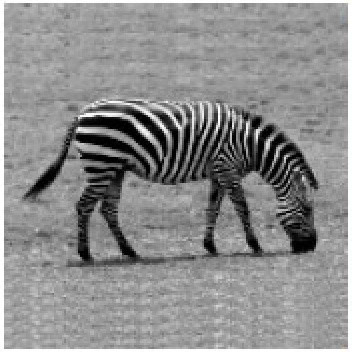
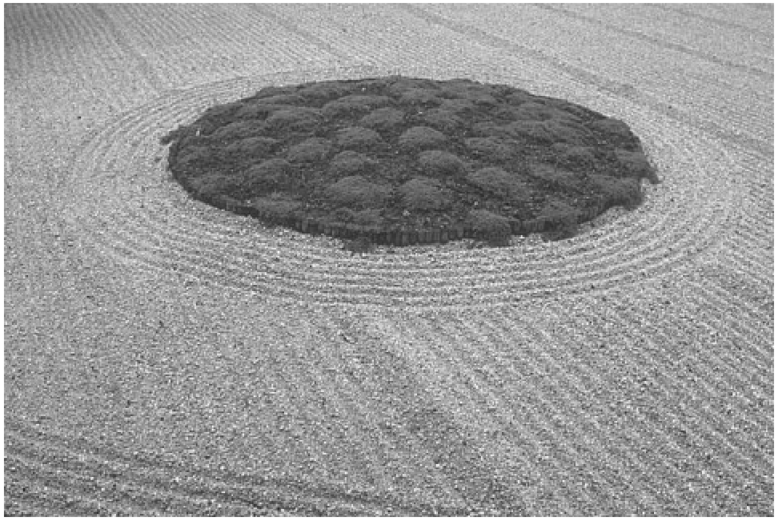
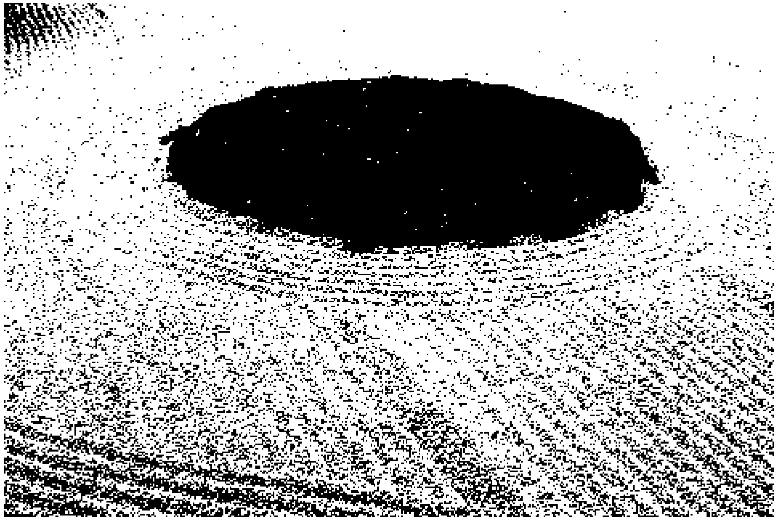
Τμηματοποίηση με χρήση τυχαίων πεδίων Markov



Κοινή ιδιότητα σημείων τμήματος
Εισαγωγή χωρικής πληροφορίας
Εξομάλυνση πεδίου κατατάξεων

Κόστος τμηματοποίησης



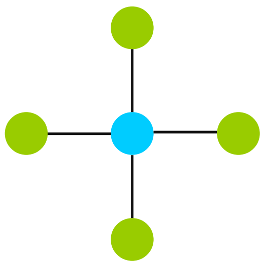


Δυαδικοποίηση

Κόστος σφαλμάτων σημειακής κατάταξης

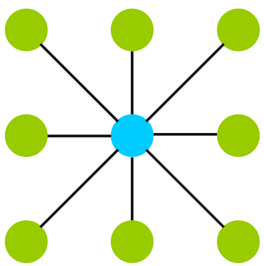
Κόστος κατακερματισμού

Βασικές σχέσεις γειτονιάς και παρέας

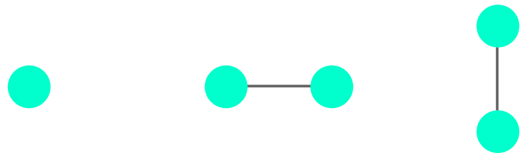


1ης τάξης

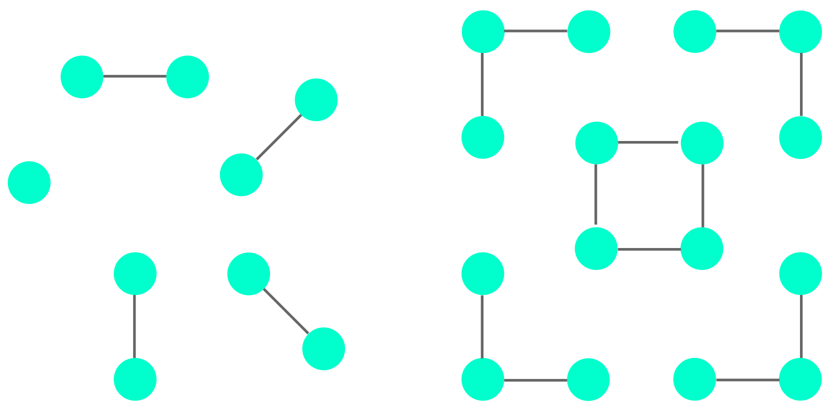
γειτονιά

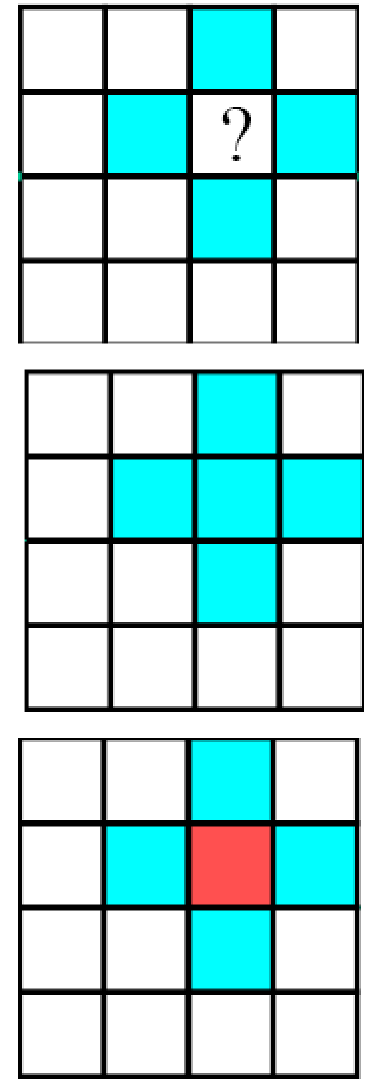


2ης τάξης

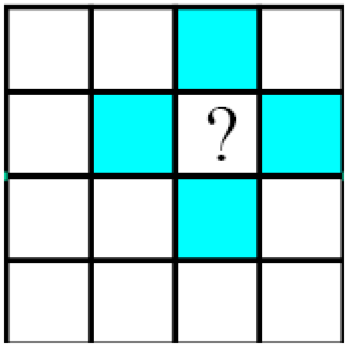


παρέες





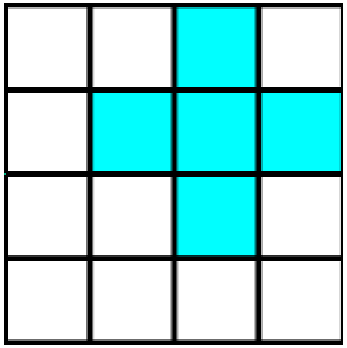
Τυχαία πεδία Markov



Πεδίο κατατάξεων : διακριτές τιμές (κλάσεις, κατηγορίες) $X(s)$

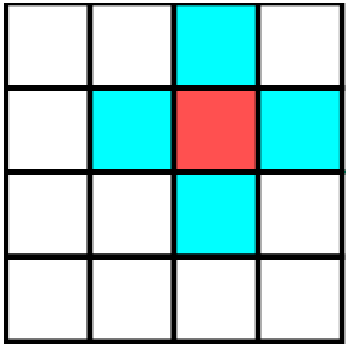
$Pr\{X(s)=x(s)\}>0$ όλες οι κατατάξεις είναι δυνατές

$$\boxed{Pr\{X(s)=x(s)|X(r)=x(r),r\neq s\}=Pr\{X(s)=x(s)|X(r)=x(r),r\in N(s)\}}$$



$N(s)$ γειτονικά σημεία

Η πιθανότητα αλλαγής κατάταξης μικρότερη από
την πιθανότητα όμοιας κατάταξης



Αλληλουχία εξαρτήσεων, το όλο προκύπτει από το σύνολο
των επιμέρους τοπικών εξαρτήσεων

Τυχαία πεδία Gibbs

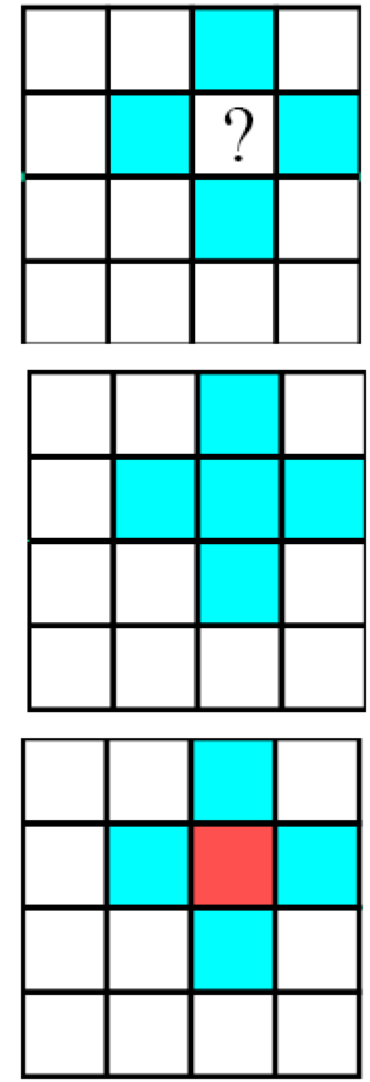
$$Pr\{X(s)=x(s), s\in\Omega\}=\frac{e^{-U(x)}}{\Psi}$$

Τάξη : μεγάλη πιθανότητα
Αταξία : μικρή πιθανότητα

$$U(x)=\sum_{c\in C}\varphi_c(x)$$

Ενέργεια = άθροισμα δυναμικών όλων των παρεών
Μεγάλο δυναμικό όταν υπάρχει ανομοιότητα στην παρέα

$$\phi_c(x)=\begin{cases} 0 & \text{ίδια} \\ \zeta>0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Δυναμικό εξαρτώμενο από δεδομένα

Σε περίπτωση διαφορετικών κατατάξεων σε παρέα,
η πιθανότητα είναι τόσο μεγαλύτερη,
όσο τα αντίστοιχα δεδομένα διαφέρουν

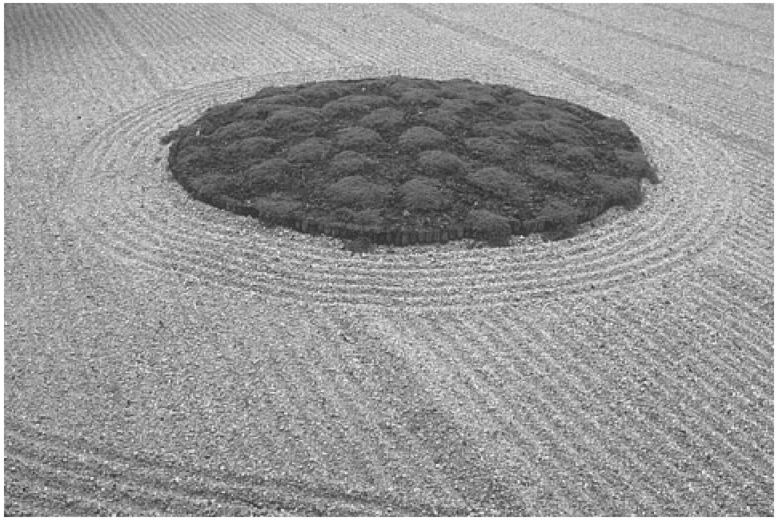
Ομοιότητα $w(m,n)=e^{-\frac{|I(m)-I(n)|}{\sigma}}$

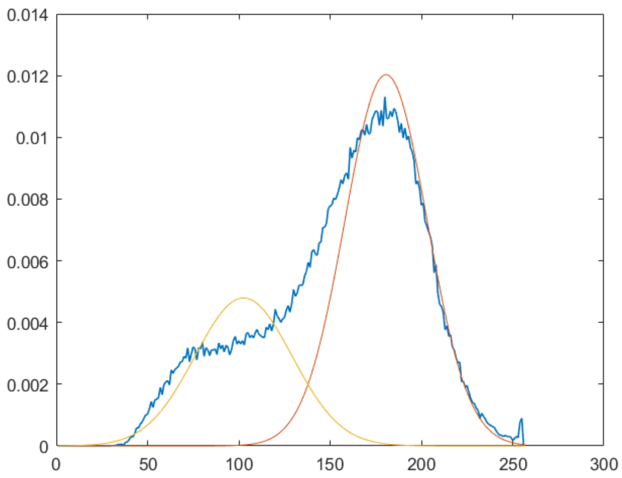
Δυναμικό $\zeta\, w(m,n)$

Ανάλυση δεδομένων

$$p(Y(m,n)=y(m,n)|X(i,k)=x(i,k),(i,k)\in\Omega)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y(m,n)-f(x(m,n)))^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x(m,n))=\mu_l,\quad x(m,n)\in S_l,\ 1\leqslant l\leqslant L$$





Μίξη κατανομών

Πεδίο μέγιστης πιθανότητας

$$Pr\{X(s)=x(s)|Y(s)=y(s)\}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι ανάλογη της από κοινού πιθανότητας

$$Pr\{X(s)=x(s)|Y(s)=y(s)\} \propto Pr\{X(s)=x(s),Y(s)=y(s)\}$$

Η από κοινού πιθανότητα εξαρτάται από την πυκνότητα πιθανότητας των δεδομένων για δοσμένο πεδίο επί την πιθανότητα του πεδίου

$$Pr\{X(s)=x(s),Y(s)=y(s)\} = p(Y(s)=y(s)|X(s)=x(s)) \; Pr\{X(s)=x(s)\}$$

Πεδίο Gibbs και δεδομένα

$$Pr\{X(s)=x(s),Y(s)=y(s)\} \propto e^{-U(x)}e^{-d(y,f(x))}$$

Ελαχιστοποίηση

$$U(x)+d(y,f(x))$$

$$\boxed{E(x)=E_S(x)+E_D(x,y)}$$

Δεδομένα και εξομάλυνση

$$\sum_{(m,n)\in\Omega} \varphi_c(x(m,n)) + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{l=1}^{L}\sum_{(m,n)\in S_l}\left(y(m,n)-\mu_l\right)^2$$

Ελαχιστοποίηση

$$\boxed{E(x)=E_S(x)+E_D(x,y)}$$

Πλήθος διαφορετικών πεδίων $L^{|\Omega|}$

Πολλά τοπικά ελάχιστα / διακριτές μεταβλητές

‘Κλίση’ της ενέργειας : τοπική βελτίωση
- άπληστη τεχνική
- πιθανοκρατική μέθοδος

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσσών τιμών

Βέλτιστη απόφαση σε ένα σημείο με δοσμένο όλο το υπόλοιπο πεδίο

$$Pr\{X(m,n)=x(m,n)|Y(m,n)=y(m,n),\hat{x}(i,k);(i,k)\in\Omega-\{(m,n)\}\}$$

$$\sum \varphi_c(x(m,n))+\frac{1}{2\sigma^2}(y(m,n)-\mu_l)^2$$

γειτονιά ενός σημείου

$$\frac{1}{2\sigma^2}(y(m,n)-\mu_l)^2-\zeta a_l(m,n)$$

$a_l(m,n)$ πλήθος γειτονικών καταταγμένων *l*

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών

```
Initialization:
  for each pixel p   {
    current_label(p) := init_label(p)
    }
  change_pixels := number_of_pixels

Iterations:
  while (change_pixels != 0)
   {
    change_pixels := 0
    for each pixel p {
      previous_label(p) := current_label(p)
     }
    for each pixel p
     {
       current_label(p) := find_optimal_label(p)
       if (current_label(p) != previous_label(p))  {
         change_pixels++
         }
     }
   }
```

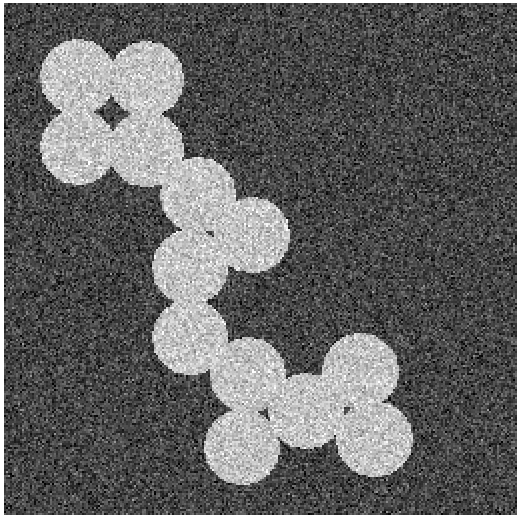
arg min $\left(y(m,n)-\mu_l\right)^2$

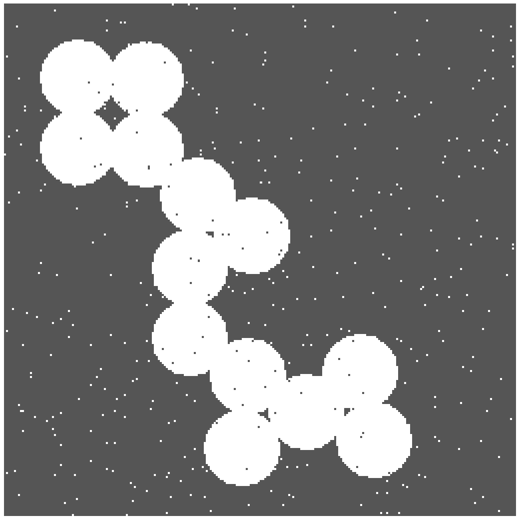
decreasing

arg min $\frac{1}{2\sigma^2}\left(y(m,n)-\mu_l\right)^2-\zeta\, a_l(m,n)$

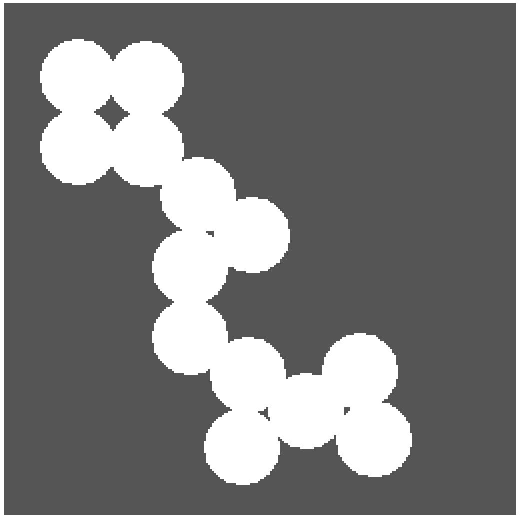
J. Besag, On the statistical analysis of dirty pictures, *Journal of the Royal Statistical Society*, *Series B*, 1986.

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσσών τιμών



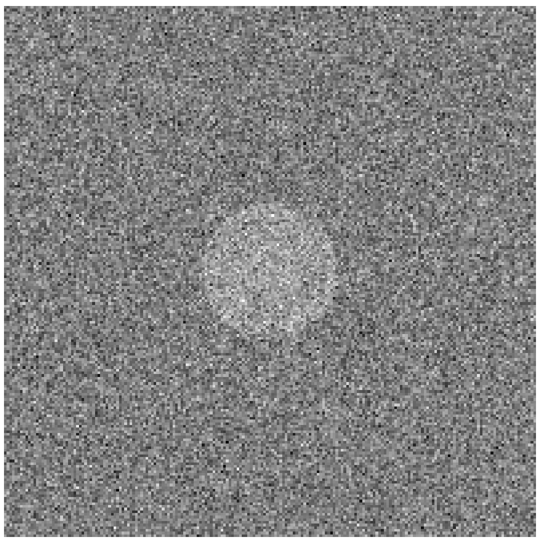


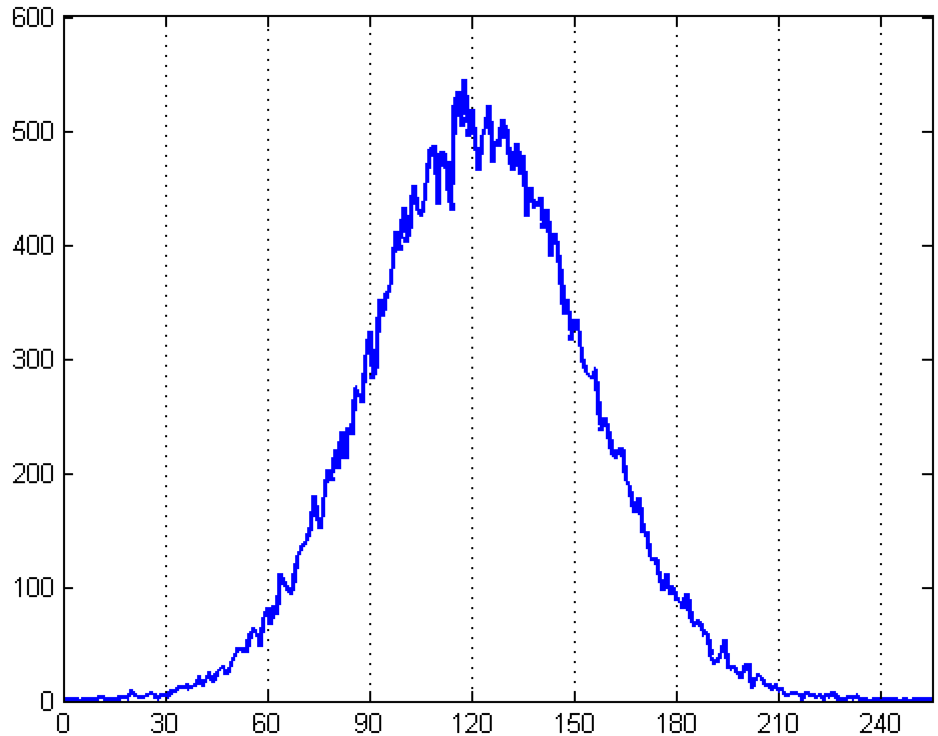
αρχικοποίηση



αποτέλεσμα με
ζ = 1,5
σφάλματα: 0,01%

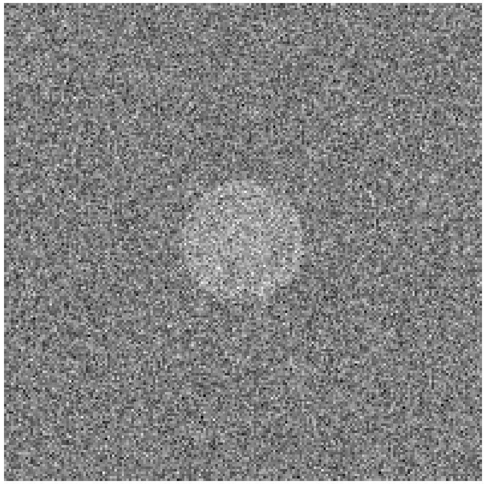
Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών

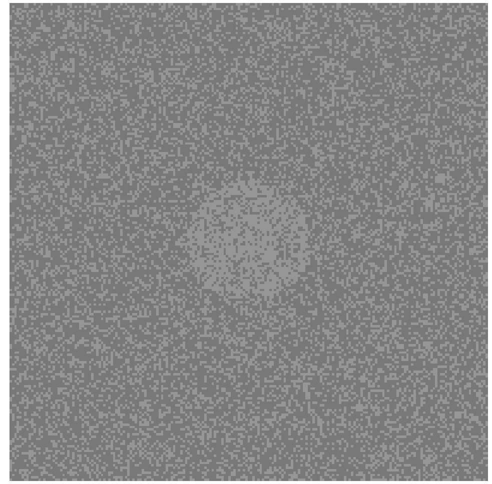




Ιστόγραμμα

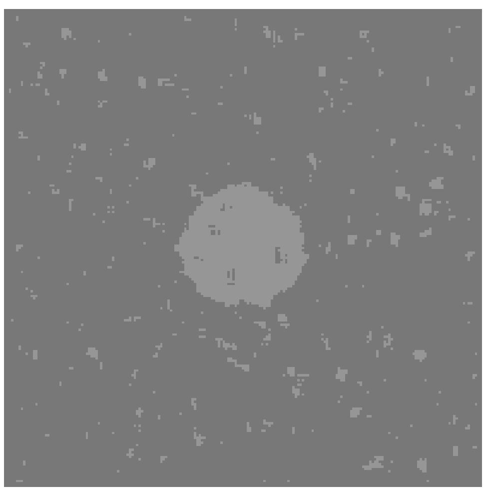
Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



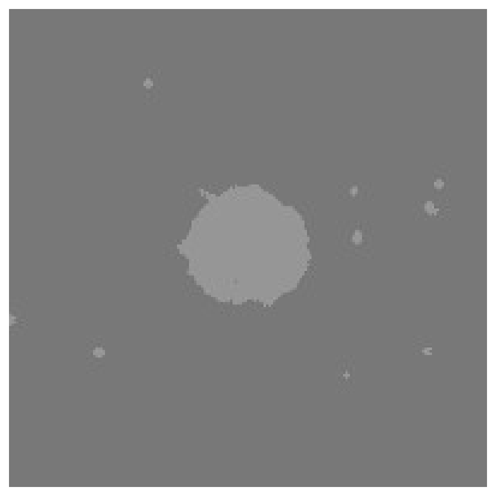


αρχικοποίηση

ζ = 1



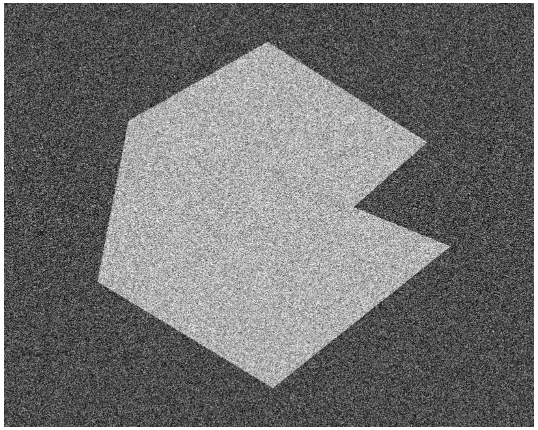
Μεσαία τιμή και
Μέγιστη πιθανοφάνεια

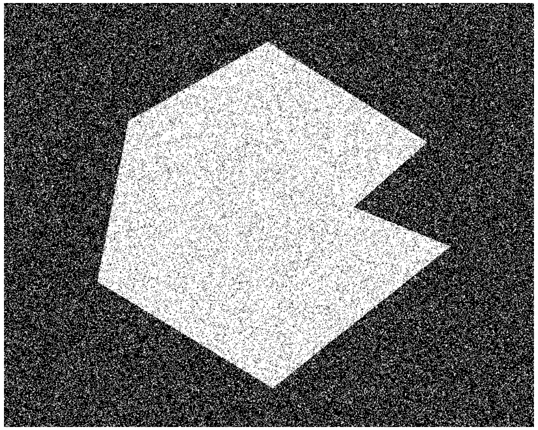


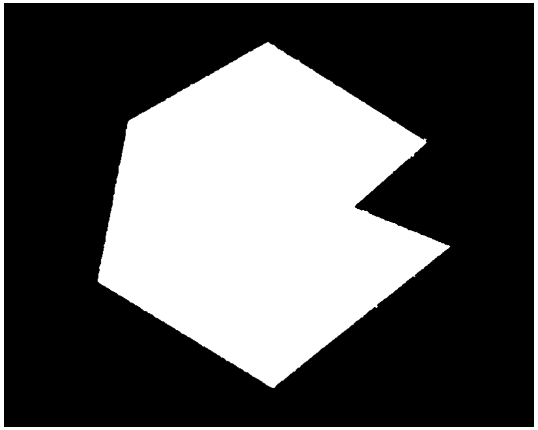
ζ = 1,5

Μεσαία τιμή

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσσών τιμών





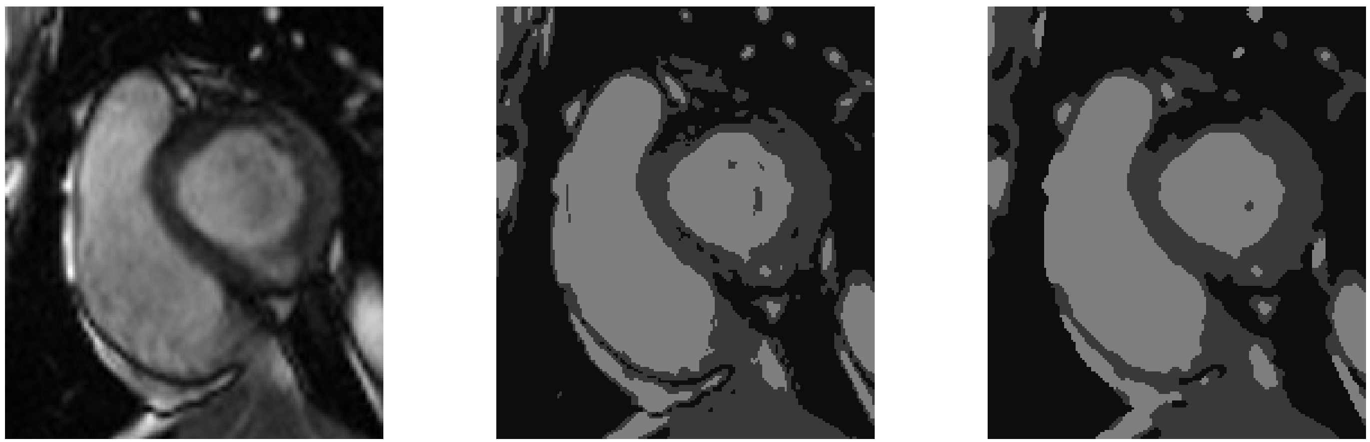


Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών

αρχικοποίηση

αποτέλεσμα με
ζ = 1,5

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσσών τιμών

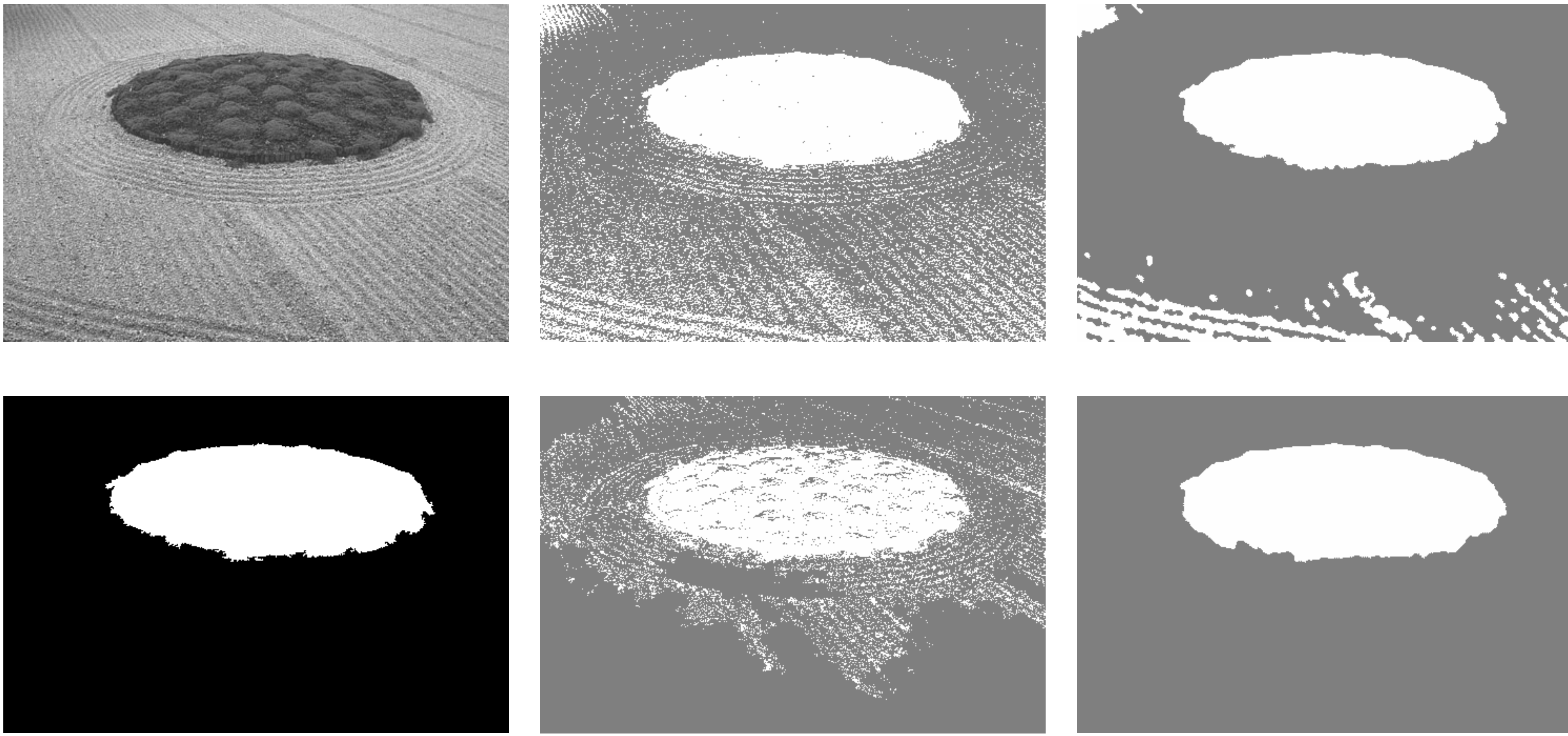


αρχικοποίηση

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών

‘πλημμυρίδα’ αρχικοποίηση

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



‘πλημμυρίδα’

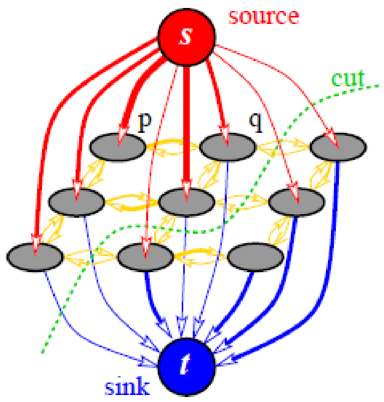
αρχικοποίηση

Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή

Ελαχιστοποίηση

$$E(X)=\sum_{p\in\Omega} x(p)D_p(1)+\sum_{p\in\Omega}(1-x(p))D_p(0)+\zeta\sum_{q\in\gamma(p)}(x(p)-x(q))^2$$

Ελάχιστη τομή σε διμερή γράφο



$$E(X)=\sum_{p\in\Omega} x(p)max(0,-w_p)+\sum_{p\in\Omega}(1-x(p))max(0,w_p)+\zeta\sum_{q\in\gamma(p)}(x(p)-x(q))^2+E_0$$

$$w_p=D_p(1)-D_p(0)$$

D. Greig, B. Porteous and A. Seheult, Exact maximum a posteriori estimation for binary images, *Journal of the Royal Statistical Society*, *Series B*, 1989.

Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή

Ελάχιστη τομή σε διμερή γράφο

$$E(X)=\sum_{p\in\Omega} x(p)max(0,-w_p)+\sum_{p\in\Omega}(1-x(p))max(0,w_p)+\zeta\sum_{q\in\gamma(p)}(x(p)-x(q))^2+E_0$$

$$w_p=D_p(1)-D_p(0)$$

Δύο επιπλέον κόμβοι : ‘πηγή’ και ‘δεξαμενή’

$w_p=D_p(1)-D_p(0)<0$ Σύνδεση ‘πηγής’ με *p* : χωρητικότητα $-w_p$

$w_p=D_p(1)-D_p(0)>0$ Σύνδεση *p* με ‘δεξαμενή’ : χωρητικότητα w_p

D. Greig, B. Porteous and A. Seheult, Exact maximum a posteriori estimation for binary images, *Journal of the Royal Statistical Society*, *Series B*, 1989.

Μέγιστη ροή / ελάχιστη τομή

Συνθήκες για τη ροή $f(u,v)$

$$f(u,v) \leq c(u,v)$$

$$f(v,u) = -f(u,v)$$

$$\sum_{w \in V} f(u,w) = 0, u \neq s, u \neq t$$

$$\sum_{(s,u) \in E} f(s,u) = \sum_{(v,t) \in E} f(v,t)$$

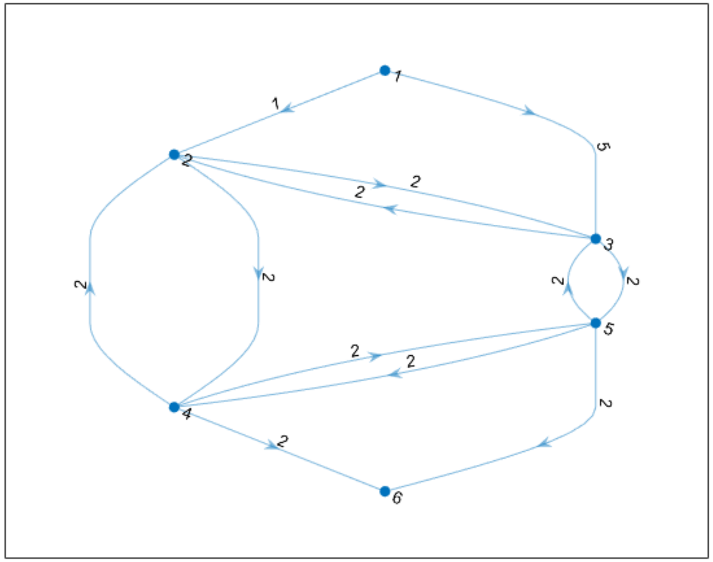
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

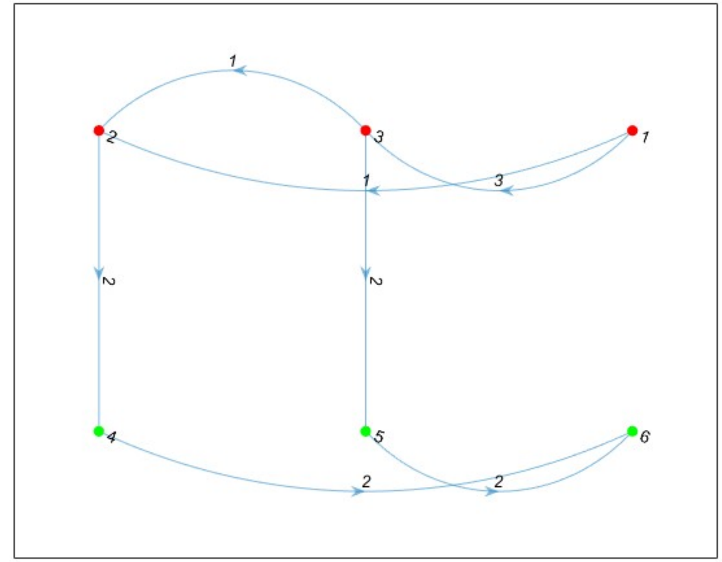
Μηδενική αρχική ροή σε όλες τις ακμές
Ενόσω υπάρχει διαδρομή *p* από την ‘πηγή’ στη ‘δεξαμενή’
    Χωρητικότητα διαδρομής *c(p)* ίση με την ελάχιστη χωρητικότητα ακμής της διαδρομής
    Για κάθε ακμή *(u,v)* της διαδρομής

$$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c(p)$$

$$f(v,u) = -f(u,v)$$

Μέγιστη ροή / ελάχιστη τομή

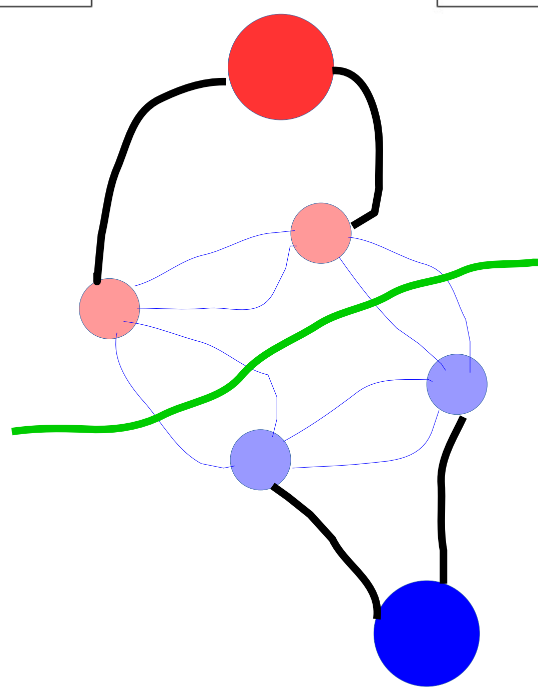




$\zeta = 2$

[1 5 0 0]

[0 0 2 2]

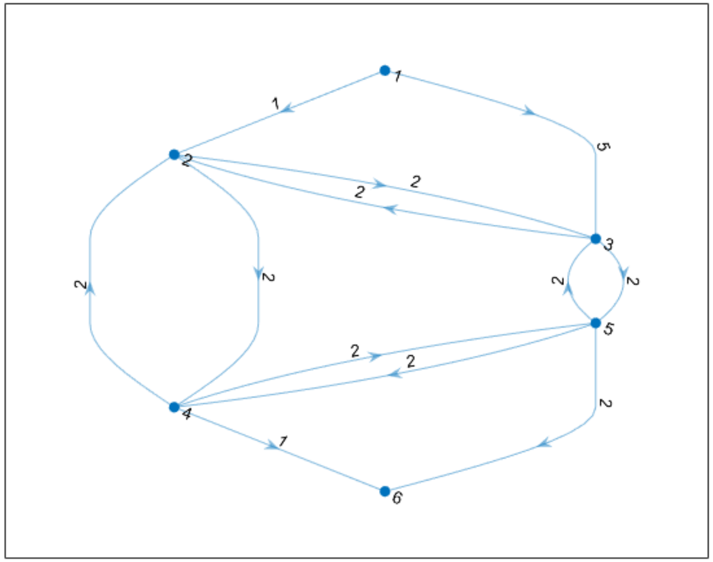


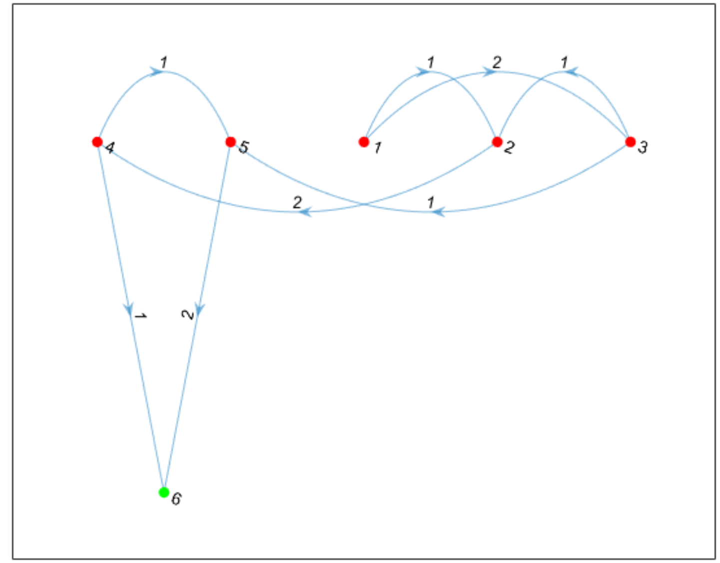
Μέγιστη ροή : 4

Ακμές τομής

(2,4)   **2**
(3,5)   **2**

Μέγιστη ροή / ελάχιστη τομή

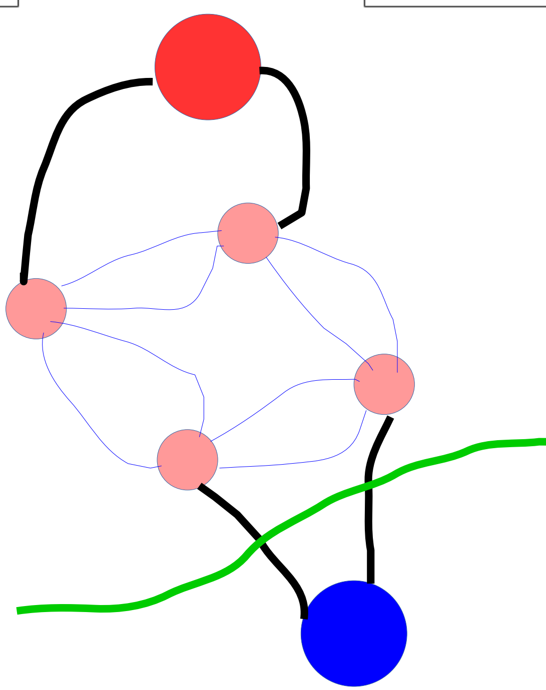




$\zeta = 2$

[1 5 0 0]

[0 0 1 2]

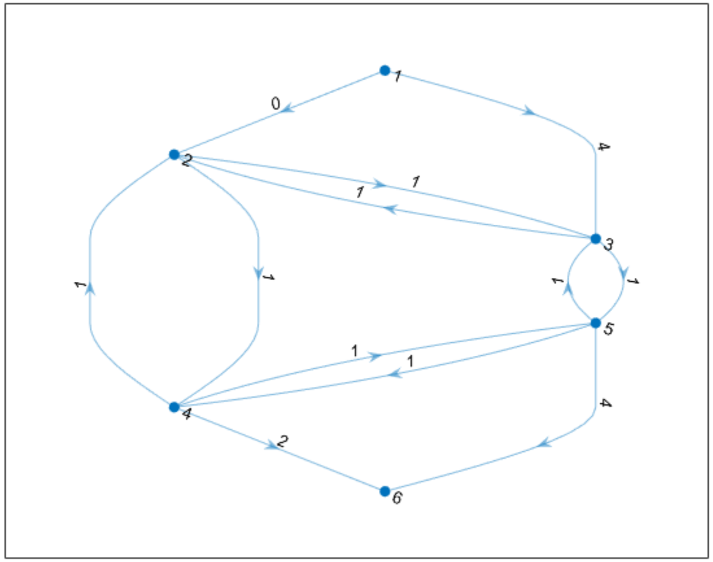


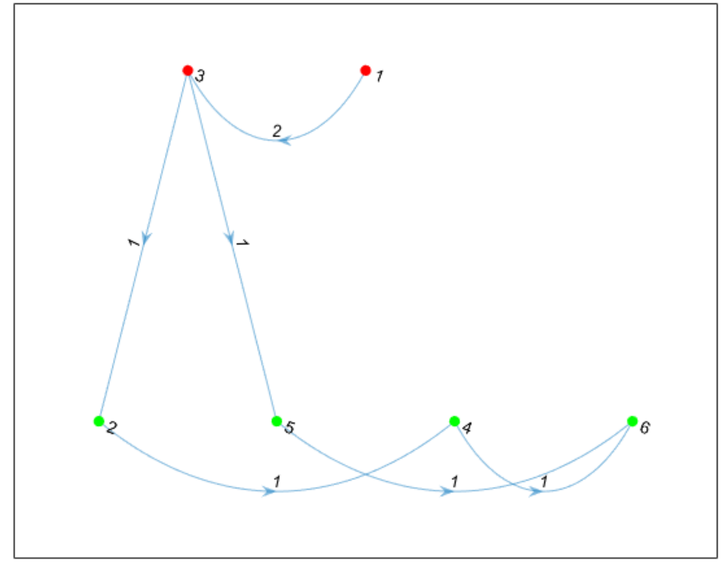
Μέγιστη ροή : 3

Ακμές τομής

(4,6) **1**
(5,6) **2**

Μέγιστη ροή / ελάχιστη τομή

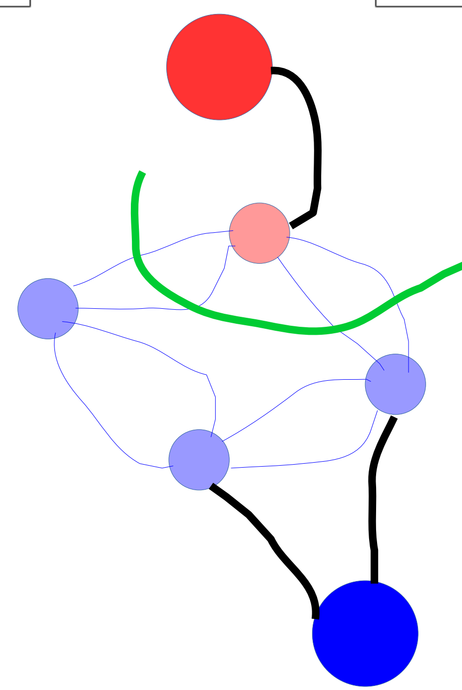




$\zeta = 1$

[0 5 0 0]

[0 0 2 2]

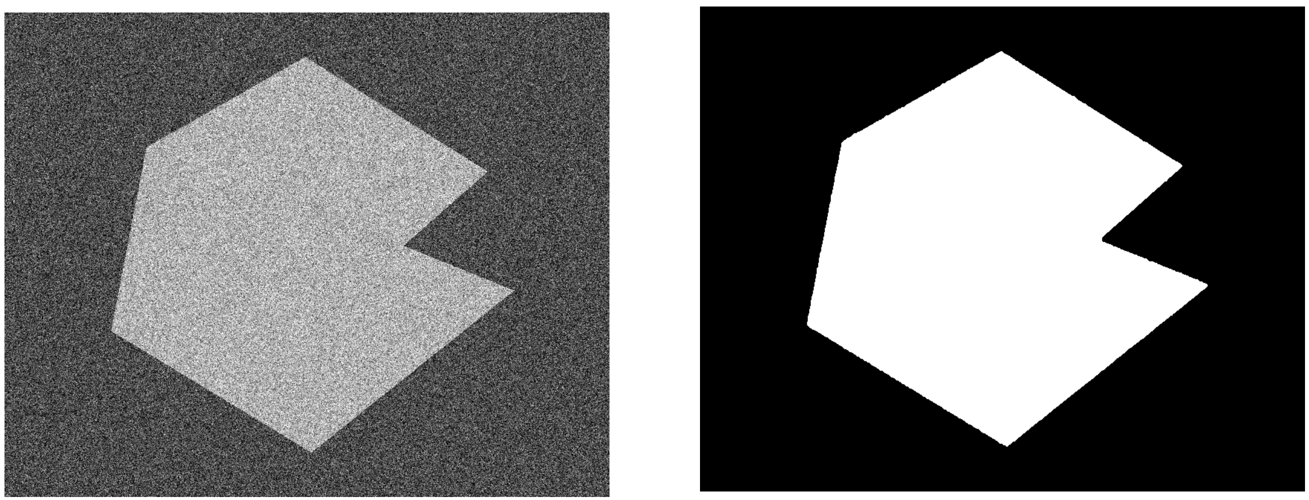


Μέγιστη ροή : 2

Ακμές τομής

(2,3)   **1**
(3,5)   **1**

Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή

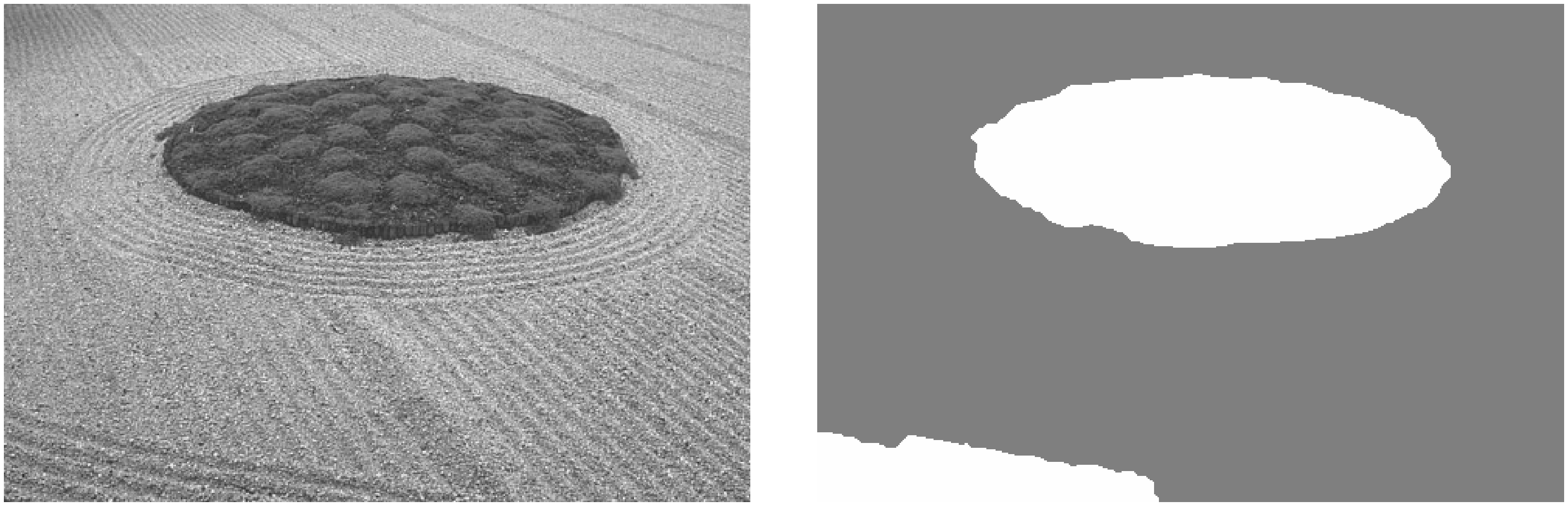


Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή

Γειτονιά
4-σημείων

Γειτονιά
8-σημείων

Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή



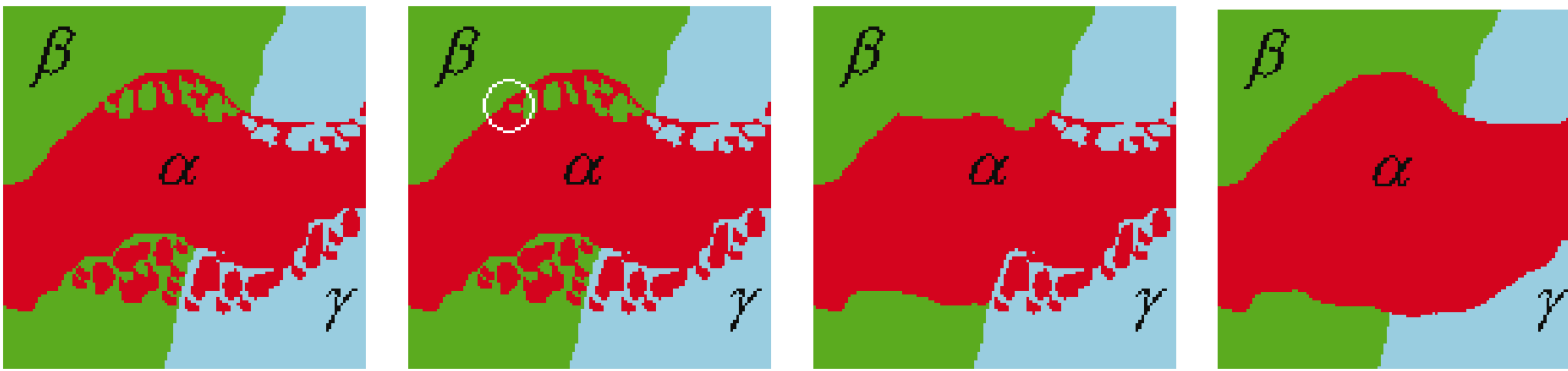
Γειτονιά
4-σημείων

Γειτονιά
8-σημείων

Πολλές κλάσεις : αλλαγές κατηγοριών

‘Κλίση’ της ενέργειας : τοπική βελτίωση = μία κίνηση
- άπληστη τεχνική
- πιθανοκρατική μέθοδος

Αλλαγές σε μεγάλα σύνολα εικονοστοιχείων



Μία αλλαγή | Εναλλαγή *α-β* | Επέκταση *α*

Y. Boykov, O. Veksler and R. Zabih, Fast approximate energy minimization via graph cuts, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001.

Πολλές κλάσεις : επέκταση α

1. Start with an arbitrary labeling f
2. Set success := 0
3. For each label $\alpha \in \mathcal{L}$
   3.1. Find $\hat{f} = \arg\min E(f')$ among f' within one α-expansion of f
   3.2. If $E(\hat{f}) < E(f)$, set f := $\hat{f}$ and success := 1
4. If success = 1 goto 2
5. Return f

Αναγωγή στο πρόβλημα της τομής γράφου για δύο κλάσεις
Ελάχιστη τομή γράφου / μέγιστη ροή

Y. Boykov, O. Veksler and R. Zabih, Fast approximate energy minimization via graph cuts, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001.

Τομή γράφου : γραμμικός προγραμματισμός

$$\min \sum_{p\in\mathcal{V}} \sum_{a\in\mathcal{L}} c_p(a) x_p(a) + \sum_{(p,q)\in\mathcal{E}} w_{pq} \sum_{a,b\in\mathcal{L}} d(a,b) x_{pq}(a,b)$$

$$\text{s.t.} \sum_a x_p(a) = 1 \qquad \forall\ p \in V$$

$$\sum_a x_{pq}(a,b) = x_q(b) \qquad \forall\ b \in L,\ (p,q) \in E$$

$$\sum_b x_{pq}(a,b) = x_p(a) \qquad \forall\ a \in L,\ (p,q) \in E$$

$$x_p(\cdot),\ x_{pq}(\cdot,\cdot) \in \{0,1\}$$

Δυαδικές μεταβλητές

$x_p(a)$ pixel *p* : label *a*

$x_{pq}(a,b)$ pixel *p* : label *a*, pixel *q* : label *b*

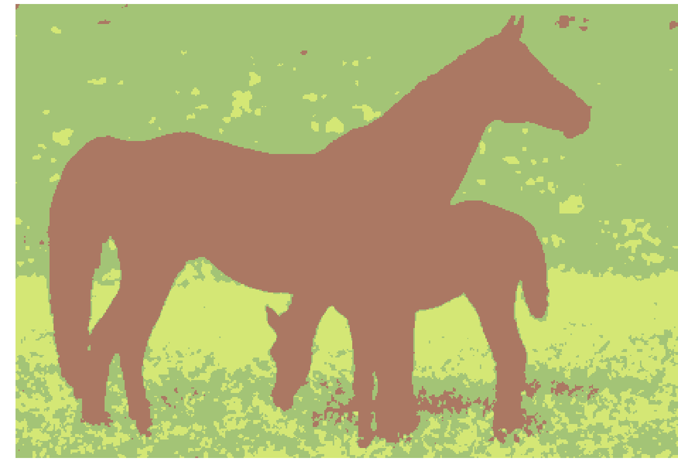
$$d(a,b) = d(b,a) \geq 0 = d(a,a)$$

Γραμμικός προγραμματισμός : πρωτεύον / δευτερεύον
Σχεδόν βέλτιστη προσεγγιστική λύση

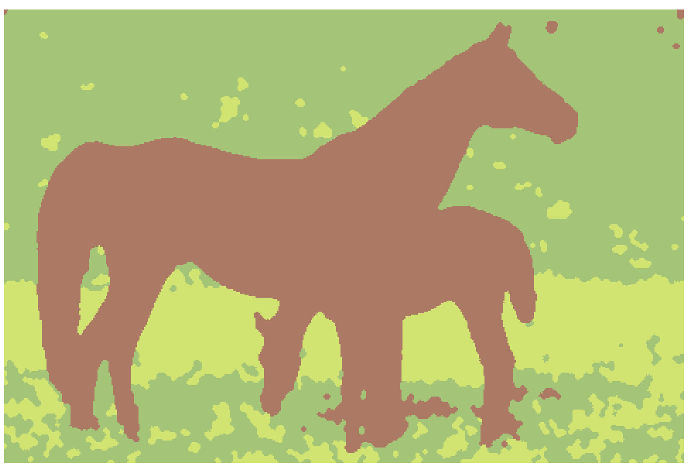
N. Komodakis and G. Tziritas, Approximate labeling via graph cuts based on linear programming, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007.

Τομές γράφων : γραμμικός προγραμματισμός

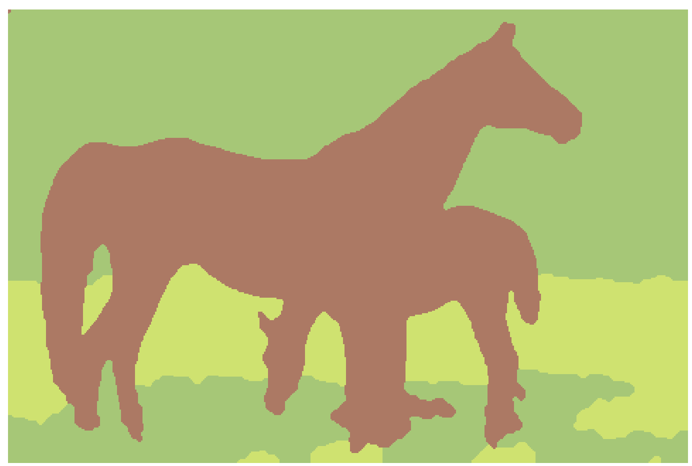
Υπερεικονοστοιχεία



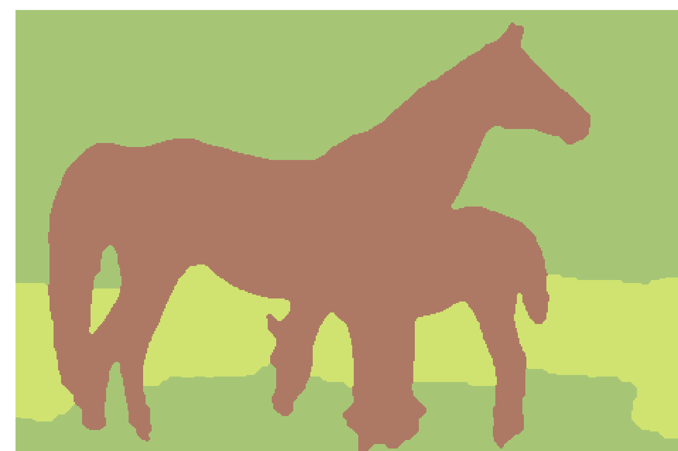
Μέγιστη πιθανοφάνεια



Επαναλαμβανόμενες
τοπικά επικρατούσες τιμές



Ομαδοποίηση
υπερεικονοστοιχείων



Τομές γράφων