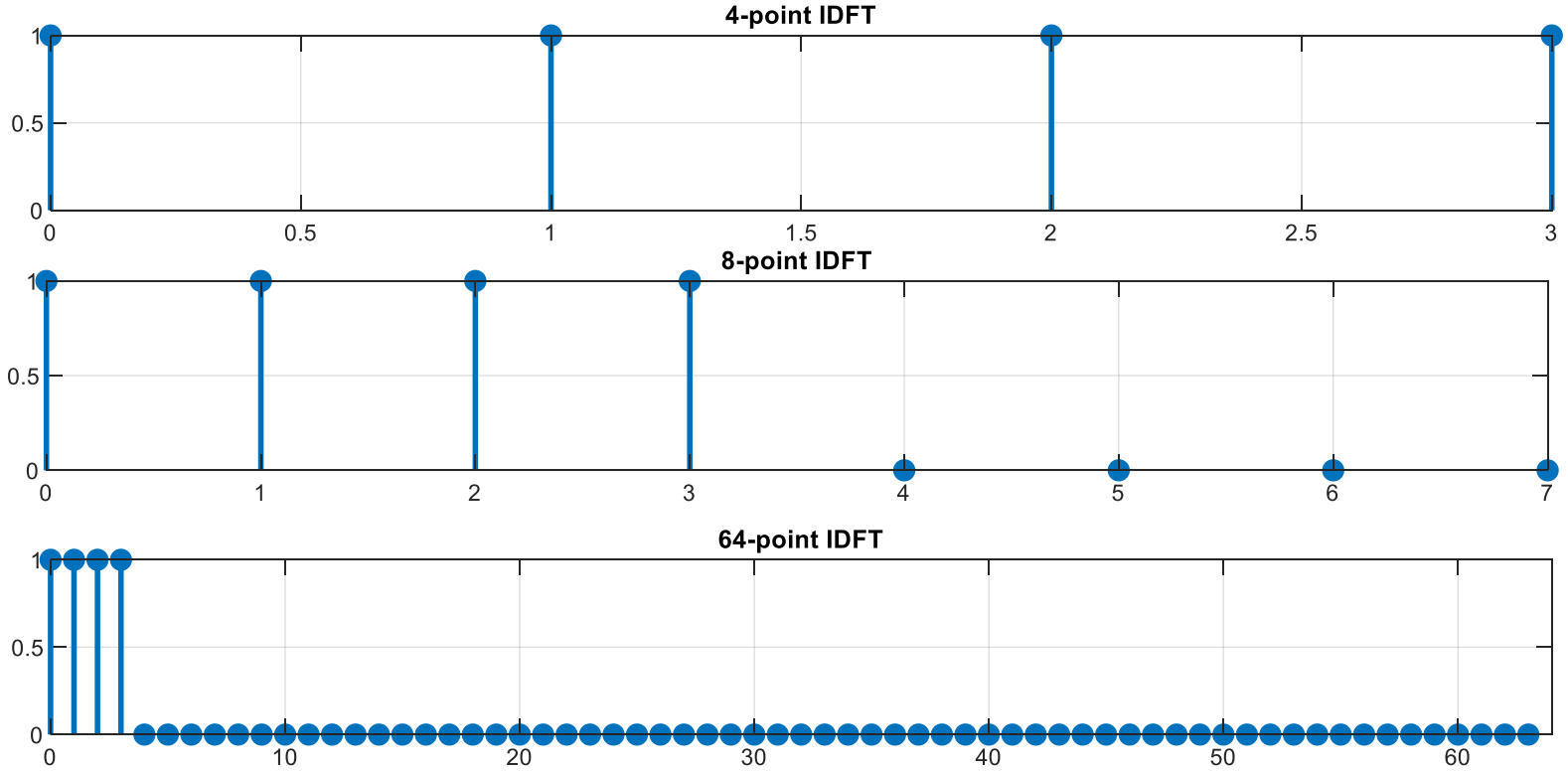
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Παρατηρήσατε ότι τα περισσότερα σημεία του Διακριτού Μετασχ. Fourier μας δίνουν πράγματι καλύτερη εικόνα για το Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου

- Έχουμε δηλ. πιο **πυκνή** δειγματοληψία του $X(e^{j\omega})$ για μεγάλα N

- Ποια σήματα στο χρόνο (βασικές περίοδοι του περιοδικού σήματος) αντιστοιχούν μέσω του Αντίστρ. Διακριτού Μετασχ. Fourier στις δειγματοληψίες που είδατε πριν?



- Θα επανέλθουμε αργότερα στο θέμα της ανάλυσης (διακριτικής ικανότητας)

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Η εγγενής περιοδικότητα του Διακριτού Μετασχ. Fourier οδηγεί σε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες όσον αφορά το σήμα στο χρόνο αλλά και στη συχνότητα

Ιδιότητες Διακριτού Μετασχ. Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Διακριτός Μετασχ. Fourier
	$\mathbf{x[n]}$ με διάρκεια $\mathbf{N}$ $\mathbf{y[n]}$ με διάρκεια $\mathbf{N}$	$\mathbf{X[k]}$ $\mathbf{Y[k]}$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX[k] + BY[k]$
Χρονική μετατόπιση	$x[((n-n_0))_N]$	$X[k]e^{-j2\pi kn_0/N}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi Mn/N}x[n]$	$X[(k-M)_N]$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*[(-k)_N]$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[(-n)_N]$	$X^*[(-k)_N]$
Δυϊκότητα	$X[n]$	$Nx[(-k)_N]$
Συνέλιξη	$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n-m)_N]$	$X[k]Y[k]$
Πολλαπλασιασμός	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X[l]Y[(k-l)_N]$
Συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X[k] = X^*[(-k)_N], \\ \mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[(-k)_N]\}, \\ \mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[(-k)_N]\}, \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[(-k)_N]\rvert, \\ \sphericalangle X[k] = -\sphericalangle X[(-k)_N] \end{cases}$
Θεώρημα του Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \lvert X[k]\rvert^2$

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Η εγγενής περιοδικότητα του Διακριτού Μετασχ. Fourier οδηγεί σε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες όσον αφορά το σήμα στο χρόνο αλλά και στη συχνότητα

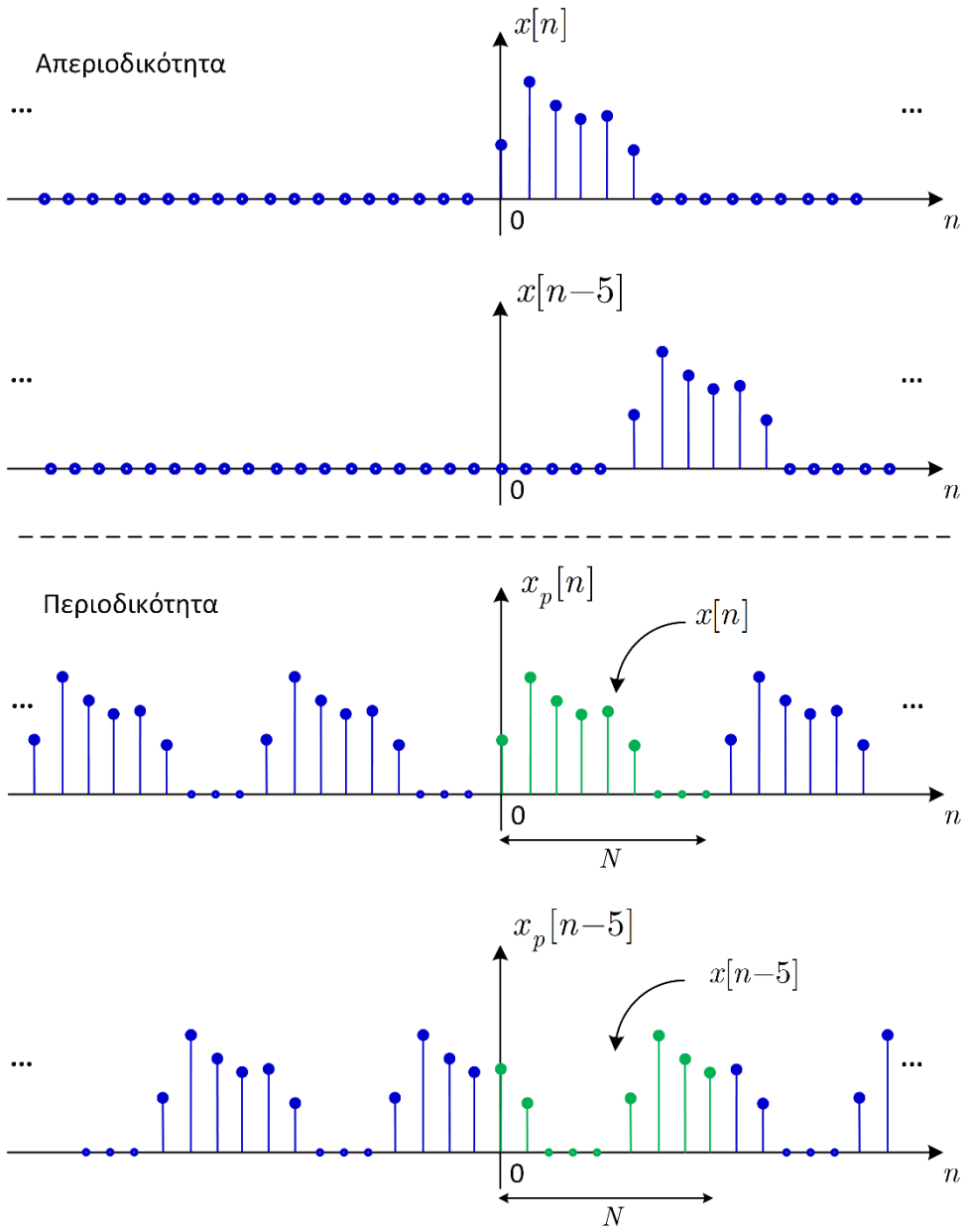
Χρονική μετατόπιση

$$x[((n-n_0))_N] \quad \leftrightarrow \quad X[k]e^{-j2\pi k n_0/N}$$

- Δείτε πως εννοείται η χρονική μετατόπιση για το Διακριτό Μετασχ. Fourier

- Οι πράξεις γίνονται modulo N!!

- Παρόμοιο συμβαίνει και στη συχνοτική μετατόπιση

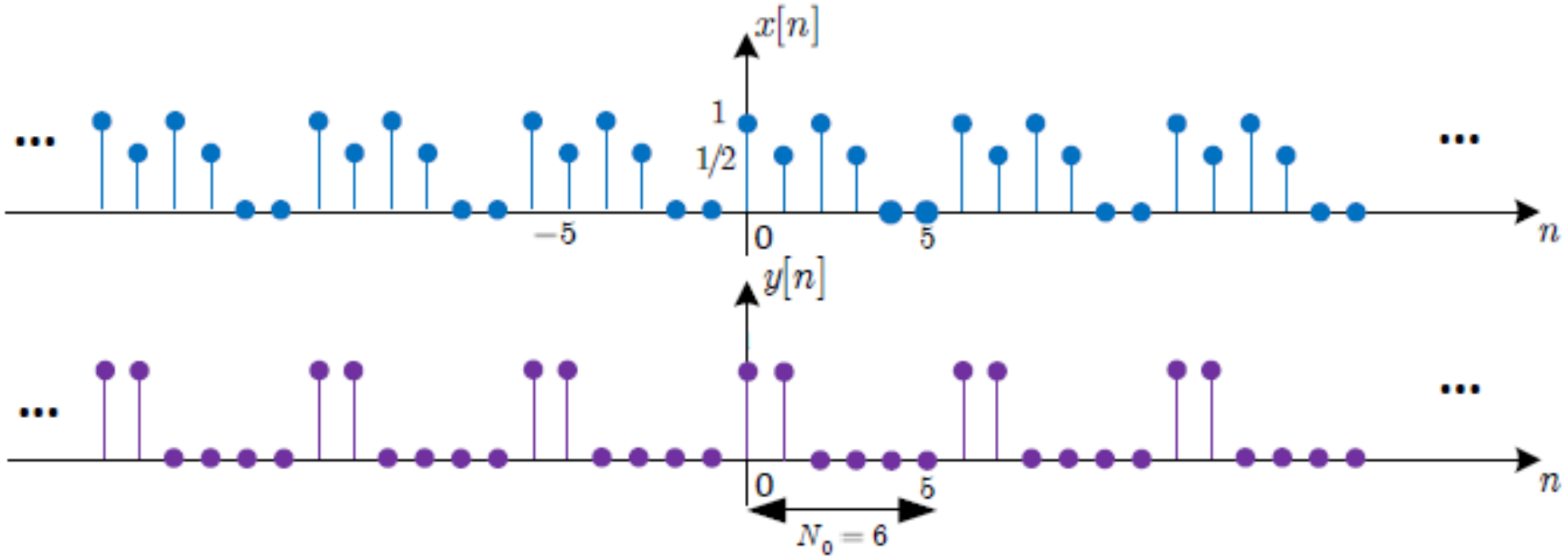


- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση της **συνέλιξης**, η οποία είναι τεράστιας σημασίας στην ανάλυση Fourier

- Η πράξη της συνέλιξης στο χρόνο $y[n] = x[n] \circledast h[n]$, ως πράξη αντίστροφου Διακριτού μετασχ. Fourier του γινομένου δυο φασμάτων $Y[k] = X[k]H[k]$, ονομάζεται **κυκλική συνέλιξη**

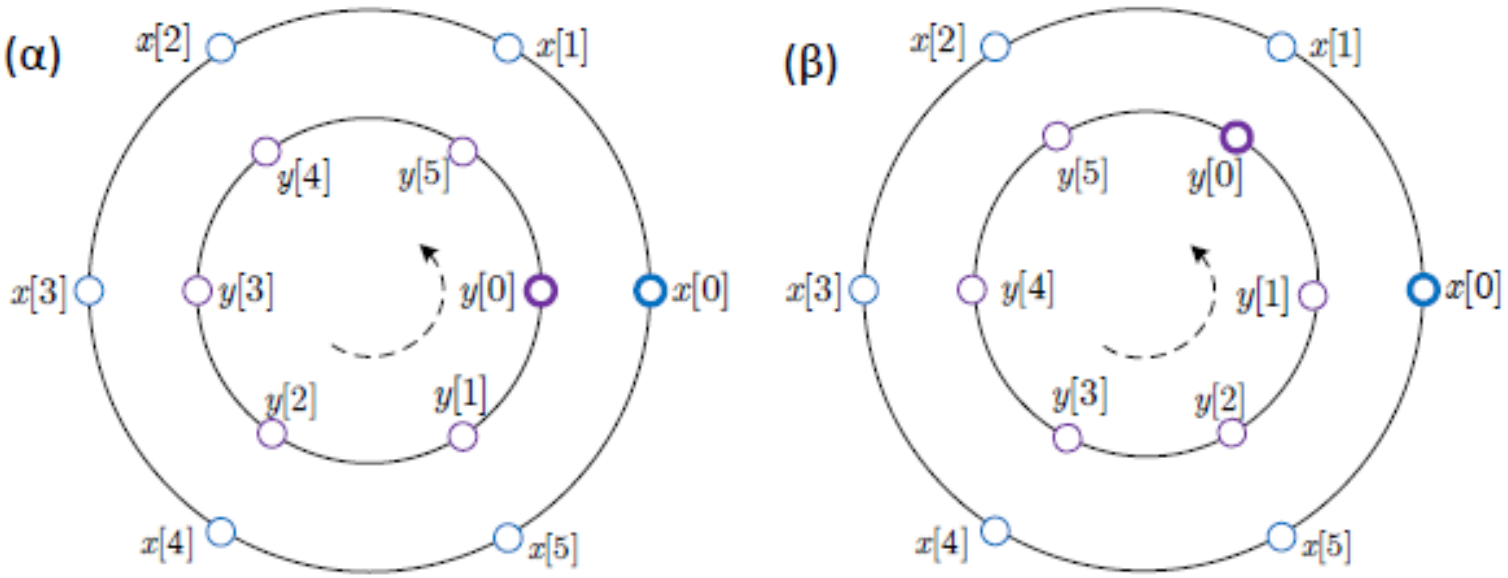
- Για παράδειγμα, έστω δυο περιοδικά σήματα που θέλουμε να βρούμε την κυκλική συνέλιξη τους, όπως αυτά στο σχήμα



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

$$x[n] = \{\mathbf{1}, 0.5, 1, 0.5, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$
$$y[n] = \{\mathbf{1}, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



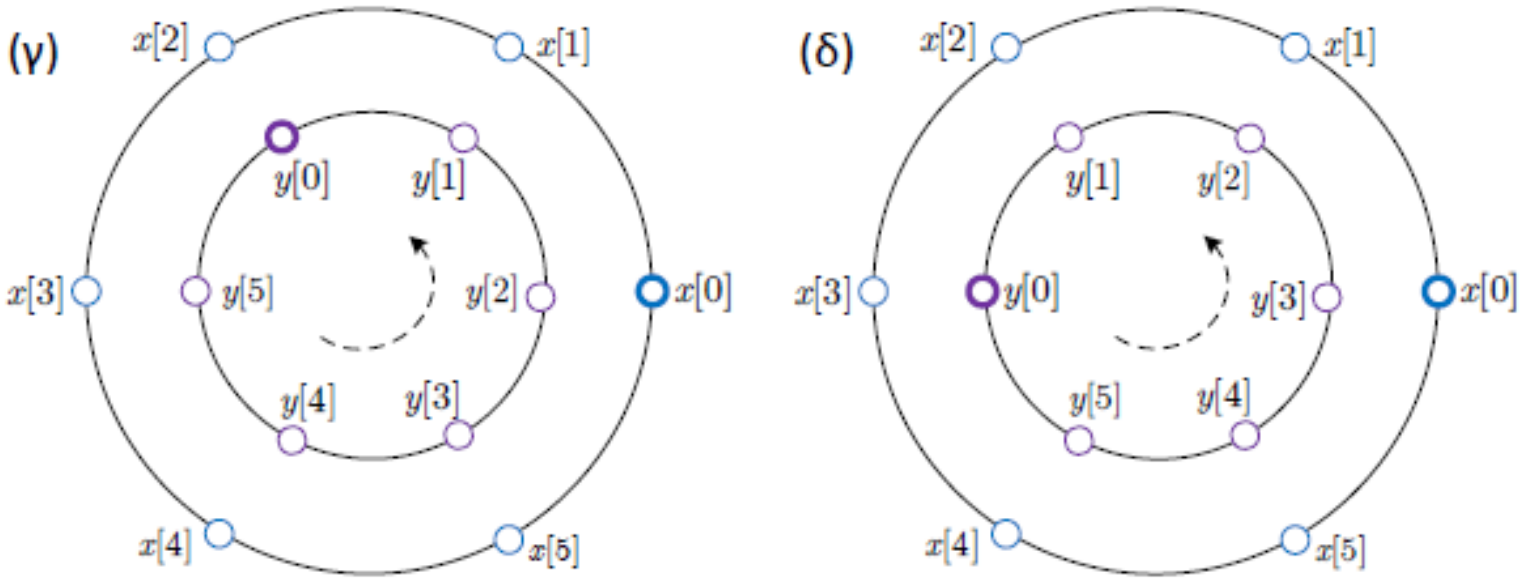
$$(\alpha') \quad z[0] = y[0]x[0] + y[5]x[1] + y[4]x[2] + y[3]x[3] + y[2]x[4] + y[1]x[5] = 1$$

$$(\beta') \quad z[1] = y[1]x[0] + y[0]x[1] + y[5]x[2] + y[4]x[3] + y[3]x[4] + y[2]x[5] = \frac{3}{2}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

$$x[n] = \{\mathbf{1}, 0.5, 1, 0.5, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$
$$y[n] = \{\mathbf{1}, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



$$(\gamma') \quad z[2] = y[2]x[0] + y[1]x[1] + y[0]x[2] + y[5]x[3] + y[4]x[4] + y[3]x[5] = \frac{3}{2}$$

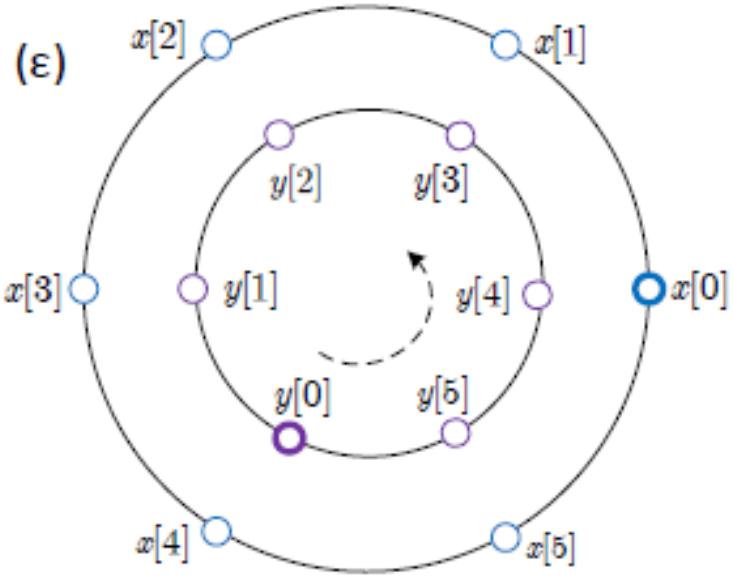
$$(\delta') \quad z[3] = y[3]x[0] + y[2]x[1] + y[1]x[2] + y[0]x[3] + y[5]x[4] + y[4]x[5] = \frac{3}{2}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

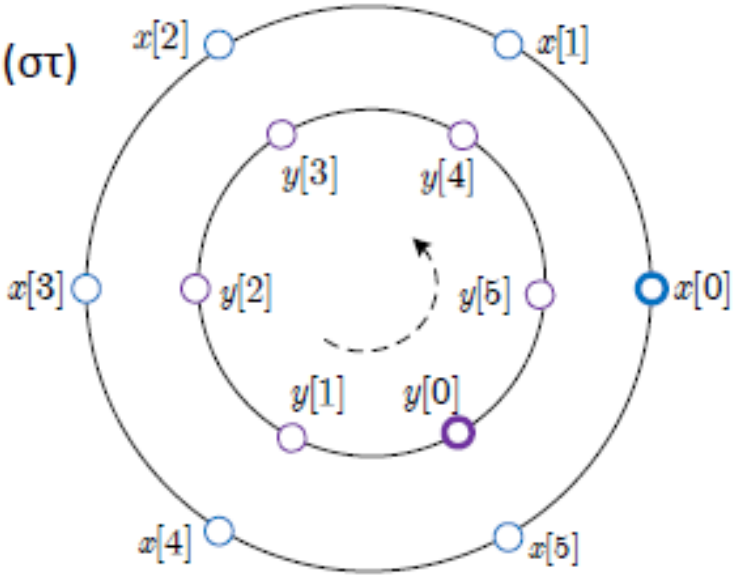
- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

$$x[n] = \{\mathbf{1}, 0.5, 1, 0.5, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$
$$y[n] = \{\mathbf{1}, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

(ε)



(στ)



$$(\varepsilon') \quad z[4] = y[4]x[0] + y[3]x[1] + y[2]x[2] + y[1]x[3] + y[0]x[4] + y[5]x[5] = \tfrac{1}{2}$$

$$(\varsigma') \quad z[5] = y[5]x[0] + y[4]x[1] + y[3]x[2] + y[2]x[3] + y[1]x[4] + y[0]x[5] = 0$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Εμάς όμως μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η απλή (**γραμμική**) συνέλιξη μεταξύ απεριοδικών σημάτων!

- Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή τη συνέλιξη από την κυκλική συνέλιξη?

- Θυμηθείτε ότι η ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης μας λέει ότι αν ένα απεριοδικό σήμα $x[n]$ έχει «διάρκεια» M δείγματα $(0 \leq n \leq M-1)$, και ένα άλλο απεριοδικό σήμα $y[n]$ έχει «διάρκεια» N δείγματα $(0 \leq n \leq N-1)$, τότε η συνέλιξη τους $c_{xy}[n]$ έχει «διάρκεια» $M+N-1$ $(0 \leq n \leq M+N-2)$

- Άρα μπορούμε να απομονώσουμε το αποτέλεσμα της **γραμμικής** συνέλιξης από την κυκλική αν «κόψουμε» το κομμάτι της κυκλικής συνέλιξης στο $(0 \leq n \leq M+N-2)$!

- Βασική προϋπόθεση για να ισχύει αυτό είναι να έχουμε δειγματοληπτήσει το Μετασχ. Fourier $C_{xy}(e^{j\omega})$ σε $L \geq M+N-1$ σημεία, δηλ. να έχουμε υπολογίσει το Διακριτό Μετασχ. Fourier **τουλάχιστον** $(M+N-1)$ σημείων!
  - Αποφεύγουμε το time aliasing

- Έτσι, έχουμε έναν έτοιμο και γρήγορο αλγόριθμο για τον υπολογισμό της συνέλιξης δυο απεριοδικών σημάτων μέσω του Διακριτού Μετασχ. Fourier!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Γραμμική συνέλιξη δυο απεριοδικών σημάτων $x[n], y[n]$ διάρκειας M και N μέσω DFT:

1. Κάνουμε zero padding στα δυο σήματα ώστε να έχουν διάρκεια τουλάχιστον

$$L = M + N - 1$$

2. Εφαρμόζουμε Διακριτό Μετασχ. Fourier L σημείων στα δυο σήματα → $X[k], Y[k]$

3. Πολλαπλασιάζουμε τους Διακριτούς μετασχ. Fourier μεταξύ τους: $X[k]Y[k]$

4. Εφαρμόζουμε αντίστροφο Διακριτό Μετασχ. Fourier και κρατάμε L δείγματα του αποτελέσματος

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

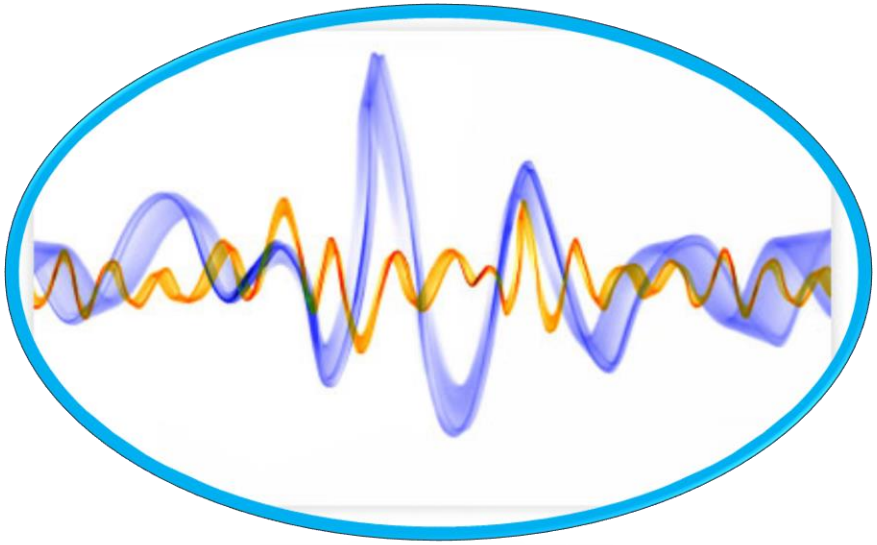
- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Ενδεικτικός κώδικας

```
% Random signals of N = 6
x = randn(1, 6);
h = randn(1, 6);
n = 0:5;
% Plotting
figure;
subplot(211); stem(n, x); subplot(212); stem(n,h);
% Convolution length
ConvLenMin = 11;
```

```
% Zero-padding
xzp = [x zeros(1, ConvLenMin-length(x))];
hzp = [h zeros(1, ConvLenMin-length(h))];
% Taking DFT (default, @ N points)
X = fft(xzp);
H = fft(hzp);
% Multiply
Y = X.*H;
% Inverse DFT (circular convolution)
yzp = ifft(Y);
% Linear Convolution
y = conv(x, h);
% Plotting
figure; subplot(211); stem(0:10, yzp);
subplot(212); stem(0:10, y);
```

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

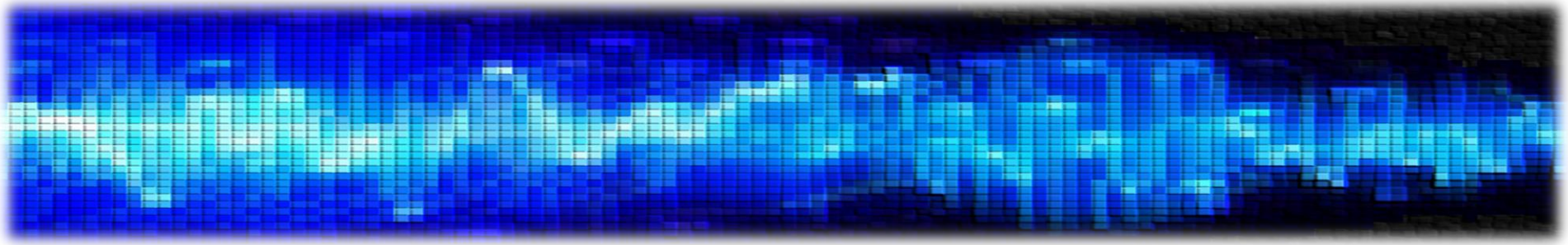
ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 24Η



- Φασματική Ανάλυση

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Στο εξής θα γράφουμε το Διακριτό Μετασχ. Fourier ως **DFT** και το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ως **DTFT**, για συντομία

- Πρόβλημα: πολλή από τη θεωρία που μάθαμε για σήματα άπειρης διάρκειας έχει πρόβλημα εφαρμογής στην πράξη
  - Άπειρη διάρκεια!!! ☺

- Στην πράξη, έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα/κομμάτι ενός σήματος άπειρης διάρκειας
  - Για παράδειγμα, έχουμε μόνο N δείγματα ενός ημιτόνου

- Μπορούμε όμως να μελετήσουμε τέτοια σήματα υποθέτοντας ότι το άπειρης διάρκειας σήμα $x[n]$ πολλαπλασιάστηκε με ένα πεπερασμένης διάρκειας (N δειγμάτων) παράθυρο $w[n]$, και το αποτέλεσμα της πράξης είναι αυτό που έχουμε στα χέρια μας

- Άρα εμείς έχουμε το

$$\hat{x}[n] = x[n]w[n]$$

και η εικόνα του στο χώρο του Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου είναι η

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας το κάνουμε πιο συγκεκριμένο: **μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συχνότητα ενός ημιτόνου από ένα μόνο τμήμα του**?
- Έστω το **περιοδικό** σήμα

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1), \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$X(e^{j\omega}) = A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1)$$

- Η «τετραγωνικώς» παραθυροποιημένη ☺ έκδοση του θα έχει DTFT

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]w[n]\} = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα έχουμε το μετασχ. Fourier του παραθύρου!
  - Ο οποίος ονομάζεται **πυρήνας Dirichlet**
- Άρα θα δειγματοληπτήσουμε στη συχνότητα το σήμα

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

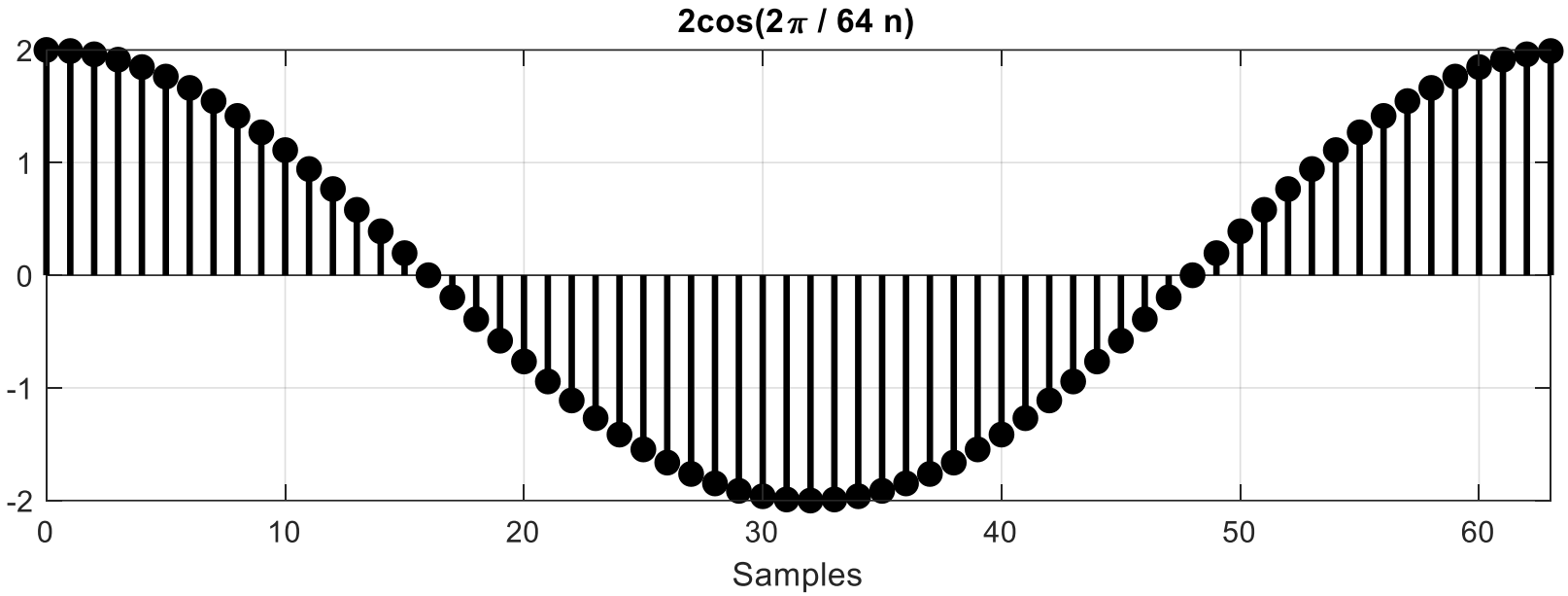
- Για ευκολία, $\phi_1 = 0,\ A_1 = 2$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right) + W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right)$$

- Έστω ότι $\omega_1 = \frac{2\pi}{64}$ και επιλέγουμε να πάρουμε **ακριβώς 64 δείγματα** του σήματος στο χρόνο, δηλ.



- Παρατηρήστε ότι πήραμε **ακριβώς μια περίοδο** του περιοδικού ημιτόνου (περίοδος $N = 64$)

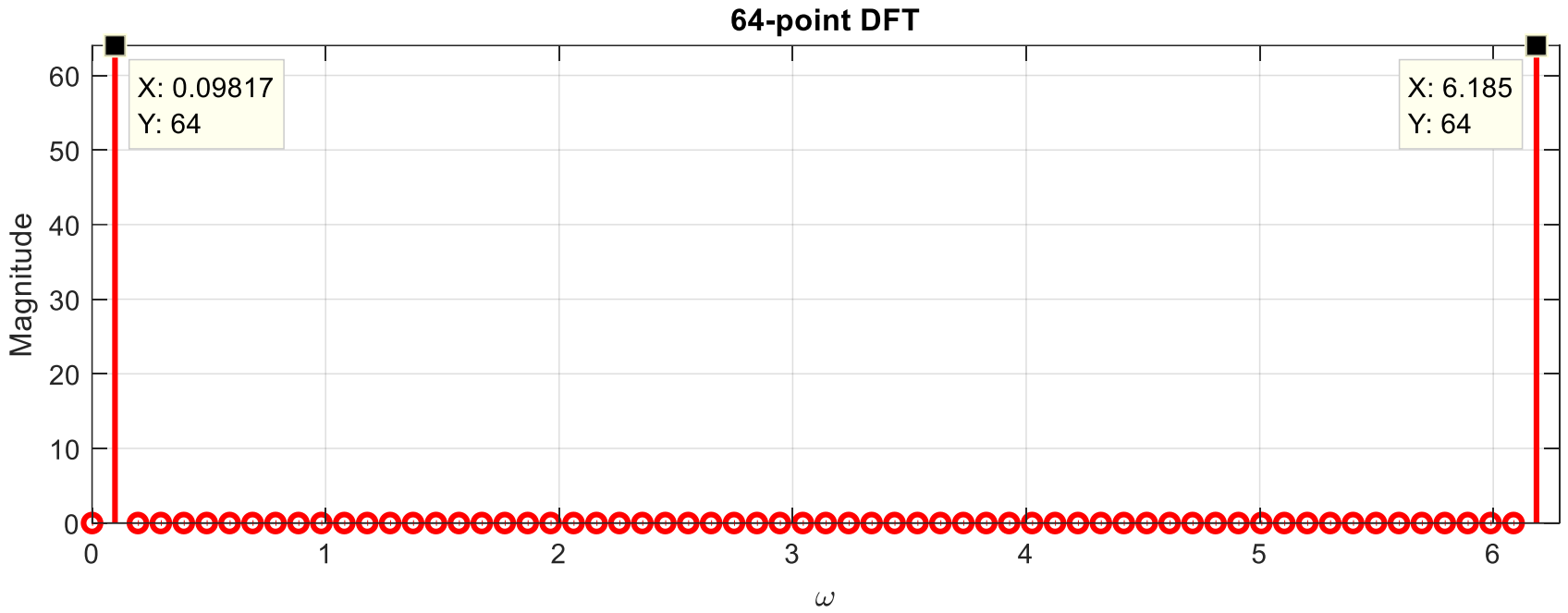
- Ας κάνουμε DFT επάνω στο σήμα αυτό…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

$$\hat{X}[k] = W\left(e^{j(2\pi k/64 - 2\pi/64)}\right) + W\left(e^{j(2\pi k/64 + 2\pi/64)}\right)$$

- Η εικόνα που παίρνουμε είναι αυτή:



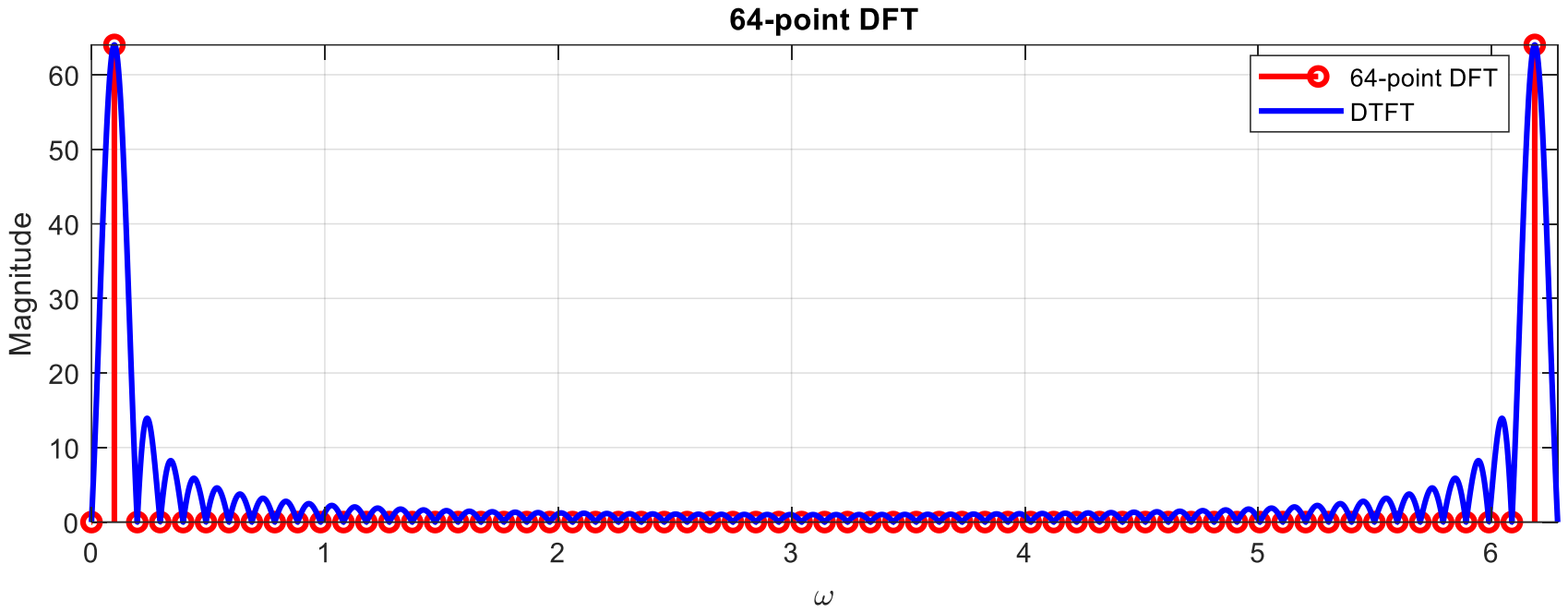
- Παρατηρήστε ότι έχουμε λάβει μη μηδενικές τιμές **ακριβώς** στις συχνότητες $2\pi/64$ και $2\pi - \frac{2\pi}{64}$!!
- Σαν να δειγματοληπτήσαμε ακριβώς στις υποτιθέμενες συναρτήσεις Δέλτα!
  - Γιατί συνέβη αυτό?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

$$\hat{X}[k] = W\left(e^{j(2\pi k/64 - 2\pi/64)}\right) + W\left(e^{j(2\pi k/64 + 2\pi/64)}\right)$$

- Ας βάλουμε τον DTFT επάνω στο ίδιο γράφημα:

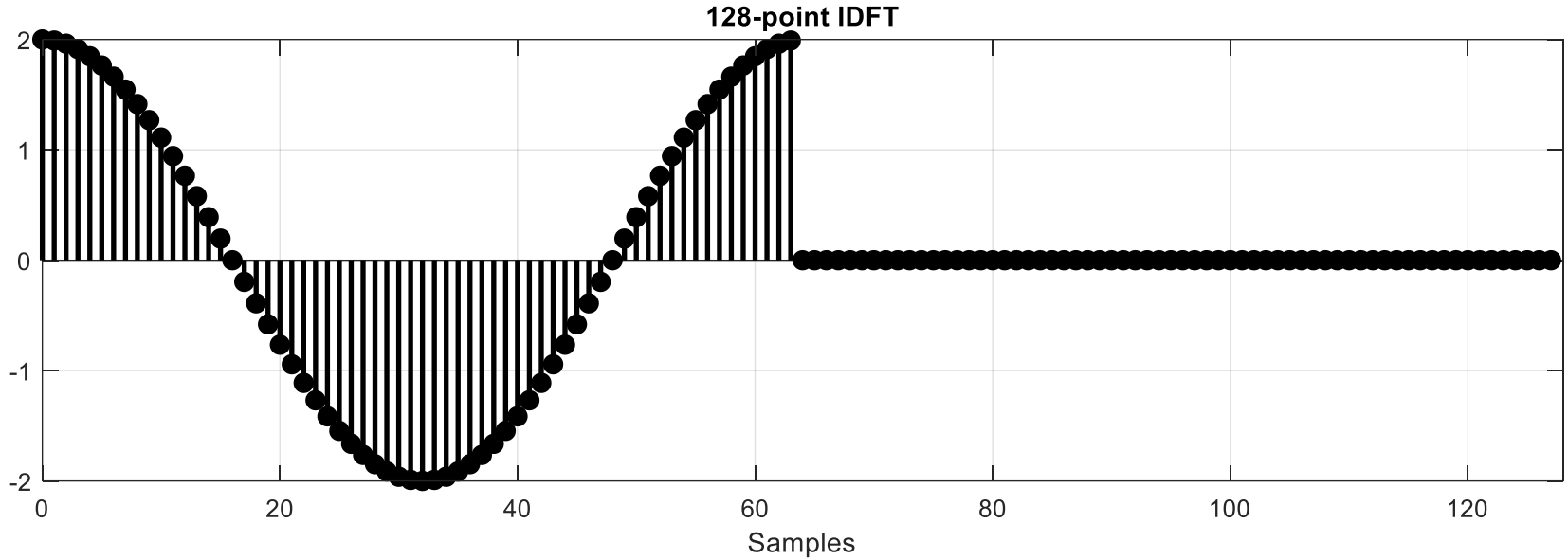


- Βλέπετε ότι δειγματοληπτήσαμε «βέλτιστα» τον DTFT!
- Τι θα συνέβαινε αν δειγματοληπτούσαμε με περισσότερα από 64 δείγματα στη συχνοτητα?
- Θα είχαμε zero-padded σήμα στο χρόνο!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Το zero-padding οδηγεί σε ασυνέχεια!



- Μια τέτοια ασυνέχεια χρειάζεται υψηλές συχνότητες για να αναπαρασταθεί
  - Πράγματι, τέτοιες συχνότητες υπήρξαν όταν πήραμε παραπάνω δείγματα του DFT, σε συχνότητες διαφορετικές της $\frac{2\pi}{64}$

- Επιπλέον, επειδή δώσαμε **ακριβώς** μια περίοδο του ημιτόνου στον DFT, αυτός θεώρησε ότι το σήμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα περιοδικό σήμα **ΜΙΑΣ** συχνότητας $\frac{2\pi}{64}$, και εμφάνισε μόνο **μια** μη μηδενική τιμή σε αυτή τη συχνότητα!

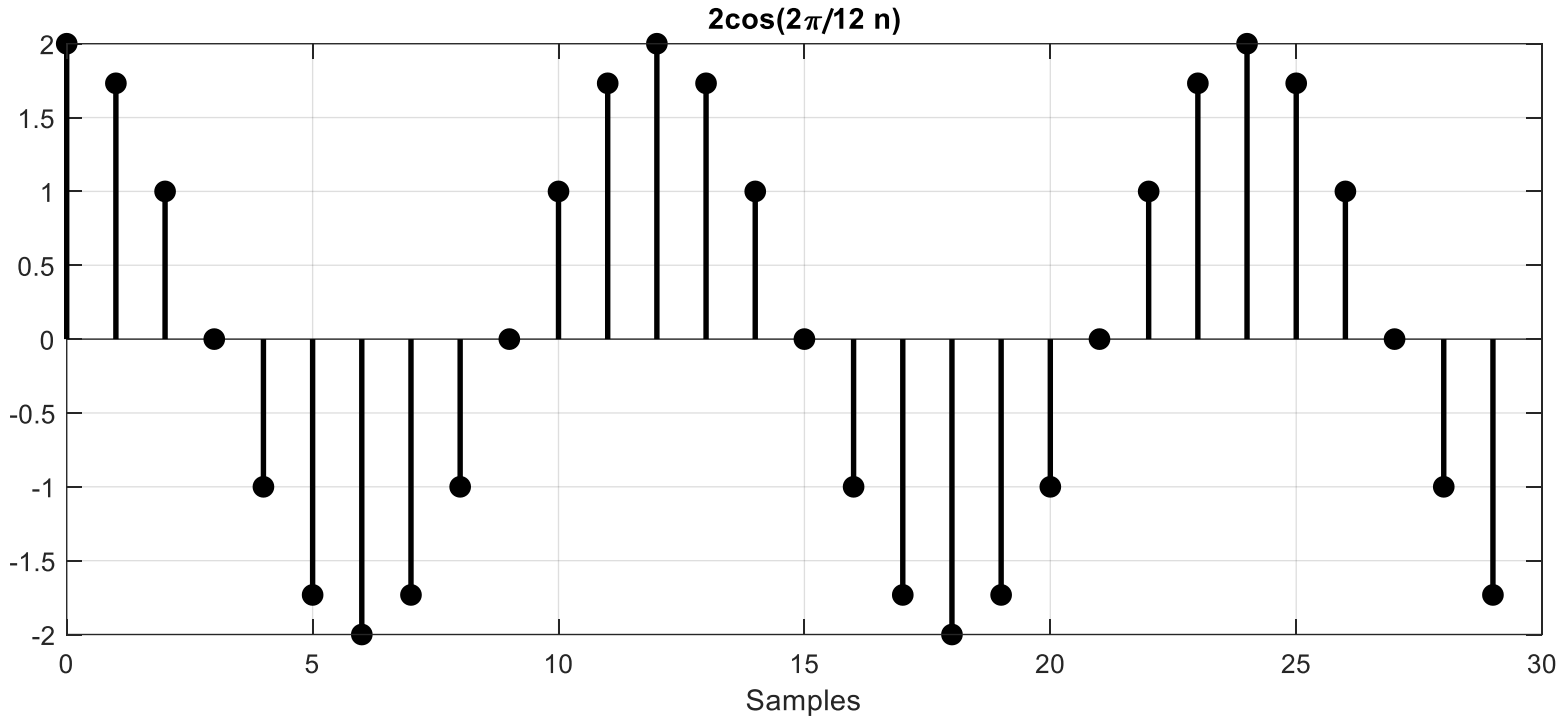
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Δεν μπορούμε όμως να ξέρουμε εκ των προτέρων την περίοδο ενός σήματος που θέλουμε να αναλύσουμε (ειδικά όταν αποτελείται από άθροισμα πολλών άγνωστων σημάτων)

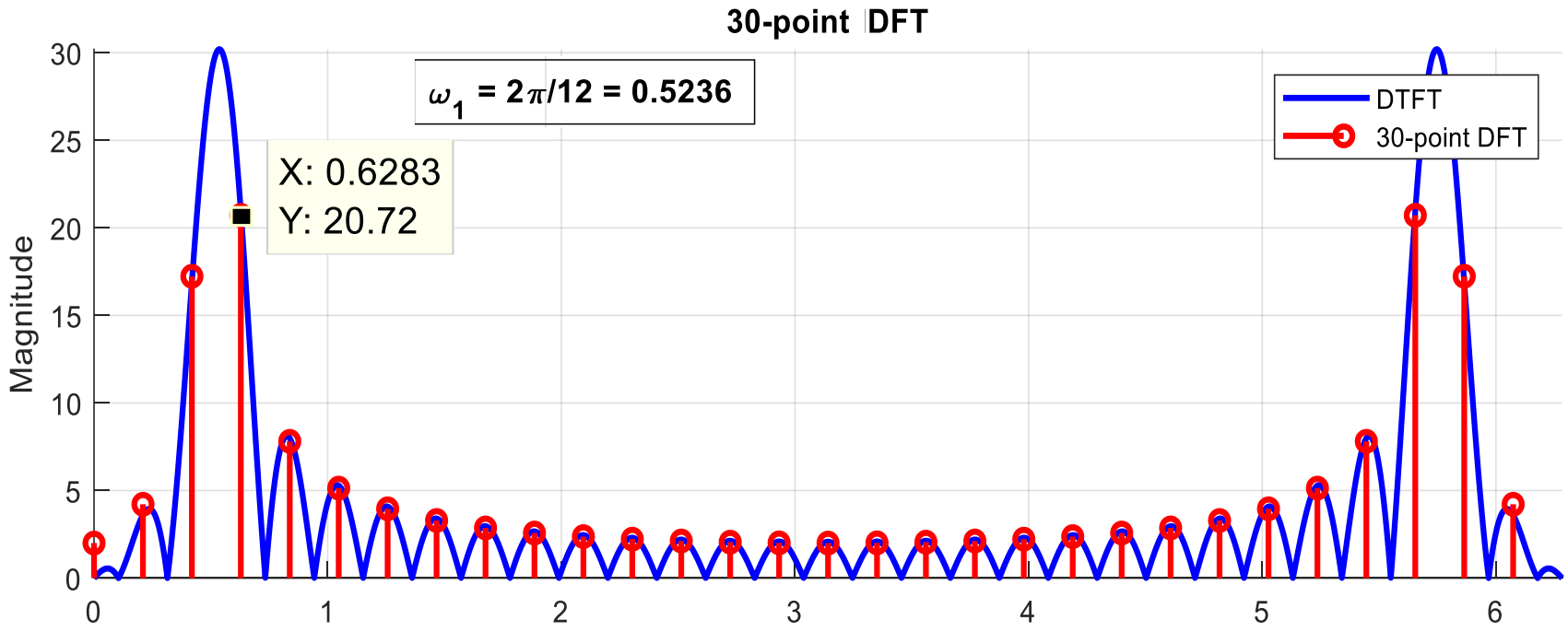
- Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι – στο ίδιο παράδειγμα – τα δείγματα μας δεν αντιστοιχούν σε μια περίοδο αλλά σε 2.5 περιόδους

- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}$, για λόγους αισθητικούς (απεικόνισης)



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ο DFT σε 30 σημεία, μαζί με τον DTFT, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα

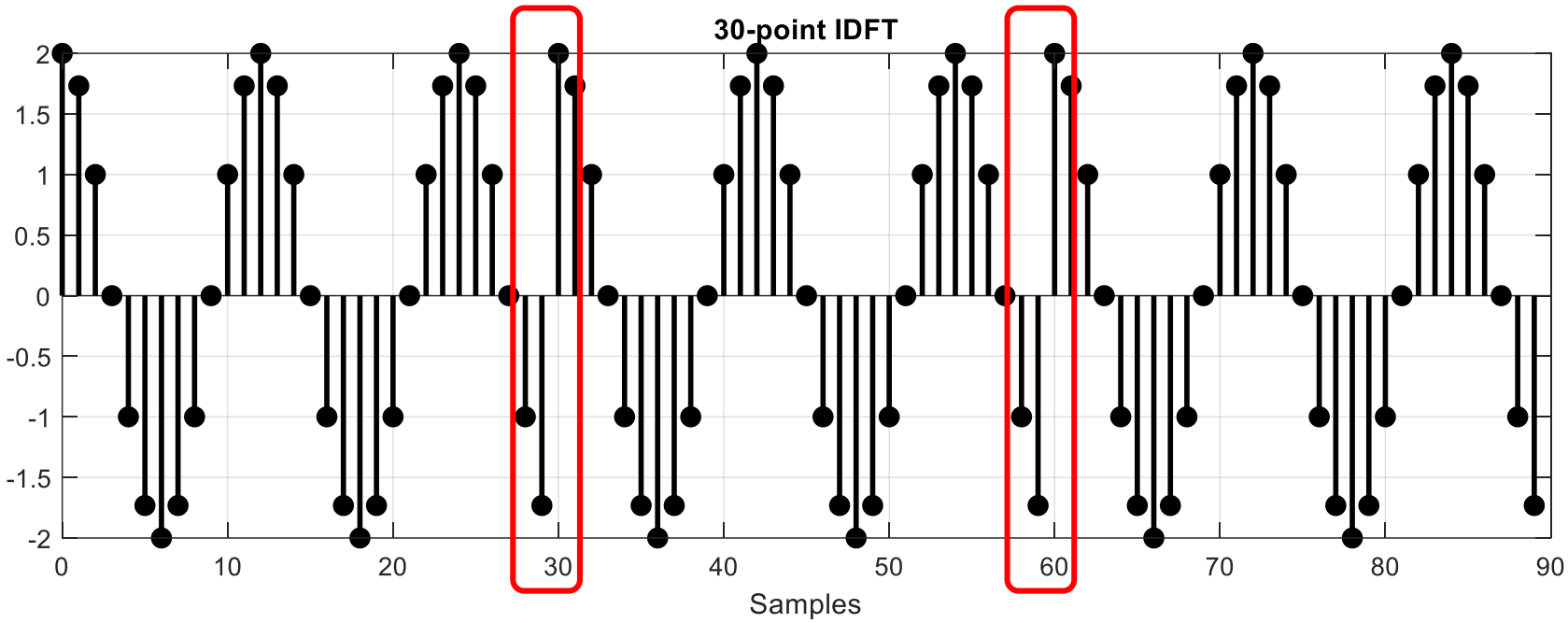


- Βλέπετε ότι όχι μόνο «χάσαμε» το peak που αντιστοιχεί στη συχνότητα μας ω...
  - ...αφού τα frequency bins «πέφτουν» εκατέρωθεν της πραγματικής συχνότητας (**spectral scalloping**) ...
- ...αλλά δειγματοληπτήσαμε και συχνότητες που «ανήκουν» στο μετασχ. Fourier του παραθύρου!
- Γιατί συνέβη αυτό?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Ο DFT υπέθεσε ότι το σήμα που αναλύει είναι το παρακάτω:

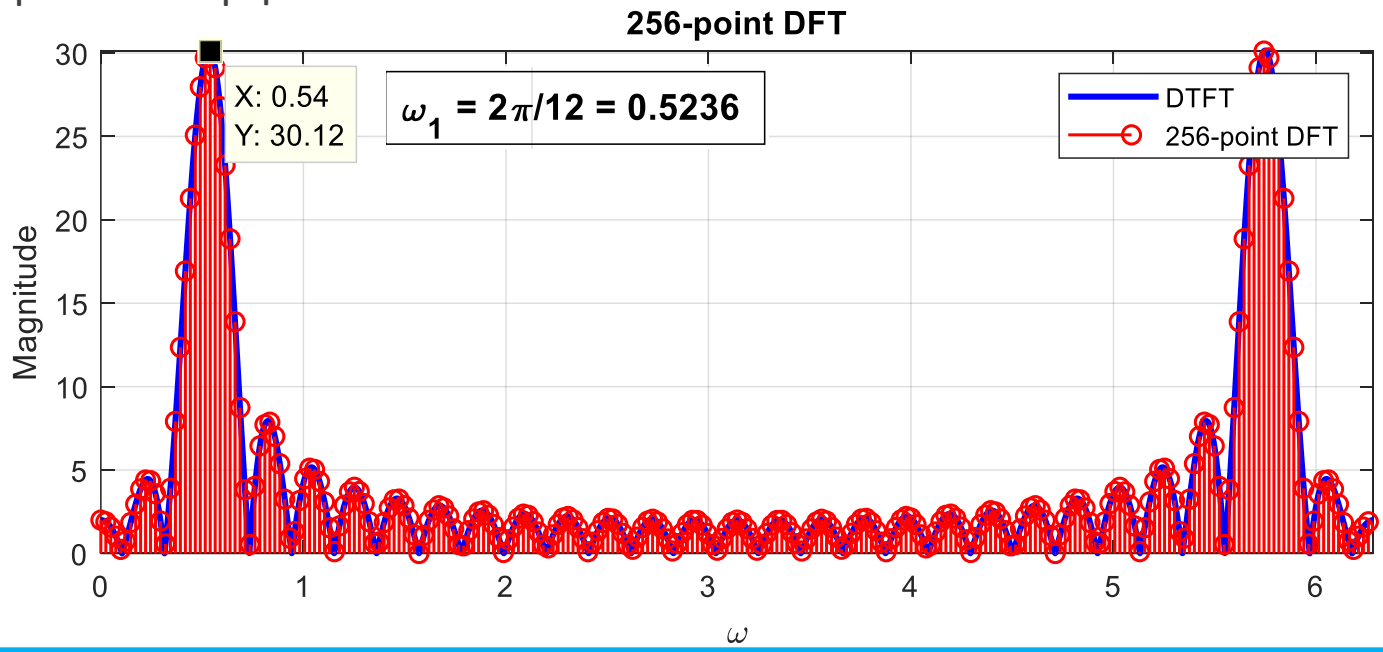


- Οι ασυνέχειες αυτές απαιτούν κι άλλες συχνότητες (χαμηλές και υψηλές) για να μοντελοποιηθούν, πέραν της $\frac{2\pi}{12}$
  - Τις συχνότητες αυτές που δειγματοληπτήσαμε στον DTFT!

- Μπορούμε να βελτιώσουμε την κατάσταση?
  - Ναι! Να δειγματοληπτήσουμε **πυκνότερα** τον DTFT! ☺

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Δηλ. να αυξήσουμε τον αριθμό N των δειγμάτων που παίρνουμε στον DFT
- Κάποια από τα παραπάνω δείγματα θα «έπεφταν» πάνω στις δυο κορυφές του DTFT και θα «έπιαναν» τις σωστές συχνότητες
- **Πυκνότερη δειγματοληψία του DTFT** (ήτοι, μεγαλύτερος αριθμός δειγμάτων N του DFT) οδηγεί σε **zero-padding του σήματος στο χρόνο**
  - Η περιοδικότητα «καταργείται»!
  - Δημιουργούνται ασυνέχειες!
  - Αλλά η συχνότητα μπορεί να εκτιμηθεί! ☺



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Ενδεικτικός κώδικας

```
% Frequency
w0 = 2*pi/12;
% Period
N0 = 12;
% Number of periods
NoP = 2.5;
% Signal length
N = NoP*N0;
% Windowed signal
x = 2*cos(w0*(0:N-1));
% Plotting
figure; stem((0:N-1), x, 'k');
grid;
```

```
% FFT
NFFT = 256;
X = fft(x, NFFT);
omega = linspace(0, 2*pi, 6000);
% DTFT of w[n] centered aroun w0
W1 = (sin((omega-w0)*N/2)./sin((omega-w0)/2))...
    .*exp(-1i*(omega-w0)*(N-1)/2);
% DTFT of w[n] centered aroun 2pi-w0
W2 = (sin((omega-(2*pi-w0))*N/2)./sin((omega-(2*pi-w0))/2))...
    .*exp(-1i*(omega-(2*pi-w0))*(N-1)/2);
% Sum of DTFTs
W = W1+W2;
% Plotting
figure;  plot(omega, abs(W), 'b', 'LineWidth', 2)
axis([0 2*pi 0 max(abs(W))]); grid;
hold on; stem((0:NFFT-1)*2*pi/NFFT, abs(X), 'r', 'LineWidth', 1);
title('256-point DFT');
xlabel('\omega'); ylabel('Magnitude');
legend('DTFT', '256-point DFT');
```

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Όσον αφορά το **πλάτος** του ημιτόνου?
- Έχουμε

$$\left|\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{A_1}{2}\left|W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right)\right| + \frac{A_1}{2}\left|W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right)\right|$$

- Ξέρουμε ότι

$$\left|W\left(e^{j0}\right)\right| = N+1$$

με $N+1$ τη διάρκεια του παραθύρου στο χρόνο

- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε το πλάτος που αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = \pm\omega_1$ που εκτιμούμε με τον αριθμό $N+1$
- Ο αριθμός $N+1$ συμπίπτει με τον αριθμό των δειγμάτων στο τετραγωνικό παράθυρο
- Για οποιοδήποτε παράθυρο έχουμε

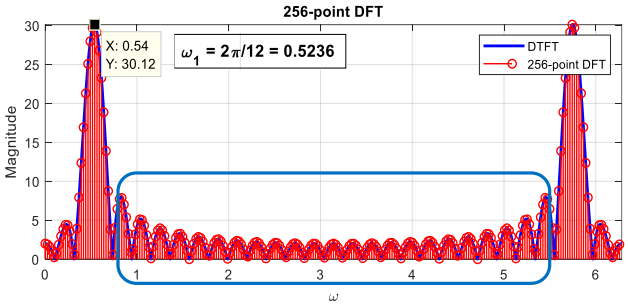
$$W\left(e^{j0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε με το άθροισμα όλων των δειγμάτων του $w[n]$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

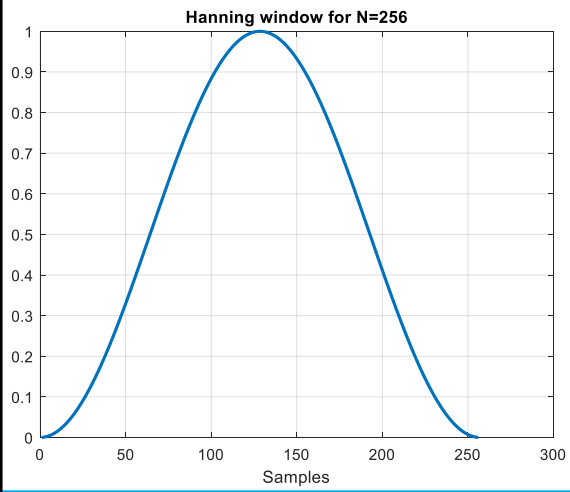
- Το πρόβλημα της **φασματικής διασποράς (spectral spreading)** - το γεγονός ότι ο μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου έχει ενέργεια και σε άλλες συχνότητες εκτός του $\omega = 0$ – παραμένει
  - Ύπαρξη ισχυρών πλευρικών λοβών!



- Πώς θα μπορούσαμε να το βελτιώσουμε κι αυτό?
  - Να αλλάξουμε παράθυρο! ☺

- Ας δοκιμάσουμε το παράθυρο Hanning (Von Hann) αντί του τετραγωνικού:

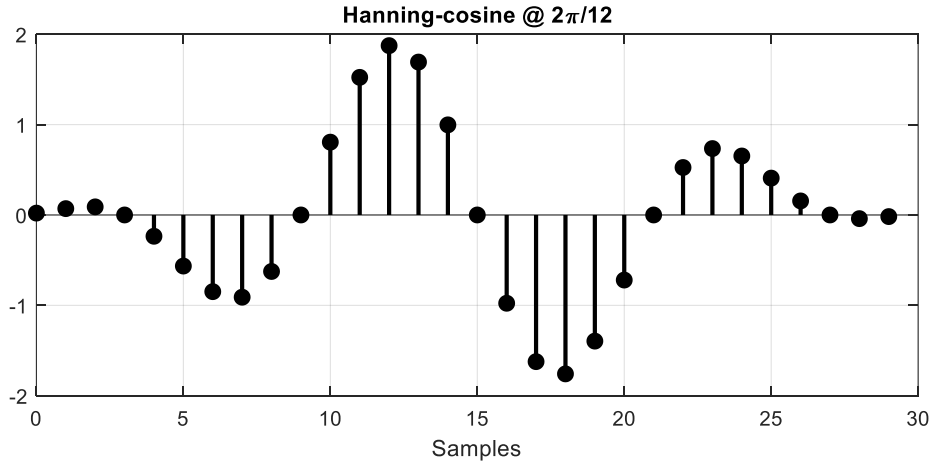
$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \le n \le N \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



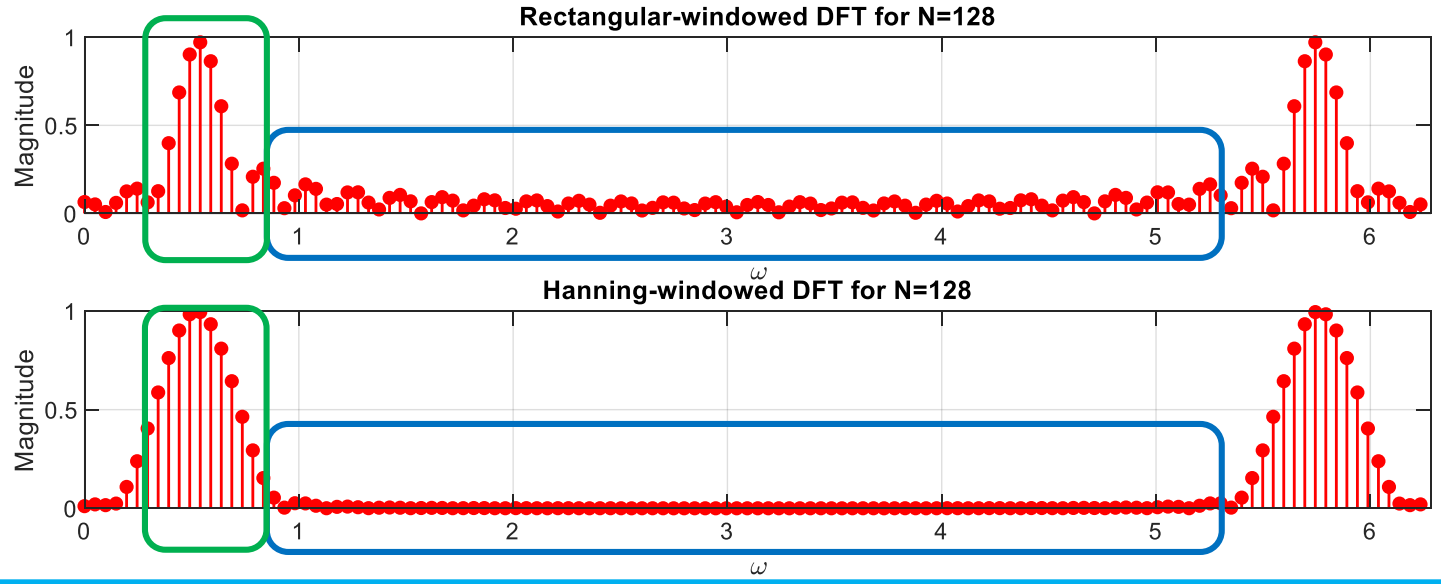
- Ο DTFT του αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό τριών DTFT του τετραγωνικού παραθύρου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Πολλαπλασιάζοντας το ημίτονο με ένα παράθυρο Hanning:



- Παίρνοντας τώρα DFT σε 128 σημεία και κανονικοποιώντας, έχουμε:



+++ Μείωση διασποράς

--- Αύξηση εύρους κεντρικού λοβού

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι **το πλήθος N των συντελεστών του DFT** (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT ανά $\frac{2\pi}{N}$) πρέπει να είναι **όσο μεγαλύτερο γίνεται**
- Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**
  - Στα περισσότερα προγραμματιστικά περιβάλλοντα (MATLAB/Octave) γίνεται αυτόματα
- **Πυκνή δειγματοληψία** του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT
- **Σωστή εύρεση του πλάτους** του σήματος γίνεται διαιρώντας τον DFT με την τιμή

$$W\left(e^{j0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Η **φασματική διασπορά** μπορεί να μειωθεί επιλέγοντας διαφορετικό παράθυρο
- Ας εγκαταλείψουμε τώρα την ανάλυση ενός ημιτόνου και ας πάμε σε περισσότερες συχνότητες κι ας δούμε τι συμβαίνει εκεί

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Έστω

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \phi_2), \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$X(e^{j\omega}) = A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1)$$

$$+A_2 \pi e^{j\phi_2} \delta(\omega - \omega_2) + A_2 \pi e^{-j\phi_2} \delta(\omega + \omega_2)$$

- Η τετραγωνικώς παραθυροποιημένη έκδοση του θα έχει DTFT

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]w[n]\} = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

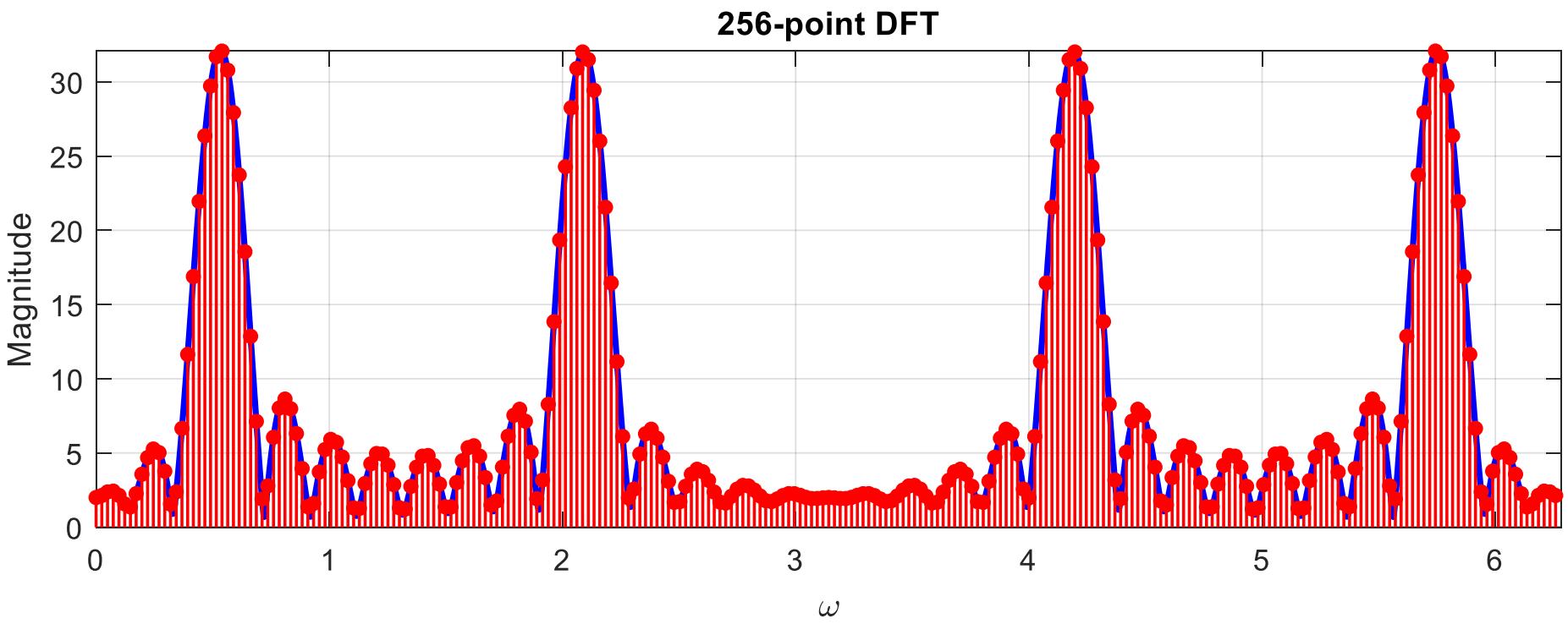
$$+\frac{A_2}{2} e^{j\phi_2} W(e^{j(\omega-\omega_2)}) + \frac{A_2}{2} e^{-j\phi_2} W(e^{j(\omega+\omega_2)})$$

- Για ευκολία, $\phi_1 = \phi_2 = 0,\ A_1 = A_2 = 2$, και $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + W(e^{j(\omega+\omega_1)}) + W(e^{j(\omega-\omega_2)}) + W(e^{j(\omega+\omega_2)})$$

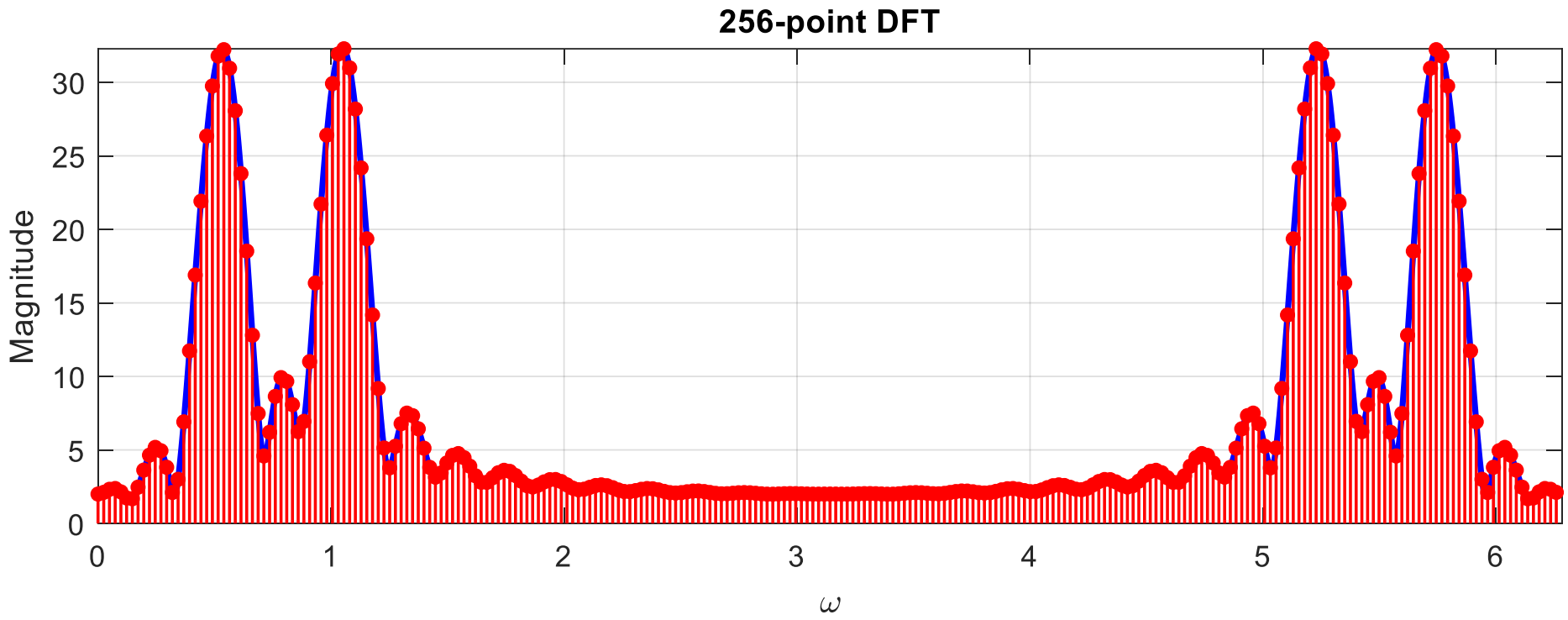
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Αρχικά, έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{3}$



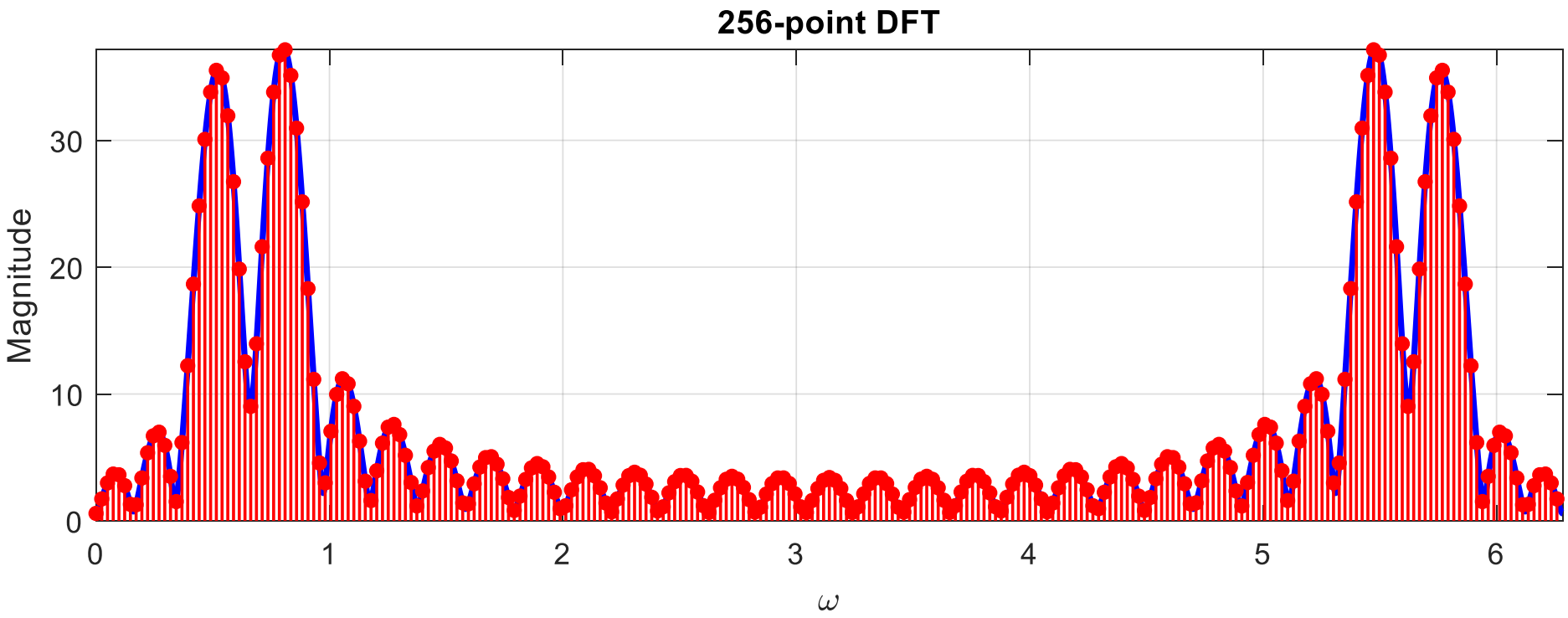
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{6}$



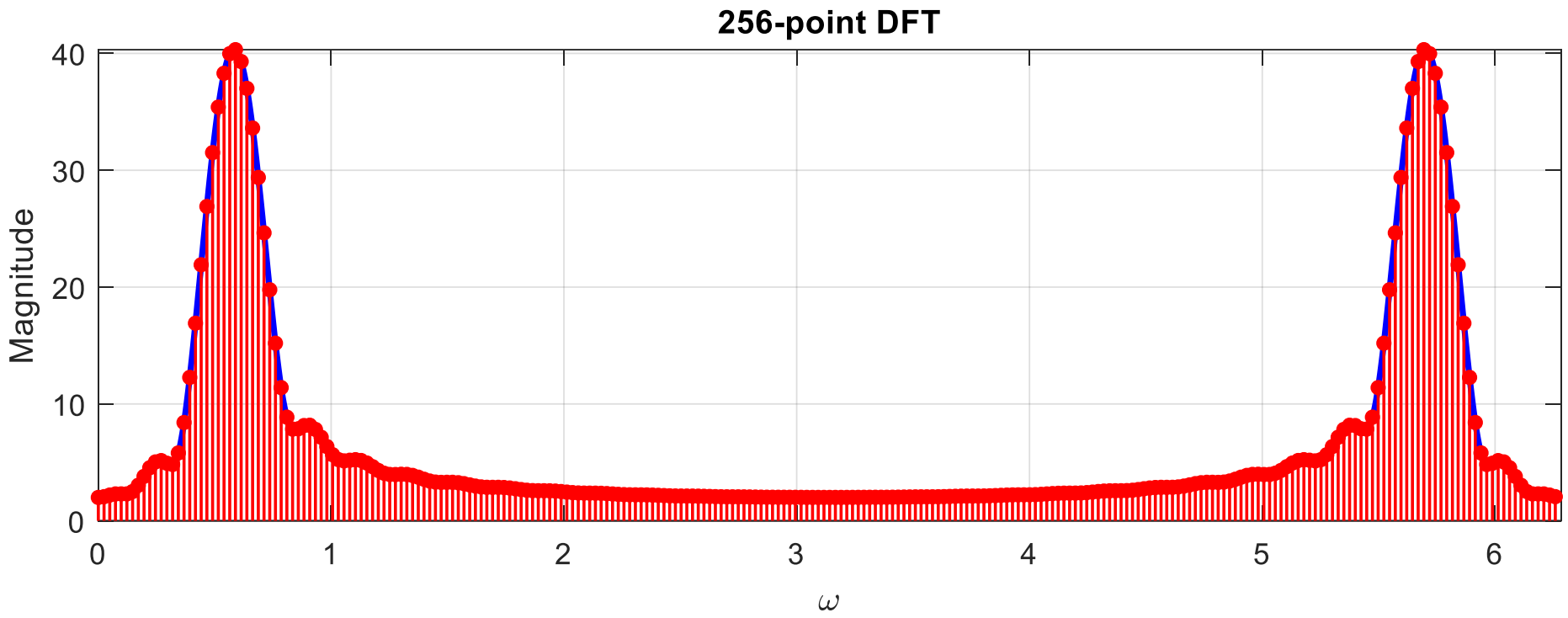
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{8}$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{10}$

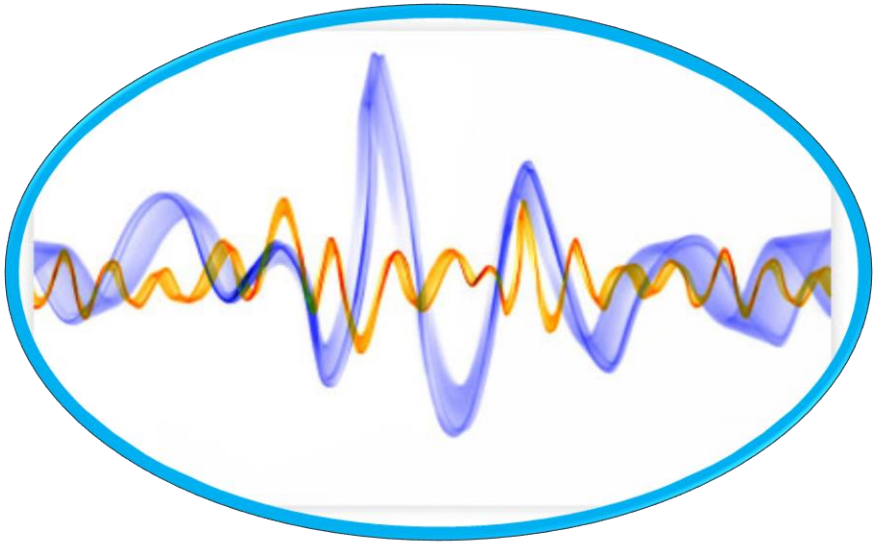


© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Τι παρατηρήσατε?
- **α) Όταν οι συχνότητες ήρθαν «κοντά», το πλάτος της μιας επηρεάστηκε από αυτό της άλλης**
  - **Φασματική διαρροή (spectral leakage) λόγω φασματικής διασποράς!**
  - **Οποιοδήποτε παράθυρο διασπείρει τη φασματική ενέργεια σε συχνότητες διάφορες της $\omega = 0$**
- **β) Όταν οι συχνότητες πλησίασαν «πολύ κοντά», δεν ήταν πια διαχωρίσιμες!**
  - **Ανεπαρκής ανάλυση!**
- Υπεύθυνοι για τη φασματική διαρροή λόγω φασματικής διασποράς είναι κυρίως οι πλευρικοί λοβοί του μετασχ. Fourier ενός παραθύρου…
- …ενώ υπεύθυνος για την ανεπαρκή ανάλυση είναι κυρίως ο κεντρικός λοβός του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου…
  - …είχε μεγάλο εύρος και επικαλύφθηκε με γειτονικούς…
- Ξέρουμε ότι τα περισσότερα παράθυρα έχουν κεντρικούς λοβούς μεγαλύτερους από του τετραγωνικού παραθύρου
  - Το κέρδος τους «προέρχεται» από τους πλευρικούς λοβούς
- Τι μπορούμε να κάνουμε?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

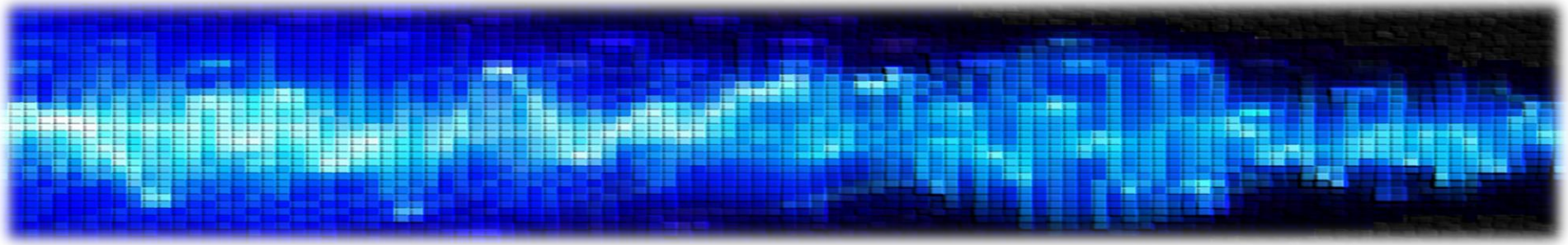
Συνεχίζεται... ☺



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 25Η



- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – review**
- **Διακριτός Μετασχ. Fourier**:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- **Αντίστρ. Διακριτός Μετασχ. Fourier:**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- **Το πλήθος N των συντελεστών του DFT** (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT ανά $\frac{2\pi}{N}$) πρέπει να είναι **όσο μεγαλύτερο γίνεται**
- Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**
  - Στα περισσότερα προγραμματιστικά περιβάλλοντα (MATLAB/Octave) γίνεται αυτόματα
- **Πυκνή δειγματοληψία** του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT
- **Σωστή εύρεση του πλάτους** του σήματος γίνεται διαιρώντας τον DFT με την τιμή

$$W\left(e^{j0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Η **φασματική διασπορά** μπορεί να μειωθεί επιλέγοντας διαφορετικό παράθυρο
- Ας εγκαταλείψουμε τώρα την ανάλυση ενός ημιτόνου και ας πάμε σε περισσότερες συχνότητες κι ας δούμε τι συμβαίνει εκεί

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – review**

- Έστω

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \phi_2), \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$X(e^{j\omega}) = A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1)$$

$$+A_2 \pi e^{j\phi_2} \delta(\omega - \omega_2) + A_2 \pi e^{-j\phi_2} \delta(\omega + \omega_2)$$

- Η τετραγωνικώς παραθυροποιημένη έκδοση του θα έχει DTFT

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]w[n]\} = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)})$$

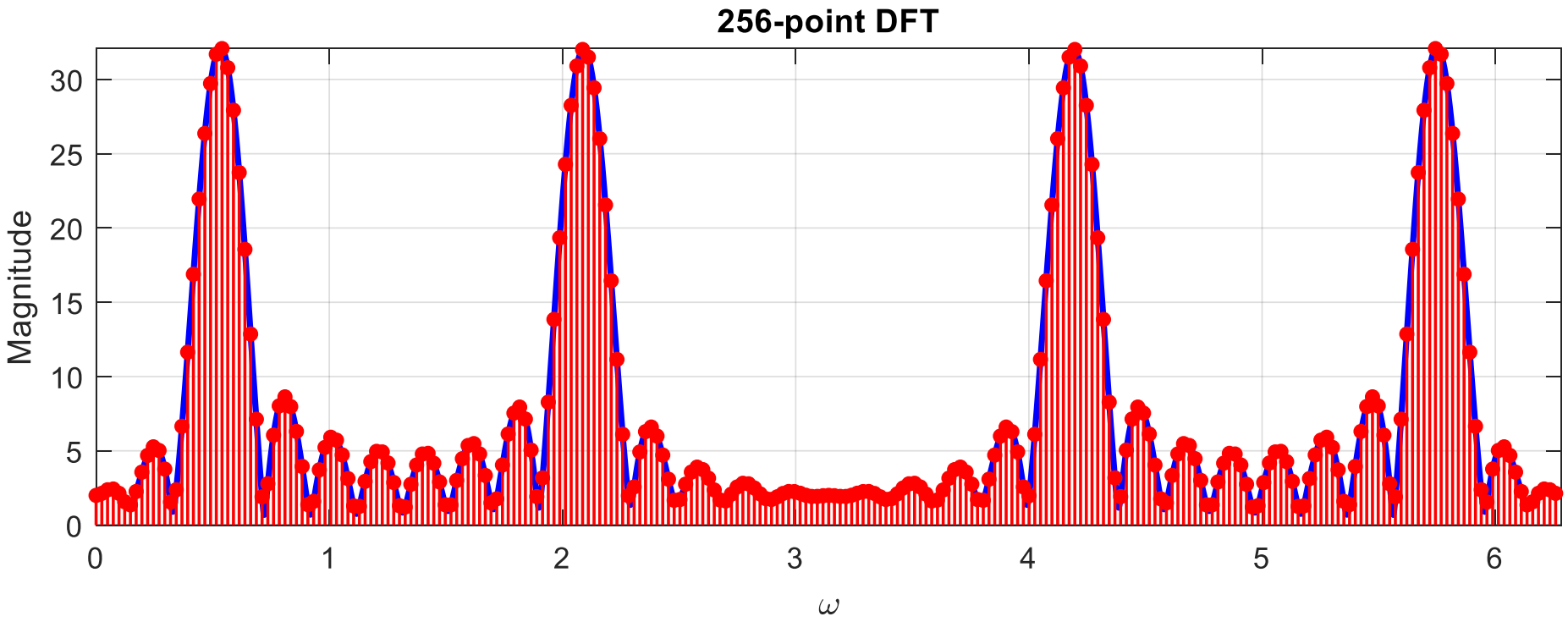
$$+\frac{A_2}{2} e^{j\phi_2} W(e^{j(\omega-\omega_2)}) + \frac{A_2}{2} e^{-j\phi_2} W(e^{j(\omega+\omega_2)})$$

- Για ευκολία, $\phi_1 = \phi_2 = 0,\ A_1 = A_2 = 2$, και $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + W(e^{j(\omega+\omega_1)}) + W(e^{j(\omega-\omega_2)}) + W(e^{j(\omega+\omega_2)})$$

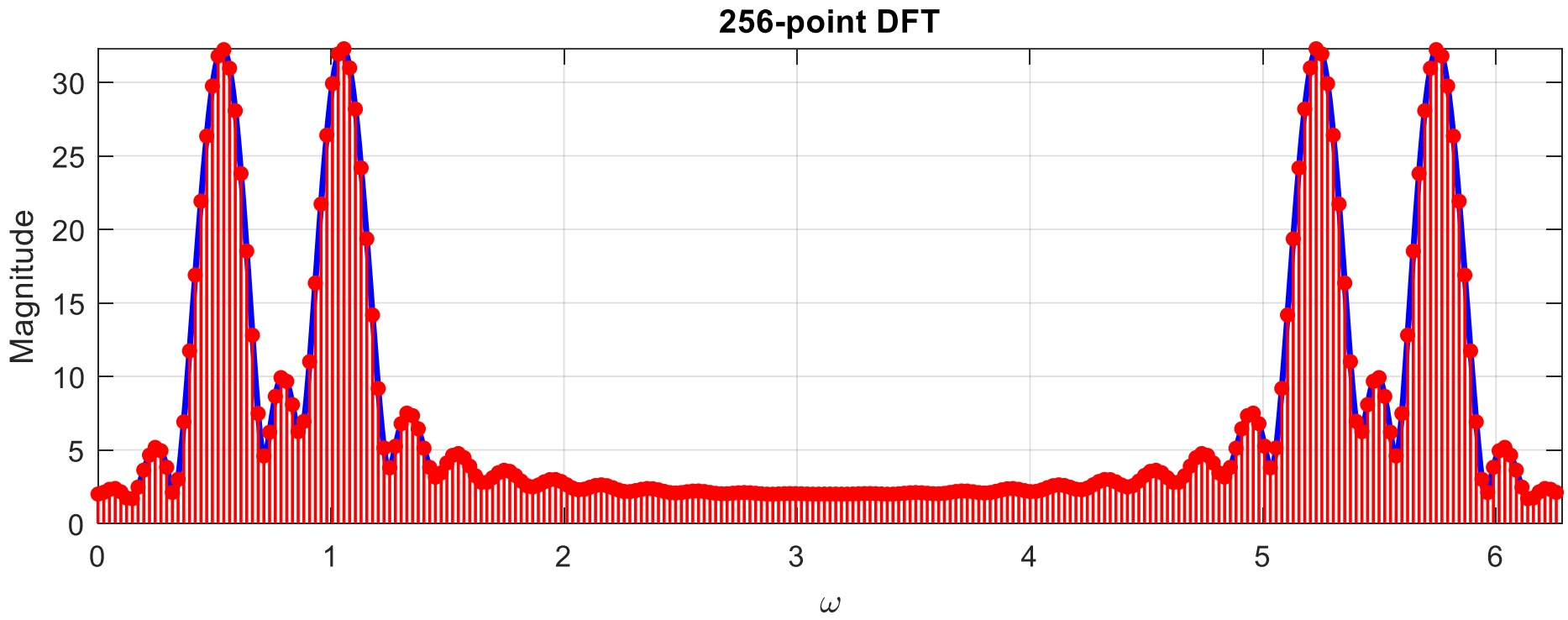
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Αρχικά, έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{3}$



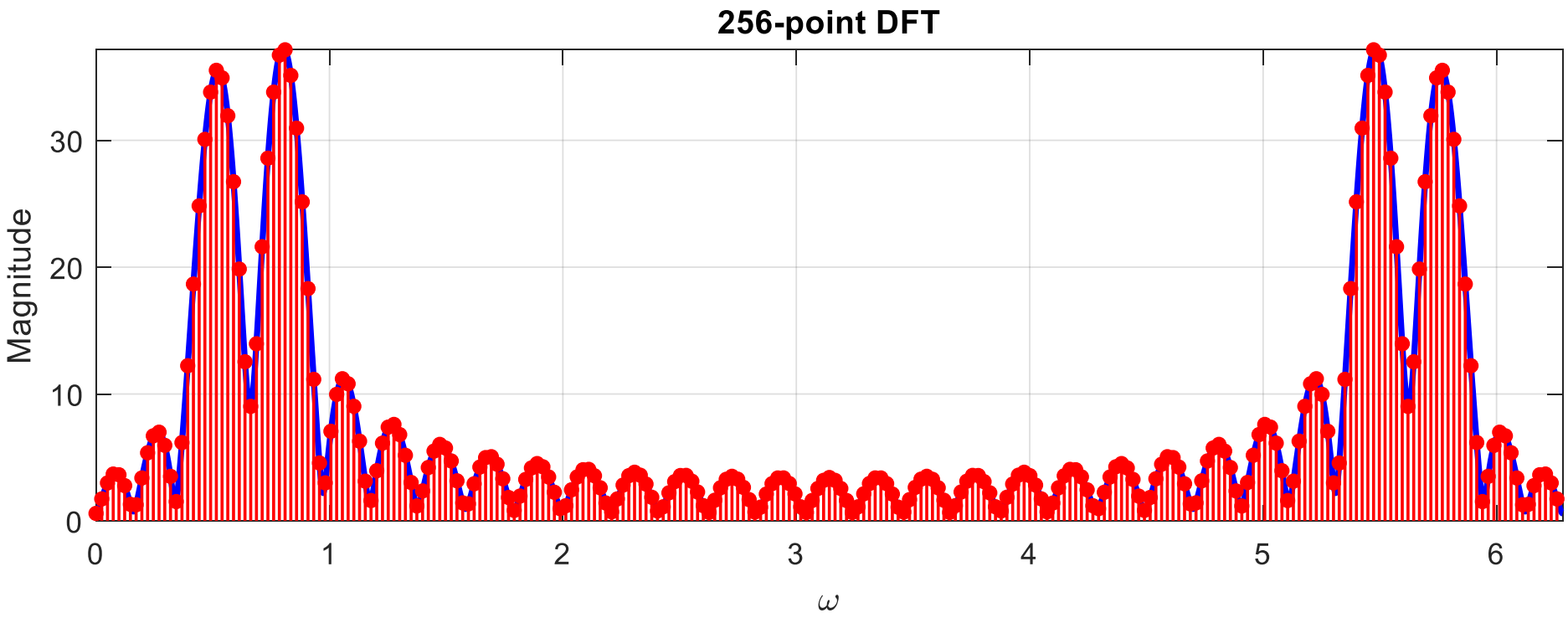
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{6}$



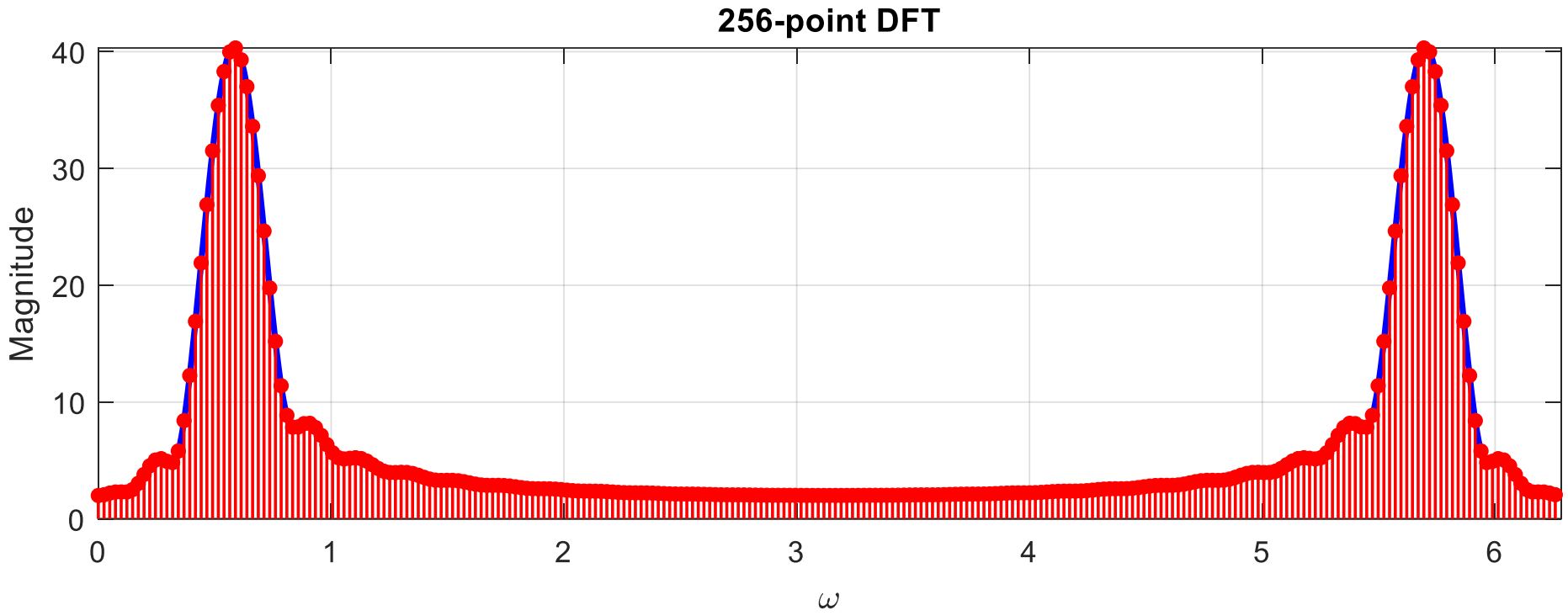
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{8}$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier – review**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{10}$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Τι παρατηρήσατε?
- **α) Όταν οι συχνότητες ήρθαν «κοντά», το πλάτος της μιας επηρεάστηκε από αυτό της άλλης**
  - **Φασματική διαρροή (spectral leakage) λόγω φασματικής διασποράς!**
  - **Οποιοδήποτε παράθυρο διασπείρει τη φασματική ενέργεια σε συχνότητες διάφορες της $\omega = 0$**
- **β) Όταν οι συχνότητες πλησίασαν «πολύ κοντά», δεν ήταν πια διαχωρίσιμες!**
  - **Ανεπαρκής ανάλυση!**
- Υπεύθυνοι για τη φασματική διαρροή λόγω φασματικής διασποράς είναι κυρίως οι πλευρικοί λοβοί του μετασχ. Fourier ενός παραθύρου…
- …ενώ υπεύθυνος για την ανεπαρκή ανάλυση είναι κυρίως ο κεντρικός λοβός του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου…
  - …είχε μεγάλο εύρος και επικαλύφθηκε με γειτονικούς…
- Ξέρουμε ότι τα περισσότερα παράθυρα έχουν κεντρικούς λοβούς μεγαλύτερους από του τετραγωνικού παραθύρου
  - Το κέρδος τους «προέρχεται» από τους πλευρικούς λοβούς
- Τι μπορούμε να κάνουμε?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Έχουμε λοιπόν δυο προβλήματα:
- α) Να μειώσουμε τη φασματική διαρροή μέσω μείωσης της φασματικής διασποράς

  a.k.a : να μειώσουμε τους πλευρικούς λοβούς
- β) Να αυξήσουμε την ανάλυση του φάσματος ώστε να διαχωρίζονται οι πολύ κοντινές συχνότητες

  a.k.a : να «στενέψουμε» το εύρος του κεντρικού λοβού

- Γνωρίζουμε ότι για το α) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά παράθυρα ανάλυσης (Hamming, Hanning, Blackman, Bartlett, Kaiser, Poisson, Slepian, Flat-top, Gaussian, κ.α.)

- Για το β), η αλλαγή παραθύρου επιδεινώνει την κατάσταση, καθώς «φαρδαίνει» τον κεντρικό λοβό
  - Πώς θα μπορούσαμε να το αντιμετωπίσουμε?

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

Τύπος Παραθύρου	Σχετικό πλάτος πλευρικών λοβών	Εύρος κεντρικού λοβού (προσέγγιση)
Τετραγωνικό	-13 dB	$\frac{4\pi}{M+1}$
Τριγωνικό (Bartlett)	-25 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Blackman	-57 dB	$\frac{12\pi}{M}$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

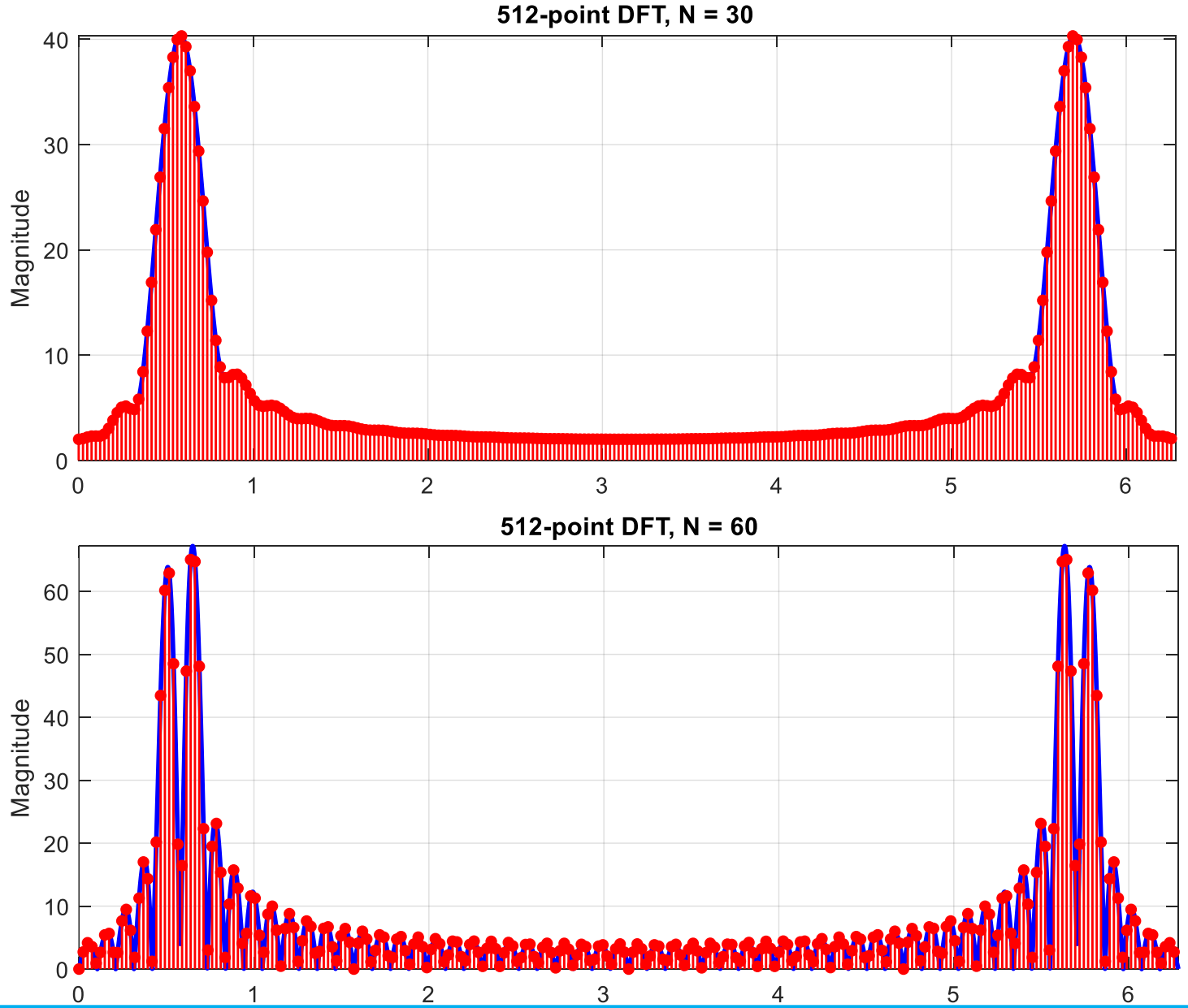
- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Μπορούμε να αυξήσουμε τη διάρκεια M του παραθύρου!!
  - Με άλλα λόγια, να πάρουμε περισσότερα δείγματα από το υπό ανάλυση σήμα!
- Ας επιχειρήσουμε να λύσουμε τα προβλήματα μας…
- Ας δούμε πόσο μήκος παραθύρου χρειαζόμαστε για να διαχωρίσουμε τις συχνότητες
- Για το τετραγωνικό παράθυρο, για να είναι (πλήρως) διαχωρίσιμες οι συχνότητες $\omega_1 < \omega_2$ (δηλ. χωρίς επικάλυψη των κεντρικών λοβών) αρκεί

$$\omega_2 - \omega_1 \geq \frac{4\pi}{M} \Rightarrow M \geq \frac{4\pi}{\frac{\pi}{30}} = 120$$

- Ας δούμε διάφορες τιμές του M

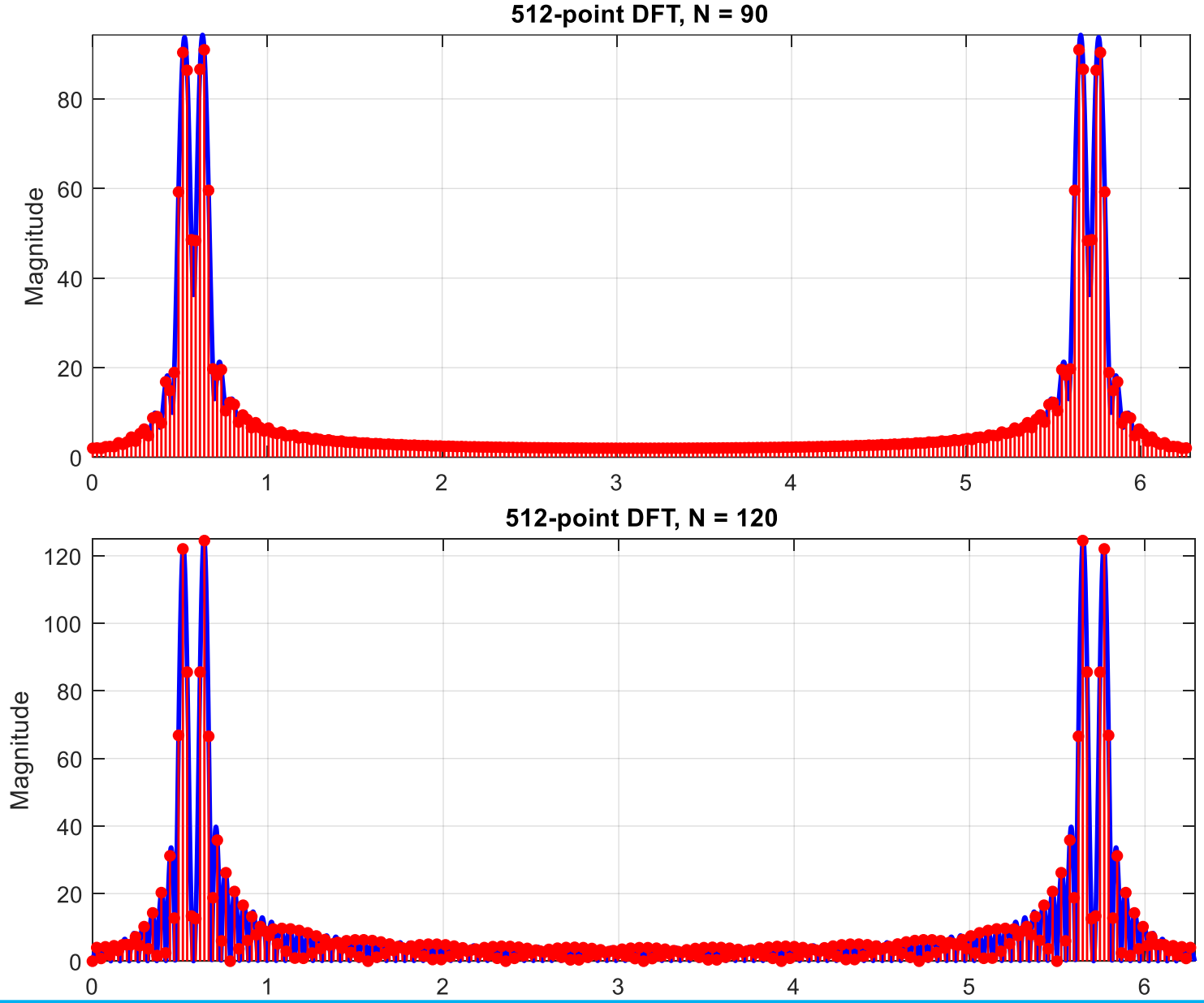
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Γνωρίζουμε ήδη ένα πολύ καλό παράθυρο, το παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left[\dfrac{n-\frac{M-1}{2}}{\frac{M-1}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

- Δυο παράμετροι: διάρκεια σήματος παραθύρου M, παράμετρος σχήματος β

- Ας ορίσουμε ως Δ_{ml} το εύρος του κεντρικού λοβού, ως η απόσταση μεταξύ των πρώτων μηδενισμών του φάσματος πλάτους εκατέρωθεν του μηδενός

- Ας ορίσουμε ως A_{sl} το λόγο σε dB μεταξύ του πλάτους του κεντρικού λοβού προς το πλάτος του μεγαλύτερου πλευρικού λοβού

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ο Kaiser βρήκε μια συνάρτηση του β συναρτήσει του $\mathrm{A_{sl}}$
- Είναι

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_{sl} < 13.26 \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26), & 13.26 < A_{sl} < 60 \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3), & 60 < A_{sl} < 120 \end{cases}$$

- Επίσης βρήκε μια σχέση μεταξύ $M, \Delta_{ml}, \mathrm{A_{sl}}$:

$$M \cong \frac{24\pi(\mathrm{A_{sl}} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1$$

- Οπότε για δεδομένα $\mathrm{A_{sl}}, \Delta_{ml}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους β, M

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Πολλά σήματα διακριτού χρόνου προέρχονται από δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου

- Συμβολίζοντας τη συχνότητα δειγματοληψίας ως f_s και άρα την περίοδο δειγματοληψίας ως $T_s = \frac{1}{f_s}$, κατά τη δειγματοληψία θα έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s} = 2\pi f T_s$$

και όταν δειγματοληπτούμε τη συχνότητα ω σε N σημεία κατά τον DFT, έχουμε:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} = 2\pi f_k T_s \Leftrightarrow f_k = \frac{k}{NT_s} = \frac{k}{N} f_s$$

- Οπότε οι συχνότητες του συνεχούς χρόνου που δειγματοληπτούνται κατά τον DFT είναι οι:

$$f_k = \frac{k}{N} f_s, \qquad k = 0,1,2,\dots,N-1$$

- Ας δούμε ένα παράδειγμα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Έστω το σήμα

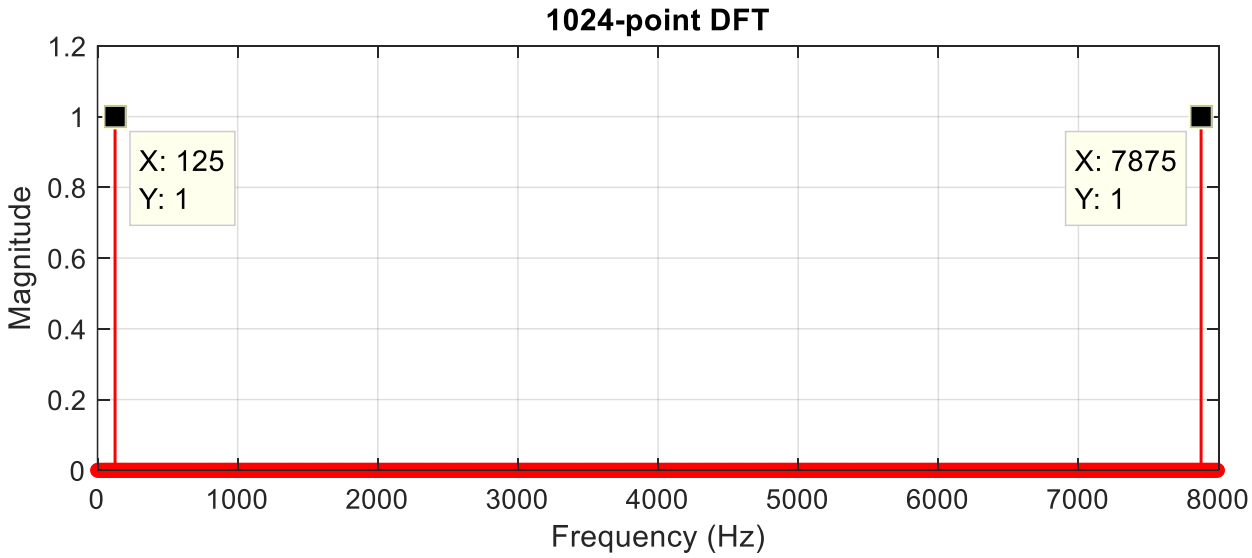
$$x(t) = 2\cos(2\pi 125t), \qquad 0 \le t \le 1$$

το οποίο δειγματοληπτούμε με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz

- Οι συχνότητες που αναπαρίστανται σε έναν DFT 1024 σημείων είναι οι:

$$f_k = \frac{k}{1024} 8000 = 7.8125k, \qquad k = 0,1,2,\dots,1023$$

- Η συχνότητα του σήματος θα αναπαρασταθεί από το bin $k = 16$ του DFT
  - …αλλά και από το bin $k = 1008$!!



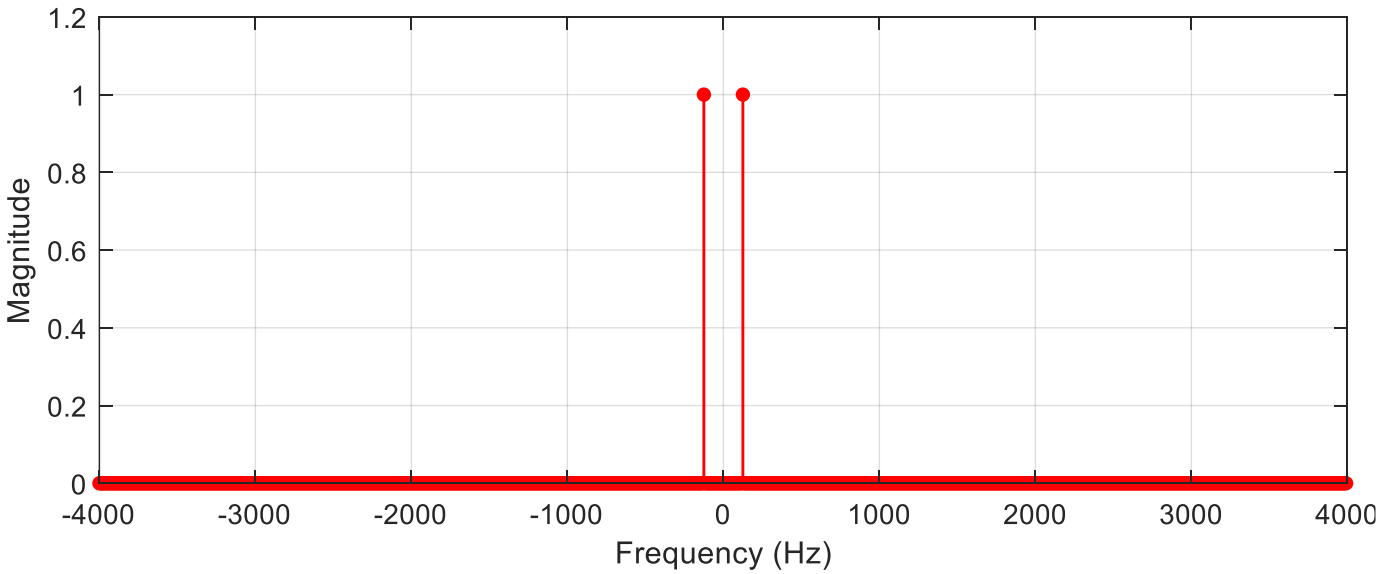
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Ξέρουμε όμως ότι ένα σήμα που δειγματοληπτείται με συχνότητα f_s μπορεί να αναπαραστήσει μοναδικά συχνότητες ως $f_s/2$

- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το αμφίπλευρο φάσμα στη συχνότητα f, στο διάστημα $\left(-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right)$

```
% Sampling frequency
fs = 8000;
% DFT samples
NFFT = 1024;
% Frequency bins
k = (-NFFT/2:NFFT/2-1);
% Frequency in Hz
f = k*fs/NFFT;
% Time index
t = 0:1/fs:1;
% f0
f0 = 125;
% Signal
x = 2*cos(2*pi*f0*t);
% DFT @ NFFT and normalize
X = fft(x, NFFT)/NFFT;
% Plotting
stem(f, fftshift(abs(X)), 'r', 'LineWidth', 1);
grid; xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('Magnitude');
```



- Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση *fftshift* του MATLAB, η οποία αντιστρέφει το δεξί με το αριστερό τμήμα του φάσματος που επιστρέφει ο *fft*

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

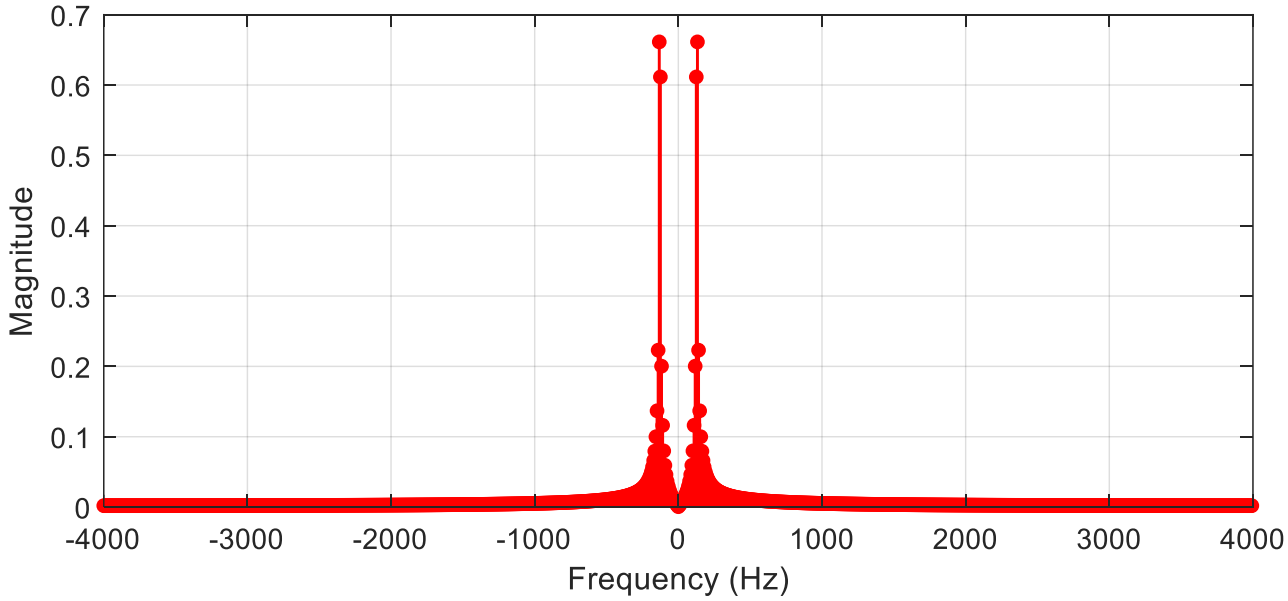
- Φυσικά δε γίνεται πάντα οι συχνότητες ενός σήματος να προκύπτουν ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{f_s}{N}$

- Έστω το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 129t), \qquad 0 \le t \le 1$$

το οποίο δειγματοληπτούμε με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8000$ Hz με έναν DFT 1024 σημείων

- Χρειαζόμαστε έναν DFT περισσότερων σημείων



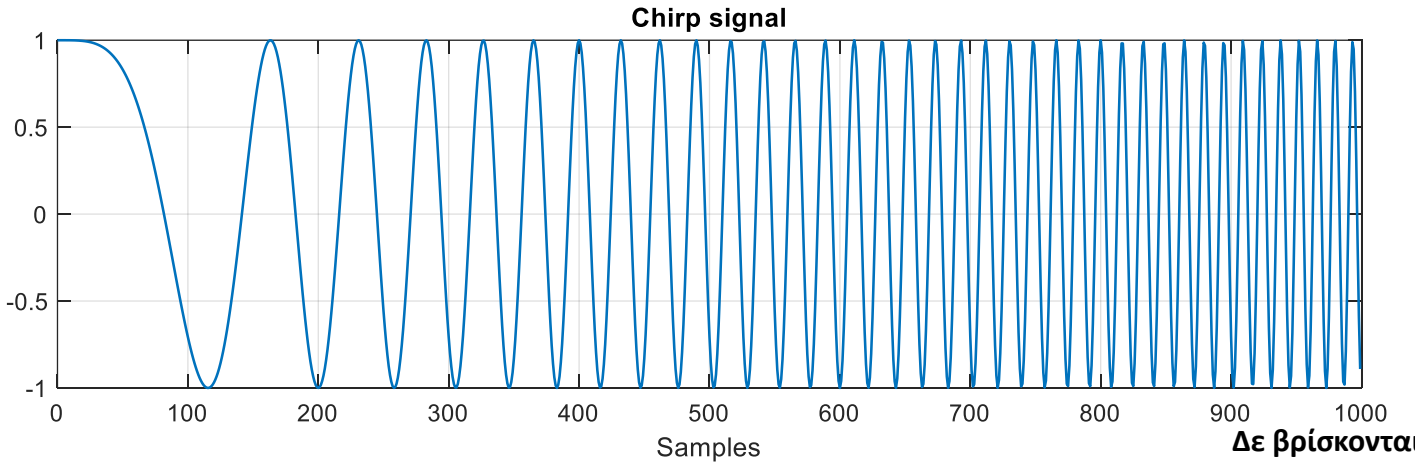
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Τα παραδείγματα φασματικής ανάλυσης που είδαμε ως τώρα είναι αρκετά περιοριστικά
- Οι παράμετροι των ημιτόνων (συχνότητες, πλάτη, φάσεις) που αναλύσαμε ήταν στάσιμοι
  - Δεν άλλαζαν με το χρόνο, ήταν ίδιοι από την αρχή ως το τέλος του παραθύρου ανάλυσης
- Αυτό στην πράξη δεν ισχύει
  - Radar, sonar, ήχος, φωνή, επικοινωνίες κ.α.
- Αυξάνοντας τη διάρκεια M του παραθύρου έχουμε καλύτερη ανάλυση (διακριτική ικανότητα) του σήματος
  - Αλλά κάνουμε φασματική ανάλυση σε μεγάλα τμήματα του σήματος, που περιλαμβάνουν πολλές μεταβολές στις παραμέτρους…
- Τι θα δούμε στο φάσμα?
  - Ποιες τιμές των παραμέτρων θα εμφανιστούν?
  - Χάνουμε σε χρονική «τοπικότητα»
    - Δεν ξέρουμε σε ποιο τμήμα του σήματος στο χρόνο εμφανίζονται οι παράμετροι που βλέπουμε στο φάσμα
- Ας δούμε ένα παράδειγμα…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

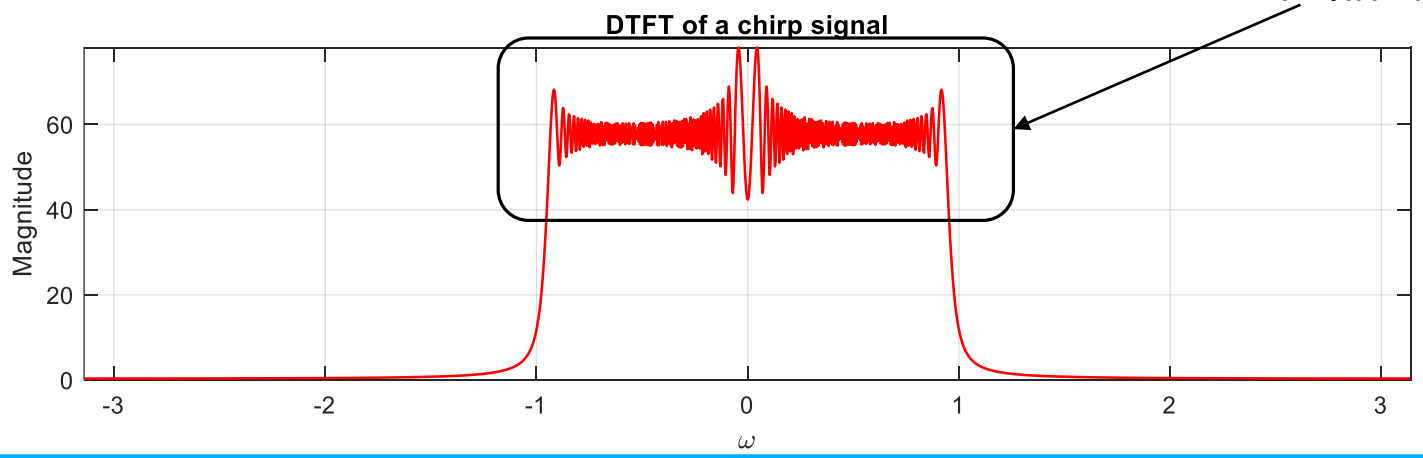
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Έστω ένα σήμα chirp (σήμα που μεταβάλλεται γραμμικά η συχνότητα)

$$x[n] = \cos(a_0 n^2)$$



- Ο DTFT του:

Δε βρίσκονται όλες αυτές οι συχνότητες σε όλο το σήμα από την αρχή ως το τέλος του!



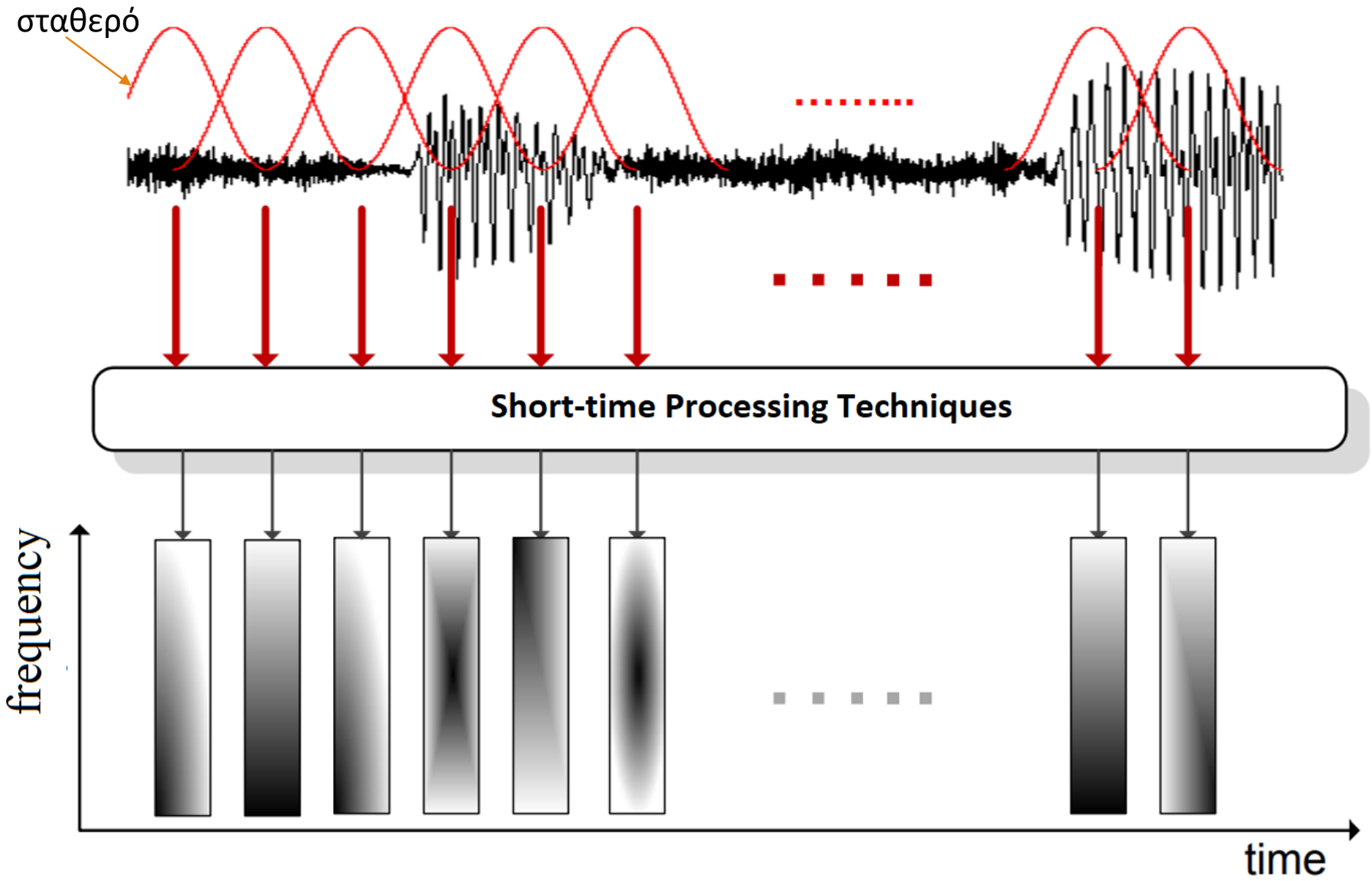
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Αναγκαζόμαστε να πάμε σε μια άλλη προσέγγιση
  - Τον Τμηματικό Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου (**Short Time Discrete Time Fourier Transform – ST-DTFT**)
- Ορισμός:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Πρόκειται ουσιαστικά για μια «συλλογή μετασχηματισμών Fourier» διακριτού χρόνου λαμβανόμενη σε παραθυροποιημένα τμήματα σήματος με αρχή το δείγμα n, με παράθυρο $w[m]$
- Το σήμα ολισθαίνει ένα δείγμα κάθε φορά κάτω από το παράθυρο, παραθυροποιείται, και στη συνέχεια λαμβάνεται ο DTFT του
- Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση αυτή είναι διακριτή ως προς n και συνεχής ως προς ω
  - Όταν τη δειγματοληπτήσουμε θα έχουμε διακριτότητα και στους χώρους
  - Προφανώς η μεταβλητή ω εξακολουθεί να αφορά τη γνωστή μας συχνότητα
- Μια οπτικοποίηση της διαδικασίας υπολογισμού του ST-DTFT

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

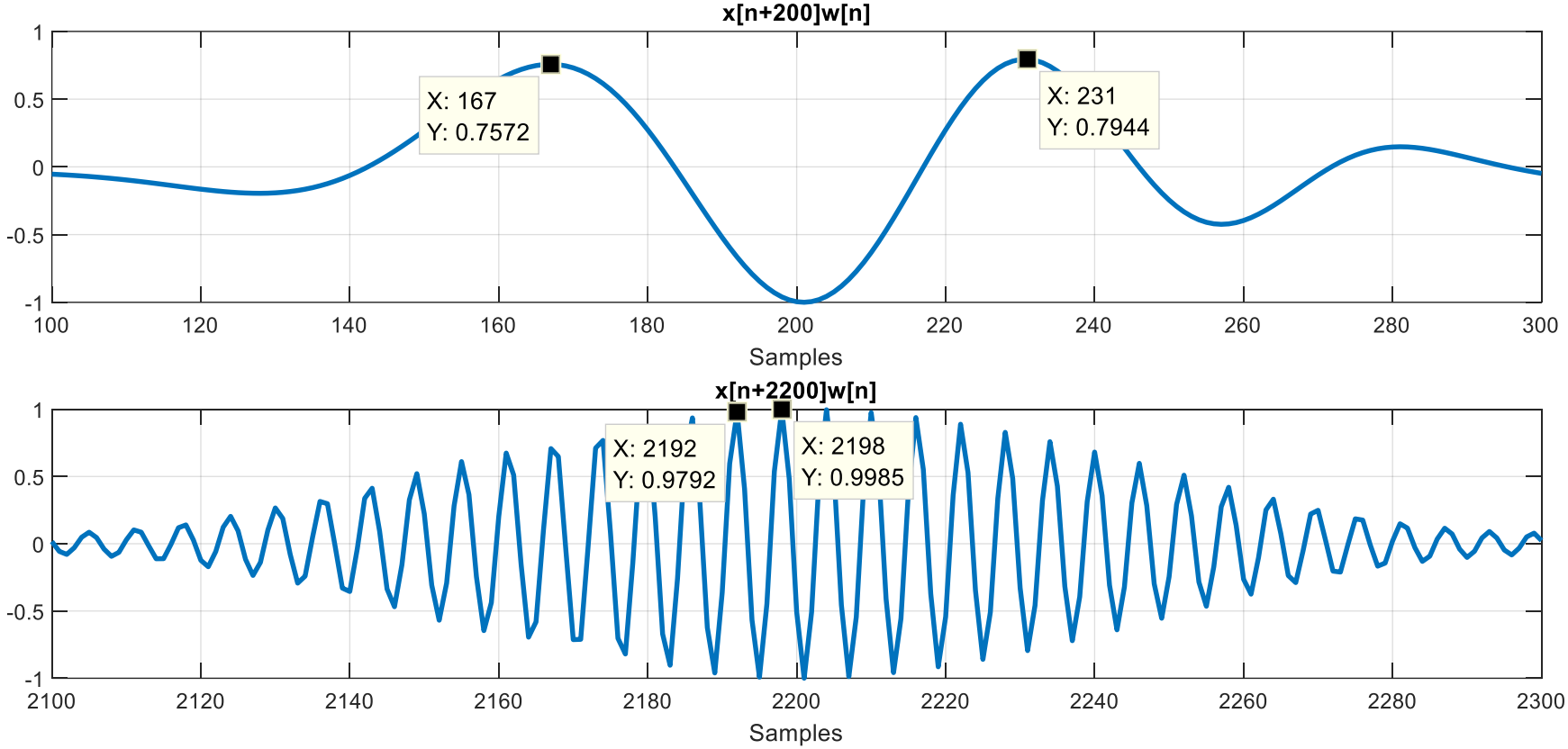
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

• Αν εφαρμόσουμε τη νέα προσέγγιση στο σήμα μας, ολισθαίνοντας το σήμα κατά 100 και 2100 δείγματα (κέντρο του παραθύρου Hamming το 201-οστό και το 2201-οστό δείγμα):



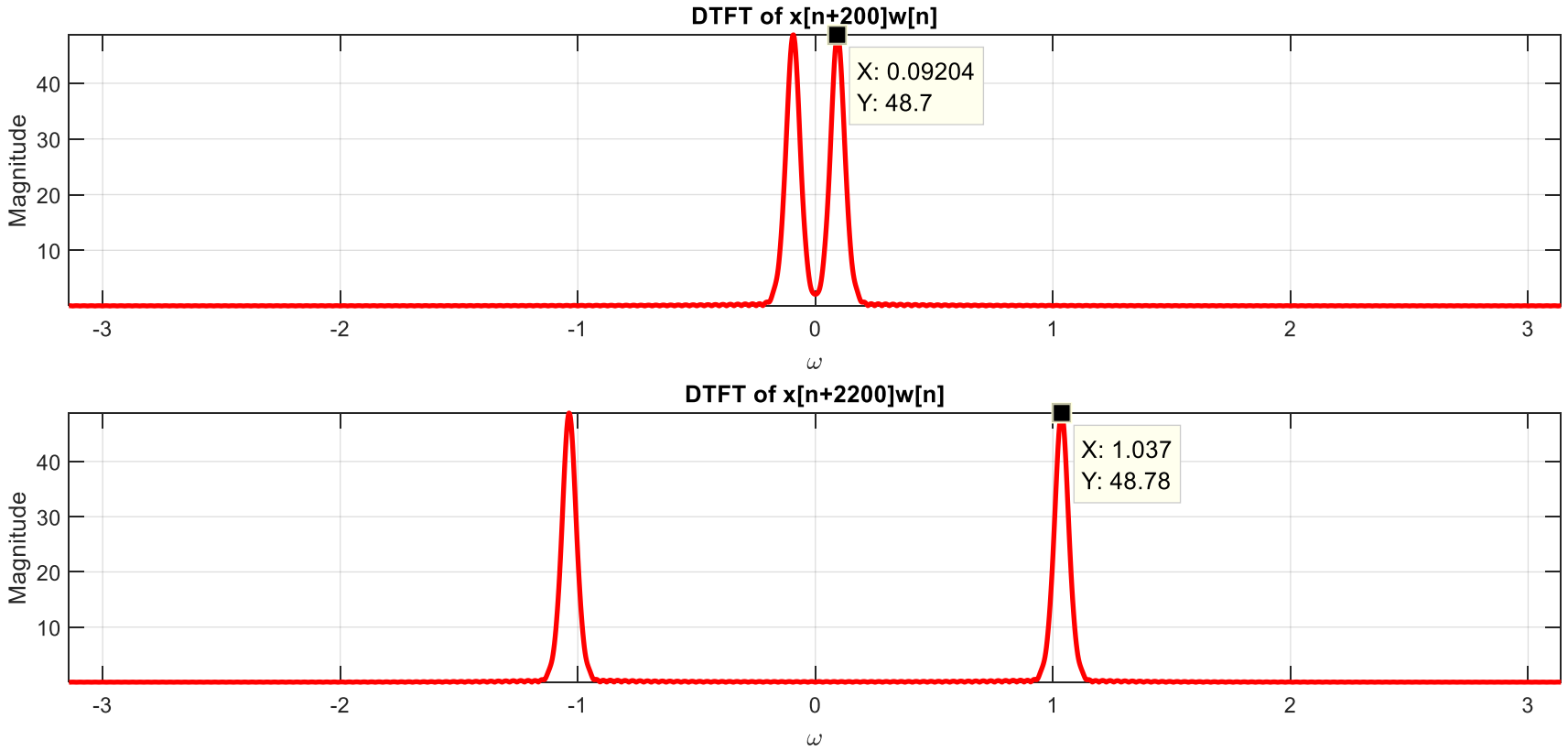
• Οι συχνότητες πρέπει να είναι (χονδρικά) κοντά στις τιμές

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{231-167} = 0.0982, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{2198-2192} = 1.0472$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Παίρνοντας αντίστοιχους 2048-DTFTs, θα δούμε την παρακάτω εικόνα στο $(-\pi, \pi]$:



- Παρατηρούμε ότι πλέον η «τοπικότητα» επανήλθε!

- Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες που προέκυψαν στο φάσμα πλάτους ανταποκρίνονται αρκετά καλά στις πραγματικές

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

```
% Plain DFT
n = 0:20000;
a0 = 75*pi*10^(-6);
% Freq. varying signal
x = cos(a0*n.^2);
NFFT = 2048;
% FFT
X = abs(fft(x, NFFT));
k = -NFFT/2:NFFT/2-1;
% Plotting
figure; plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X))
```

•Ενδεικτικός κώδικας

```
% Parts of signal
% Window
w = hamming(201);
N = 201;
start1 = 100;
fin1 = start1 + N-1;
start2 = 2100;
fin2 = start2 + N-1;
% FFTs of part of signal
X1 = abs(fft(x(start1:fin1).*w', NFFT));
X2 = abs(fft(x(start2:fin2).*w', NFFT));
% Plotting
figure;
subplot(211); plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X1), 'r');
subplot(212); plot(2*pi*k/NFFT, fftshift(X2), 'r');

% In time
figure; subplot(211); plot(start1:fin1, x(start1:fin1).*w');
subplot(212); plot(start2:fin2, x(start2:fin2).*w');
```

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

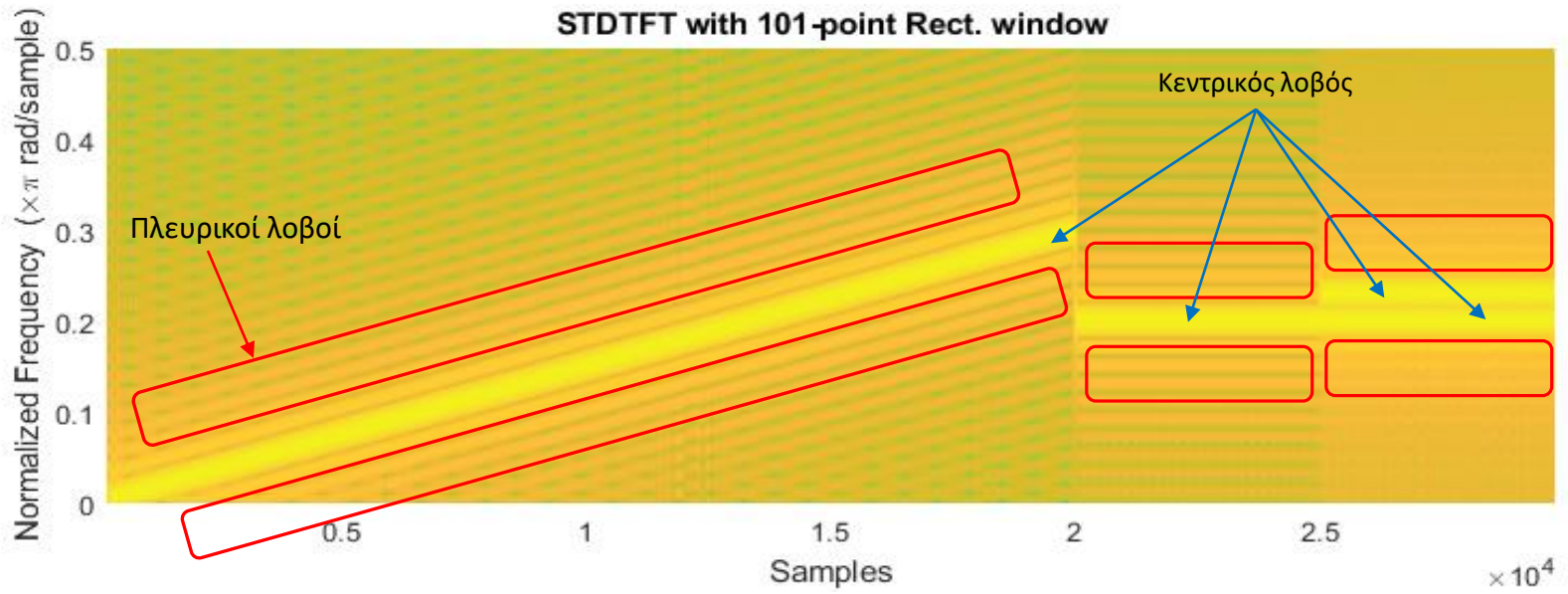
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Ας δούμε το παρακάτω σήμα:

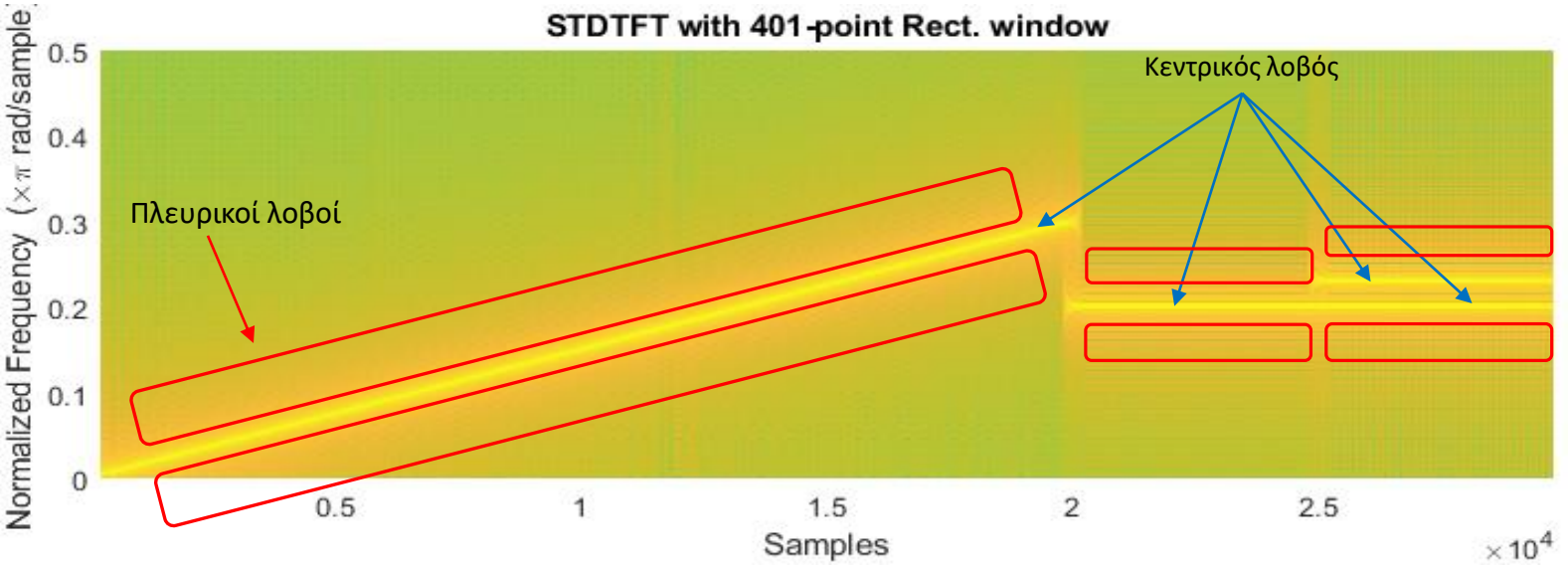
$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \cos(a_0 n^2), & 0 \le n \le 20000 \\ \cos(0.2\pi n), & 20001 \le n \le 25000 \\ \cos(0.2\pi n) + \cos(0.23\pi n), & n \ge 25001 \end{cases}$$

- Θα υπολογίσουμε το ST-DTFT με δυο τρόπους:
  - Με ένα παράθυρο διάρκειας 101 δειγμάτων
  - Με ένα παράθυρο διάρκειας 401 δειγμάτων
- Θα υπολογίσουμε ξανά το ST-DTFT με δυο τρόπους:
  - Με ένα παράθυρο Hamming διάρκειας 101 δειγμάτων
  - Με ένα παράθυρο Hamming διάρκειας 401 δειγμάτων
- Ας απεικονίσουμε το μέτρο του – ονομάζεται **φασματογράφημα (spectrogram)**
  - Η απεικόνιση γίνεται σε λογαριθμική κλίμακα πλάτους (decibel - $20\log_{10}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$)
- Θα παρατηρήσουμε πολύ ενδιαφέροντα πράγματα! ☺

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

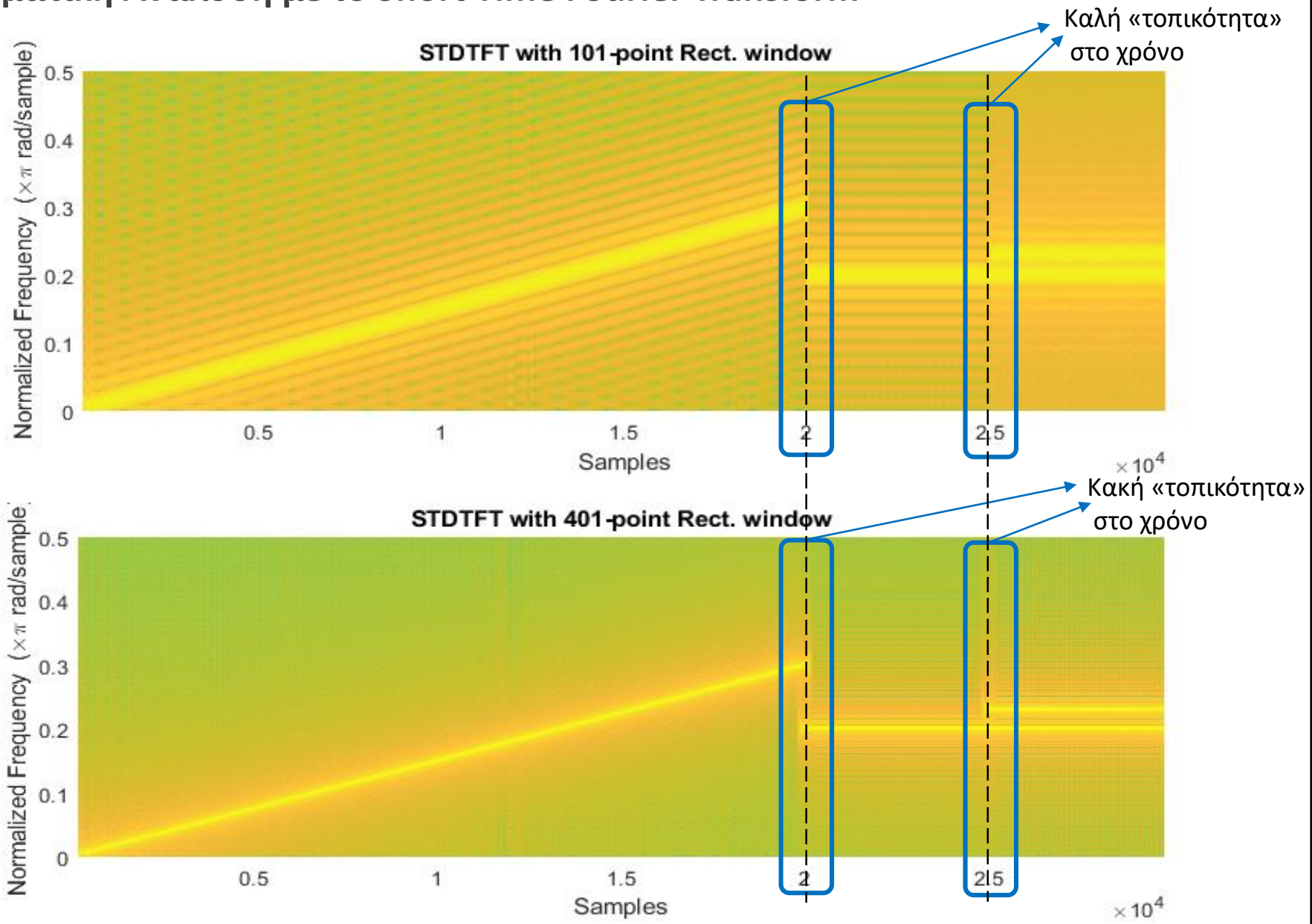
- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**





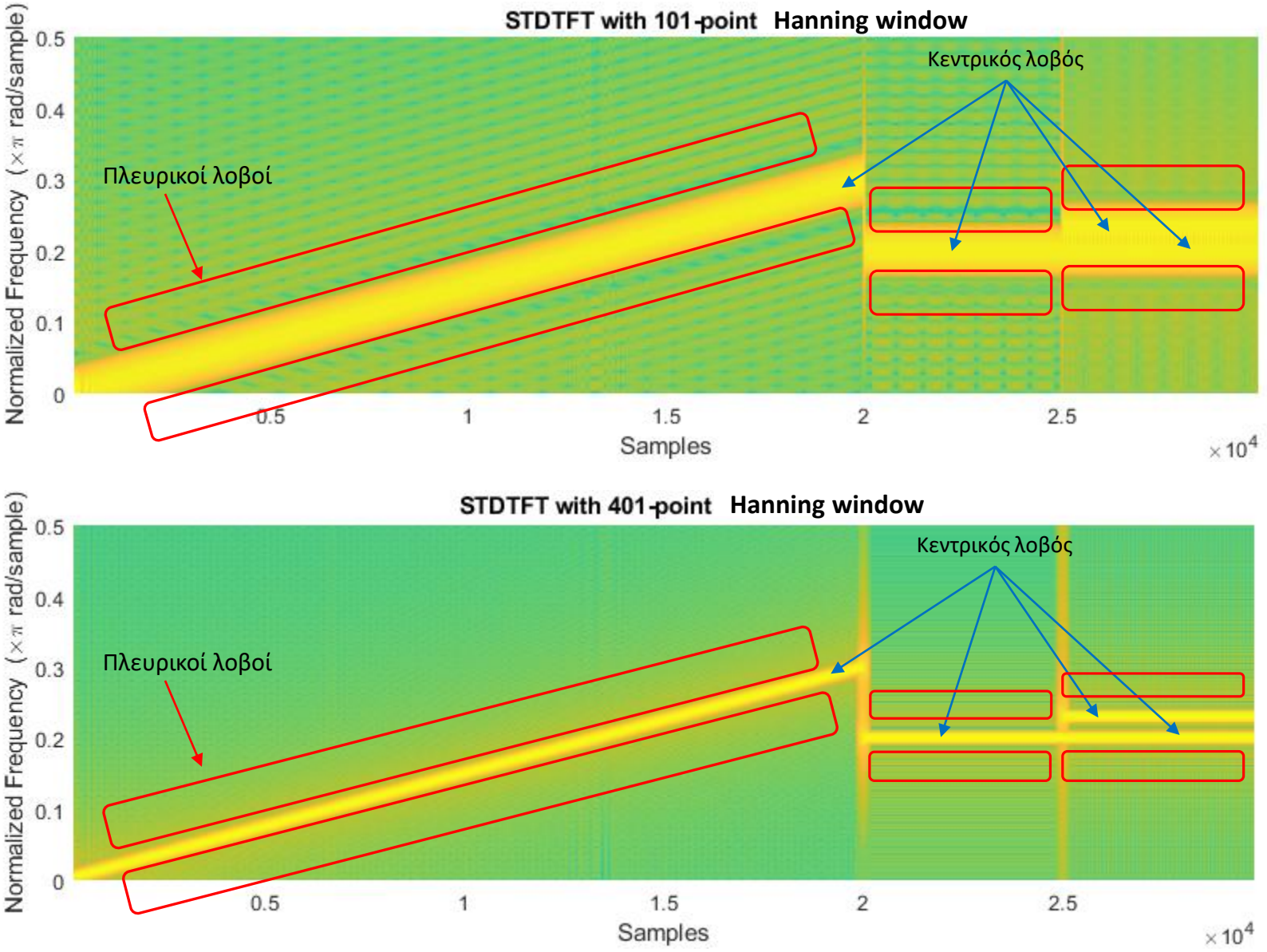
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**



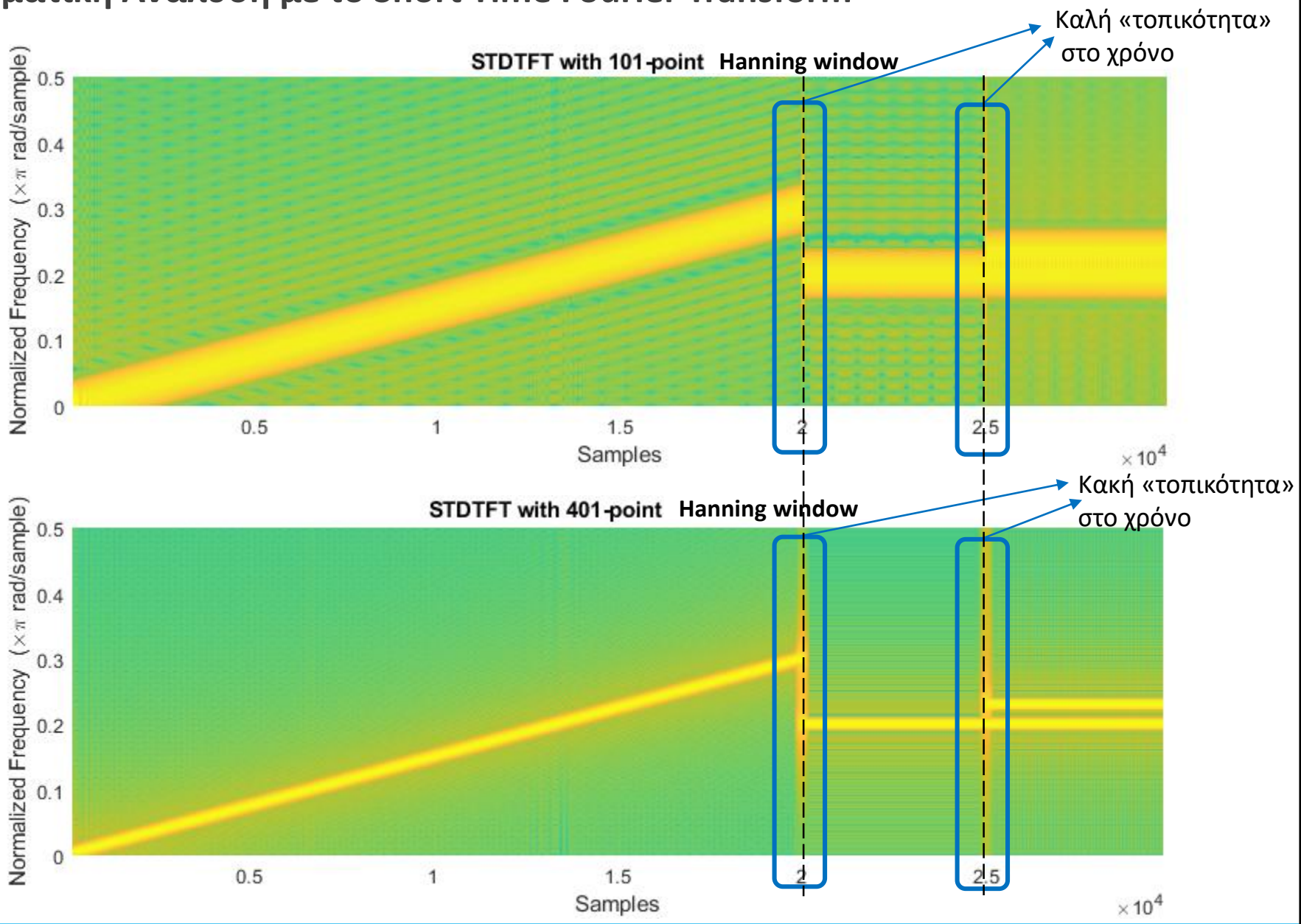
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

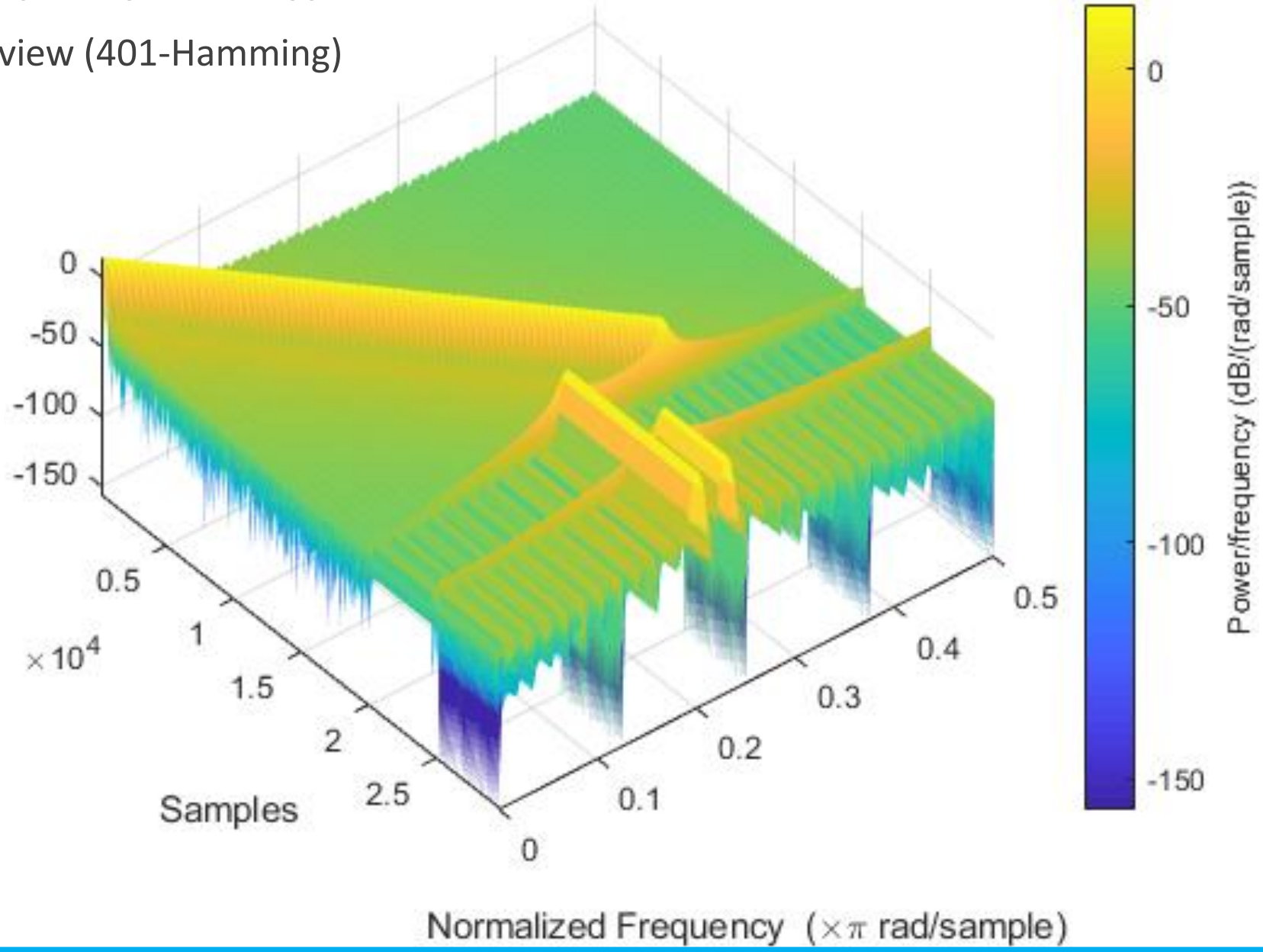
```
% Signal creation
a0 = 7.5*pi*10^(-6);
x1 = cos(a0*(0:20000).^2);
x2 = cos(0.2*pi*(20001:25000));
x3 = cos(0.2*pi*(25001:30000)) + cos(0.23*pi*(25001:30000));
x = [x1 x2 x3];
```

• Ενδεικτικός κώδικας

```
% STDTFTs - actually it's a simulated STDTFT
% by ST Discrete Fourier Transform
NFFT = 512;
% Rectangular window
L = 101;
figure; spectrogram(x, rectwin(L), L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 101-point Rect. Window');
L = 401;
figure; spectrogram(x, rectwin(L), L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 401-point Rect. Window');
% Hamming window (default)
L = 101;
figure; spectrogram(x, L, L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 101-point Hamming Window');
L = 401;
figure; spectrogram(x, L, L-1, NFFT, 'onesided','yaxis');
V = axis;
axis([V(1) V(2) 0 V(4)/2]);
title('STDTFT with 401-point Hamming Window');
```

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- 3D-view (401-Hamming)



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- STDTFT:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Βλέπετε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο DTFT του σήματος $x[n+m]w[m]$: ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος αν το παράθυρο ανάλυσης έχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο

- Οπότε

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X[n,\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

δηλ.

$$x[n+m] = \frac{1}{2\pi w[m]}\int_0^{2\pi} X[n,\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

αν $w[m] \neq 0$

- Άρα αν επιλέξουμε ένα $m : w[m] \neq 0$ μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα $x[n]$ για κάθε n

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

• Παράδειγμα:

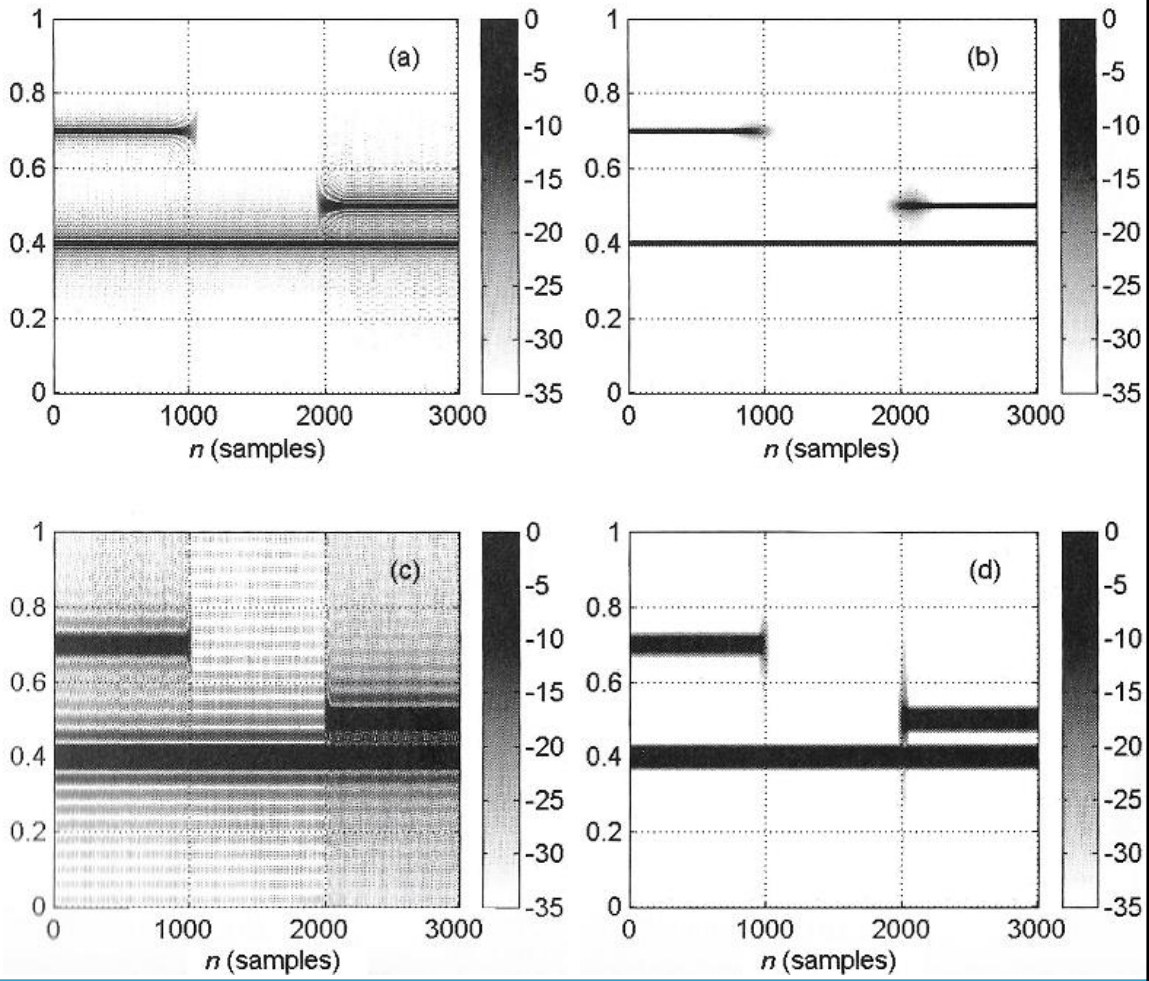
❑ Ένα αναλογικό σήμα που αποτελείται από ένα άθροισμα ημιτόνων δειγματοληπτήθηκε με $f_s = 10$ kHz. Για τα STDTFT δίπλα χρησιμοποιήθηκαν παράθυρα Hamming ή τετραγωνικά. Απαντήστε στις ερωτήσεις:

i. Σε ποιες εικόνες χρησιμοποιήθηκε τετραγωνικό παράθυρο?

ii. Ποιο/α ζεύγος/η έχουν περίπου την ίδια ανάλυση στη συχνότητα?

iii. Ποιος STDTFT έχει το μικρότερο παράθυρο ανάλυσης στο χρόνο?

iv. Γράψτε μια εξίσωση για το σήμα που δειγματοληπτήθηκε, η οποία παρήγαγε τα διπλανά STDTFT.



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

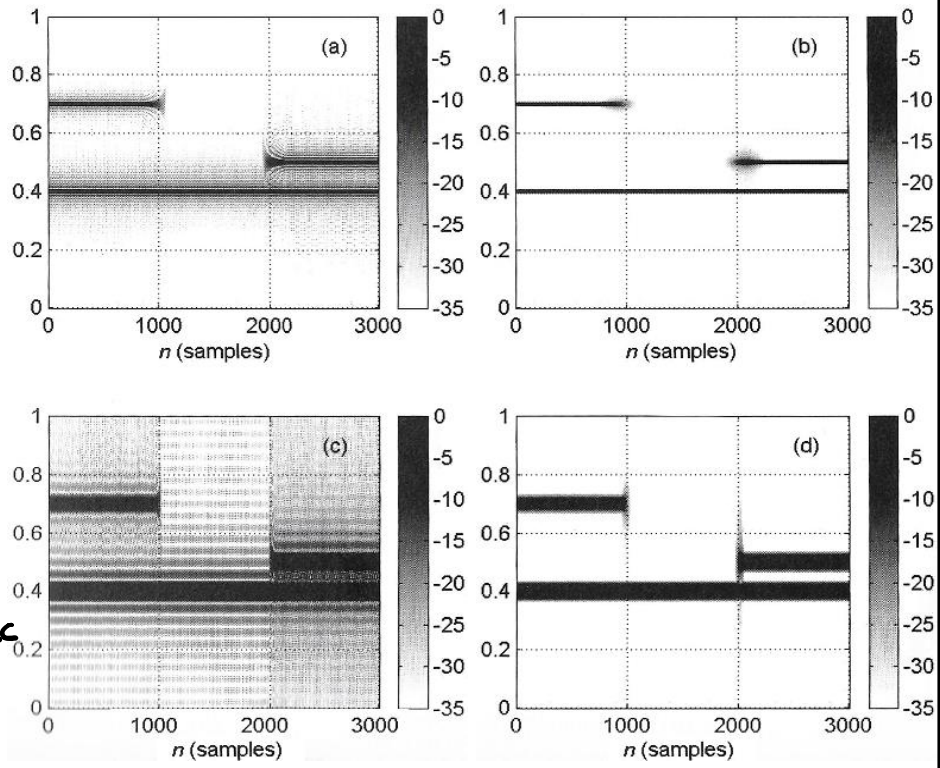
i. (a, c)

ii. (a, b), (c, d)

iii. c

iv. $\omega = \frac{2\pi f}{f_s} = \frac{2\pi f}{10.000} = 0.4\pi$

Άρα $2\pi f = 4000\pi$ rad/sec

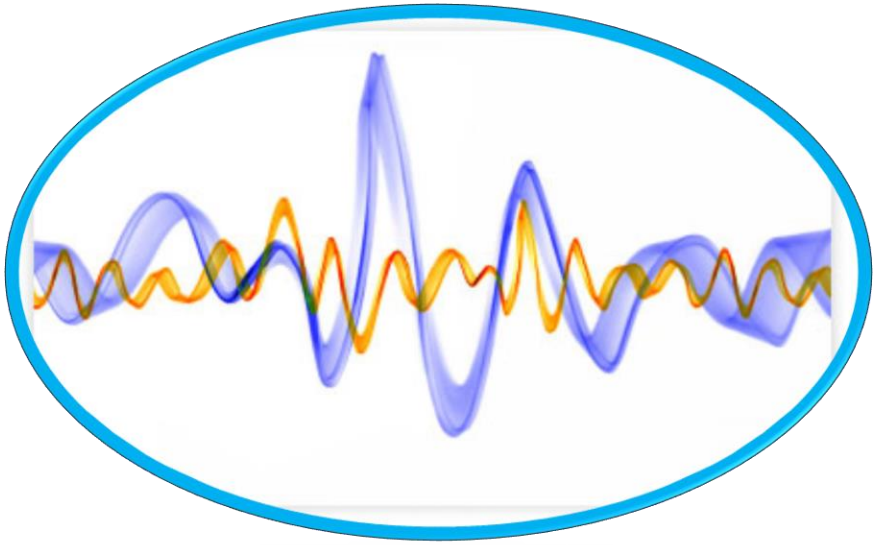


iv.

$$x_c(t) = \begin{cases} A_1 \cos\left(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1\right) + A_2 \cos\left(0.7\pi \times 10^4 t + \phi_2\right), & 0 \le t \le 1000 \times 10^{-4} \\ A_1 \cos\left(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1\right) + 0, & 0.1 \le t < 0.2 \\ A_1 \cos\left(0.4\pi \times 10^4 t + \phi_1\right) + A_3 \cos\left(0.5\pi \times 10^4 t + \phi_3\right), & 0.2 \le t. \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

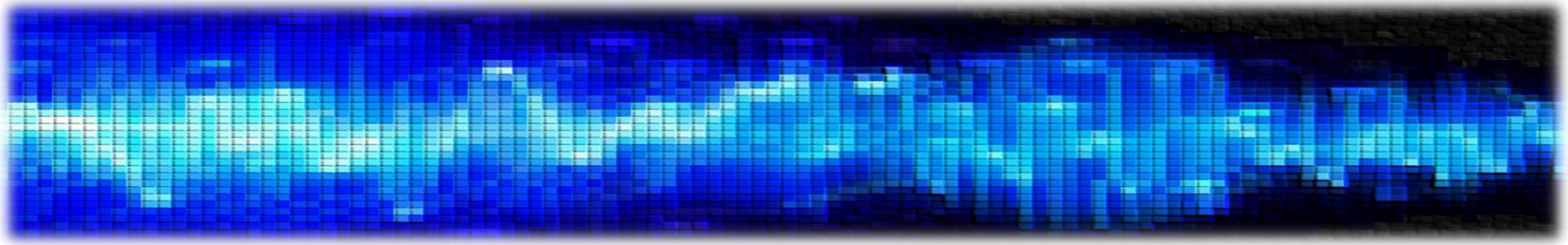


© Καφεντζής Γιώργος, PhD



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 26Η



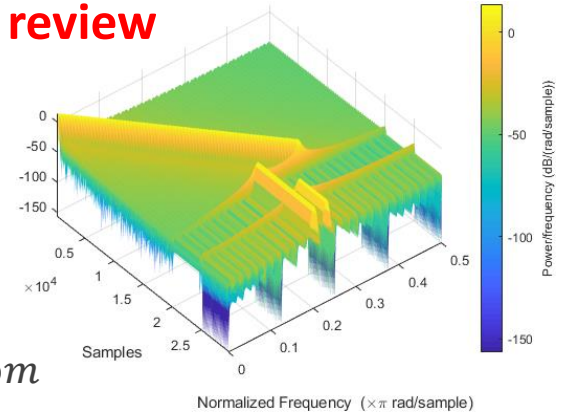
- Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

… και η αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος στην τάξη ☺

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform - review**

- Τμηματικός Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου (**Short Time Discrete Time Fourier Transform – ST-DTFT**)

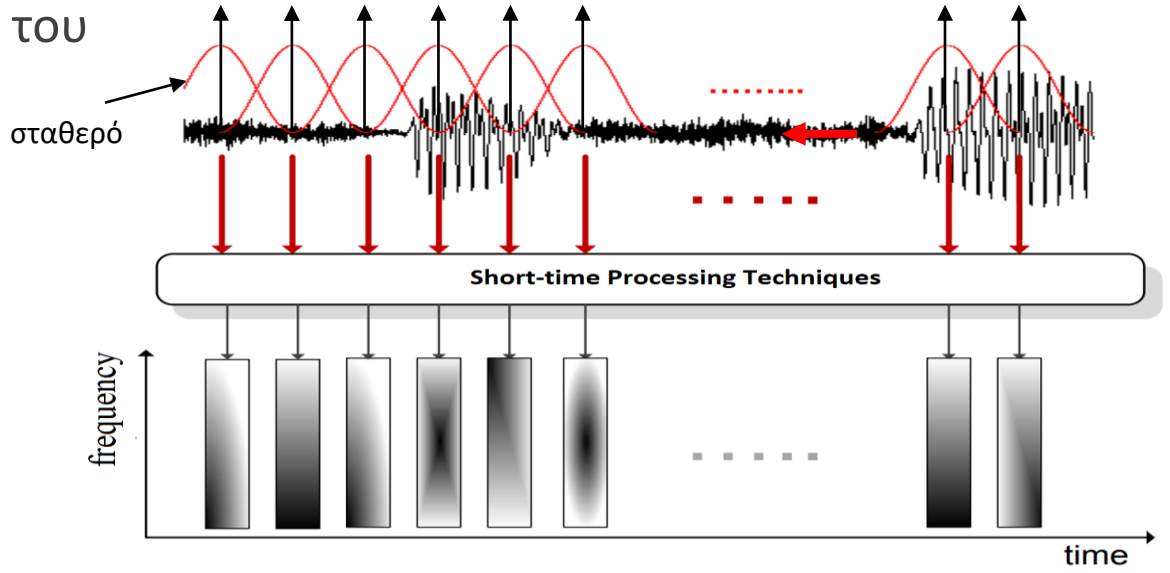


- Ορισμός:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Μια «συλλογή μετασχηματισμών Fourier» διακριτού χρόνου σε παραθυροποιημένα τμήματα σήματος που ξεκινούν από το δείγμα n, με παράθυρο $w[m]$

- Το σήμα ολισθαίνει ένα δείγμα κάθε φορά κάτω από το παράθυρο, παραθυροποιείται, και λαμβάνεται ο DTFT του



© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform - review**
- STDTFT:

$$X[n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\omega m}$$

- Βλέπετε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο DTFT του σήματος $x[n+m]w[m]$:

- Αντίστροφος:

$$x[n+m] = \frac{1}{2\pi w[m]} \int_0^{2\pi} X[n,\omega)e^{j\omega m} d\omega$$

αν $w[m] \neq 0$

- Ο STDTFT $X[n,\omega)$ διαβάζεται ως «*ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ενός παραθυροποιημένου τμήματος ενός σήματος με αρχή το δείγμα* n»
  - Θεωρητικά, ένα σήμα έχει άπειρα δείγματα $(-\infty < n < +\infty)$ οπότε ο STDTFT αποτελεί μια «άπειρη» συλλογή από DTFTs, έναν για κάθε δείγμα του σήματος

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Ο STDTFT δεν μπορεί να υλοποιηθεί απευθείας σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον καθώς η μεταβλητή ω είναι συνεχής
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον DFT αντί του DTFT
  - Ο μετασχηματισμός ονομάζεται **Short Time Fourier Transform - STFT**
- Τότε για ένα παράθυρο $w[n]$ διάρκειας L

$$X[n,k] = X\left[n, \frac{2\pi k}{N}\right] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-\frac{j2\pi km}{N}}, \qquad 0 \le k \le N-1, N \ge L$$

- Το σήμα $X[n,k]$ αποτελεί τον DFT του σήματος $x[n+m]w[m]$
- Μπορούμε – όπως και πριν – να ανακτήσουμε το σήμα στο χρόνο, υπό την προϋπόθεση ότι $w[n] \neq 0,\ 0 \le m \le L-1$, ως

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n,k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

με $0 \le m \le L-1$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Θα δείξουμε ότι ο STFT είναι ένας μετασχηματισμός πλεονασματικός
- Θεωρήστε τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας L
- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[n_0 + m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[n_0, k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα n_0

- Δηλ. στο διάστημα $n_0 \le n \le n_0 + L - 1$

- Αντίστοιχα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[(n_0 + 1) + m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[(n_0 + 1), k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα $(n_0 + 1)$

- Δηλ. στο διάστημα $n_0 + 1 \le n \le n_0 + L$

- Βλέπετε ότι τα δυο σήματα στο χρόνου που ανακατασκευάζονται από διαδοχικούς STFTs διαφέρουν μόλις κατά ένα δείγμα!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Με την ίδια λογική, μπορούμε να κατασκευάσουμε διαδοχικά παράθυρα σήματος στο χρόνο (κι έτσι, όλο το σήμα) με βάση το ακόλουθο μοτίβο:

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[n_0 + m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[n_0, k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα n_0

- Δηλ. στο διάστημα $n_0 \le n \le n_0 + L - 1$

- Αντίστοιχα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x[(n_0 + L) + m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[(n_0 + L), k]e^{\frac{j2\pi k}{N}m}$$

υπολογίζει το παραθυροποιημένο σήμα διάρκειας L ξεκινώντας από το δείγμα $(n_0 + L)$

- Δηλ. στο διάστημα $n_0 + L \le n \le n_0 + 2L - 1$

- Βλέπετε ότι τα δυο σήματα στο χρόνου που ανακατασκευάζονται είναι ακριβώς διαδοχικά

- Χρησιμοποιήσαμε μόνο τους μετασχηματισμούς $X[n_0, k],\ X[n_0 + L, k]$!!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Για ποιο λόγο θα θέλαμε να κάνουμε μια ανακατασκευή στο χρόνο?
- Στην περίπτωση φυσικά που «πειράξουμε» το σήμα μας φασματικά σε κάθε τμήμα του, και θέλουμε να επανασυνθέσουμε το αποτέλεσμα μας στο χρόνο!!
- Άρα, από την προηγούμενη συζήτηση, επιτρέπουμε στο σήμα μας να ολισθαίνει κάτω από το παράθυρο ανάλυσης περισσότερο από ένα δείγμα κάθε φορά
  - Στην περίπτωση της φασματικής ανάλυσης, η ολίσθηση μπορεί να είναι οσοδήποτε θέλουμε για να παρατηρήσουμε φασματικά το σήμα μας (ακόμα και ολίσθηση ενός δείγματος)
  - Στην περίπτωση της φασματικής ανάλυσης και σύνθεσης, μπορούμε να επιτρέψουμε στην ολίσθηση να είναι μεγαλύτερη – όχι όμως όσο θέλουμε (θα μιλήσουμε για αυτό σε λίγο)
- Αυτή η «μεγαλύτερη ολίσθηση» μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν **δειγματοληψία** στο διακριτό χρόνο ☺
  - Με άλλα λόγια, επιλέγουμε τα αρχικά δείγματα n του σήματος $x[n+m]$ στα οποία θα εφαρμόσουμε παράθυρο και DFT
- Αυτός ο STFT μπορεί να γραφεί ως

$$X[rR,k] = X\left[rR, \frac{2\pi k}{N}\right] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-\frac{j2\pi km}{N}}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

$$X[rR,k] = X\left[rR, \frac{2\pi k}{N}\right] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-\frac{j2\pi km}{N}}$$

με $-\infty < r < +\infty$ και $0 \le k \le N-1$

- Η μεταβλητή R αποτελεί το «άλμα» δειγμάτων μεταξύ δυο δειγμάτων $n_0, n_0 + R$ που με αρχή αυτά εφαρμόζουμε παράθυρα και υπολογίζουμε DFTs
- Πιο τεχνικά, θα λέγαμε ότι είναι η **περίοδος δειγματοληψίας** στο διακριτό χρόνο, ή όπως έχει επικρατήσει να λέγεται, το **hop size** (πόσα δείγματα «πηδάμε» στο χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών DFTs)
- Για απλοποίηση, ας συμβολίσουμε $X_r[k] = X[rR,k] = X[rR,\omega_k)$ τον παραπάνω μετασχηματισμό
  - Έτσι βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός δεν είναι άλλος από τον N-point DFT του $x_r[m] = x[rR+m]w[m]$, με το σήμα να «πηδά» R δείγματα τη φορά
- Συνολικά, έχουμε τρεις παραμέτρους να λάβουμε υπόψη μας
  - Ας τις δούμε…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Τρεις παραμέτρους:
  - Διάρκεια παραθύρου ανάλυσης στο χρόνο, L
  - Πλήθος δειγμάτων του DFT στη συχνότητα, N
  - Hop size στο χρόνο, R
- **Ποιος συνδυασμός των παραπάνω μας επιτρέπει να ανασυνθέσουμε το σήμα στο χρόνο από τον STFT του?**
- Έστω τετραγωνικό παράθυρο
- Αν επιλέξουμε $N \geq L$, σίγουρα μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τα τμηματικά, παραθυροποιημένα σήματα $x[m + rR]w[m]$
  - Από τη συζήτηση μας για τον DFT
- Αν επιλέξουμε $R < L$, τα γειτονικά τμήματα σήματος επικαλύπτονται
- Για $R > L$, σημαίνει ότι τα «άλματα» (η δειγματοληψία μας στο χρόνο) δειγμάτων είναι μεγαλύτερα από ένα παράθυρο, οπότε κάποια από τα δείγματα του σήματος «μένουν απ'έξω», δηλ. δεν καλύπτονται από κάποιο τμήμα σήματος
  - Σίγουρα η ανακατασκευή δεν είναι εφικτή έτσι
    - Κάποια δείγματα δεν μετασχηματίζονται καν!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Τρεις παραμέτρους:
  - Διάρκεια παραθύρου ανάλυσης στο χρόνο, L
  - Πλήθος δειγμάτων του DFT στη συχνότητα, N
  - Hop size στο χρόνο, R
- Οπότε ένας συνδυασμός είναι ο $R \leq L \leq N$
- Έστω $R = L = N$
- Με αυτόν τον τρόπο, ανακτούμε το σήμα $x_r[m] = x[rR + m]w[m]$, για $0 \leq m \leq N - 1$ μέσω του IDFT του $X_r[k]$
  - Πώς?
- Θα είναι:

$$x[n] = \frac{x_r[n - rR]}{w[n - rR]}, \qquad rR \leq n \leq (r + 1)R - 1$$

- Με άλλα λόγια, ανακτούμε τα παραθυροποιημένα σήματα στο χρόνο, διαιρούμε με το παράθυρο ανάλυσης, και βάζουμε το αποτέλεσμα σε σειρά, διαδοχικά

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

- Στις περιπτώσεις όμως – τις ενδιαφέρουσες ☺ – που θέλουμε να επεξεργαστούμε φασματικά το σήμα μας σε τμήματα, η προηγούμενη μεθοδολογία δε βοηθά
  - Η διαίρεση με ένα μη-τετραγωνικό παράθυρο $w[n]$ μπορεί να μας δημιουργήσει μεγάλα σφάλματα στις άκρες του, όπου οι τιμές του παραθύρου είναι μικρές
  - Τα τμήματα μπορεί να μην «ταιριάζουν» καλά μεταξύ τους

- Μπορούμε να αποφύγουμε τη διαίρεση με παράθυρο?
  - Ναι! Αν επιτρέψουμε στα παραθυροποιημένα τμήματα μας να επικαλύπτονται!! ΘΘ

- Τα παραθυροποιημένα τμήματα μας έχουν ως σημείο αναφοράς την αρχή του παραθύρου

- Μια πιο εύρωστη – στις μεταβολές του φάσματος – διαδικασία σύνθεσης είναι να μετατοπίσουμε το κέντρο του παραθυροποιημένου σήματος μας στο δείγμα $n_c = rR$ και να τα προσθέσουμε μεταξύ τους:

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_r[n - rR]$$

- Ισχύει ότι $\hat{x}[n] = x[n]$???



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_r[n - rR]$$

- Ισχύει ότι $\hat{x}[n] = x[n]$???
- Αντικαθιστώντας:

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[rR + n - rR]w[n - rR] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n]\, w[n - rR]$$

$$= x[n] \sum_{r=-\infty}^{+\infty} w[n - rR]$$

- Προφανώς πρέπει

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} w[n - rR] = \mathrm{C} \in \mathbb{R}, \forall\ n$$

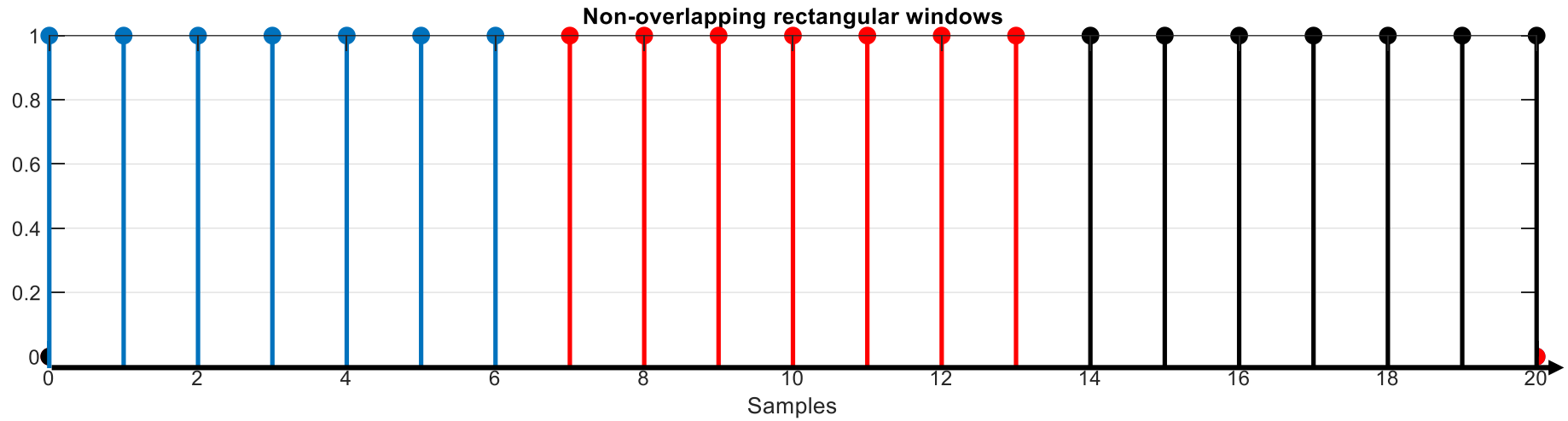
- Δηλ. τα μετατοπισμένα παράθυρα πρέπει να αθροίζουν σε σταθερό αριθμό!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

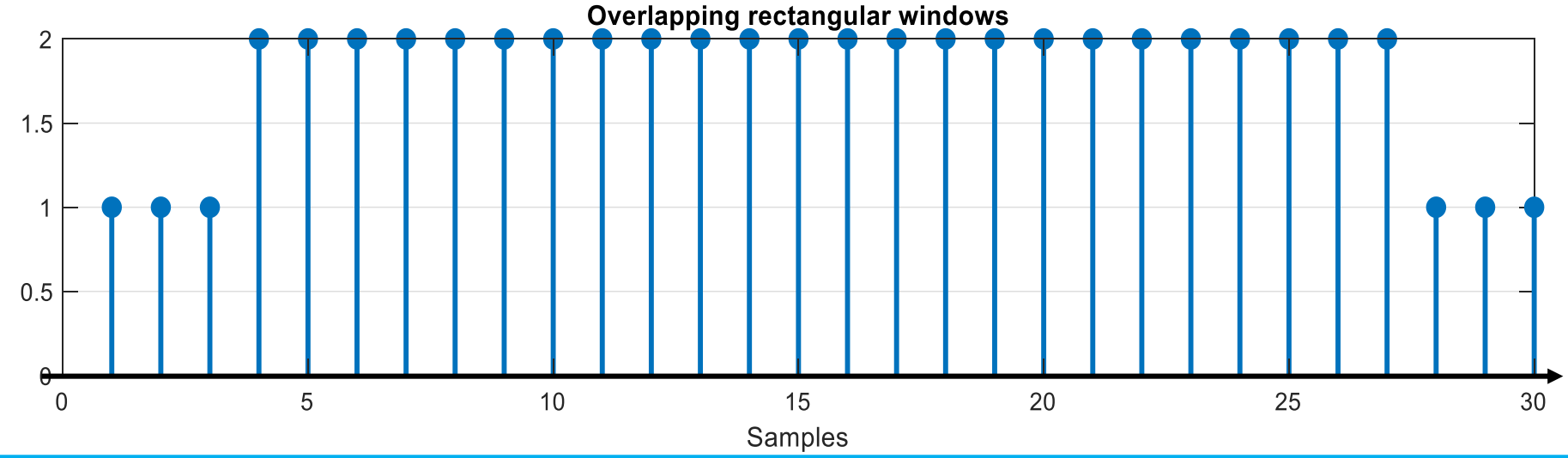


• Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform

• $R = L = 7 \Rightarrow C = 1$



• L άρτιος, $R = L/2 \ \ (L = 6) \Rightarrow C = 2$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Φαίνεται λοιπόν ότι για κάποια R, L, το τετραγωνικό παράθυρο μπορεί να δώσει πλήρη και ακριβή ανακατασκευή του σήματος
- Σπάνια όμως χρησιμοποιούμε το τετραγωνικό παράθυρο για φασματική ανάλυση
- Ευτυχώς κι άλλα παράθυρα έχουν τιμές των R, L που ικανοποιούν την πλήρη (ή σχεδόν πλήρη) ανακατασκευή
- Δυο από αυτά:

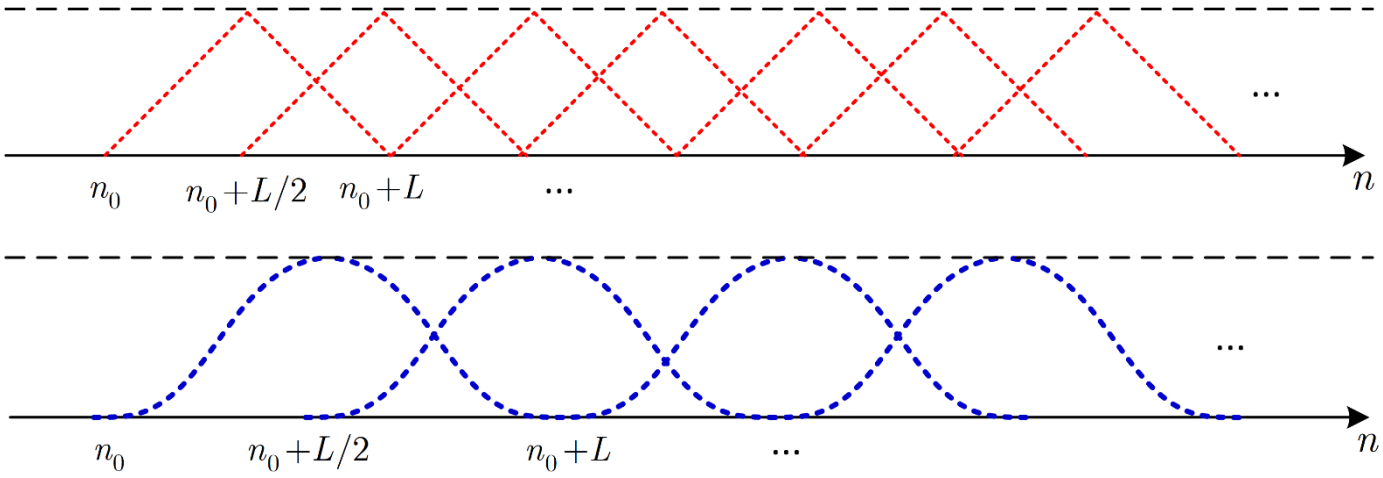
$$w_{Bartlett}[n] = \begin{cases} \dfrac{2n}{M}, & 0 \le n \le \dfrac{M}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{M}, & \dfrac{M}{2} \le n \le M \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$w_{hann}[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), & 0 \le n \le M \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**
- Για M άρτιο, $L = M + 1$, και $R = M/2$, το παράθυρο Bartlett ικανοποιεί την πλήρη ανακατασκευή με $C = 1$
- Για $L = M + 1$ και $R = M/2$, το ίδιο κάνει και το παράθυρο Hann



- Παρόμοιες μεταβλητές ικανοποιούν την πλήρη (ή σχεδόν πλήρη) ανακατασκευή και για το παράθυρο Hamming και για άλλα παράθυρο
- Ας εφαρμόσουμε όλα όσα μάθαμε σε ένα πραγματικό πρόβλημα

Simple Voice/Unvoiced/Silence Detection of Speech

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

```
%%%%%%%% SAMPLE CODE %%%%%%%%%
clear;
% Reading the speech signal
[s, fs] = audioread('myvoice.wav');

% Remove mean value (DC component)
s = s - mean(s);

% Signal length
D = length(s);

% Frame length (30 ms, how many samples?)
L = 30*(10^-3)*fs;

% Frame shift (15 ms, how many samples?)
U = 10*(10^-3)*fs;

% Window (not necessary)
% w = hanning(L);

% Number of frames
Nfr = floor((D-L)/U);

% Memory allocation (for speed)
%energy = zeros(1, Nfr+1);
%ZCr = zeros(1, Nfr+1);

% Loop which calculates the speech features
for i = 1:1:(Nfr+1)
   frame = s(((i-1)*U + 1):((i-1)*U + L));
   energy(i) = sum(frame.^2);
   ZCr(i) = 0.5*sum(abs(sign(frame(2:end))-
sign(frame(1:end-1)))); % Quick Zero Crossings
   Time(i) = L/2 + (i-1)*U;
end
```



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

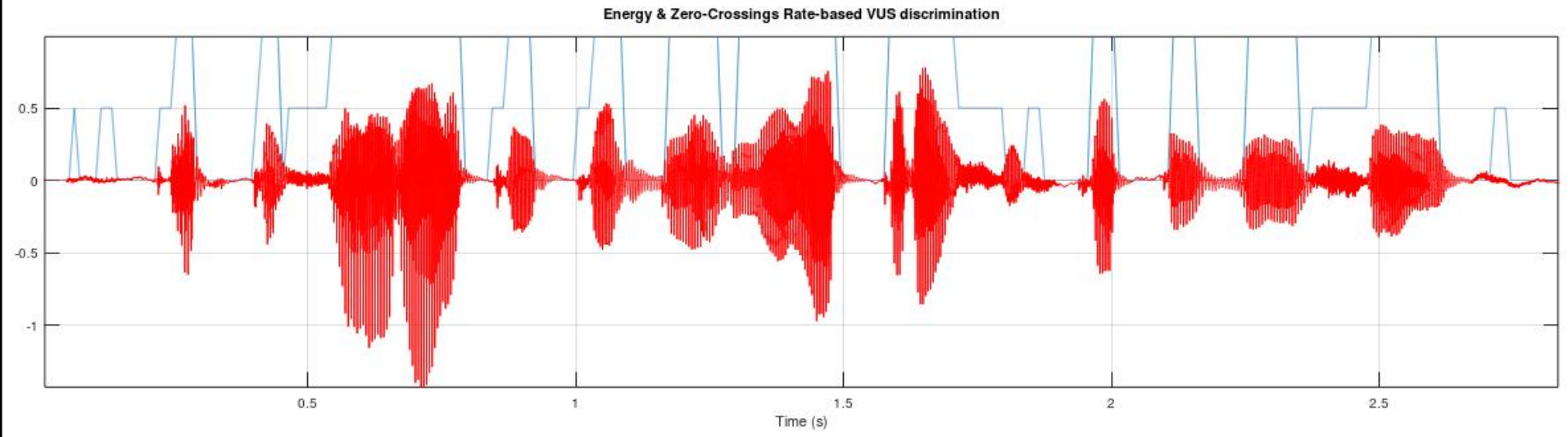
```
% THRESHOLDS (you can play with it!)
Ethres = mean(energy)/2;
ZCRthres = (3/2)*mean(ZCr) - 0.3*std(ZCr);


for i = 1:1:Nfr+1
   if energy(i) >= Ethres
      % VOICED
      VUS(i) = 1.0;
   elseif ZCr(i) <= ZCRthres/2 …
                  && energy(i) <= Ethres/5;
      % SILENCE
      VUS(i) = 0.0;
   elseif (ZCr(i) >= ZCRthres …
                  && energy(i) <= Ethres)
      % UNVOICED
      VUS(i) = 0.5;
   end
end

% Interpolate for visualization
VUSi = interp1(T, VUS, 1:length(s), 'linear');
t = 0:1/fs:length(s)/fs-1/fs;

% Plotting
figure;
plot(t, VUSi);
hold on; plot(t, s/max(s), 'r'); hold off;
xlabel('Time (s)');
title('Energy & Zero-Crossings Rate-based VUS
discrimination');
grid;
```

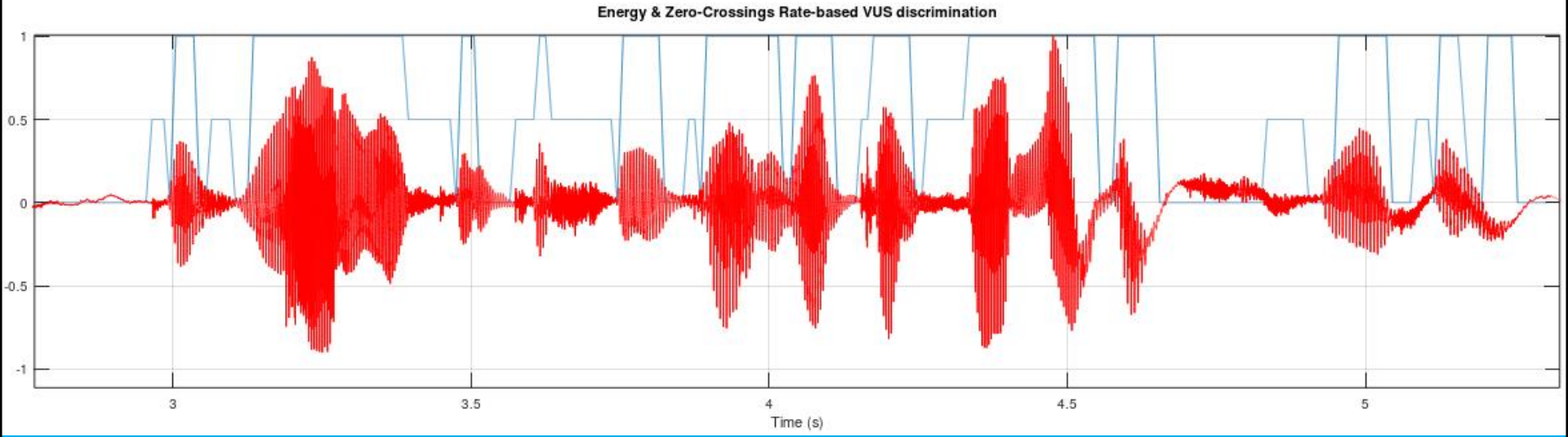
© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Φασματική Ανάλυση με το Short Time Fourier Transform**

Speech wave in two plots (1 is voiced, ½ is unvoiced, 0 is silence)

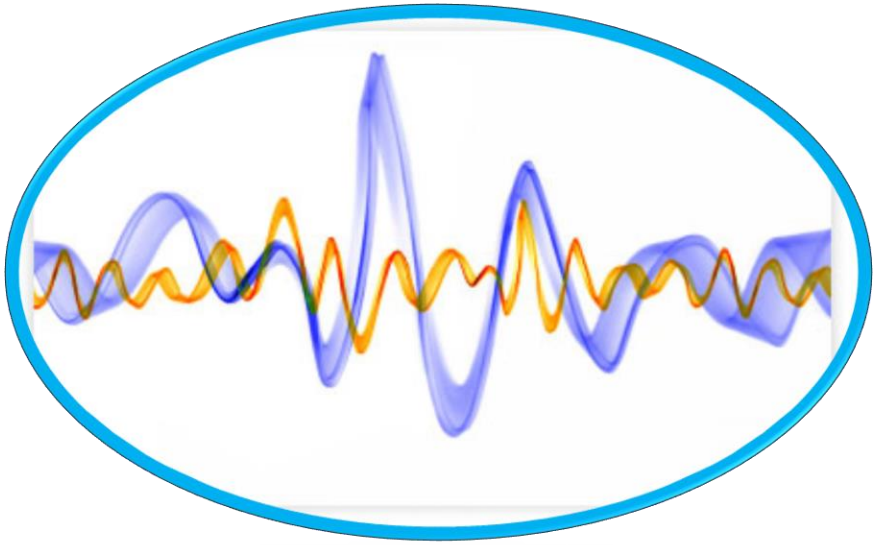




© Καφεντζής Γιώργος, PhD



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

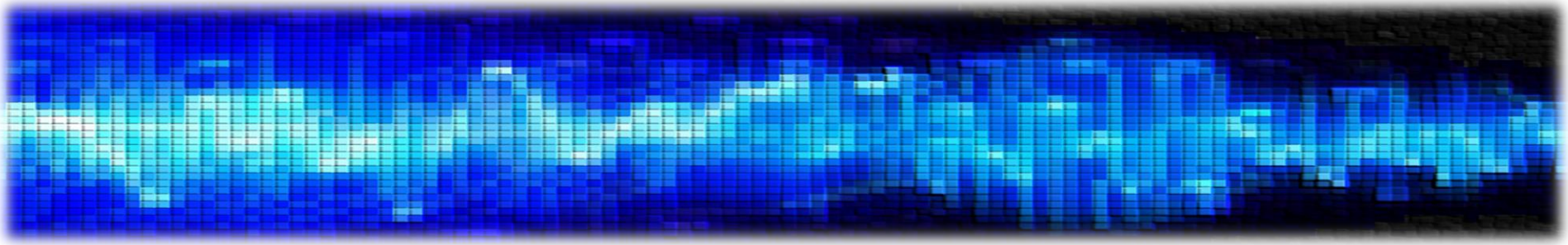


© Καφεντζής Γιώργος, PhD



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



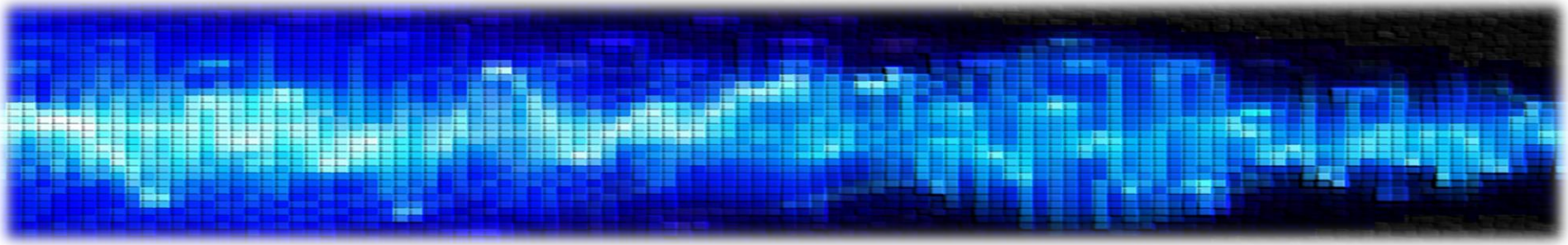
- Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



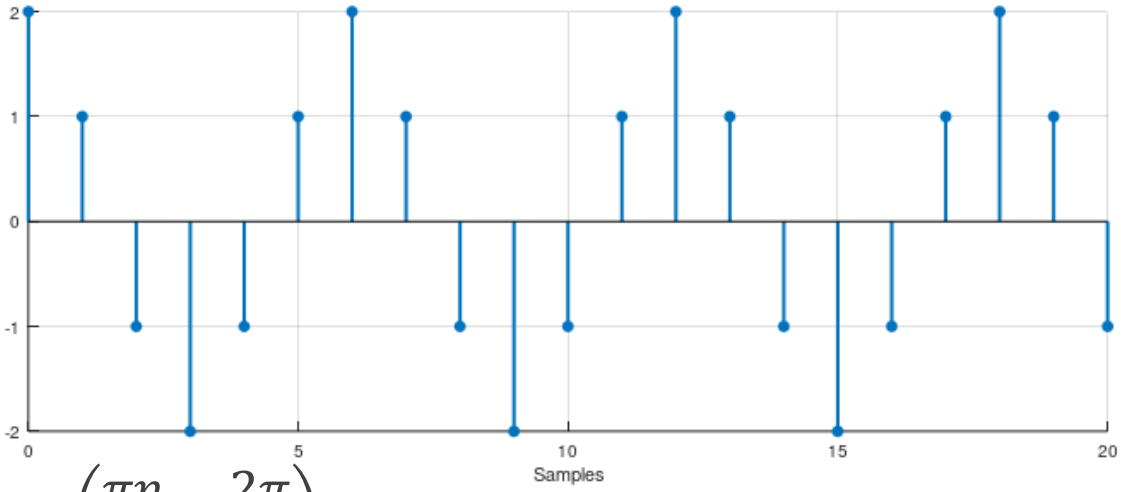
- Φάση

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Έστω ένα ημίτονο της μορφής $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right), \quad -\infty < n < +\infty$

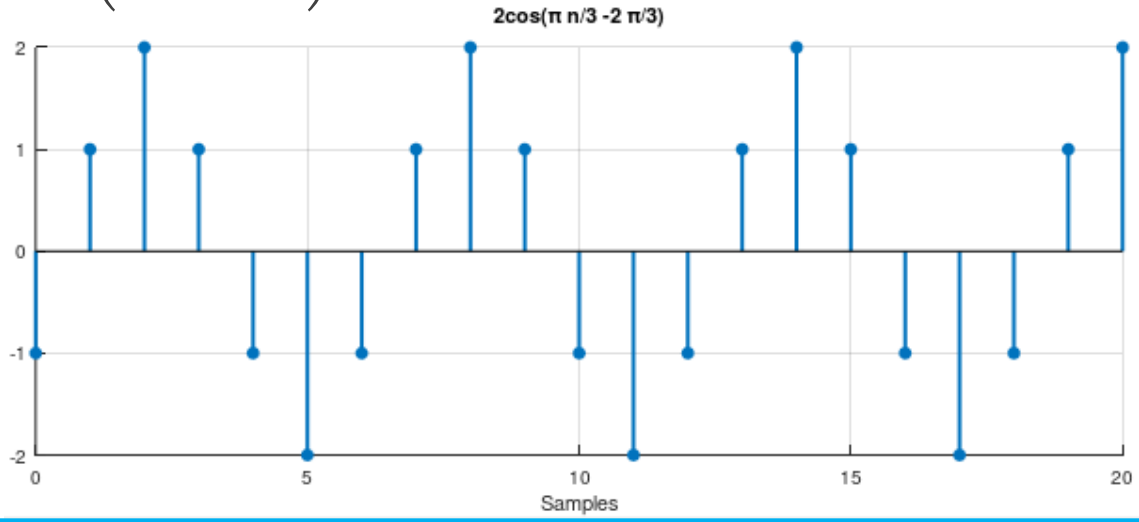


- Ας το καθυστερήσουμε κατά 2 δείγματα, δηλ. ας θέσουμε

$$n := n - 2$$

- Θα έχουμε το σήμα

$$x[n-2] = 2\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{2\pi}{3}\right), \quad -\infty < n < +\infty$$



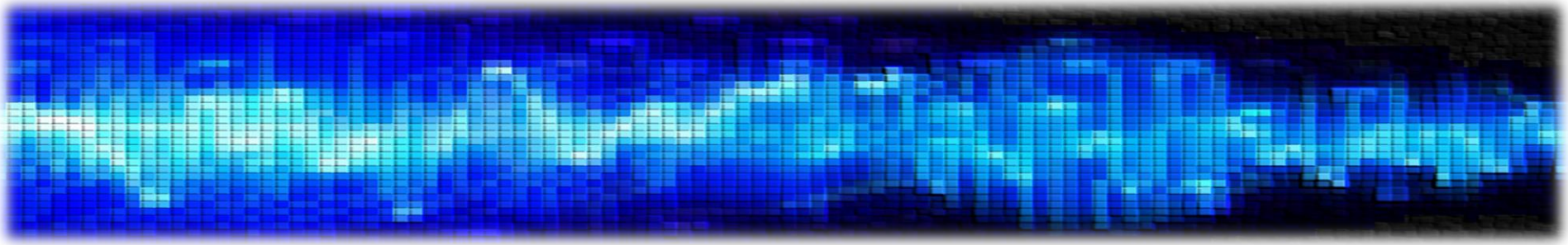
- Βλέπετε ότι η αρχική φάση $-\frac{2\pi}{3}$ "κρύβει" μέσα της την καθυστέρηση του σήματος
  - … η οποία είναι 2 δείγματα
  - … και σχετίζεται με τη μετατόπιση από ένα σημείο αναφοράς
    - Το $(0,0)$!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



- Καθυστέρηση Φάσης και Καθυστέρηση Ομάδας

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Έστω ένα ημίτονο της μορφής

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)\,, \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Μπορούμε από την αρχική φάση του να βρούμε την καθυστέρηση του σε δείγματα ως

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = A\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi}{\omega_0}\right)\right)$$

- Η ποσότητα $-\frac{\phi}{\omega_0}$ ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης** (**phase delay**)
  - … και σημαίνει ακριβώς πόσα δείγματα καθυστέρησε ένα σήμα σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς
- Μπορούμε να ορίσουμε την καθυστέρηση φάσης ως συνάρτηση του ω, δηλ.

$$\tau_p\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{\phi\left(e^{j\omega}\right)}{\omega}$$

- Η συνάρτηση αυτή δεν έχει νόημα για ένα ημίτονο όπως το παραπάνω – το οποίο θα έχει μια μόνο αρχική φάση – αλλά θα τη χρησιμοποιήσουμε αλλού…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\phi_H(e^{j\omega})}$$

Απόκριση πλάτους

Απόκριση φάσης

- Ένα σήμα εισόδου $x[n]$ μπορεί να γραφεί συχνοτικά μέσω του μετασχ. Fourier του:

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\phi_X(e^{j\omega})}$$

Φάσμα πλάτους εισόδου

Φάσμα φάσης εισόδου

- Ξέρουμε ότι στην έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = \left|Y(e^{j\omega})\right| e^{j\phi_Y(e^{j\omega})} = \left|H(e^{j\omega})\right|\left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\left(\phi_X(e^{j\omega})+\phi_H(e^{j\omega})\right)}$$

Φάσμα πλάτους εξόδου

Φάσμα φάσης εξόδου

- Ας παραμείνουμε στην ημιτονοειδή μορφή εισόδου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi_x)$$



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Η επίδραση της απόκρισης πλάτους είναι προφανής
  - Διαμορφώνει **πολλαπλασιαστικά** το φάσμα εισόδου και παραδίδει ένα φάσμα εξόδου
- Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι όμως ότι η απόκριση φάσης δρα **αθροιστικά** επάνω στο φάσμα φάσης της εισόδου
- Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης γνωρίζουμε ότι

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \phi_x + \phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right), \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Η αρχική φάση του ημιτόνου άλλαξε στην έξοδο!
  - Προστέθηκε μια φάση $\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)$
  - …η οποία σχετίζεται με το ΓΧΑ σύστημα και με τη συχνότητα ω_0 της εισόδου
    - Δηλ. εν γένει για διαφορετική συχνότητα εισόδου, θα προστεθεί διαφορετική φάση στην ήδη υπάρχουσα
- Η έξοδος μπορεί κι αυτή να γραφεί ως

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα πρόσθεσε μια επιπλέον καθυστέρηση φάσης!
- Αριθμητικά, αν για ένα σήμα εισόδου $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$, η απόκριση φάσης του ΓΧΑ συστήματος ήταν της μορφής $\phi_H\left(e^{j\omega}\right) = -2\omega$, τότε το σύστημα εισάγει στην είσοδο φάση ίση με

$$\phi_H\left(e^{j\pi/3}\right) = -2\omega]_{\omega=\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

- Άρα η καθυστέρηση φάσης του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

$$\tau_p\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right) = -\frac{\phi_H\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

- Άρα η έξοδος καθυστέρησε 2 δείγματα σε σχέση με την είσοδο
  - … που ήταν ήδη καθυστερημένη κατά 2 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς $(0,0)$☺
- Επιβεβαίωση:

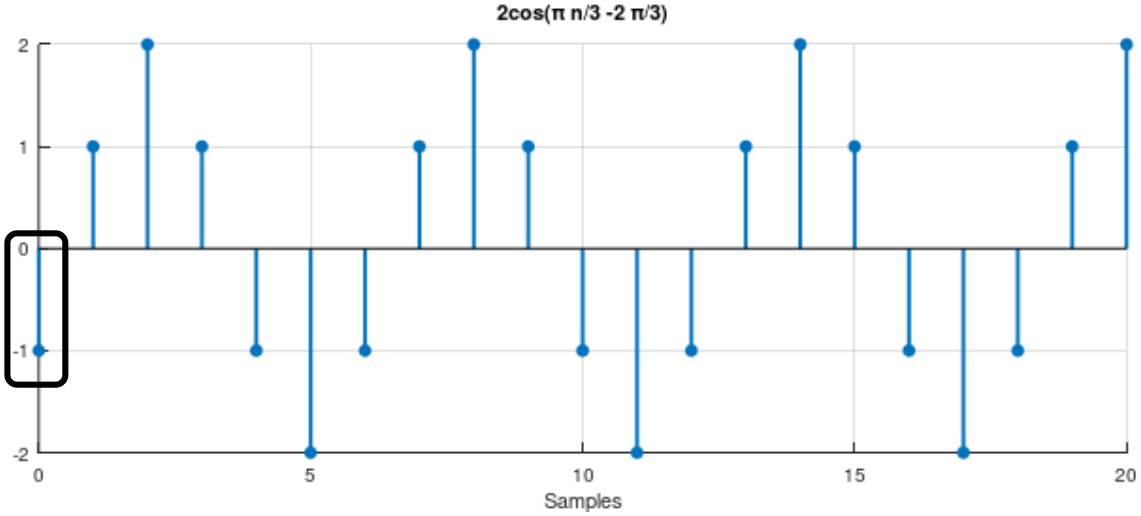
$$y[n] = 2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(n - \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} - 2\right)\right) = 2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-4)\right)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

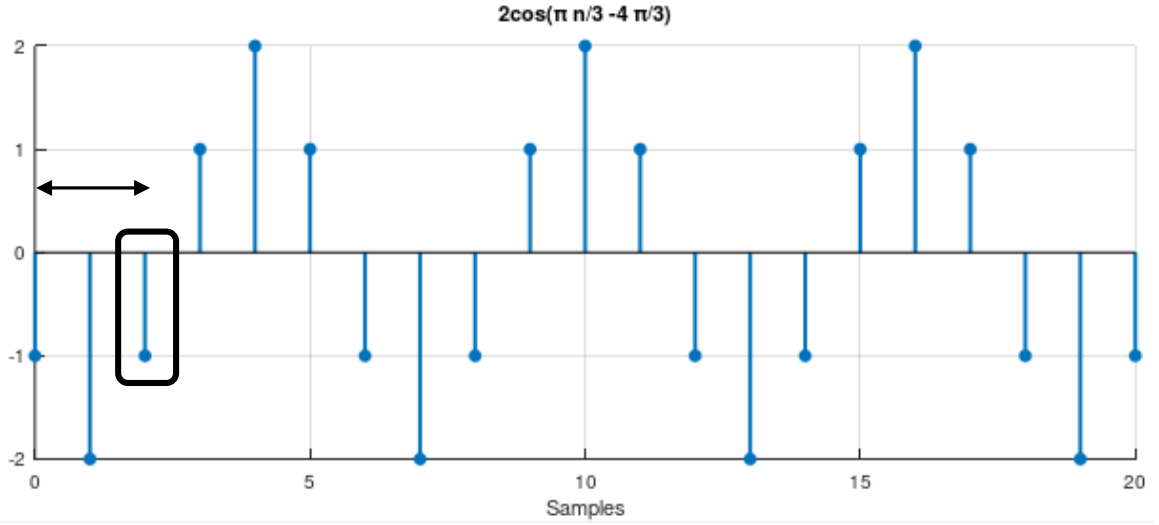


- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Η καθυστέρηση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος ισούται με το πλήθος των δειγμάτων που καθυστερεί ένα <u>άπειρης</u> διάρκειας ημιτονοειδές σήμα εισόδου όταν περάσει από ένα ΓΧΑ σύστημα



- Αγνοήσαμε σκόπιμα την επίδραση της απόκρισης πλάτους
  - …η οποία μπορεί να αλλοιώνει το πλάτος του σήματος εισόδου



© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Όμως είναι αυτή η *πραγματική* καθυστέρηση ενός σήματος στην έξοδο ενός συστήματος?
  - Έστω το σήμα

περιβάλλουσα

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n)\cos(\omega_c n) = \frac{A}{2}\cos(\omega_l n) + \frac{A}{2}\cos(\omega_u n)$$

φέρον σήμα

με χρήση Euler/τριγωνομετρίας και με

$$\omega_l = \omega_c - \omega_0$$

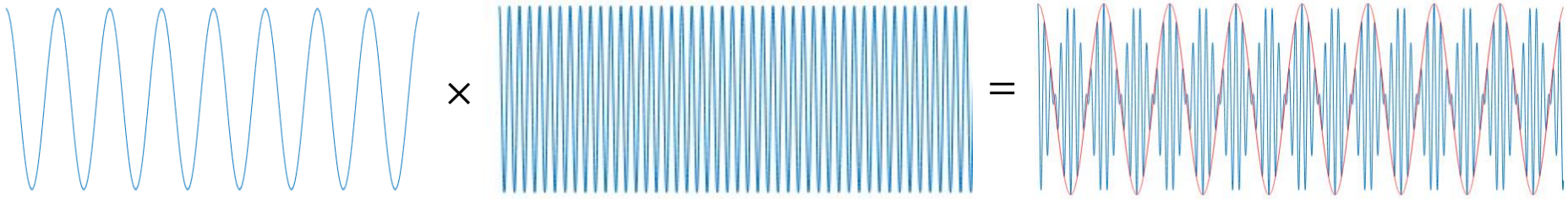
και

$$\omega_u = \omega_c + \omega_0$$

με

$$\omega_c \gg \omega_0$$

περιβάλλουσα × φέρον σήμα = $x[n]$





- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Αν περάσουμε το σήμα από ένα σύστημα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi_h(e^{j\omega})}$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \frac{A|H(e^{j\omega_l})|}{2}\cos(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)) + \frac{A|H(e^{j\omega_u})|}{2}\cos(\omega_u n + \phi_h(\omega_u))$$

- Αν η απόκριση πλάτους είναι περίπου μοναδιαία (γενικότερα, σταθερή) γύρω από τις συχνότητες ω_u, ω_l τότε

$$y[n] = \frac{A}{2}\cos(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)) + \frac{A}{2}\cos(\omega_u n + \phi_h(\omega_u))$$

$$= A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

- Επαναφέραμε το άθροισμα σε γινόμενο για να βρούμε πόσο καθυστερεί η περιβάλλουσα και πόσο το φέρον σήμα

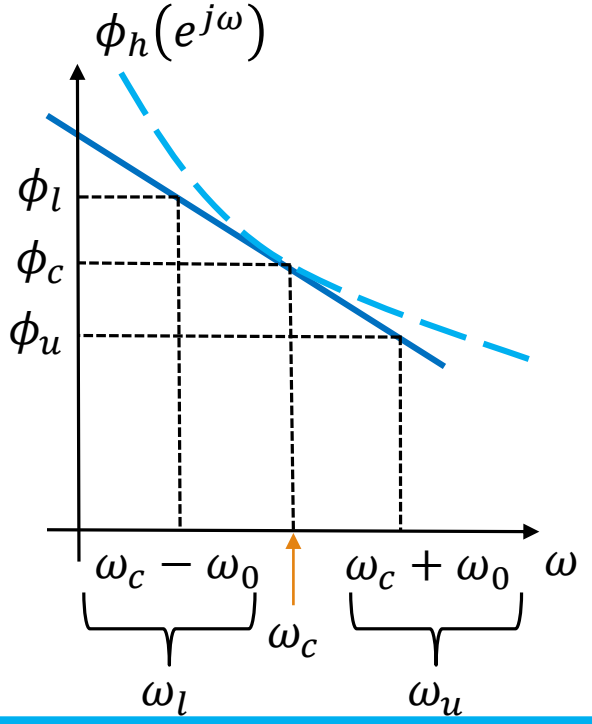
© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

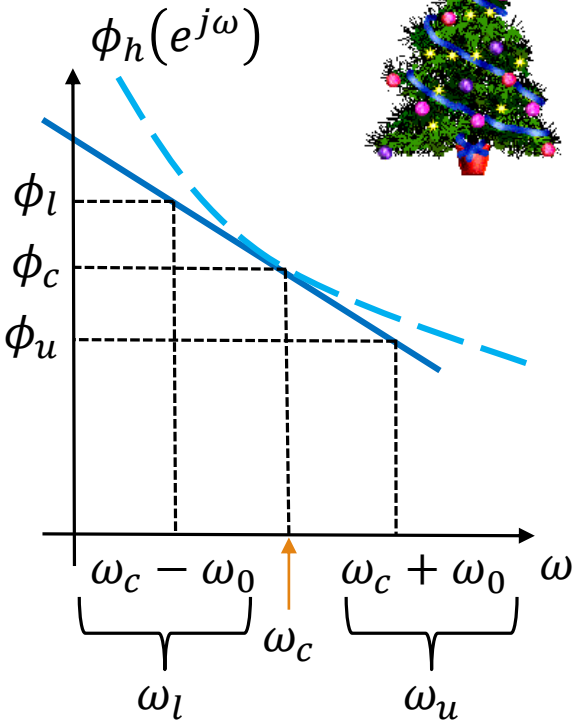
- Αφού υποθέσαμε ότι $\omega_c \gg \omega_0$, τότε $\omega_u \approx \omega_c$ και $\omega_l \approx \omega_c$
- Υποθέτουμε ότι η απόκριση φάσης είναι **περίπου γραμμική** γύρω από το ω_c
- Αφού όλες οι τιμές της φάσης στην παραπάνω σχέση εξαρτώνται από την απόκριση φάσης του συστήματος, ας συμβολίσουμε *για ευκολία*:
  - $\phi_l = \phi_h\left(e^{j(\omega_c - \omega_0)}\right) = \phi_h\left(e^{j\omega_l}\right)$
  - $\phi_u = \phi_h\left(e^{j(\omega_c + \omega_0)}\right) = \phi_h\left(e^{j\omega_u}\right)$
  - $\phi_c = \phi_h\left(e^{j\omega_c}\right)$



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2}\right)$$



- Με χρήση του παραπάνω, η καθυστέρηση φάσης του δεύτερου όρου του γινομένου θα είναι

$$-\frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c} \approx -\frac{2\phi_c}{2\omega_c} = -\frac{\phi_h(e^{j\omega_c})}{\omega_c}$$

- Για τον πρώτο όρο

$$-\frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0} = -\frac{\phi_u - \phi_l}{\omega_u - \omega_l} \approx -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega_c})$$

που ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)** $\tau_g(e^{j\omega_c})$ στη συχνότητα ω_c

- Η καθυστέρηση ομάδας ορίζεται ως

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega})$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2}\right)$$

- Έτσι το σήμα γράφεται ως

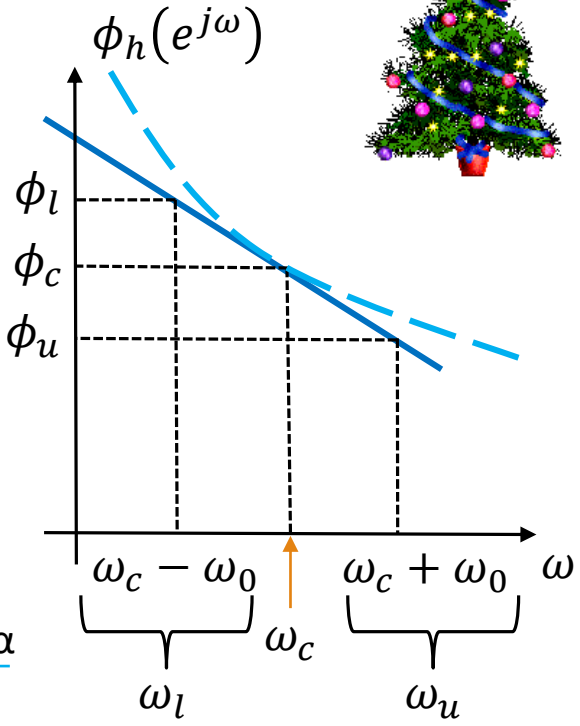
$$y[n] = A\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0}\right)\right)\cos\left(\omega_c\left(n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c}\right)\right)$$

και με βάση τα παραπάνω

$$y[n] \approx A\cos(\omega_0(n - \boldsymbol{\tau_g}(\boldsymbol{e^{j\omega_c}}))\cos(\omega_c(n - \boldsymbol{\tau_p}(\boldsymbol{e^{j\omega_c}}))$$

περιβάλλουσα

φέρον σήμα

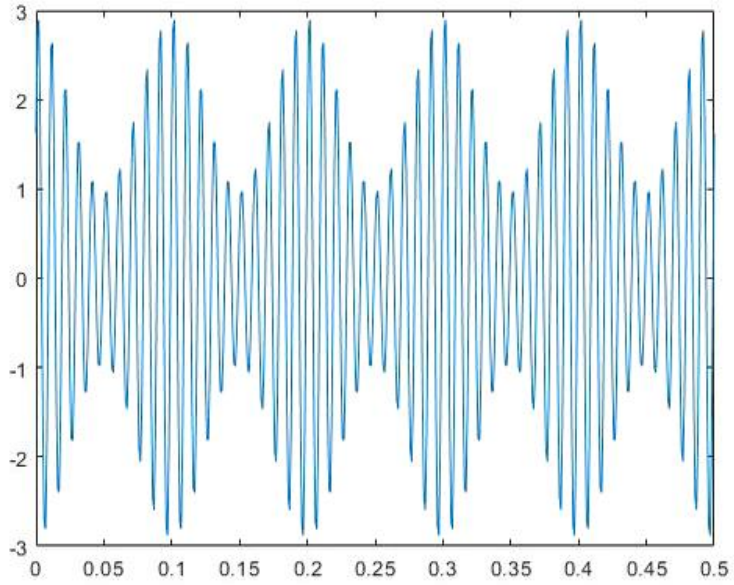


- Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα καθυστερεί διαφορετικό χρόνο στην έξοδο από το φέρον σήμα!

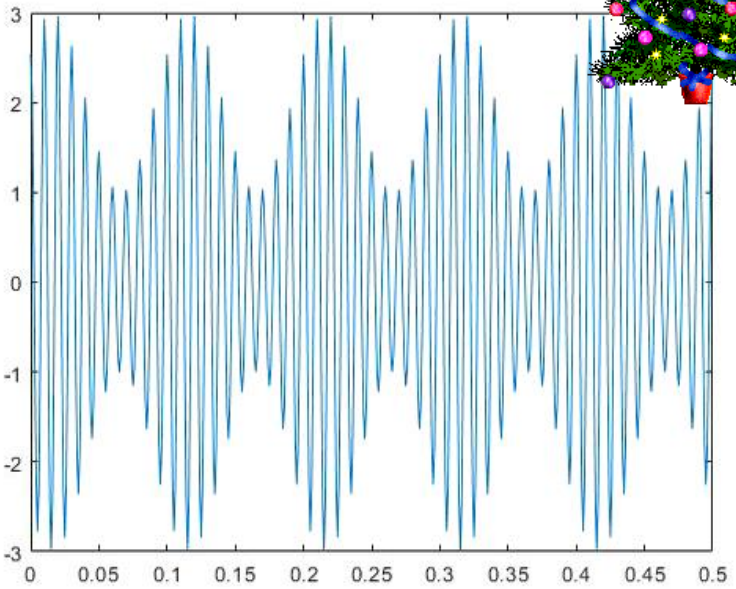
- Κάναμε **δυο** υποθέσεις:
  1. Το φάσμα πλάτους είναι (σχεδόν) σταθερό γύρω από τη συχνότητα ω_c
  2. Η απόκριση φάσης (σχεδόν) γραμμική γύρω από τη συχνότητα ω_c

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

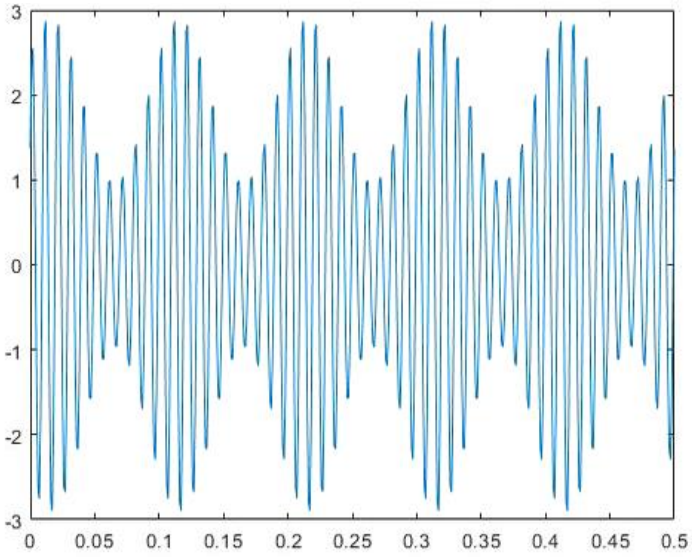
- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



Phase Delay



Group Delay



Phase & Group Delay

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

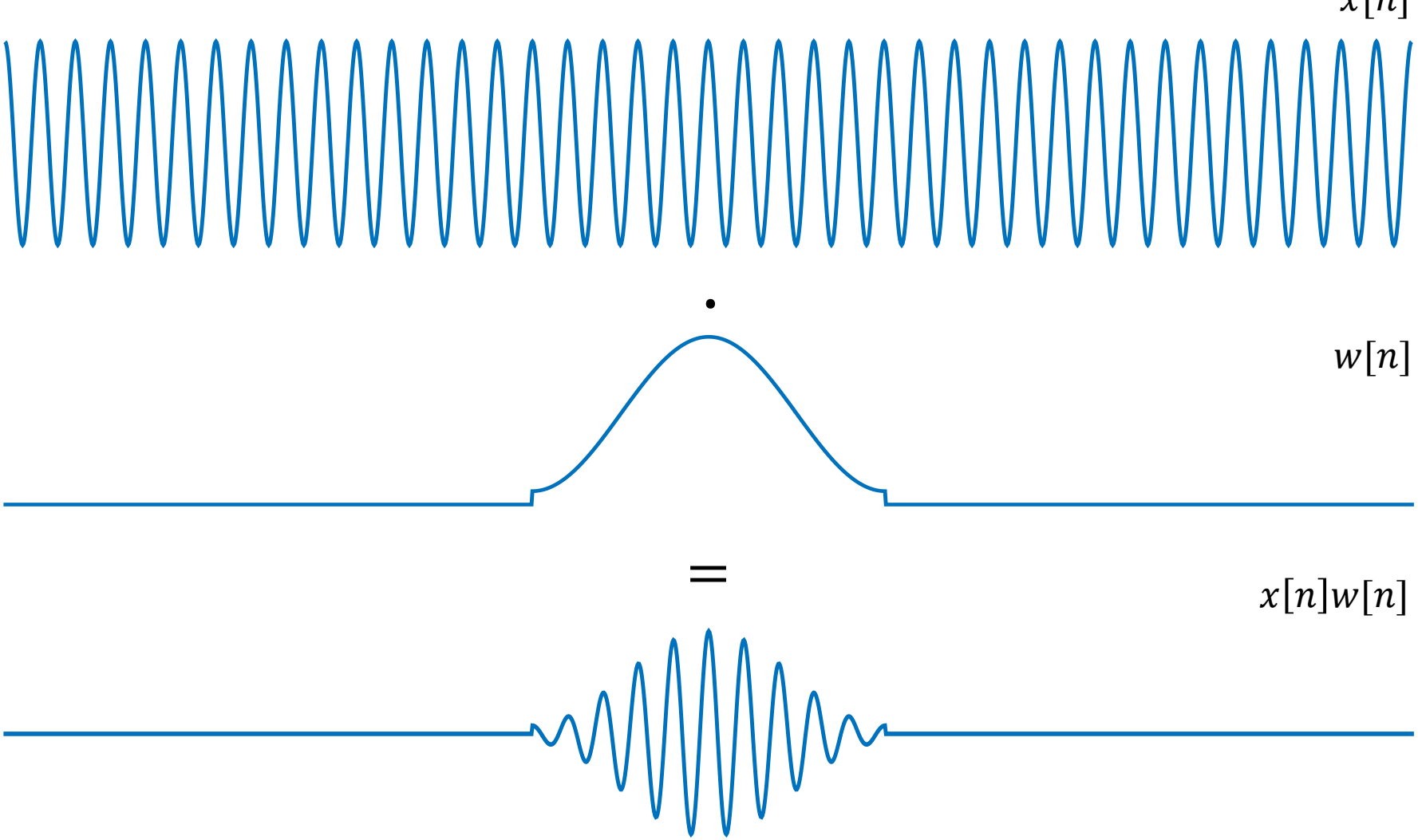


- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε ότι το σήμα εισόδου αποτελούνταν από ένα group (ομάδα) δυο συχνοτήτων, **όλες πολύ κοντά και γύρω** από μια:
  - Την $\omega = \omega_c$ (δηλ. τη φέρουσα συχνότητα)
- Η ομάδα αποτελούνταν από τις $\omega_c \pm \omega_0$
  - Η καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του ΓΧΑ συστήματος καθορίστηκε από την καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα ω_c, δηλ. από την καθυστέρηση που έλαβαν οι δυο αυτές συχνότητες, υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε
- Όλα τα παραπάνω είχαν μια υπόθεση: $-\infty < n < +\infty$
- Στην πραγματικότητα δεν έχουμε τέτοιες διάρκειες σημάτων
  - Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα από ένα άπειρης διάρκειας σήμα
- Ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άπειρης διάρκειας σήμα πολλαπλασιασμένο με ένα παράθυρο
- Ξέρουμε ότι οι συχνότητες ενός τέτοιου σήματος θα καθορίζονται από το μετασχ. Fourier του παραθύρου
  - Αυτό είναι το group συχνοτήτων μας! ☺
- Ας θεωρήσουμε ένα παράθυρο Hanning κι ας δούμε τι συμβαίνει…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



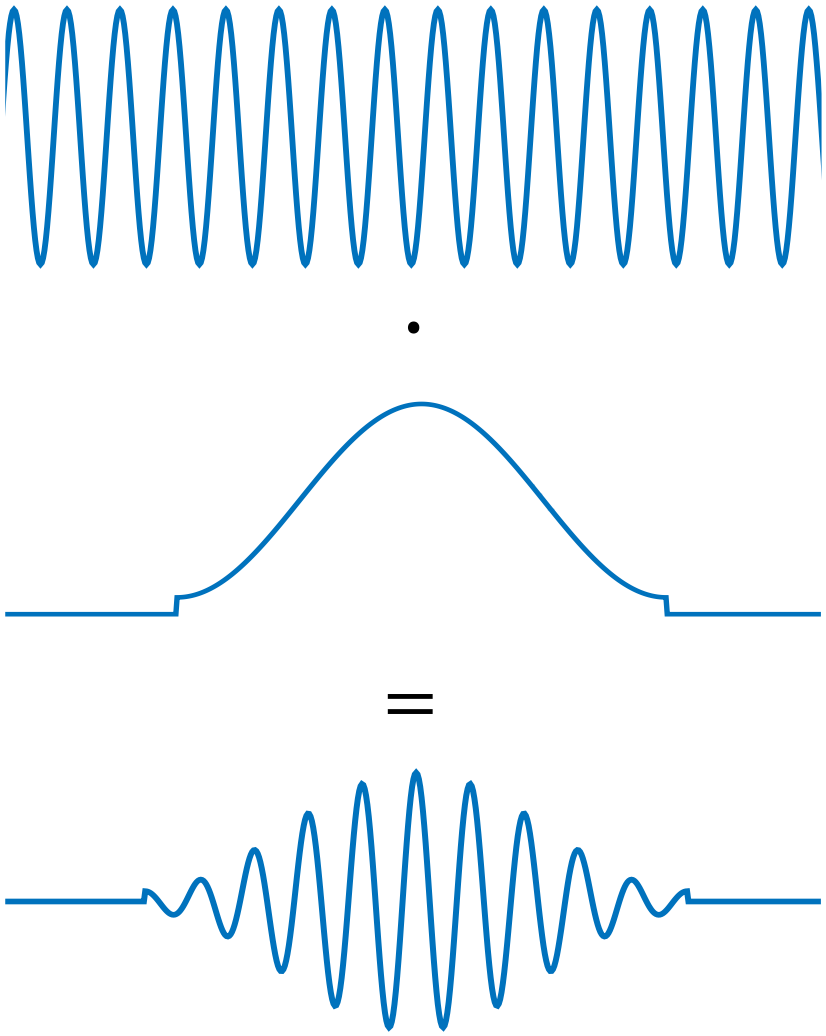
- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, οπότε θα προκύπτει όπως παρακάτω:



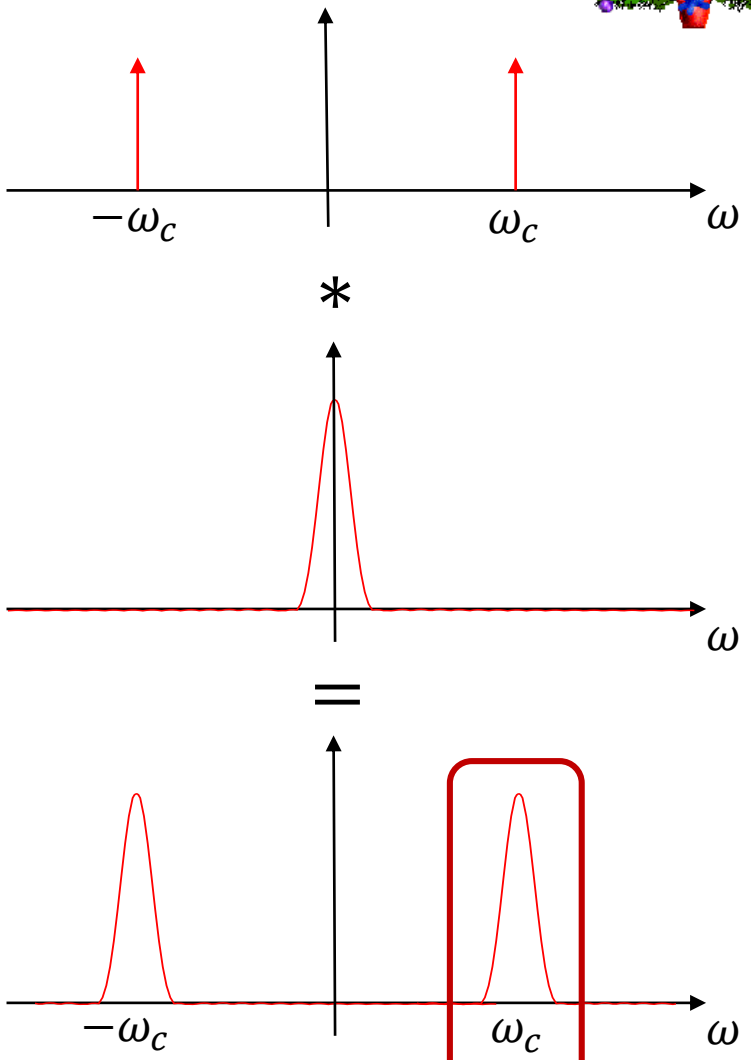
© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



$|F|$

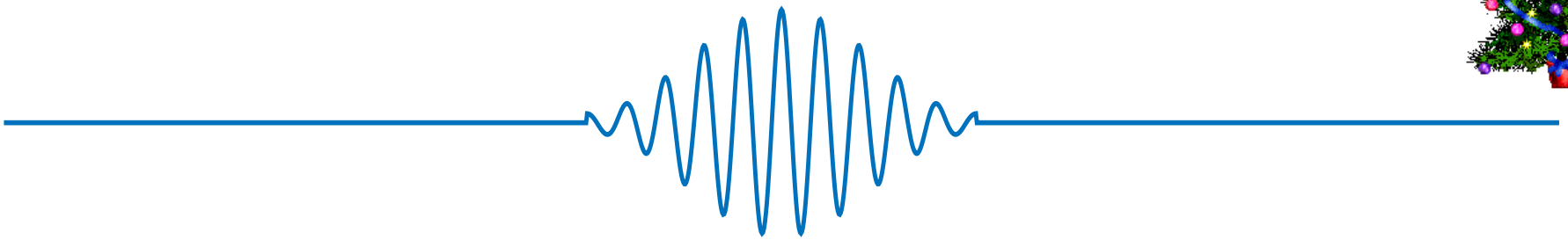


Γκρουπ συχνοτήτων γύρω από την ω_c

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



- Παρατηρήσατε ότι ο παραπάνω ημιτονοειδής παλμός δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα ω_c αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

$$w[n] \cdot A\cos(\omega_c n) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} W\left(e^{j\omega}\right) * \left(A\pi\delta(\omega-\omega_c) + A\pi\delta(\omega+\omega_c)\right)$$

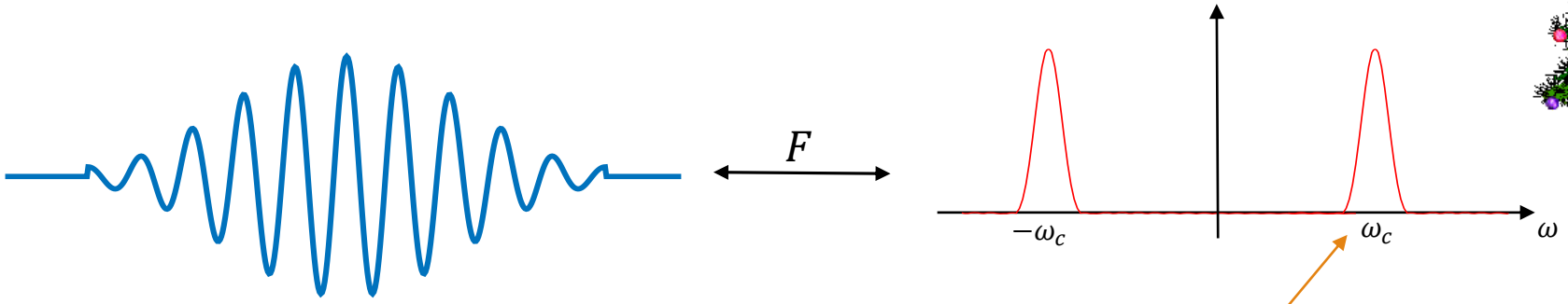
$$\frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega-\omega_c)}\right) + \frac{A}{2} W\left(e^{j(\omega+\omega_c)}\right)$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει ο ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier $W\left(e^{j\omega}\right)$ του σήματος της περιβάλλουσας $w[n]$!
  - Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε το σήμα ονομάζεται **στενής ζώνης**!
    - Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα $w[n]$ πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια…
      - Γιατί? Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



- Παρατηρήστε ότι το ημίτονο είναι **διαμορφωμένο** (πολλαπλασιασμένο) με μια Gaussian-like περιβάλλουσα $w[n]$

- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το «πακέτο συχνοτήτων» που αποτελεί τον ημιτονοειδή παλμό!

- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, τότε κάθε «πακέτο» κάθε συχνότητας θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος, κι έτσι η έξοδος θα είναι εν γένει διαφορετική στη μορφή της σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

- Αν όμως τα διαμορφωμένα ημίτονα («πακέτα») είναι σήματα **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα εύρος συχνοτήτων

$$[-\omega_c - B, -\omega_c + B], [\omega_c - B, \omega_c + B]$$

με ω_c τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης κάθε «πακέτου» της εξόδου!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

- Έστω ότι η περιβάλλουσα $w_k[n]$ κάθε συχνότητας ω_k είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα, δηλ.

$$w_k[n] \neq 0, \qquad N_1 \leq n \leq N_2$$
$$W_k(e^{j\omega}) = 0, \qquad |\omega| > B_k, \qquad B_k \ll \omega_k$$

- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega-\omega_k)}\right) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega+\omega_k)}\right) \right)$$

- Πράγματι έχουμε ένα άθροισμα σημάτων στενής ζώνης!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k\left[n - \tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)\right] \cos\left(\omega_k\left(n - \tau_p\left(e^{j\omega_k}\right)\right) + \theta_k\right)$$

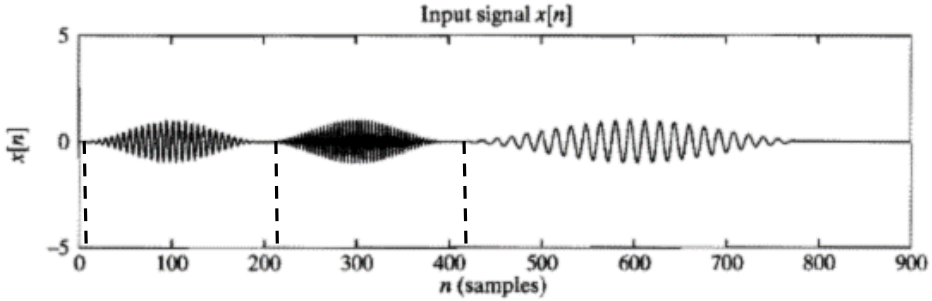
- Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας ω_k έχει καθυστερήσει κατά $\tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)$

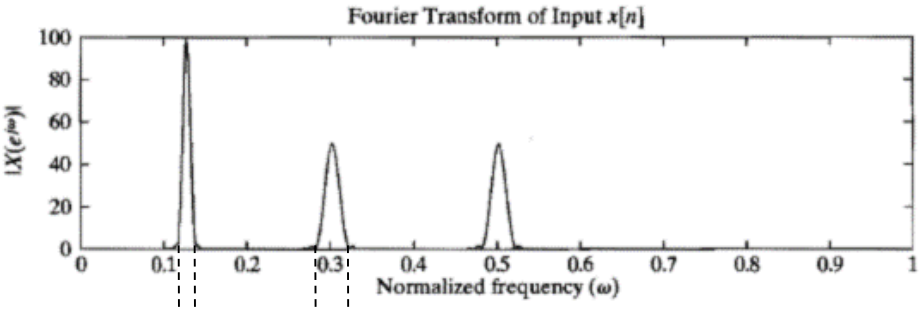
- Η ερμηνεία του group delay ως η καθυστέρηση ενός ημιτονοειδούς παλμού στην έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι έγκυρη μόνον αν:
  - ❑ Η απόκριση πλάτους γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
  - ❑ Η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
    - ❑ Δηλ. η απόκριση πλάτους της εισόδου πρέπει να είναι αρκετά narrowband (“στενής ζώνης”)

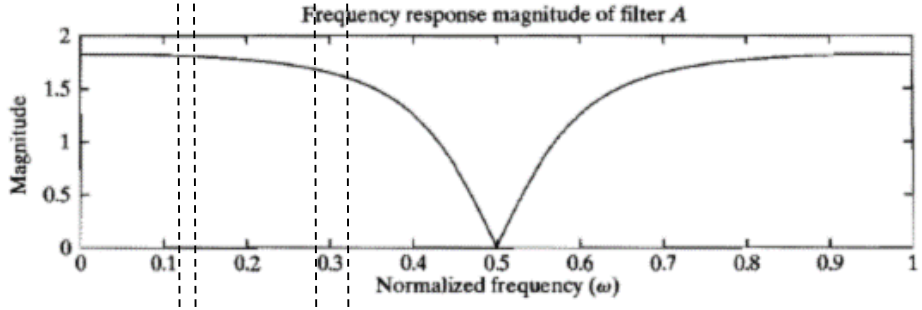
© Καφεντζής Γιώργος, PhD

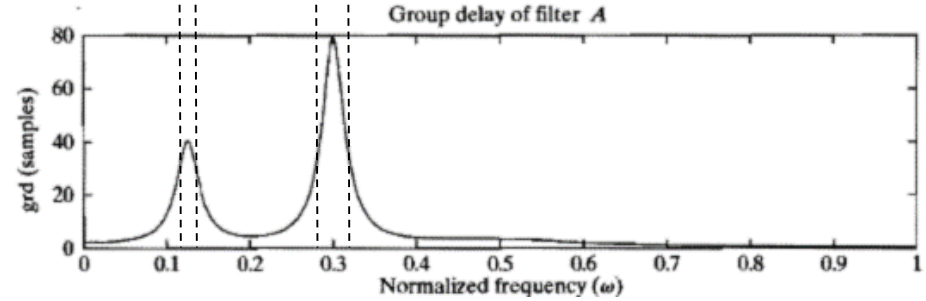
- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

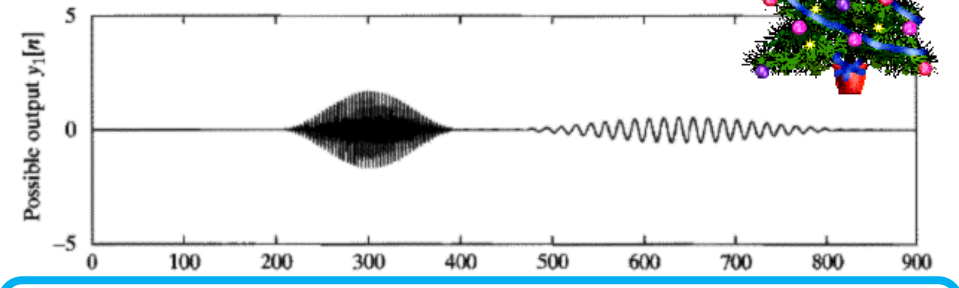


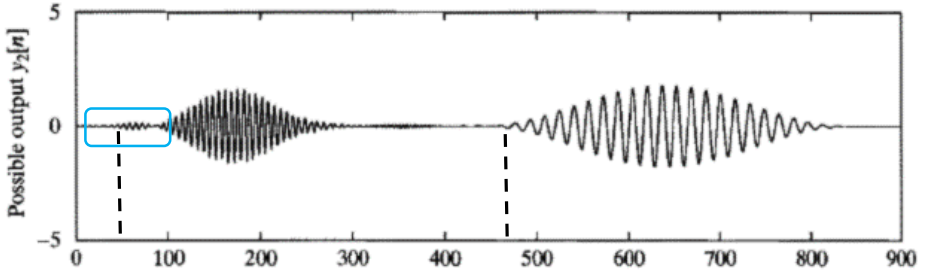


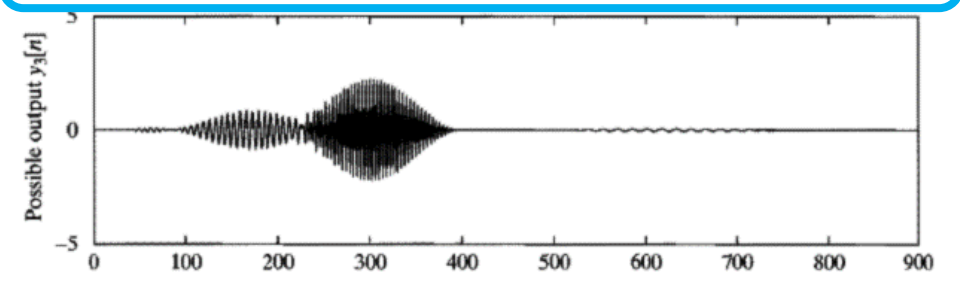


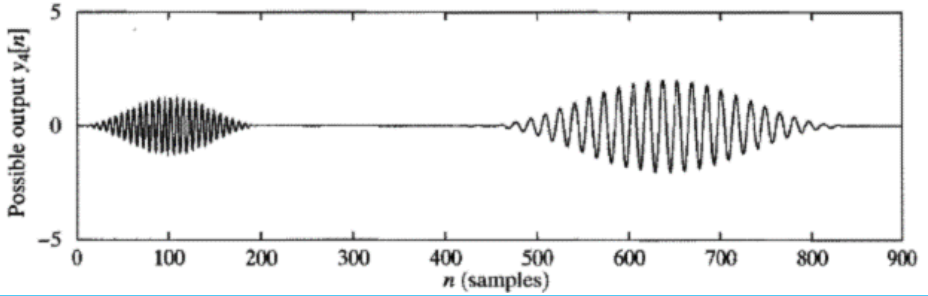








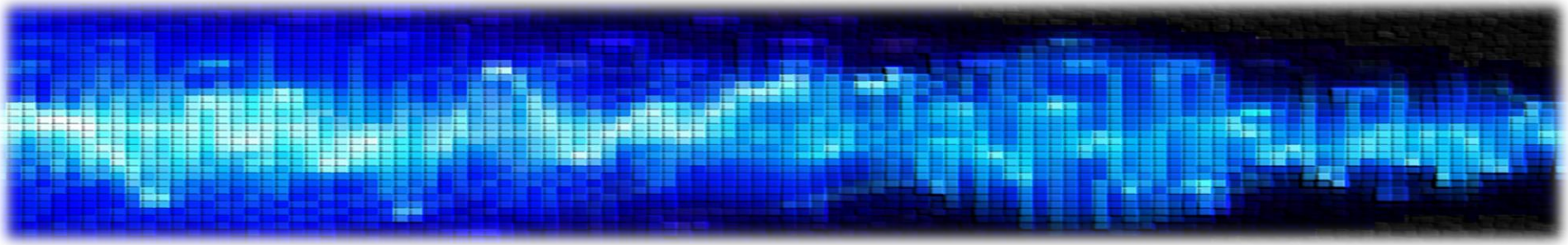






Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



- Μεταβατική και σταθερής κατάστασης απόκριση

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Γνωρίζουμε την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης ενός ΓΧΑ συστήματος για είσοδο της μορφής

$$Ae^{j(\omega n+\theta)}, \qquad -\infty < n < +\infty, \qquad A \in \mathbb{R}_+$$

- Η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = AH\left(e^{j\omega}\right)e^{j(\omega n+\theta)}, \qquad -\infty < n < +\infty,$$

- Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα
- Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη
- Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα
- Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα ***αιτιατό*** ΓΧΑ σύστημα
  - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$
- Το σήμα αυτό θα είναι (με $A = 1, \theta = 0$) το

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

- Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= H\left(e^{j\omega n}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

- Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$y[n] = H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]||e^{j\omega(n-k)}| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεραίνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε
$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$
τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \to +\infty$
   - Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Ας υλοποιήσουμε στο Octave/MATLAB ένα γνωστό σας σύστημα για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

- Το ΓΧΑ σύστημα είναι το φίλτρο «κυλιόμενης μέσης τιμής (moving average)», με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

- Γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα πρέπει να είναι μηδενική!
  - … αφού στη συχνότητα εισόδου η απόκριση πλάτους μηδενίζεται
  - Σημεία μηδενισμού της απόκρισης πλάτους: $\omega_k = \frac{2\pi k}{M+1} = \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και την απόκριση σταθερής κατάστασης, αφού το ημίτονο εισόδου ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

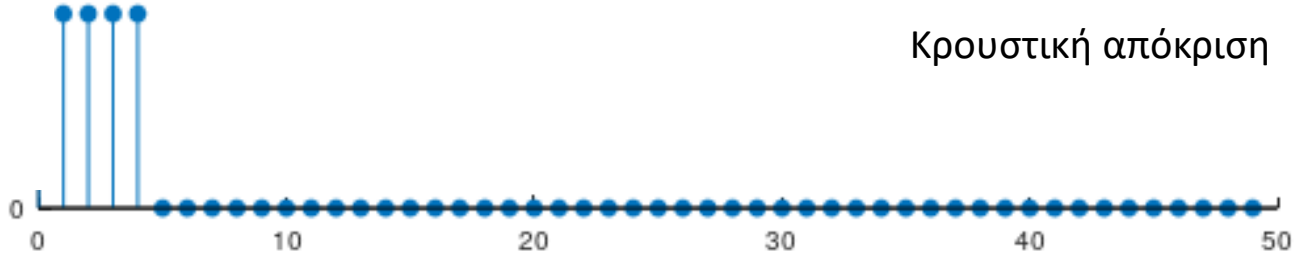


- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

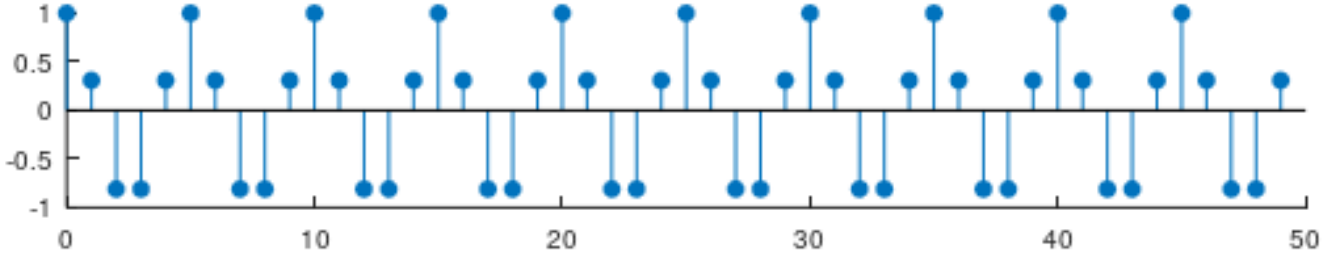
```
% Impulse Response h[n]
h = 1/(5).*ones(1, 5);
h = [h zeros(1,50)];
nh = 0:54;

% Input signal x[n]
omega0 = 2*pi/5;
nx = 0:1000;
x = cos(omega0.*nx);

% Convolution
y = conv(h,x);
ny = [0:1054];
```

```
% Plots
subplot(311);
stem(nh(1:50), h(1:50), 'filled');
subplot(312);
stem(nx(1:50), x(1:50), 'filled');
subplot(313);
stem(ny(1:50), y(1:50), 'filled');
```

Κρουστική απόκριση



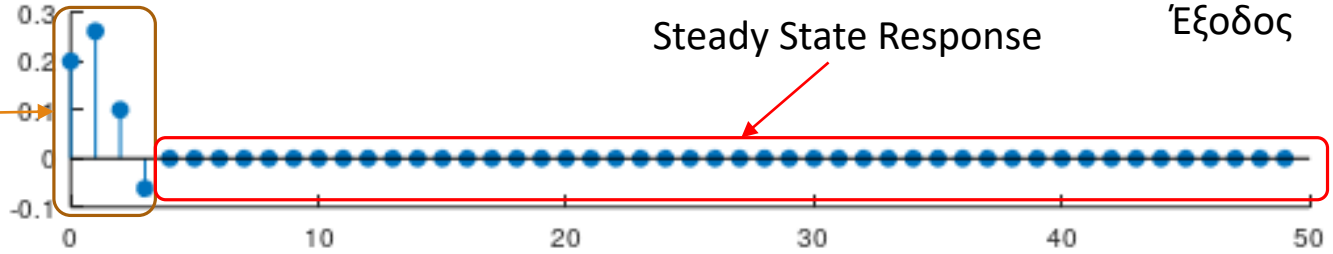
Είσοδος



Έξοδος

Steady State Response

Transient Response



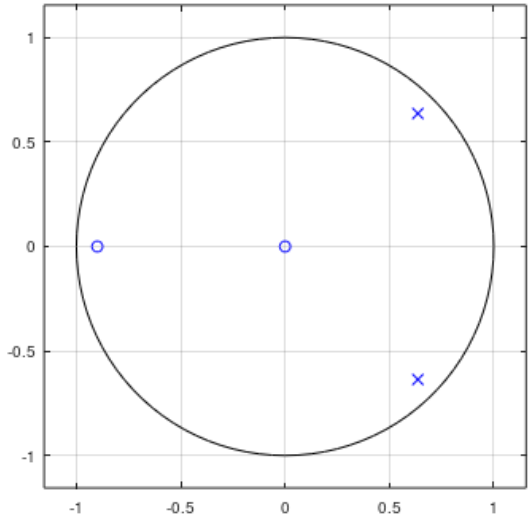


- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα που να ενισχύει τη συχνότητα $\omega = \frac{\pi}{4}$ και να καταστέλλει σημαντικά τη συχνότητα $\omega = \pi$
- Θα τοποθετήσουμε δυο πόλους κοντά στις συχνότητες $\omega = \pm\frac{\pi}{4}$ και ένα μηδενικό κοντά στη συχνότητα $\omega = \pi$
- Αυτό το σύστημα θα έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{\left(1 - 0.9e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - 0.9e^{-\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

- Ο παρακάτω κώδικας παράγει αυτό το σύστημα

```
% Polynomial coefficients
B = [1 0.9];
A = conv([1 -0.9*exp(j*pi/4)], [1 -0.9*exp(-j*pi/4)]);
% z-plane
zplane(B,A);
```

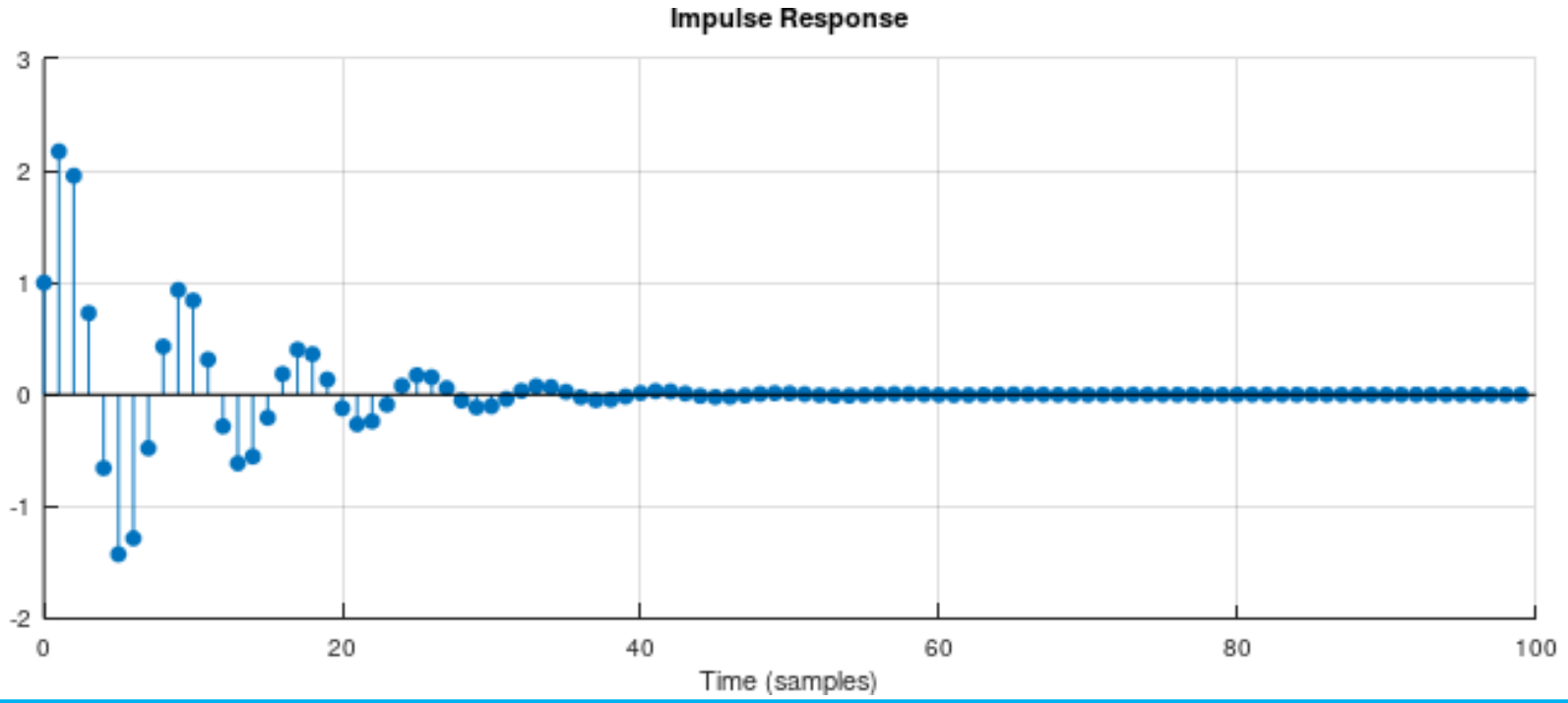


- Όλα όπως πρέπει… ☺



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Η κρουστική απόκριση του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί στο MATLAB\Octave

```
% Polynomial coefficients
B = [1 0.9];
A = conv([1 -0.9*exp(j*pi/4)], [1 -0.9*exp(-j*pi/4)]);
% Impulse response
[h,T] = impz(B, A, 2048);
% Plot
stem(T(1:100), h(1:100), 'filled');
xlabel('Time (samples)');
title('Impulse Response');
```



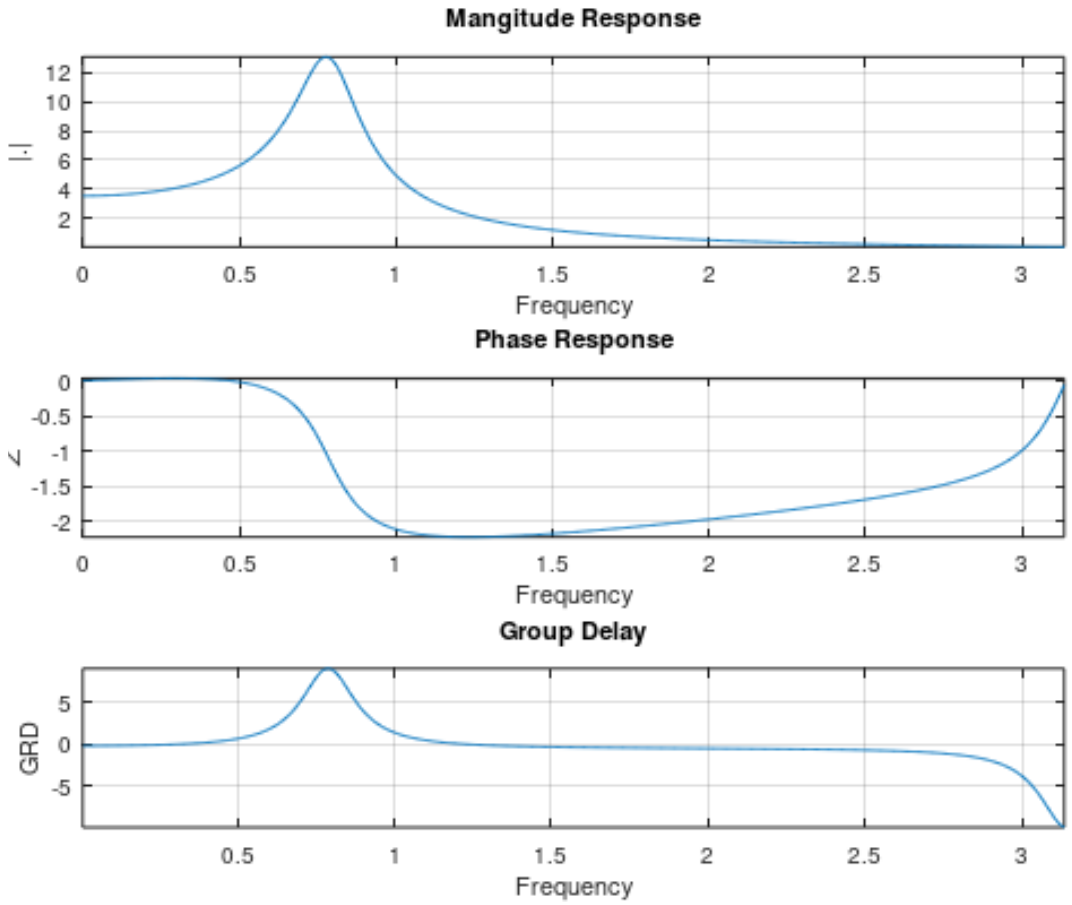
© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

- Η απόκριση πλάτους, φάσης, και η καθυστέρηση ομάδας υπολογίζονται ως:

```
% Frequency response
[H,W] = freqz(B,A);
% Plots
figure; subplot(311); plot(W, abs(H));
grid;
title('Mangitude Response');
xlabel('Frequency');
ylabel('|.|');
subplot(312); plot(W, angle(H));
title('Phase Response');
grid;
xlabel('Frequency');
ylabel('\angle');
subplot(313);
plot(W(2:end), -1./(W(2)-W(1)).*diff(angle(H)));
title('Group Delay');
grid;
xlabel('Frequency');
ylabel('GRD');
```



© Καφεντζής Γιώργος, PhD

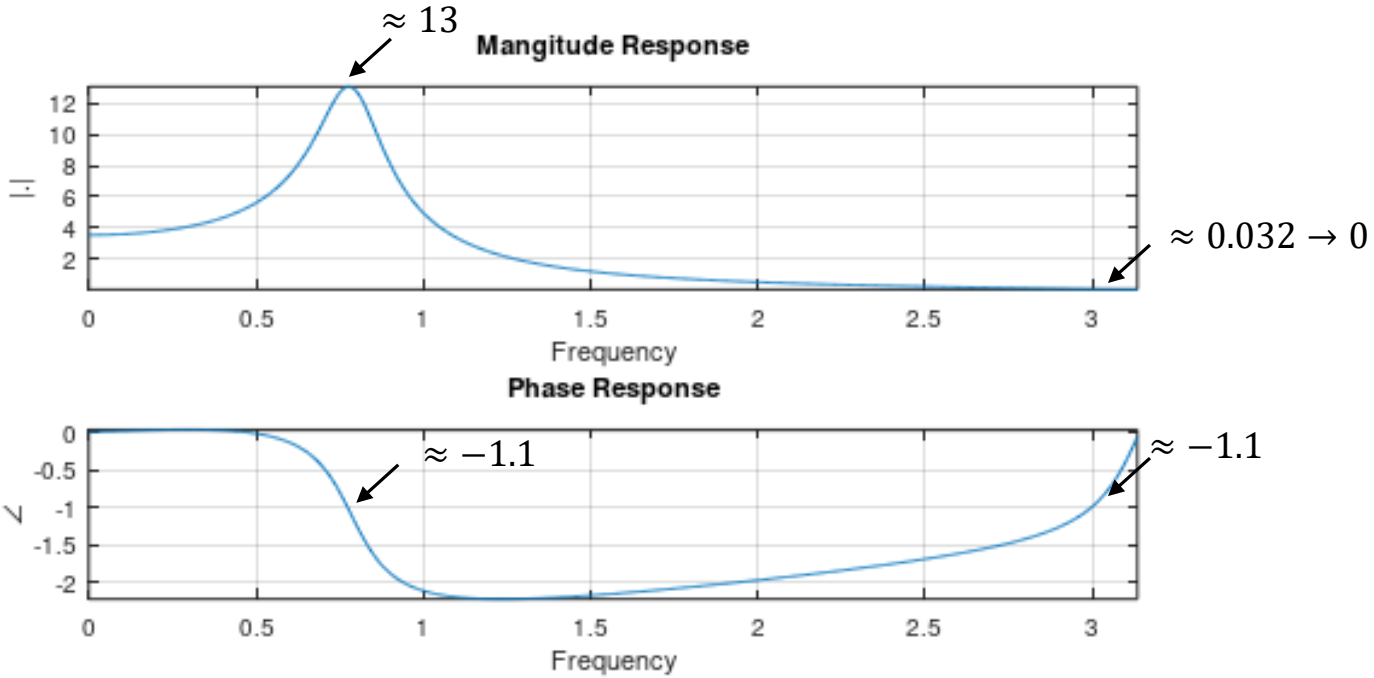


- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Ας υποθέσουμε μια είσοδο της μορφής

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos(\pi n)\ , \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Από τη θεωρία των ιδιοσυναρτήσεων και των ιδιοτιμών, περιμένουμε ότι

$$y[n] = \left|H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \phi_H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\right) + \left|H\left(e^{j\pi}\right)\right| \cos\left(\pi n + \phi_H\left(e^{j\pi}\right)\right)$$



- $\left|H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\right| \approx 13.081$
- $\left|H\left(e^{j\pi}\right)\right| \approx 0$
- $\angle H\left(e^{\frac{j\pi}{4}}\right) \approx -1.1$
- $\angle H\left(e^{j\pi}\right) \approx -1.1$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Οπότε

$$y[n] \approx 13.081 \cos\left(\frac{\pi n}{4} - 1.1\right)$$

- Στην πραγματικότητα, η είσοδος μας είναι «ξαφνική»
  - Δηλ. εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ (ή μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή)
- Οπότε το σήμα εισόδου είναι

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[n] + \cos(\pi n)\, u[n]$$

- Γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα αποτελείται από δυο όρους:
  - Τη μεταβατική απόκριση $y_{tr}[n]$ – transient response
  - Την απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ – steady state response

$$y[n] = y_{tr}[n] + y_{ss}[n]$$

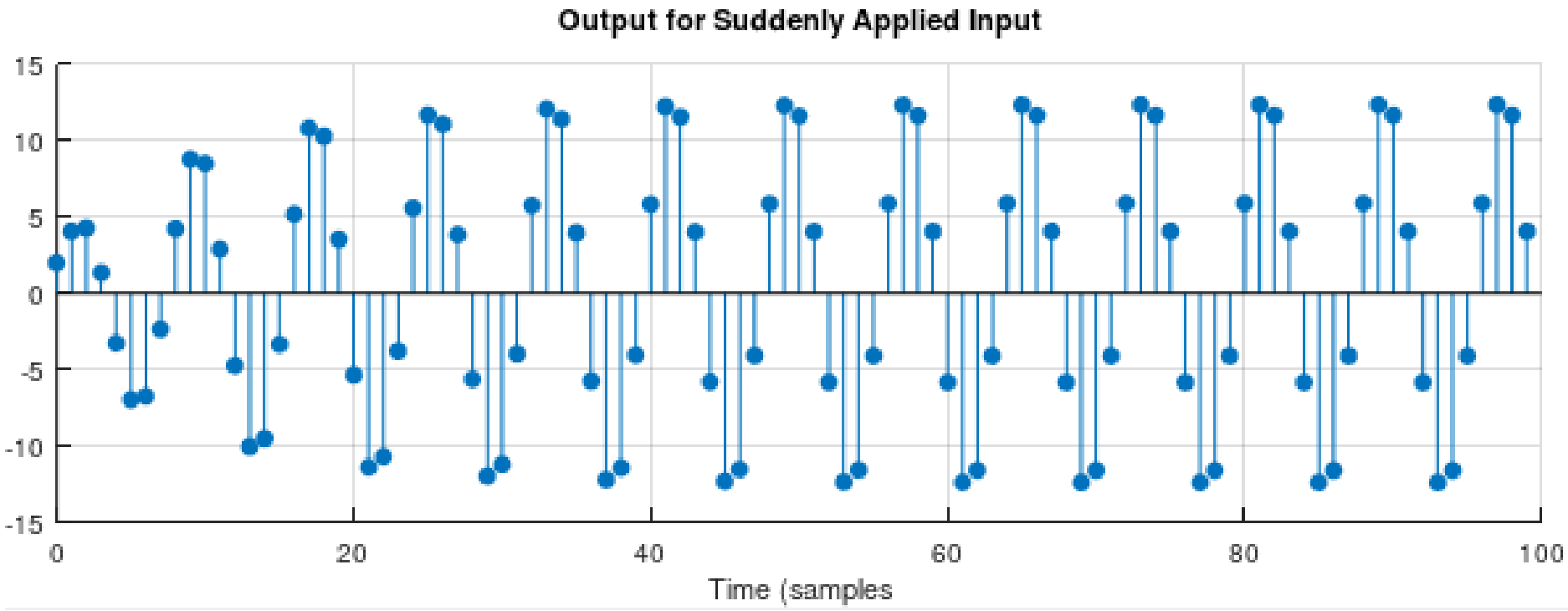
- Η απόκριση σταθερής κατάστασης ισούται με το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης
- Η μεταβατική απόκριση μας πληροφορεί πόσο «απέχει» η έξοδος μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Ας φιλτράρουμε το «ξαφνικό» σήμα μας

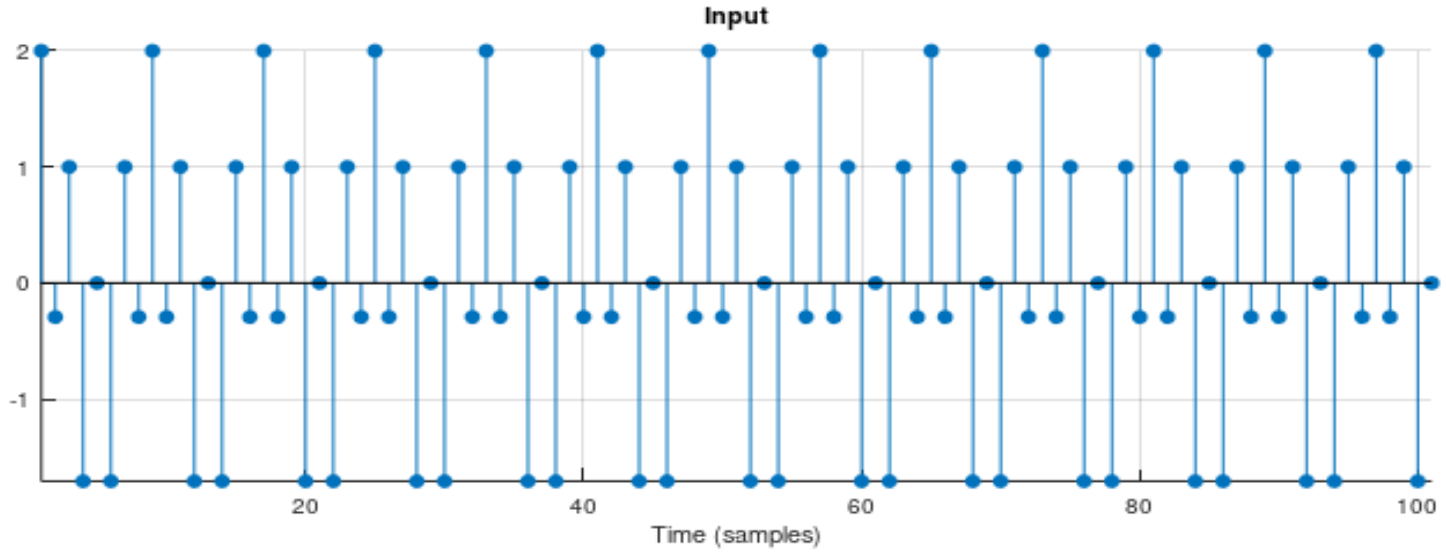
```
% Signals
n = 0:1000;
x = cos(pi*n/4) + cos(pi*n);
% Filter!
y = filter(B, A, x);
stem(n(1:100), y(1:100), 'filled');
xlabel('Time (samples'); grid;
title('Output for Suddenly Applied Input');
```

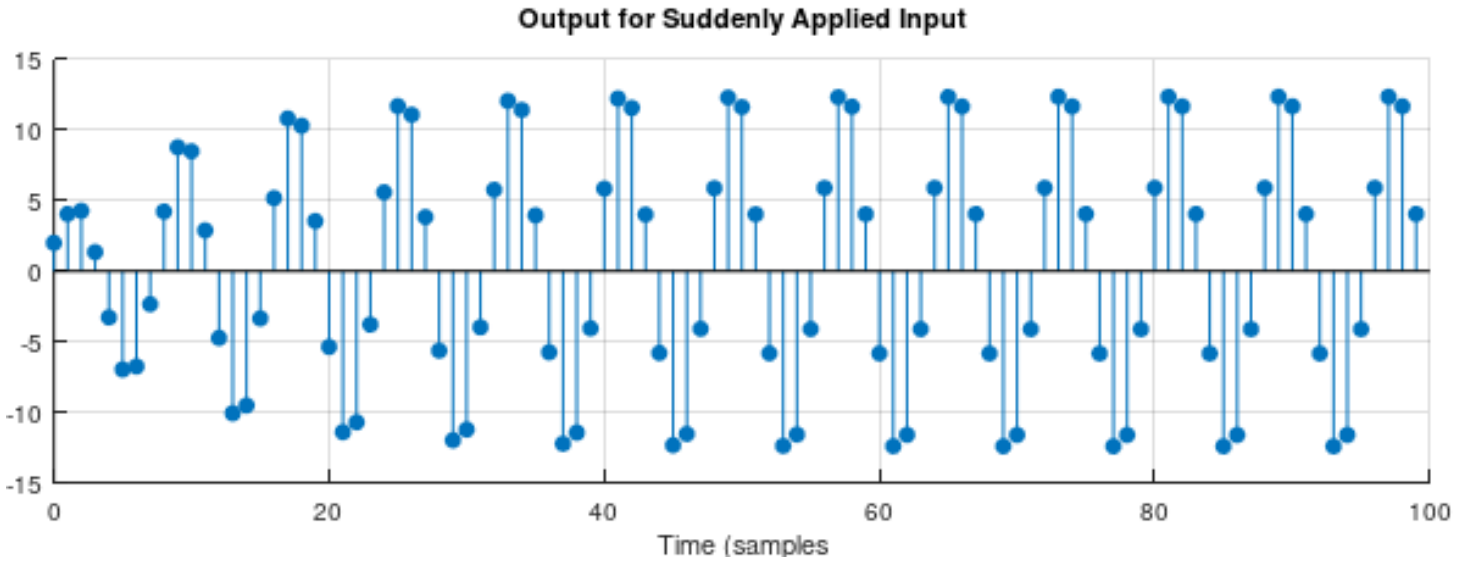


© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Σύγκριση

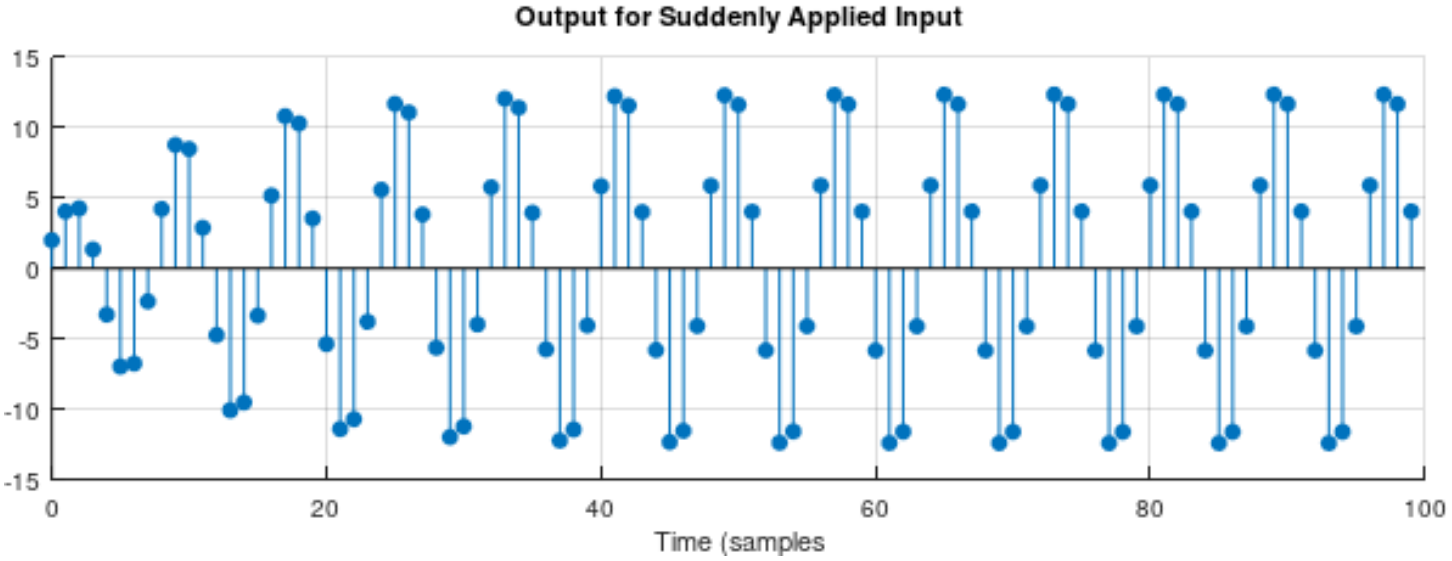




© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**



- Γνωρίζουμε ότι η κρουστική μας απόκριση είναι άπειρης (θεωρητικά) διάρκειας, οπότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά «σβήνει» στο μηδέν όσο προχωρούν τα δείγματα προς το άπειρο

- Η μεταβατική απόκριση είναι εμφανής στα πρώτα δείγματα της εξόδου, μέχρι αυτή να «σταθεροποιηθεί» πολύ κοντά στην απόκριση σταθερής κατάστασης

- Η μεταβατική απόκριση μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$y_{tr}[n] = y[n] - y_{ss}[n]$$

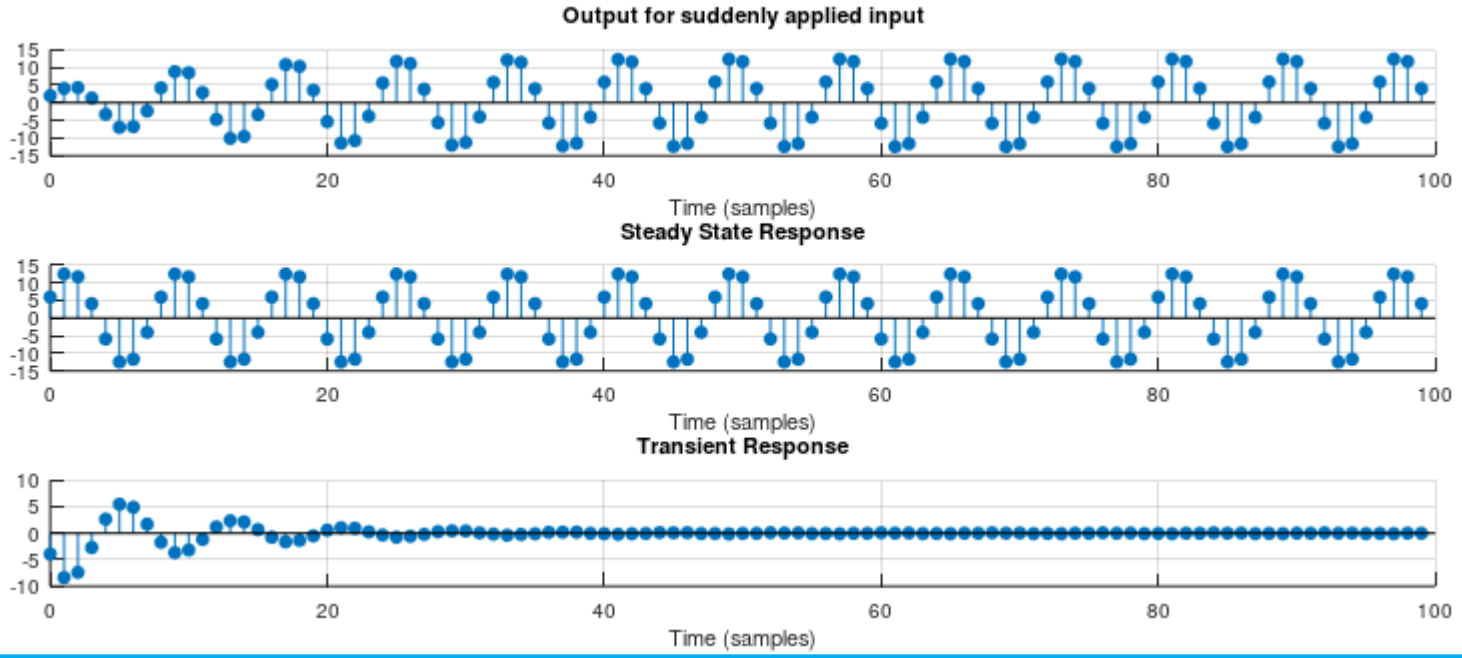
© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**

```
% Simulate transient response
yss = 13.081*cos(pi*n/4 - 1.1);
ytr = y - yss;
figure; subplot(311);
stem(n(1:200), y(1:200), 'filled');
xlabel('Time (samples)'); grid;
title('Output for suddenly applied input');
subplot(312);
stem(n(1:200), yss(1:200), 'filled');
xlabel('Time (samples)'); grid;
title('Steady State Response');
subplot(313);
stem(n(1:200), ytr(1:200), 'filled');
xlabel('Time (samples)'); grid;
title('Transient Response');
```

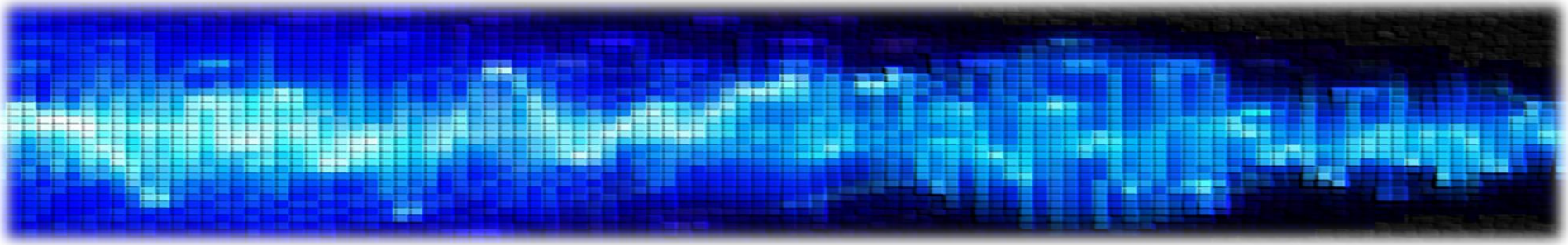
Η διπλανή προσομοίωση είναι πολύ ευαίσθητη στο σωστό υπολογισμού του πλάτους και της φάσης της απόκρισης σταθερής κατάστασης. Είναι για καθαρά εκπαιδευτικούς/demo σκοπούς





Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 27Η



- FIR vs IIR φίλτρα

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Επανάληψη σε διάφορα θέματα της ύλης**
- Σύγκριση μεταξύ φίλτρων FIR & IIR
- IIR:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- FIR:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Κατηγορία / Ιδιότητα	FIR	IIR
Φάση (group delay)	Δυνατότητα γραμμικής φάσης	Δυσκολία στο χειρισμό, αδυναμία γραμμικής φάσης
Ευστάθεια	Πάντα ευσταθή	Έλεγχος για ευστάθεια
Τάξη φίλτρου (για ίδιο αποτέλεσμα)	Μεγάλη	Μικρή
Ευκολία υλοποίησης	Εύκολα	Λιγότερο εύκολα
Ευκολία σχεδίασης	Εύκολα	Λιγότερο εύκολα
Μνήμη	Περισσότερη	Λιγότερη
Πολυπλοκότητα	Περισσότερη	Λιγότερη
Ευρωστία στην πεπερασμένη ακρίβεια	(πολύ) Περισσότερη	Λιγότερη

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



© Καφεντζής Γιώργος, PhD