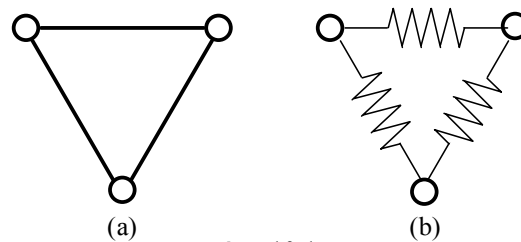


Κεφάλαιο 10

Force-directed Μέθοδοι για την οπτικοποίηση γράφων

10.0 Εισαγωγή

Έστω, μια απλή ή τυχαία απεικόνιση ενός γράφου. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε τις ακμές με ελατήρια κάποιου προκαθορισμένου μήκους (βλέπε εικόνα 10.1). Ακόμη μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε κορυφή φορτίζεται με κάποιο φορτίο $+Q$. Τότε, σε κάθε κόμβο-σώμα θα ασκηθούν ένα σύνολο δυνάμεων που τελικά θα τροποποιήσει τη θέση του, πιθανότατα. Αυτή η επενέργεια δυνάμεων μπορεί να προέρχεται, ακόμη από την ύπαρξη εξωτερικών ηλεκτρικών ή μαγνητικών πεδίων ή ακόμη λαμβάνοντας υπόψιν και άλλες παραμέτρους που σχετίζονται με τη μορφή του παραγώμενου γράφου.



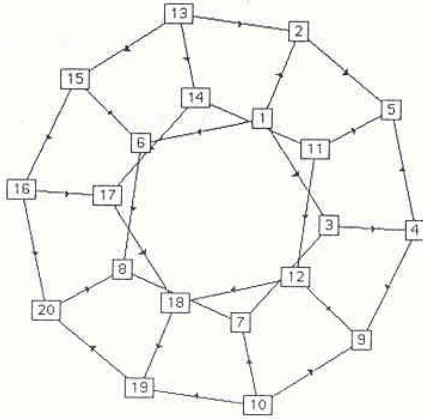
εικόνα 10.1

Το σύστημα θα έλθει σε ισορροπία όταν καταλήξει σε θέση ελάχιστης ενέργειας. Είναι η θέση όπου το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε σώμα είναι ίσο με μηδέν. Βέβαια, αν αφήναμε ένα τέτοιο σύστημα ελεύθερο, το αποτέλεσμα θα ήταν, θεωρητικά, μια ταλάντωση των σωματιδίων-κόμβων. Δεν μας ενδιαφέρει το φαινόμενο της ταλάντωσης. Το ζητούμενο είναι η ανεύρεση αυτής της θέσης με αλγοριθμικά μέσα.

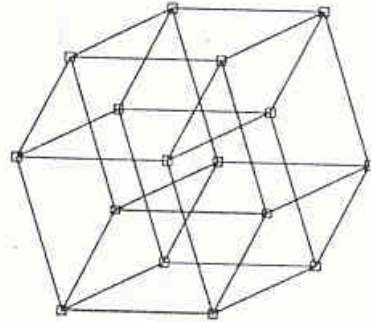
Έτσι, σε τέτοιες μεθόδους, διακρίνουμε 2 κύρια μέρη:

- 1) Το φυσικό μοντέλο, που αναφέρεται στην περιγραφή της φυσικής μορφής του αρχικού γράφου. Πρέπει με κάποιο τρόπο να δηλωθεί ποιος κόμβος είναι συνδεδεμένος με ποιον, καθώς και η ευκλείδεις αποστάσεις τους.
- 2) Τον κύριο αλγόριθμο. Αναφέρεται στην τεχνική που χρησιμοποιείται για να καταλήξουμε από την αρχική στην τελική διαμόρφωση του γράφου, για να βρούμε τη θέση ισορροπίας του συστήματος.

Η σημασία αυτών των αλγορίθμων είναι πολύ μεγάλη. Πρώτα-πρώτα είναι ευκολοκατανόητοι. Οι παράγοντες που επιδρούν στην αλλαγή της μορφής του γράφου είναι πιο σαφείς, αφού υπάρχει το ανάλογο του φυσικού συστήματος και της επίδρασης φυσικών δυνάμεων. Όμως το σημαντικότερο είναι η εξαγωγή σχημάτων με μεγάλη ομοιομορφία (βλέπε εικόνες 10.2, 10.3). Αυτοί οι μέθοδοι παράγουν "όμορφα σχήματα" και ένα τρόπο ελέγχου της "ομορφιάς" της απεικόνισης όπως θα δούμε παρακάτω.



εικόνα 10.2: Δωδεκάεδρο σχεδιασμένο με force-directed αλγόριθμο



εικόνα 10.3: Υπερκύβος σχεδιασμένος με τον αλγόριθμο του Tunkelang

Σ' αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε τους πιο γνωστούς force-directed μεθόδους. Στο 10.1, γίνεται αναφορά στο απλό μοντέλο μόνο με ελατήρια και ομότιμη φόρτιση των κόμβων. Στο 10.2, περιγράφεται ο διάσημος αλγόριθμος του Tutte, ή αλλιώς η μέθοδος του βαρυκέντρου. Η παράγραφος 10.3 αποσκοπεί σε μια αναπαράσταση που θα πληρεί την εξής προδιαγραφή: η ευκλείδια απόσταση μεταξύ δύο κόμβων να είναι περίπου ίση με τον αριθμό των ακμών του ελάχιστου γραφοθεωρητικού μονοπατιού μεταξύ των δύο κόμβων. Η 10.4, εξετάζει την επίδραση διαφόρων μαγνητικών πεδίων σε ένα "φορτισμένο" γράφο. Η 10.5 επιτελεί μια γενική επιθεώρηση-διαχείριση των παραμέτρων και του βαθμού στον οποίο επιδρούν στην τελική διαμόρφωση του γράφου. Τέλος η 10.6, αναφέρεται σε περιορισμούς τέτοιων μεθόδων.

10.1 Γράφοι με ελατήρια και ομόνυμη φόρτιση των κόμβων

Το φυσικό μοντέλο προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε ακμή με ελατήριο και φορτίσουμε με ομόνυμη φορτία τους κόμβους. Τότε κάθε κόμβος, θα δέχεται την επίδραση δύο ειδών δυνάμεων: των ελατηρίων με τα οποία είναι άμεσα συνδεδεμένος και τις ηλεκτρικές αποθήσεις από τα φορτία όλων των άλλων κόμβων. Δηλαδή η δύναμη που ασκείται σε κόμβο v θα είναι

$$F(v) = \sum_{(u,v) \in E} f_{uv} + \sum_{(u,v) \in V \times V} g_{uv} \quad (10.1)$$

Είναι σαφές ότι δεύτερο άθροισμα περιλαμβάνει τόσους προσθεταίους όσος είναι ο αριθμός των κόμβων.

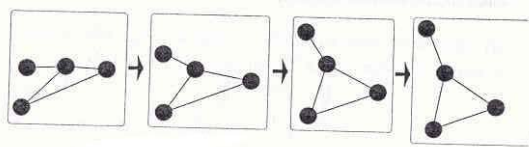
Η δύναμη κάθε ελατηρίου ακολουθεί τον νόμο του Hooke. Είναι ανάλογη μιας σταθεράς ελατηρίου $k_{uv}^{(l)}$ και της επιμήκυνσης ή συσπίρωσης του. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις ακολουθούν τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου ως προς την απόσταση των δύο ηλεκτρικών φορτίων. Έτσι η (10.1) γράφεται στο σχήμα 10.4:

Ακόμη, η ύπαρξη των ηλεκτρικών φορτίων, δηλαδή των αποθητικών δυνάμεων εμποδίζει την σύμπτυξη των κόμβων. Μάλιστα, καθώς δύο κόμβοι πλησιάζουν η, μεταξύ τους, απόθεση γίνεται, ολοένα και μεγαλύτερη.

Υπάρχουν και παραλλαγές του προαναφερόμενου μοντέλου. Μια τέτοια, αντικαθιστά το νομο του Hooke με δυνάμεις ελατηρίου που είναι ανάλογες του λογάριθμου της μετατόπισης από τη θέση ισοροπίας (αντί μόνο της μετατόπισης). Δηλαδή ισχύει

$$F_{uv} = K_{uv}^{(l)} \log\left(\frac{d(p_u, p_v)}{l_{uv}}\right) \frac{x_v - x_u}{d(p_u, p_v)} \quad (10.2)$$

Ένα πολύ σημαντικό θέμα είναι η τεχνική που χρησιμοποιούμε για να βρούμε την τελική θέση ισοροπίας του συστήματος. Η λύση που αναφέρεται είναι η "follow your nose" τεχνική. Πρόκειται για μια επαναληπτική διαδικασία, όπου σε κάθε επανάληψη, υπολογίζεται η δύναμη που ασκείται σε κάθε κόμβο, αν οι υπόλοιποι θεωρηθούν "καρφωμένοι" στην θέση που είχαν στην προηγούμενη φάση. Έτσι, διακρίνεται η τάση μετακίνησης του κάθε κόμβου. Συγκεκριμένα, προωθείται στη νέα θέση και η μετατόπιση του είναι ανάλογη του διανύσματος αυτής της συνισταμένης δύναμης. Η τεχνική δεν είναι τόσο γρήγορη όσο, αρκετά, ενδεικτική των ενδιάμεσων σταδίων που οδηγούν στο τελικό αποτέλεσμα. Στο σχήμα 10.6 παρουσιάζονται οι φάσεις μιας τέτοιας μεθόδου καθώς και η τελική επίδραση του αλγορίθμου στην αρχική μορφή του γράφου.



εικόνα 10.6: Τεχνική follow your nose

10.2 Η μέθοδος του βαρυκέντρου

Η μέθοδος του βαρυκέντρου είναι γνωστή και ως *αλγόριθμος του Tutte*. Το μοντέλο του Tutte είναι απλούστερο από αυτό της προηγούμενης παραγράφου. Υποθέτουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε ακμή του γράφου με ελατήρια μηδενικού φυσικού μήκους, όπου δηλαδή για το ελατήριο μεταξύ των κόμβων v, u είναι $l(v, u) = 0$. Επίσης δεν υπάρχει φόρτιση κόμβων και αντίστοιχες αποθητικές δυνάμεις. Για λόγους απλούστεσης θεωρούμε ότι η σταθερές των ελατηρίων είναι ίσες με την μονάδα. Τότε, η ελκτική δύναμη κάθε ελατηρίου θα είναι ίση με την ευκλείδεια απόσταση των γειτονικών συνδεδεμένων κόμβων. Προφανώς, ένα τέτοιο σύστημα συγκλείνει σε ένα σημείο, όπου θα συμπαίςουν όλοι οι κόμβοι, στο *κέντρο βάρους* όλων των κόμβων. Αυτή είναι η τετριμμένη λύση και δεν έχει, προφανώς, καμιά αξία. Το ενδιαφέρον υπάρχει όταν 3 τουλάχιστον κόμβοι είναι "καρφωμένοι" στις κορυφές κυρτού πολυγώνου. Η επιλογή του κυρτού πολυγώνου γίνεται για λόγους αρμονίας της τελικής παραγώμενης μορφής.

Το ζητούμενο είναι η ανεύρεση θέσης ελάχιστης ενέργειας, όπου το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε κόμβο θα είναι ίσο με μηδέν. Αρχικά οι δυνάμεις στον κόμβο v , ανά άξονα είναι:

$$f_x = \sum_{(u,v) \in E} (x_u - x_v) \quad (10.3)$$

$$f_y = \sum_{(u,v) \in E} (y_u - y_v) \quad (10.4)$$

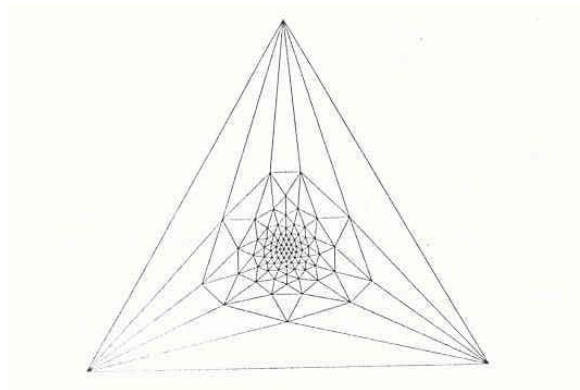
Εάν $deg(v)$ = αριθμός των γειτονικών, συνδεδεμένων κόμβων τότε θα επιζητούσαμε οι δύο παραπάνω τιμές να μηδενιστούν για κάθε v . Δύο επιθυμητές τιμές των x_v, y_v είναι

$$x_v = \sum_{(u,v) \in E} \frac{x_u}{deg(v)} \quad (10.5)$$

$$y_v = \sum_{(u,v) \in E} \frac{y_u}{deg(v)} \quad (10.6)$$

Βέβαια, η "ρύθμιση" ενός κόμβου τροποποιεί προηγούμενες ρυθμίσεις των άλλων κ.ο.κ.. Η επανάληψη συνεχίζεται έως οι νέες τροποποιήσεις να είναι ασήμαντες σε σχέση με τις προηγούμενες τιμές των συντεταγμένων. Πρόκειται για τον *αλγόριθμο του βαρυκέντρου*. Το κόστος του είναι ανεκτό. Μάλιστα για επίπεδους γράφους η χρονική πολυπλοκότητα μειώνεται στο $O(n^{1.5})$, όπου n ο αριθμός των ελεύθερων κόμβων (που δεν είναι καρφωμένοι).

Ένα από τα πλεονεκτήματα του αλγορίθμου είναι ότι εάν το αρχικό μοντέλο είναι επίπεδο και τριπλής σύνδεσης (triconnected), τότε η τελική αναπαράσταση είναι επίπεδος και κυρτός γράφος. Δηλαδή κάθε πλακίδιο (face) είναι κυρτό πολύγωνο. Το μειονέκτημα είναι η συγκέντρωση των ελεύθερων κόμβων στο κέντρο του κυρτού πολυγώνου (των καρφωμένων κόμβων). Οπότε ούτε η αύξηση της ανάλυσης της τελικής αναπαράστασης, βελτιώνει την εικόνα της τελευταίας. Παρακάτω στο σχήμα 10.7 διακρίνεται αναπαράσταση με τη μέθοδο του βαρυκέντρου.



εικόνα 10.7: Αποτέλεσμα με τη μέθοδο του βαρυκέντρου

10.3 Δυνάμεις που προσομοιώνουν γραφοθεωρητικές αποστάσεις

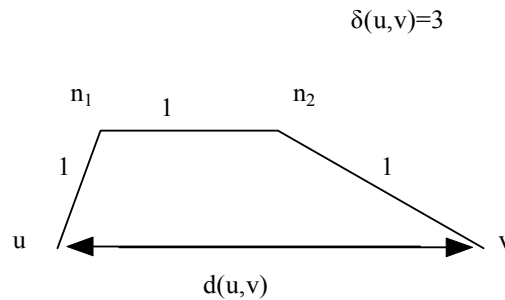
Η γραφοθεωρητική απόσταση μεταξύ δύο κόμβων u, v συμβολίζεται με $\delta(u, v)$ και αποτελεί το άθροισμα των ακμών του ελάχιστου μονοπατιού που συνδέει τους δύο κόμβους. Οπότε, αν θεωρήσουμε ότι κάθε ακμή του αρχικού γράφου έχει μήκος ίσο με 1, τότε η γραφοθεωρητική απόσταση ισούται με το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού που συνδέει τους δύο κόμβους. Σκοπός του *αλγορίθμου της γραφοθεωρητικής απόστασης* είναι η επίτευξη της σύγκλισης της με την ευκλείδεια απόσταση των δύο σημείων, d_{uv} . Στο σχήμα 10.8 παρουσιάζονται οι δύο αποστάσεις. Η λύση

επιτυγχάνεται με τη χρήση "εικονικών ελατηρίων μεταξύ των κόμβων u,v, αν θεωρούσαμε ότι είχαν μήκος ίσο με $\delta(u,v)$. Η Δύναμη του ελατηρίου είναι

$$F_{uv} = k_{uv} |\delta(u,v) - d_{uv}| \quad (10.7)$$

Και η συσσωρευμένη ενέργεια

$$E_{uv} = \frac{1}{2} k_{uv} (\delta(u,v) - d_{uv})^2 \quad (10.8)$$



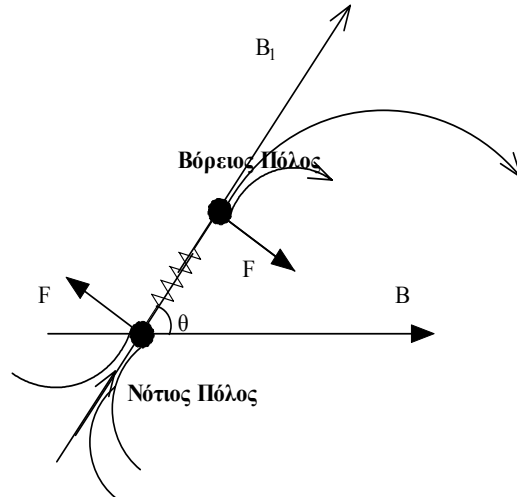
εικόνα 10.8:Επίδειξη $\delta(u,v)$

Αν επιλέξουμε $k(u,v) = k/\delta(u,v)^2$ τότε μεταβάλλονται αντίστοιχα οι δύο σχέσεις (10.7),(10.8). Η συγκεκριμένη αλλαγή έχει ως συνέπεια ότι για πολύ μικρά δ αυξάνει το k και επομένως και η αντίσταση μιας ενδεχόμενης απόκλισης από το μήκος της γραφοθεωρητικής απόστασης.

Τέλος, ζητείται η θέση ελάχιστης ενέργειας του συστήματος. Η ανεύρεση της συνολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος προκύπτει από την άθροιση (ν ανά δύο) σχέσεων (τους συνδιασμούς όλων των κόμβων ανά δύο) όπως η (10.8). Βρίσκεται ο κόμβος που συμβάλλει περισσότερο σ' αυτή την ποσότητα. Θεωρώντας ότι οι υπόλοιποι κόμβοι μένουν ακίνητοι, βρισκουμε τη θέση όπου αυτή η συμβολή ελαχιστοποιείται (οι τιμές των x,y όπου οι παράγωγοι ως προς x και y, μηδενίζονται). Γίνεται αυτή η μετακίνηση και ξαναυπολογίζεται η συμβολή κάθε κόμβου με βάση τη νέα διάταξη κ.ο.κ.

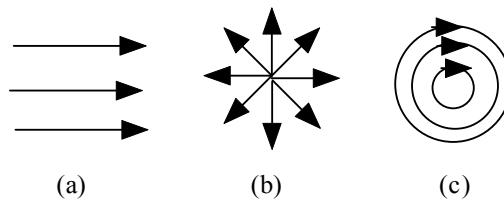
10.4 Έκθεση Γράφων σε μαγνητικά πεδία

Ξεκινώντας από το απλό μοντέλο της παραγράφου 10.1, γεννιέται η ιδέα να δωθεί ένας προσανατολισμός στα ελατήρια. Π.χ. αυτό θα ήταν χρήσιμο σε κατευθυνόμενους γράφους, όπου ζητάμε, αισθητικά, όλοι οι γράφοι να έχουν ένα προσανατολισμό: αυτό των ακμών. Συνεπώς αν μαγνητίζαμε τα ελατήρια του γράφου, και ακολουθούσε έκθεση σε μαγνητικό πεδίο, τότε θα προέκυπτε ένας αντίστοιχος προσανατολισμός των ελατηρίων-μαγνητών. Θα ενυπήρχε η τάση: τα μαγνητικά πεδία των μαγνητών-ελατηρίων να εναρμονιστούν με τη κατεύθυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.9. Η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στο ελατήριο είναι ανάλογη του μήκους του και της γωνίας απόκλισης από την 'ορθή' κατεύθυνση.

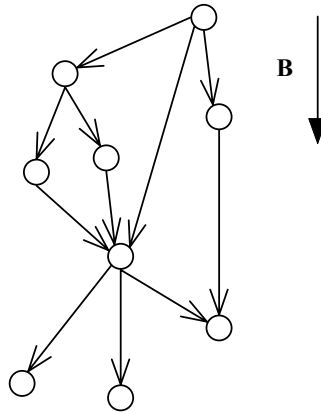


εικόνα 10.9:Επίδραση ομογενούς μαγνητικού πεδίου σε μαγνητιγμένο ελατήριο.Υπάρχει η τάση για ταύτιση των δυναμικών γραμμών των 2 πεδίων

Παραπέρα,ενυπάρχουν πολλά είδη μαγνητικών πεδίων.Στο σχήμα 10.10 παρουσιάζονται 3 χαρακτηριστικές περιπτώσεις.Το 10.10(α) παρέχει το σαφή προσανατολισμό προς μία κατεύθυνση που προαναφέρθηκε.Το 10.10(b) δίνει ακτινωτό προσανατολισμό,ενώ το 10.10(c) κυκλικό.Ακόμη η εικόνα 10.11 δείχνει την επίδραση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου σε κατευθυνόμενο γράφο.



εικόνα 10.10:Τύποι μαγνητικού πεδίου α)ομογενες-παράλληλο β)ακτινωτό γ)κυκλικό



εικόνα 10.11:Απόδοση διεύθυνσης προς τα κάτω σε κατευθυνόμενο γράφο με την βοήθεια ομογενούς μαγνητικού πεδίου με την ίδια κατεύθυνση.Υπάρχει η τάση τα ελατήρια να έχουν τον προσανατολισμό του εξωτερικού πεδίου.

10.5-10.6 Διαχείριση αισθητικών κριτηρίων και επιβολή συγκεκριμένων περιορισμών στη τελική διαμόρφωση του γράφου

Όπως είδαμε, τα ελατήρια πληρούν ένα συγκεκριμένο αισθητικό κριτήριο: τη διατήρηση της απόστασης μεταξύ δύο κόμβων, περίπου, στο μήκος του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αντίθετα, η ομόνυμη φόρτιση των κόμβων αποτρέπει το υπερβολικό πλησίασμα δύο γειτονικών κόμβων. Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, δίνει ένα προσανατολισμό στα μαγνητισμένα ελατήρια.Όμοια, ενυπάρχουν και άλλα αισθητικά κριτήρια π.χ. ο αριθμός των τομών των ακμών,ο αριθμός των στροφών κ.α.,που θα μπορούσαν να ικανοποιηθούν με αντίστοιχη επιβολή εξωτερικών δυνάμεων.Φυσικά, οι τελευταίες δεν είναι ανάγκη να αντιστοιχούν σε πραγματικές φυσικές δυνάμεις. Μπορεί να είναι, εντελώς, "κατασκευασμένες", αρκεί να επιτυγχάνουν τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Επίσης,είναι προφανές ότι ένα αισθητικό κριτήριο μπορεί να αντιβαίνει στην πλήρη ικανοποίηση ενός άλλου.Τότε πρέπει να επιλεγεί αυτό με τη μεγαλύτερη σημασία,ανάλογα με την εφαρμογή της αναπαράστασης του γράφου.Θα ήταν χρήσιμη και μια δυνατότητα γρήγορης αλλαγής του βάρους κάθε κριτηρίου για τη σύγκριση διαφορετικών υλοποιήσεων.Η παρακάτω συνάρτηση:

$$n = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 + \dots \quad (10.9)$$

θα μπορούσε,τελικά, να μετρά την *ασχήμια* της αναπαράστασης, αν n_i είναι ένα μέτρο της ενεργειακής επιβάρυνσης που επιβάλλει το αντίστοιχο κριτήριο i και λ_i το βάρος του κριτηρίου i .Όσο μεγαλύτερο το n τόσο πιο 'άσχημος' ο τελικός γράφος.Ακόμη, διακρίνεται ότι τα βαρη λ_i επιδρούν, αμεσότατα, στο βαθμό συνυπολογισμού των αντίστοιχων κριτηρίων.

Ο τύπος (10.9) έχει πολύ μεγάλη θεωρητική αξία,καθώς παρέχει ένα μηχανισμό επίδειξης της αλληλεπίδρασης των διαφόρων προδιαγραφών σχεδιασμού ενός γράφου.Ωστόσο το μεγάλο μειονέκτημα είναι η απαγορευτική πολυπλοκότητα τέτοιων αλγορίθμων.Όταν τα κριτήρια είναι πολλά, τότε ο προσδιορισμός ενός ελάχιστου n γίνεται πρόβλημα υψηλής πολυπλοκότητας.

Πέραν του ορισμού παραμέτρων που οδηγούν σε μια κατάλληλη αναδιαμόρφωση ενός γράφου,είναι αναγκαίο, συχνά, η τήρηση συγκεκριμένων ανεξάρτητων προδιαγραφών-περιορισμών. Ένα παράδειγμα είναι οι περιορισμοί θέσης,όπου επιβάλλονται συγκεκριμένοι περιορισμοί στην τελική τοποθέτηση σε επιλεκτικά κομμάτια του γράφου π.χ.κάποιοι κόμβοι ορίζονται να είναι καρφωμένοι.Μια άλλη κατηγορία περιορισμών επιδρά στη σχετική διάταξη των κόμβων,συνήθως με τον ορισμό δυνάμεων ειδικής συμπεριφοράς π.χ. η συγκέντρωση(clustering) ομάδων κόμβων επιτυγχάνεται με τον ορισμό ειδικών δυνάμεων που είναι , ισχυρά, ελκτικές για κόμβους της ίδιας ομάδας και απωθητικές σε κάθε άλλη περίπτωση.

Βιβλιογραφία

→ *Graph Drawing: Algorithms for the visualization of graphs*

Giuseppe Di Batista, Peter Eades, Roberto Tamassia, Ioannis Tollis.

→ *Physics for scientists & engineers*

Raymond Serway