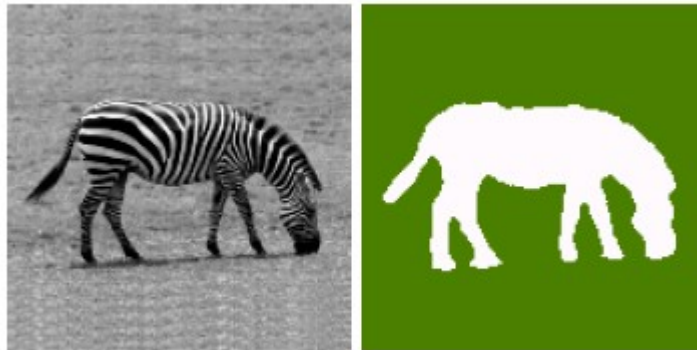
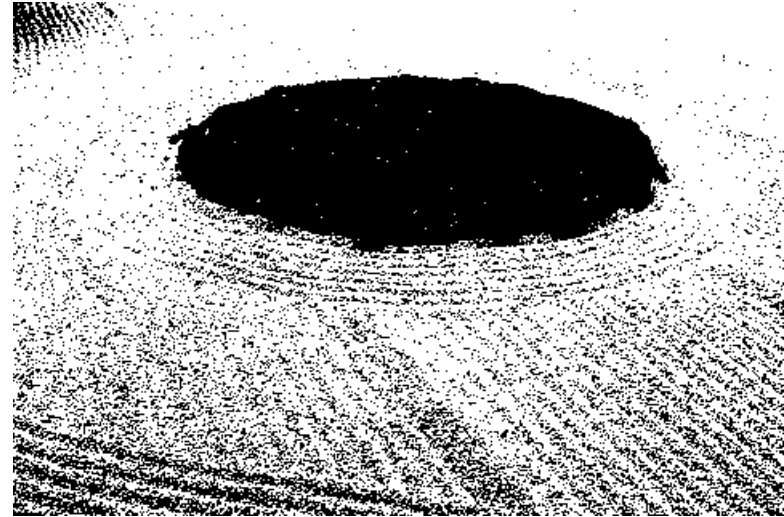
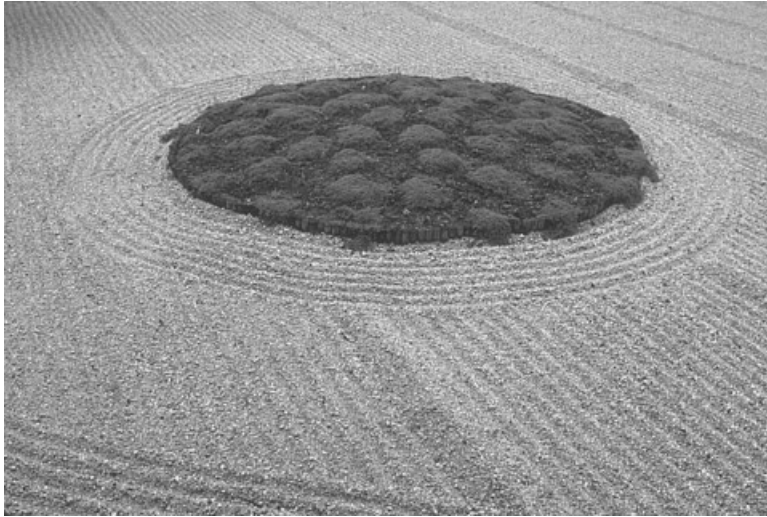


Τμηματοποίηση με χρήση τυχαίων πεδίων Markov



Κοινή ιδιότητα σημείων τμήματος
Εισαγωγή χωρικής πληροφορίας
Εξομάλυνση πεδίου κατατάξεων

Κόστος τμηματοποίησης

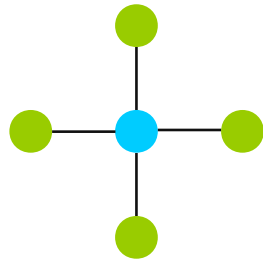


Διαδικοποίηση

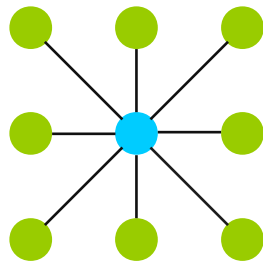
Κόστος σφαλμάτων σημειακής κατάταξης

Κόστος κατακερματισμού

Βασικές σχέσεις γειτονιάς και παρέας

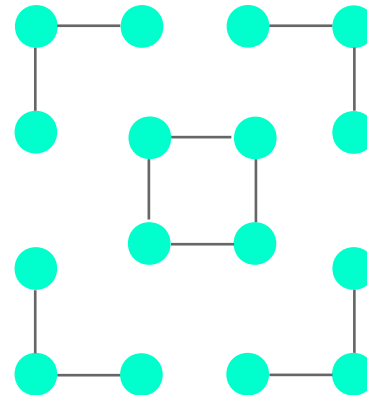
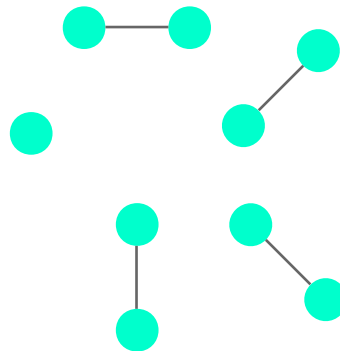


1ης τάξης

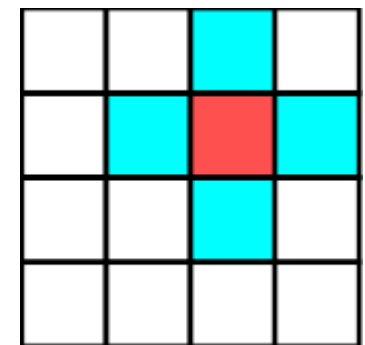
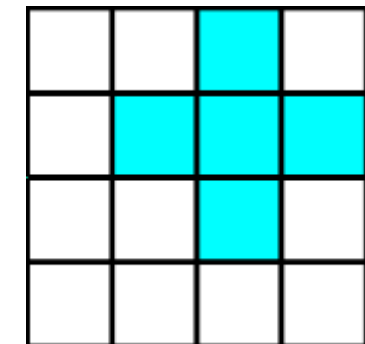
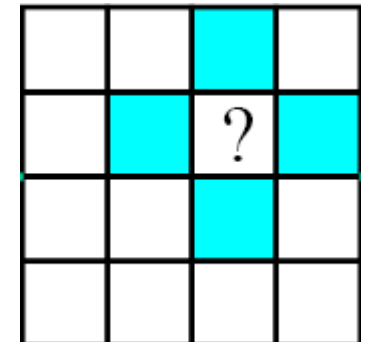


2ης τάξης

γειτονιά



παρέες



Τυχαία πεδία Markov

Πεδίο κατατάξεων : διακριτές τιμές (κλάσεις, κατηγορίες) $X(s)$

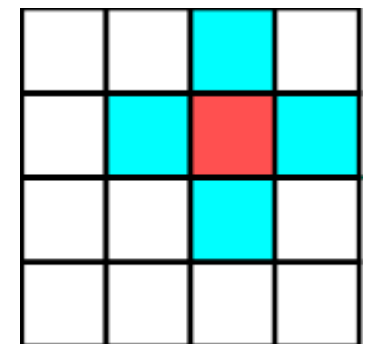
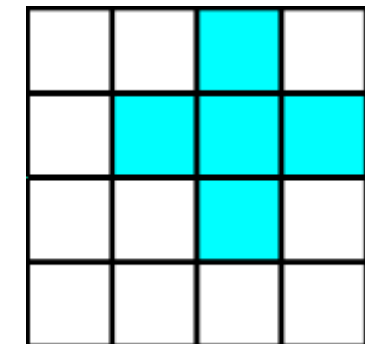
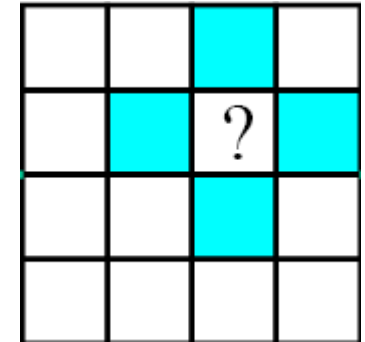
$Pr\{X(s)=x(s)\} > 0$ όλες οι κατατάξεις είναι δυνατές

$$Pr\{X(s)=x(s)|X(r)=x(r), r \neq s\} = Pr\{X(s)=x(s)|X(r)=x(r), r \in N(s)\}$$

$N(s)$ γειτονικά σημεία

Η πιθανότητα αλλαγής κατάταξης μικρότερη από την πιθανότητα όμοιας κατάταξης

Αλληλουχία εξαρτήσεων, το όλο προκύπτει από το σύνολο των επιμέρους τοπικών εξαρτήσεων



Τυχαία πεδία Gibbs

$$Pr\{X(m, n) = x(m, n) : (m, n) \in L\} = \frac{e^{-U(x)}}{\Psi}$$

Τάξη : μεγάλη πιθανότητα

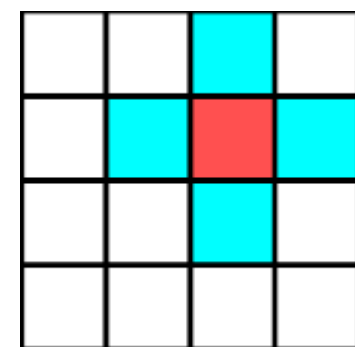
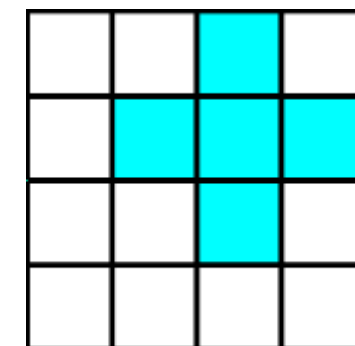
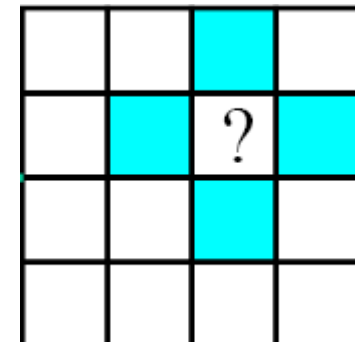
Αταξία : μικρή πιθανότητα

$$U(x) = \sum_{c \in C} \phi_c(x)$$

Ενέργεια = άθροισμα δυναμικών όλων των παρεών

Μεγάλο δυναμικό όταν υπάρχει ανομοιότητα στην παρέα

$$\phi_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{ίδια} \\ \zeta > 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Δυναμικό εξαρτώμενο από δεδομένα

Σε περίπτωση διαφορετικών κατατάξεων σε παρέα,
η πιθανότητα είναι τόσο μεγαλύτερη,
όσο τα αντίστοιχα δεδομένα διαφέρουν

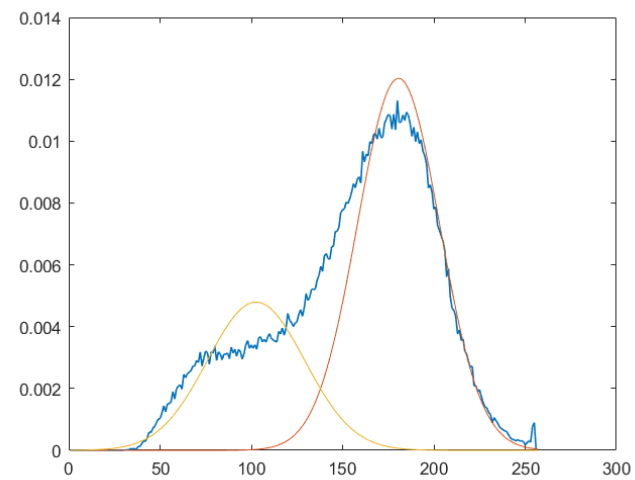
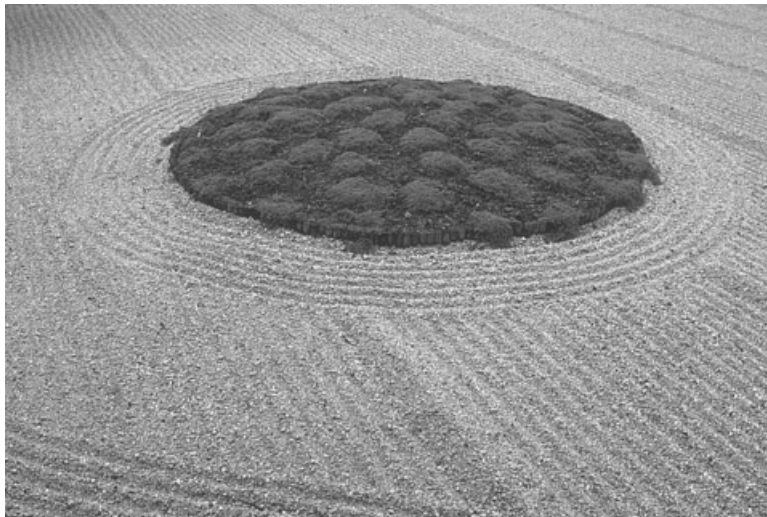
Ομοιότητα $w(m, n) = \exp\left(\frac{-|I(m) - I(n)|}{\sigma}\right)$

Δυναμικό $\zeta w(m, n)$

Ανάλυση δεδομένων

$$p(y(m, n)|X(k, l) = x(k, l), (k, l) \in L) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y(m, n) - f(x(m, n)))^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x(m, n)) = \mu_k, \text{ εὐν } (m, n) \in S_k, \quad 1 \leq k \leq K$$



Δεδομένα και εξομάλυνση

$$\sum_{(m,n) \in L} \phi_c(x(m,n)) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K \sum_{(m,n) \in S_k} (y(m,n) - \mu_k)^2$$

Ελαχιστοποίηση

$$E(x) = E_s(x) + E_D(x)$$

Πολλά τοπικά ελάχιστα / διακριτές μεταβλητές

‘Κλίση’ της ενέργειας : τοπική βελτίωση

- άπληστη τεχνική
- πιθανοκρατική μέθοδος

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών

Βέλτιστη απόφαση σε ένα σημείο με δοσμένο όλο το υπόλοιπο πεδίο

$$Pr\{X(m, n) = x(m, n) | Y(m, n) = y(m, n), \hat{x}(k, l); (k, l) \in L - \{(m, n)\}\}$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}(y(m, n) - \mu_k)^2 + \sum \phi_c(x(m, n))$$

γειτονιά ενός σημείου

$$\frac{1}{2\sigma^2}(y(m, n) - \mu_k)^2 - \zeta a_k(m, n)$$

$a_k(m, n)$ πλήθος γειτονικών καταταγμένων k

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατούσών τιμών

Initialization:

```
for each pixel p {  
    current_label(p) := init_label(p)  
}  
change_pixels := number_of_pixels
```

$$\arg \min (y(m, n) - \mu_k)^2$$

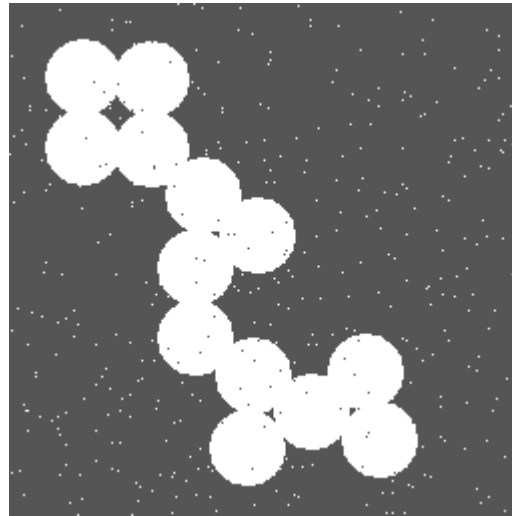
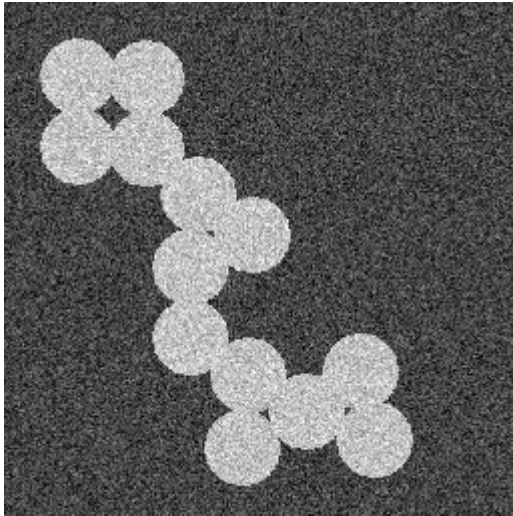
Iterations:

```
while (change_pixels != 0)  
{  
    change_pixels := 0  
    for each pixel p {  
        previous_label(p) := current_label(p)  
    }  
    for each pixel p  
    {  
        current_label(p) := find_optimal_label(p)  
        if (current_label(p) != previous_label(p)) {  
            change_pixels++  
        }  
    }  
}
```

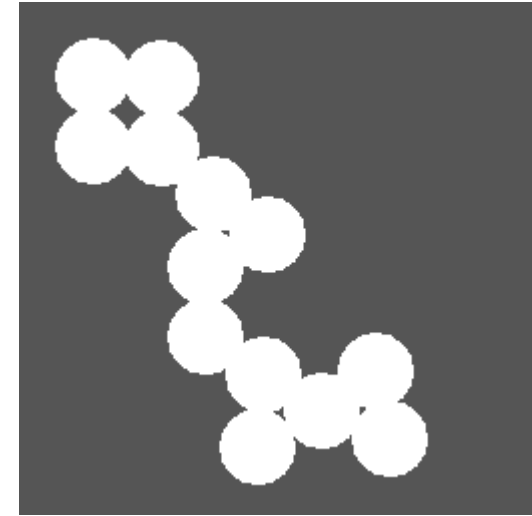
decreasing

$$\arg \min \frac{1}{2\sigma^2} (y(m, n) - \mu_k)^2 - \zeta a_k(m, n)$$

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών

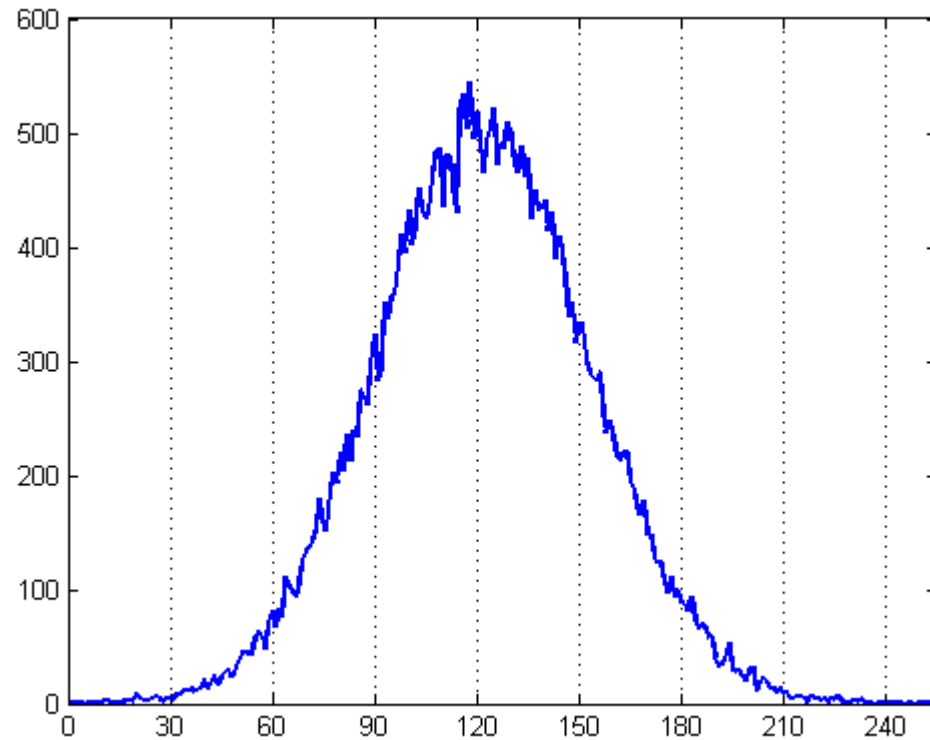
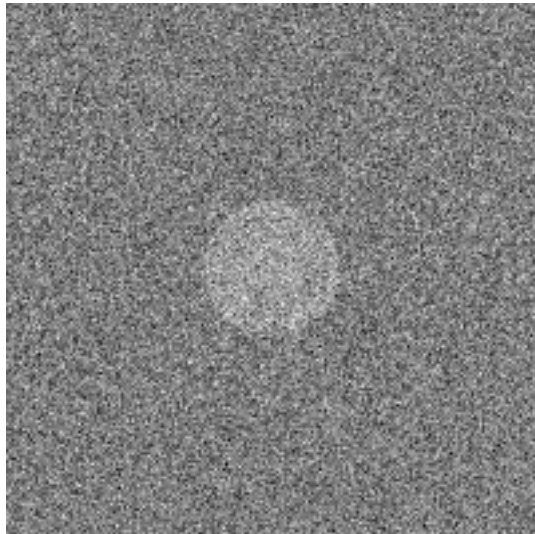


αρχικοποίηση

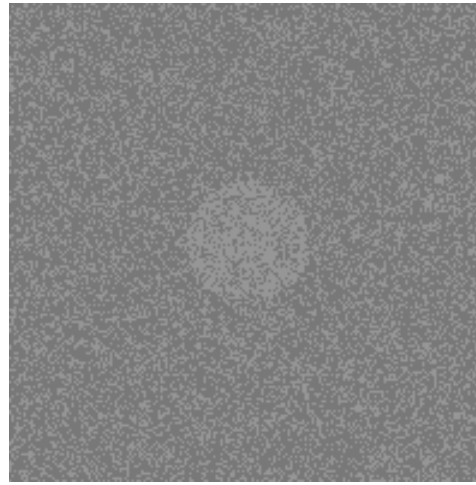
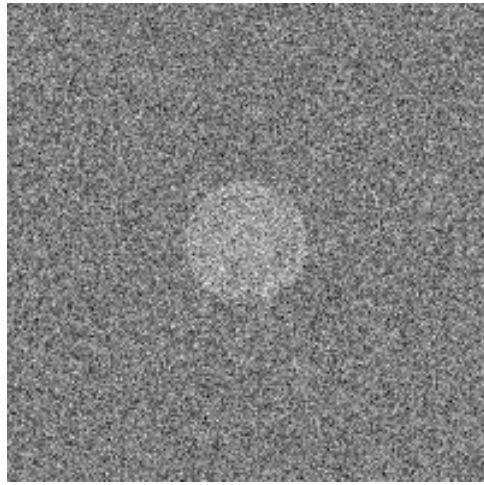


αποτέλεσμα με
 $\zeta = 1,5$
σφάλματα: 0,01%

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



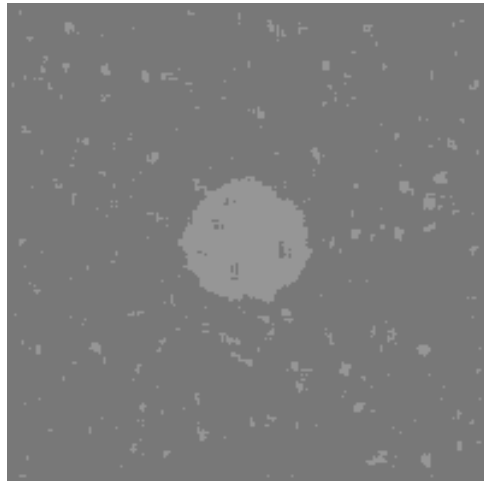
Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



αρχικοποίηση



$z = 1$



Μεσαία τιμή και
Μέγιστη πιθανοφάνεια

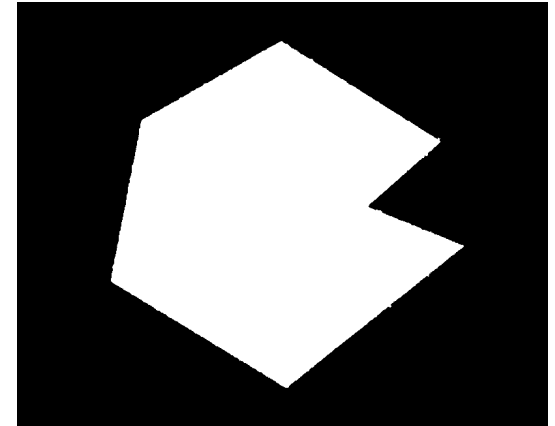
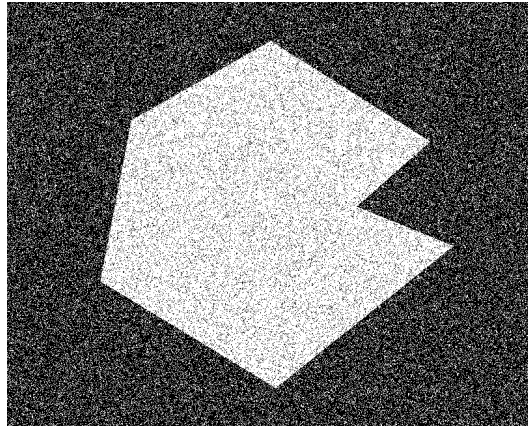
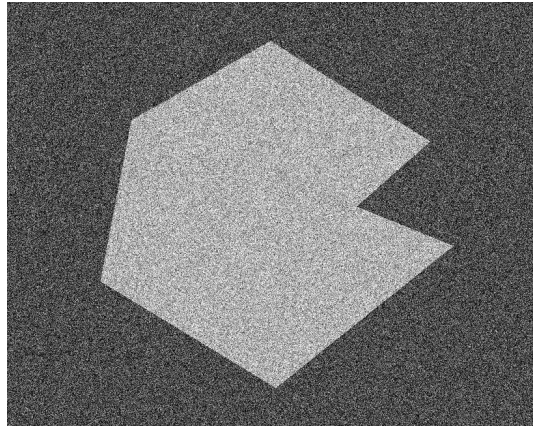


$z = 1,5$



Μεσαία τιμή

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών

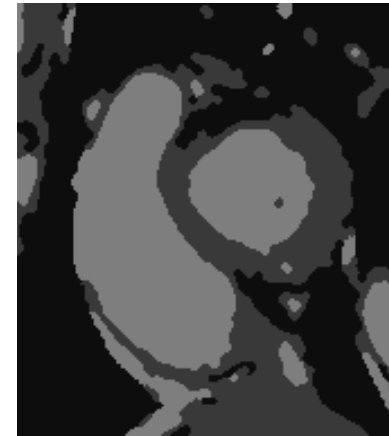
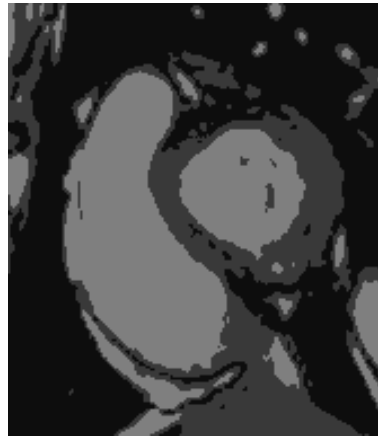
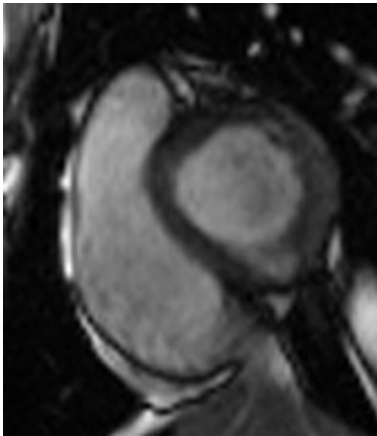


αρχικοποίηση



αποτέλεσμα με
 $z = 1,5$

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



αρχικοποίηση

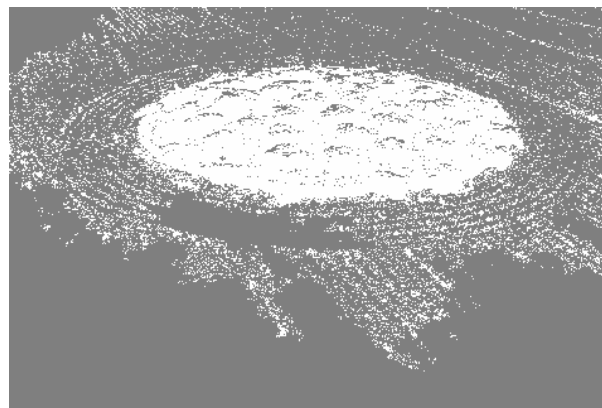
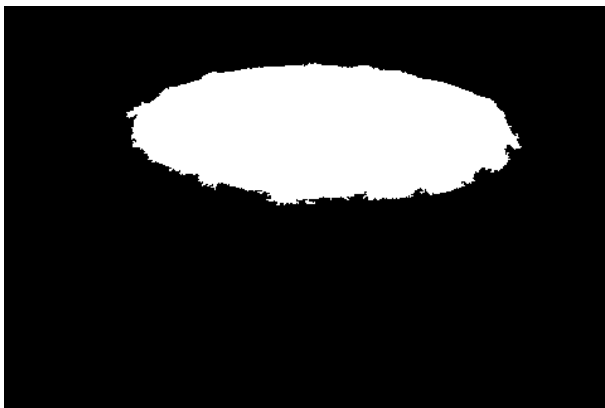
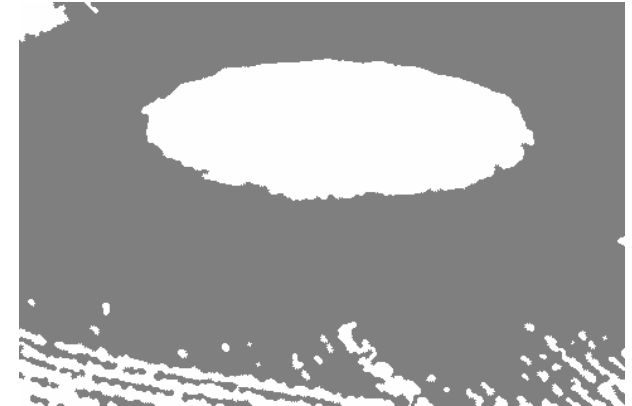
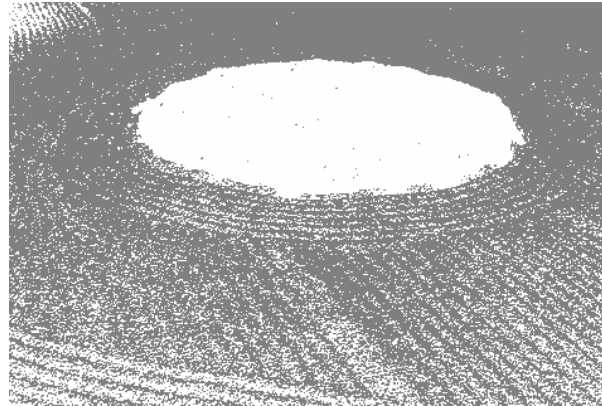
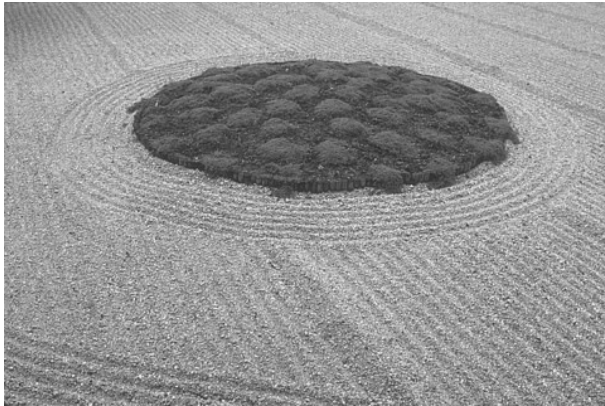
Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



‘πλημμυρίδα’

αρχικοποίηση

Αλγόριθμος επαναλαμβανόμενων τοπικά επικρατουσών τιμών



‘πλημμυρίδα’

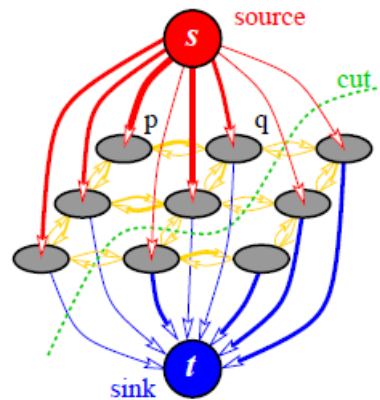
αρχικοποίηση

Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή

Ελαχιστοποίηση

$$E(X) = \sum_{(m,n) \in L} x(m,n) D_p(1) + \sum_{(m,n) \in L} (1-x(m,n)) D_p(0) + \zeta \sum_{(k,l) \in \gamma(m,n)} (x(m,n) - x(k,l))^2$$

Ελάχιστη τομή σε διμερή γράφο



D. Greig, B. Porteous and A. Seheult, Exact maximum a posteriori estimation for binary images, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1989.

Μέγιστη ροή / ελάχιστη τομή

Συνθήκες για τη ροή $f(u, v)$

$$f(u, v) \leq c(u, v)$$

$$f(v, u) = -f(u, v)$$

$$\sum_{w \in V} f(u, w) = 0, u \neq s, u \neq t$$

$$\sum_{(s, u) \in E} f(s, u) = \sum_{(v, t) \in E} f(v, t)$$

Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

Μηδενική αρχική ροή σε όλες τις ακμές

Ενόσω υπάρχει διαδρομή p από την 'πηγή' στη 'δεξαμενή'

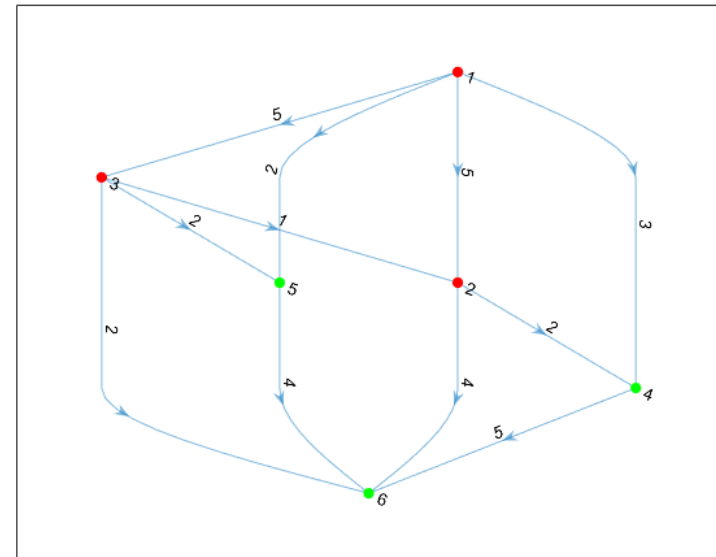
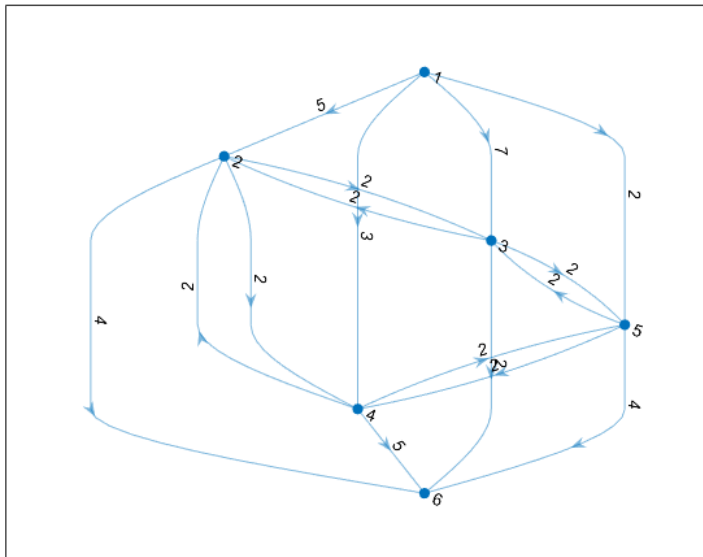
Χωρητικότητα διαδρομής $c(p)$ ίση με την ελάχιστη χωρητικότητα ακμής της διαδρομής

Για κάθε ακμή (u, v) της διαδρομής

$$f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c(p)$$

$$f(v, u) \leftarrow -f(u, v)$$

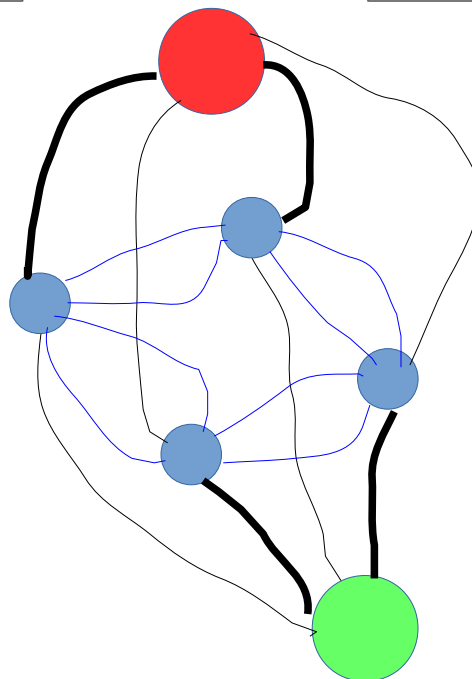
Μέγιστη ροή / ελάχιστη τομή



$\zeta=2$

[5 7 3 2]

[4 2 5 4]

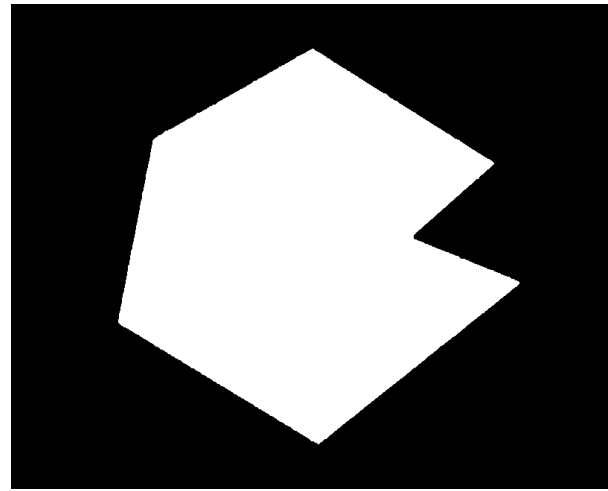
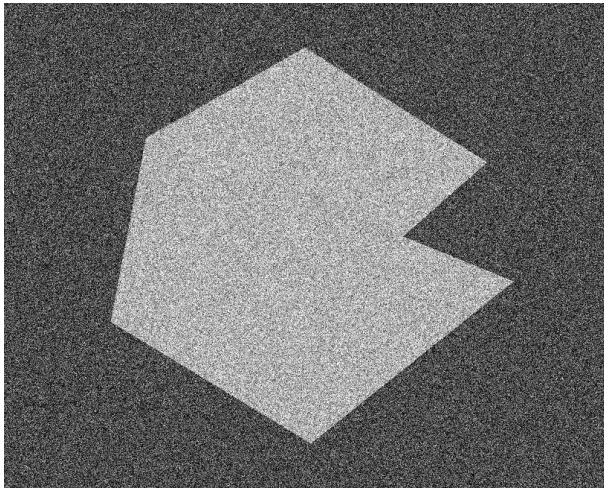


Μέγιστη ροή : 15

Ακμές τομής

(1,4)	3
(1,5)	2
(2,5)	2
(2,6)	4
(3,5)	2
(3,6)	2

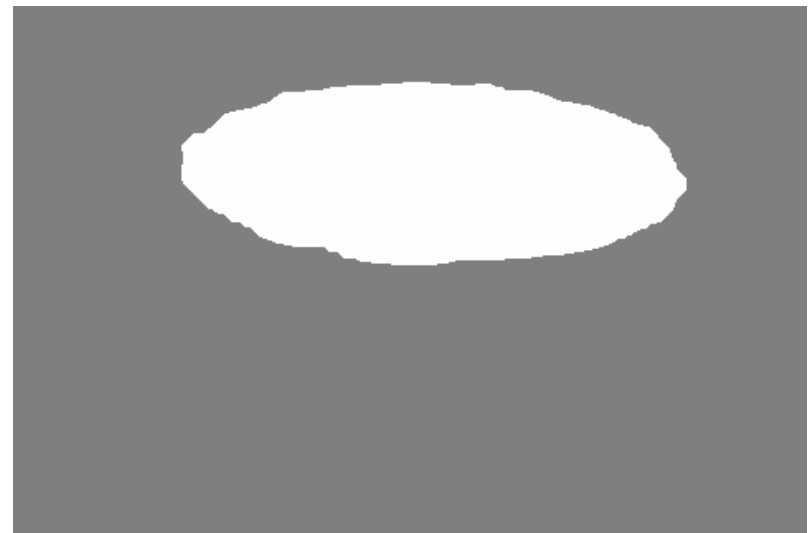
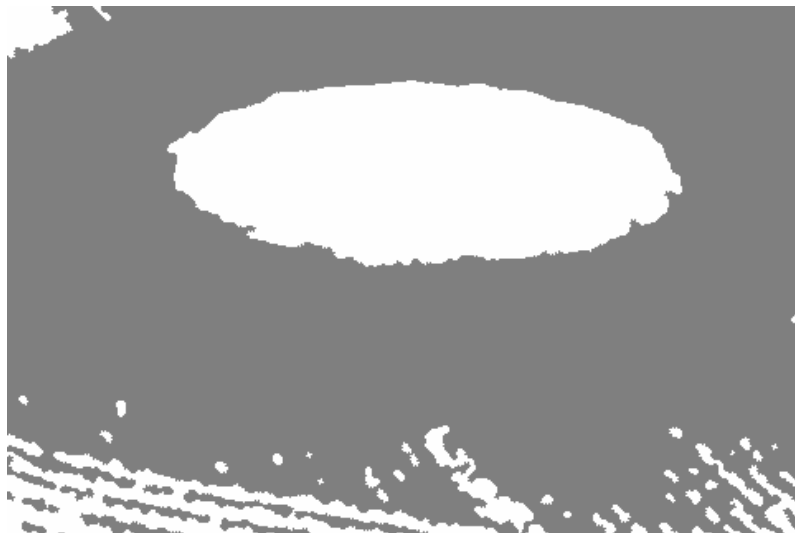
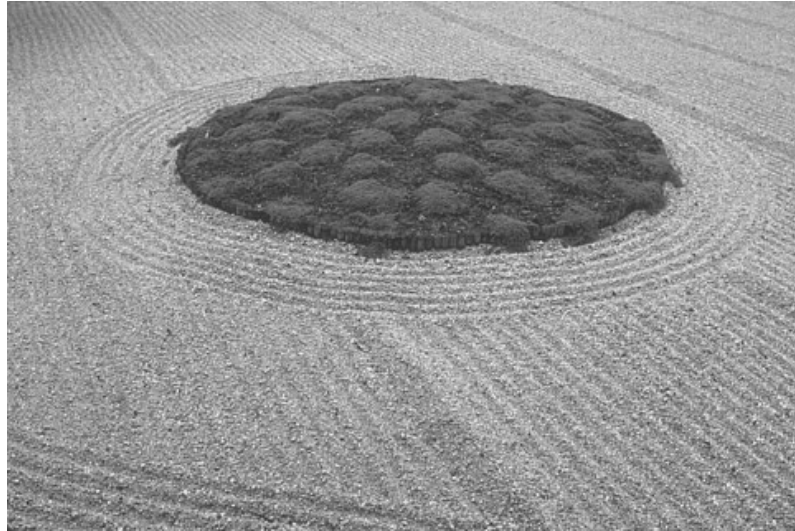
Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή



Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή



Δύο κλάσεις : ελάχιστη τομή / μέγιστη ροή

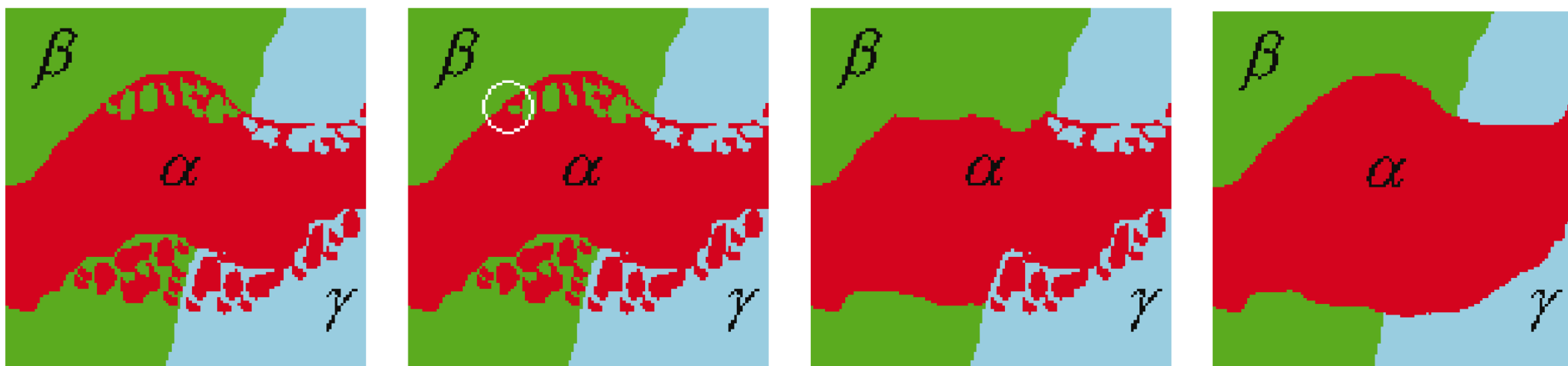


Πολλές κλάσεις : αλλαγές κατηγοριών

‘Κλίση’ της ενέργειας : τοπική βελτίωση = μία κίνηση

- άπληστη τεχνική
- πιθανοκρατική μέθοδος

Αλλαγές σε μεγάλα σύνολα εικονοστοιχείων



Μία αλλαγή

Εναλλαγή α - β

Επέκταση α

Y. Boykov, O. Veksler and R. Zabih, Fast approximate energy minimization via graph cuts, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001.

Πολλές κλάσεις : επέκταση α

1. Start with an arbitrary labeling f
2. Set `success` := 0
3. For each label $\alpha \in \mathcal{L}$
 - 3.1. Find $\hat{f} = \arg \min E(f')$ among f' within one α -expansion of f
 - 3.2. If $E(\hat{f}) < E(f)$, set $f := \hat{f}$ and `success` := 1
4. If `success` = 1 goto 2
5. Return f

Αναγωγή στο πρόβλημα της τομής γράφου για δύο κλάσεις
Ελάχιστη τομή γράφου / μέγιστη ροή

Y. Boykov, O. Veksler and R. Zabih, Fast approximate energy minimization via graph cuts, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001.

Τομή γράφου : γραμμικός προγραμματισμός

$$\begin{aligned} \min & \sum_{p \in V} \sum_{a \in \mathcal{L}} c_p(a) x_p(a) + \sum_{(p,q) \in \mathcal{E}} w_{pq} \sum_{a,b \in \mathcal{L}} d(a,b) x_{pq}(a,b) \\ \text{s.t.} & \sum_a x_p(a) = 1 \quad \forall p \in V \\ & \sum_a x_{pq}(a,b) = x_q(b) \quad \forall b \in L, (p,q) \in E \\ & \sum_b x_{pq}(a,b) = x_p(a) \quad \forall a \in L, (p,q) \in E \\ & x_p(\cdot), x_{pq}(\cdot, \cdot) \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Δυαδικές μεταβλητές

$x_p(a)$ pixel p : label a

$x_{pq}(a,b)$ pixel p : label a , pixel q : label b

$d(a,b) = d(b,a) \geq 0 = d(a,a)$

Γραμμικός προγραμματισμός : πρωτεύον / δευτερεύον
Σχεδόν βέλτιστη προσεγγιστική λύση

Τομές γράφων : γραμμικός προγραμματισμός

