ΗΥ 590.20

Χρονισμός Ψηφιακών Συστημάτων
Χρήστος Σωτηρίου
-9-

Θεωρία Δικτύων Petri

Θεμελιώδεις Ορισμοί

- PTδίκτυο
- Μονοπάτι, Κύκλωμα
- Ζών, Καλώς-δομημένο, Φραγμένο
- S-καλύψεις
- Λαβές, Σιφώνια καί Παγίδες

Δίκτυα, προ-μετα-σύνολα

- ενα δίκτυο N είναι μια τριάδα (S, T, F), όπου
  - S, T είναι δυο πεπερασμένα, ασύνδετα σύνολα καί η
  - F είναι μια σχέση στο S U T, ε.ω. F ∩ (S x S) = F ∩ (T x T) = 0
- Τα στοιχεία S είναι οι θέσεις, τα στοιχεία T οι μεταβάσεις του δικτύου
- Για ένα κόμβο x του N, το σύνολο
  - *x = {y | (y, x) στο F} είναι το προ-σύνολο του x
  - x* = {y | (x, y) στο F} είναι το μετα-σύνολο του x

Μονοπάτι, Κύκλωμα

- Ορισμός: Μονοπάτι
  - Ενα μονοπάτι ενός δικτύου (S, T, F) είναι μια μή-κενή ακολουθία x1…xk απο κόμβους του ικανοποιεί
    - (x1, x2)…(xk-1, xk) στο F
- Ορισμός: Κύκλωμα
  - Ενα μονοπάτι απο ενα κόμβο x προς ενα y είναι κύκλωμα όταν κανένα στοιχείο δεν εμφανίζεται πάνω απο μια φορά και (y, x) ανήκει στο F

Σήμανση

- Ορισμός: Σήμανση
  - Η σήμανση ενός δικτύου (S, T, F) είναι μια απεικόνηση M: S → |N
  - Αντιπροσωπεύεται απο ενα διάνυσμα
    - (M(s1)…M(sn))
  - Μια θέση s είναι σημασμένη άν M(s) > 0
  - Για ένα σύνολο θέσεων R ο αριθμώς των δειγμάτων αντιπροσωπεύεται με M(R)
- Ορισμός: Σύστημα
  - Ενα σύστημα είναι ενα ζεύγος (N, M0) όπου το
    - N έχει τουλάχιστον μια θέση και μία μετάβαση
    - Το M0 είναι μία σήμανση και αποκαλείται η αρχική σήμανση

Επιτεύξιμες Σημάνσεις

- Ορισμός: Ακολουθίες Σημάνσεων, Επιτεύξιμες Σημάνσεις
  - Για μια σήμανση M, αν $M \xrightarrow{t1} M1 \xrightarrow{t2} \ldots \xrightarrow{tn} Mn$
  - $M \xrightarrow{*} M'$ σημαίνει οτι υπάρχει κάποια σειρά μεταβάσεων, σ, έτσι ώστε $M \xrightarrow{\sigma} M'$ και λέμε οτι η M' είναι επιτεύξιμη
  - Το σύνολο όλων των επιτεύξιμων σημάνσεων συμβολίζεται με [M>.

Ζώντα Συστήματα

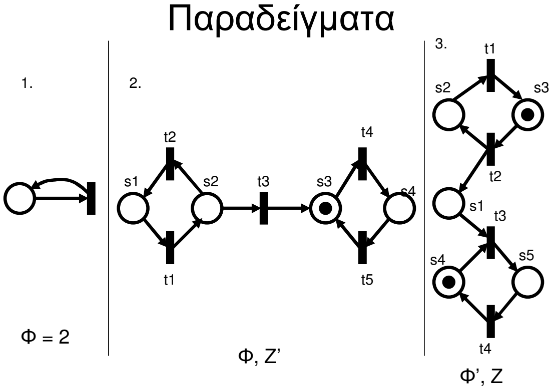
- Ορισμός: Ζών Σύστημα
  - Ενα σύστημα είναι ζών άν για κάθε επιτεύξιμη σήμανση M και κάθε μετάβαση t υπάρχει μια σήμανση M' στο [M> που ενεργοποιεί την t
- Ορισμός: Σύστημα Ζώντων Θέσεων
  - Ενα σύστημα είναι ζώντων θέσεων άν για κάθε επιτεύξιμη σήμανση M και κάθε θέση s, υπάρχει σήμανση M' στό [M> που στοιχειοθετεί το s
- Ορισμός: Άνευ Αδιεξόδου
  - Ενα σύστημα είναι άνευ αδιεξόδου αν η κάθε επιτεύξιμη σήμανση ενεργοποιεί τουλάχιστον μια μετάβαση

Καλώς Δομημένα Δίκτυα

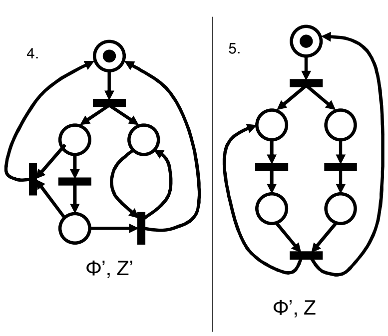
- Ορισμός: Πεπερασμένο Σύστημα, Όριο Σήμανσης Θέσης
  - Ενα σύστημα είναι πεπερασμένο άν για κάθε θέση s υπάρχει ένας φυσικός αριθμός b, ε.ω. $M(s) \le b$ για κάθε επιτεύξιμη σήμανση M
  - Το όριο μιας θέσης s σε ένα πεπερασμένο σύστημα (N, M0) ορίζεται ώς:
    - Max{M(s) | M ανήκει στο [M0>}
- Ορισμός: Καλώς/Ορθά Δομημένο Δίκτυο
  - Ενα δίκτυο N είναι καλώς/ορθά δομημένο αν υπάρχει μια σήμανση M0 του N ε.ω. το (N, M0) να είναι ζών και πεπερασμένο σύστημα

Παραδείγματα

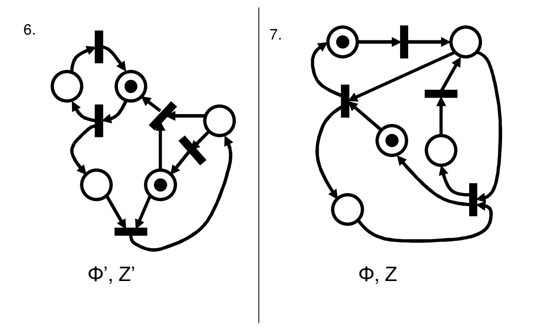
Παραδείγματα



Παραδείγματα

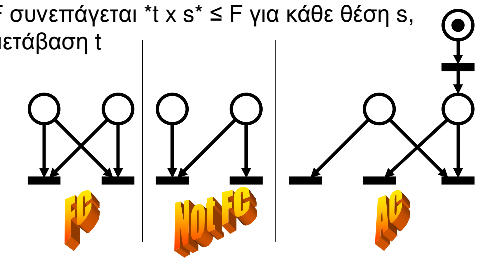


Παραδείγματα

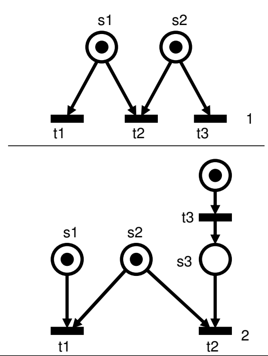


Συστήματα Ελεύθερης Επιλογής

- Ορισμός: Σύστημα Ε.Ε. (FC)
  - Ενα δίκτυο N = (S, T, F) είναι Ε.Ε. άν (s, t) στό F συνεπάγεται $^{*}t \times s^{*} \le F$ για κάθε θέση s, μετάβαση t

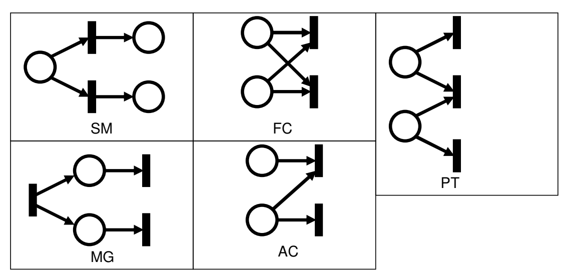


Ασύμμετρη – Συμμετρική Σύγχυση



- Η περίπτωση που η επιλογή (ή αντίφαση) και ο παραλληλισμός αναμιγνύωνται ονομάζεται **σύγχυση**
- 1: Συμμετρική:
  - Οι t1, t3 είναι παράλληλες μεταβάσεις αλλά σε αντίθεση με την t2
- 2: Ασύμμετρη:
  - Οι t1, t2 είναι σε αντίφαση άν γίνει η t3 πρίν την t1
  - οι t1, t3 είναι παράλληλες

Ταξινόμηση PTnets



Στατικές Ιδιότητες

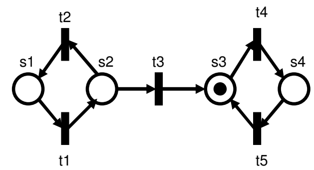
Στατικές Ιδιότητες

- Ορισμός: Σιφώνιο
  - Ενα σύνολο θέσεων R είναι σιφώνιο άν
    - $^{*}R \le R^{*}$
- Ορισμός: Ελάσσων Σιφώνιο
  - Αν D σιφώνιο στο P, το D είναι ελλάσων αν
    - Δεν συμπεριλαμβάνει άλλο σιφώνιο, δηλ.:
    - (ι) είναι ισχυρά συνδεδεμένο
    - (ιι) για κάθε t στο *D ισχύει $|^{*}t \cap D| = 1$
  - Δηλαδή δεν υπάρχει θέση του D που έχει κάποιο t ως μετάβαση στην είσοδο καί έξοδο

Στατικές Ιδιότητες

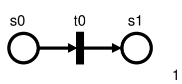
- Ορισμός: Παγίδα
  - Ενα σύνολο θέσεων R είναι παγίδα άν
    - R* ≤ *R
- Διαπίστωση
  - Οι σημασμένες παγίδες μένουν σημασμένες
  - Αν το R είναι παγίδα τότε το σύνολο των σημάνσεων που ικανοποιούν M(R)>0 είναι σταθερές
- Θεώρημα Commoner
  - Ενα σύστημα FC είναι ζών αν και μόνο άν το κάθε σιφώνιο εμπεριέχει μια σημασμένη παγίδα
    - ο κάθε κύκλος είναι σημασμένος
- Η ένωση σιφωνίων είναι σιφώνιο
- Η ένωση παγίδων είναι παγίδα

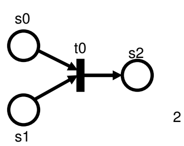
Σιφώνια καί Παγίδες



- *{s1, s2} = {t1, t2}
- {s1, s2}* = {t1, t2, t3}
- *{s1, s2} ≤ {s1, s2}*
  - {s1, s2} είναι σιφώνιο
- *{s3, s4} = {t3, t4,t5}
- {s3, s4}* = {t4, t5}
- {s3, s4}* ≤ *{s3, s4}
  - {s3, s4} είναι παγίδα

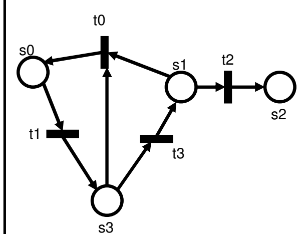
Παράδειγμα Σιφωνίων – 2





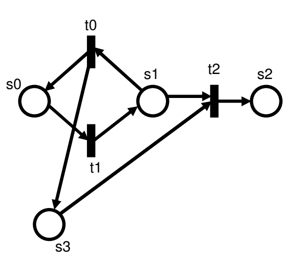
- 1:
  - s0 είναι σιφώνιο (ελλάσων)
  - s1 είναι παγίδα
- 2:
  - {s0, s1} είναι σιφώνιο
  - Δέν είναι ελλάσων, δομικά {s0}, {s1} είναι επίσης σιφώνια
  - Αλγεβρικά:
    - |*to ∩ {s0, s1}| = 2

Παράδειγμα Σιφωνίων - 3



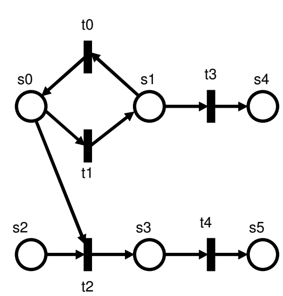
- Σιφώνιο
  - D= {s0, s3, s1}
  - *t0 = {s3, s1}
  - |*t0 ∩ D| = 2
  - D δεν είναι ελλάσων
- Ελλάσων Σιφώνιο
  - {s0, s3}

Παράδειγμα Σιφωνίων - 4



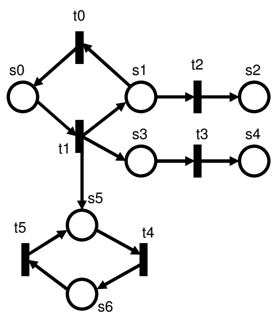
- Ελάχιστο Σιφώνιο
  - {s0, s1}
- Ελάχιστη Παγίδα
  - {s2}

Παραδείγμα Σιφωνίων - 5



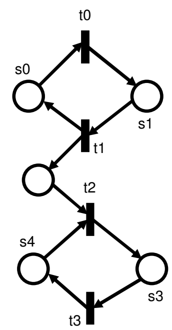
- Ελάχιστο Σιφώνιο
  - {s2}
- Παγίδες
  - {s4}, {s5}

Παραδείγμα Σιφωνίων - 6



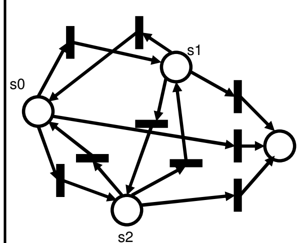
- Ελάχιστο Σιφώνιο
  - {s0, s1}

Παραδείγμα Σιφωνίων - 7



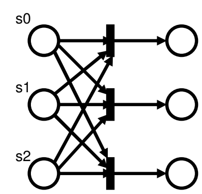
- Ελάχιστα Σιφώνια/Παγίδες
  - {s0, s1}
  - {s4, s3}

Παραδείγμα Σιφωνίων – Πολυπλοκότητα



- Η κάθε θέση έχει επιλογές για κάθε άλλη
- Ελάχιστο Σιφώνιο
  - {s0, s1, s2}
- Δεν είναι Σιφώνια
  - {s0, s1}, {s1, s2}, {s0, s2}
  - {s0}, {s1}, {s2}
- Πολυπλοκότητα ανάλογη με O(S, T)

Παραδείγμα Σιφωνίων – Εκθετική Πολυπλοκότητα

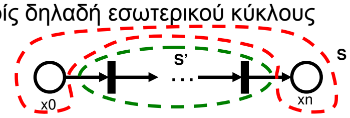


- Ακμές απο ένα σιφώνιο σε κάθε άλλη μετάβαση σιφωνίου
- Ελάχιστα Σιφώνια
  - {s0}, {s1}, {s2}
- Σιφώνια
  - {s0}, {s1}, {s2}
  - {s0, s1}, {s0, s2}, {s1, s2}
  - {s0, s1, s2}
- Ο αριθμός των σιφωνίων είναι εκθετικός στην χειρότερη περίπτωση

Λαβές: Ειδικά Μονοπάτια

Λαβή

- Για N=(P, T, F) με 2 σύνολα S, S'≤ P U T, S U S' = P U T, καί S ∩ S' = 0, ενα μονοπάτι H = (x0, x1, …, xn-1, xn) στο N ονομάζεται λαβή (handle) αν κ.μ. αν:
  - (α) xo, xn ανήκουν στο S, x1, …, xn ανήκουν στο S'
  - (β) (xi, xi+1) ανήκει στο F, για κάθε i στο {0, ..., n-1}
  - (γ) xi != xj, για κάθε i στο {0, ..., n-1}
- Διασθητικά μια λαβή είναι ένα απλό μονοπάτι χωρίς δηλαδή εσωτερικού κύκλους

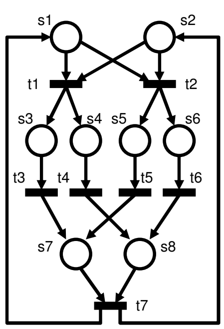


Θεωρήματα Κάλυψης – Μετασχηματισμοί PTnet σε Μοντέλα Χαμηλοτέρου Επιπέδου

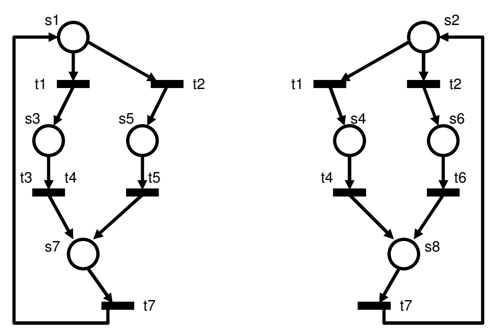
Θεωρήματα Κάλυψης PTnet

- Ορισμός: S-στοιχεία
  - Άν N’ είναι ενα υποδίκτυο του N και αποτελείται απο X κόμβους. Το N’ είναι S-στοιχείο του N άν:
    - *s U s* ≤ X για κάθε θέση s του X, καί
    - Το N’ είναι ισχυρά συνδεδεμένο
- Θεώρημα S-κάλυψης
  - Τα καλώς δομημένα δίκτυα καλύπτονται απο S-στοιχεία
- Ορισμός: T-στοιχεία
  - Άν N’ είναι ενα υποδίκτυο του N και αποτελείται απο X κόμβους. Το N’ είναι T-στοιχείο του N άν:
    - *t U t* ≤ X για κάθε μετάβαση t του X, καί
    - Το N’ είναι ισχυρά συνδεδεμένο

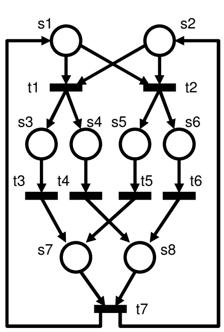
S-Κάλυψη - Παράδειγμα



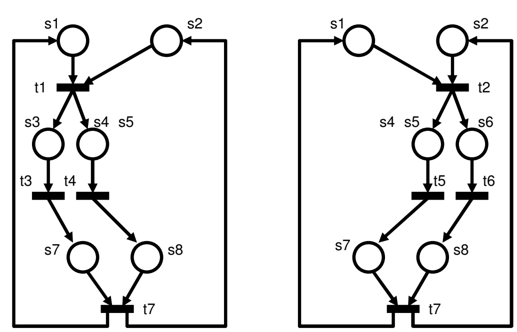
Αποσύνθεση σε 2 S-καλύψεις



T-Κάλυψη - Παράδειγμα



Αποσύνθεση σε 2 T-καλύψεις

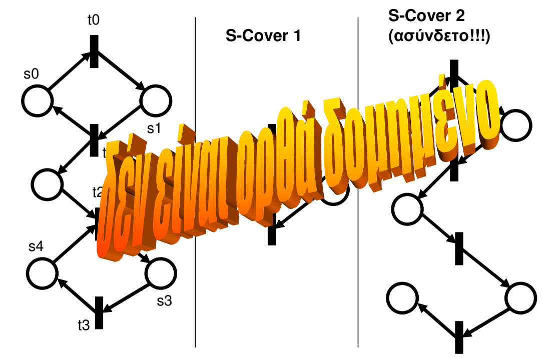


Αλγόριθμος S-Κάλυψης

S-καλύψεις μέσω ελάσσωνων σιφωνίων

```
algorithm get_minimal_deadlock(P, T, F)
begin
  P^ = {p}
  T^ = {}
  while (exists p' in P^ s.t. exists t in *p' and t
not in T^)
  begin
     H = get-handle((P^ U T^), (P U T)-(P^ - T^),
  N, p', t)
     P^ = P^ U (H ∩ P)
     T^ = T^ U (H ∩ T)
  end
  D = P^
return D
end
```

Πρόβλημα στην S-Κάλυψη



Συμπεράσματα

- Τα PTnets είναι κατάλληλος τύπος ανάλυσης συστημάτων υψηλού επιπέδου όταν
  - Έχουμε άμεσους, εύκολους μετασχηματισμούς σε χαμηλότερα επίπεδα
- Οι Στατικές ιδιότητες έχουν πολυωνυμική πολυπλοκότητα
- Οι Δυναμικές ιδιότητες έχουν εκθετική πολυπλοκότητα
- Πολλοί αλγόριθμοι των PTnets εφαρμόζονται σε περιγραφή γραμμικής άλγεβρας (διανύσματα Παρίκ)
  - LP →πολυωνυμική πολυπλοκότητα
  - ILP →εκθετική πολυπλοκότητα