ΗΥ-430 Τρίτη σειρά ασκήσεων

28 Νοεμβρίου 2003

1 Άσκηση

α) Η έξοδος του envelope detector είναι:

$$v(t) = A_c|1 + \mu \cos(2\pi f_m t)|$$

της οποίας η γραφική παράσταση για $\mu = 2$ φαίνεται στο σχήμα 2

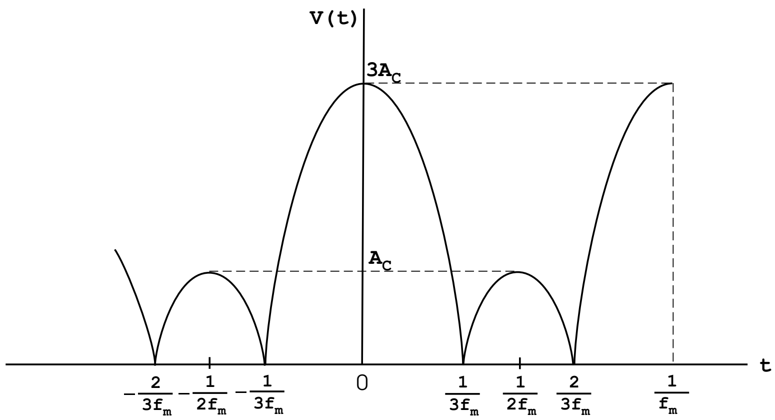
Παρατηρούμε ότι η $v(t)$ είναι περιοδική με περίοδο f_m και ότι είναι άρτια συνάρτηση του t. Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε την $v(t)$ ως εξής:

$$v(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi f_m t)$$

όπου

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2f_m \int_0^{1/2f_m} v(t)dt \\
&= 2A_c f_m \int_0^{1/3f_m} [1 + 2\cos(2\pi f_m t)]dt + 2A_c f_m \int_{1/3f_m}^{1/2f_m} [-1 - 2\cos(2\pi f_m t)]dt \\
&= \frac{A_c}{3} + \frac{4A_c}{\pi}\sin(\frac{2\pi}{3}) \qquad (1) \\
a_n &= 2f_m \int_0^{1/2f_m} v(t)\cos(2n\pi f_m t)dt \\
&= 2A_c f_m \int_0^{1/3f_m} [1 + 2\cos(2\pi f_m t)]\cos(2n\pi f_m t)dt \\
&+ 2A_c f_m \int_{1/3f_m}^{1/2f_m} [-1 - 2\cos(2\pi f_m t)]\cos(2n\pi f_m t)dt \\
&= \frac{A_c}{n\pi}[2\sin(\frac{2n\pi}{3}) - \sin(n\pi)] + \frac{A_c}{(n+1)\pi}\{2\sin[\frac{2\pi}{3}(n+1)] - \sin[\pi(n+1)]\} \\
&+ \frac{A_c}{(n-1)\pi}\{2\sin[\frac{2\pi}{3}(n-1)] - \sin[\pi(n-1)]\} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Για $n = 0$ η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή της (1).



Σχήμα 1

β) Για $n=1$ η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή:

$$a_1 = A_c(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3})$$

Για $n=2$ έχουμε:

$$a_2 = \frac{A_c\sqrt{3}}{2\pi}$$

Έτσι, ο λόγος του πλάτους της δεύτερης αρμονικής προς το θεμελιώδες πλάτος για το $v(t)$ είναι:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}} = 0.452$$

2 Άσκηση

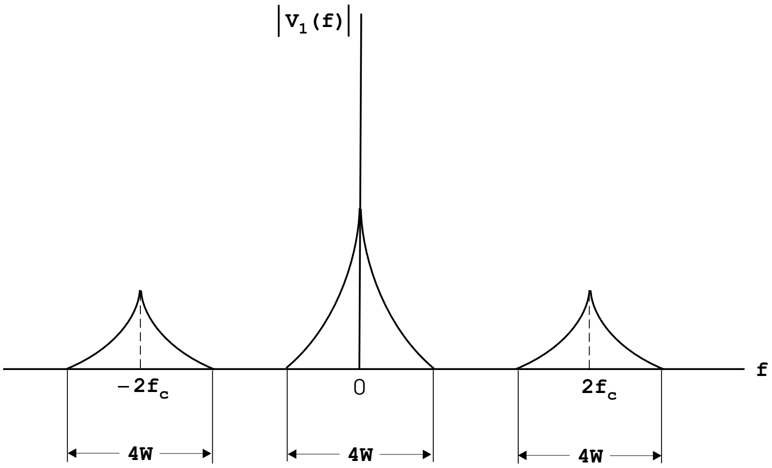
Η έξοδος του squarer είναι:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= A_c^2[1 + k_a m(t)]^2 \cos^2(2\pi f_c t) \\ &= \frac{A_c^2}{2}[1 + 2k_a m(t) + m^2(t)][1 + \cos(4\pi f_c t)] \end{aligned}$$

Το πλάτος φάσματος της $v_1(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2, θεωρώντας ότι το $m(t)$ είναι περιορισμένο στο διάστημα $-W \leq f \leq W$.

Αφού $f_c > 2W$, είναι $2f_c - 2W > 2W$. Έτσι, επιλέγοντας η συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού φίλτρου να είναι μεγαλύτερη από $2W$ αλλά μικρότερη από $2f_c - 2W$, έχουμε την έξοδο:

$$v_2(t) = \frac{A_c^2}{2}[1 + k_a m(t)]^2$$



Σχήμα 2

Έτσι, η έξοδος του square-rooter είναι:

$$v_3(t) = \frac{A_c}{\sqrt{2}}[1 + k_a m(t)]$$

η οποία, αν εξαιρέσουμε τον παράγοντα dc $\frac{A_c}{\sqrt{2}}$ είναι ανάλογη με το σήμα $m(t)$.

3 Άσκηση

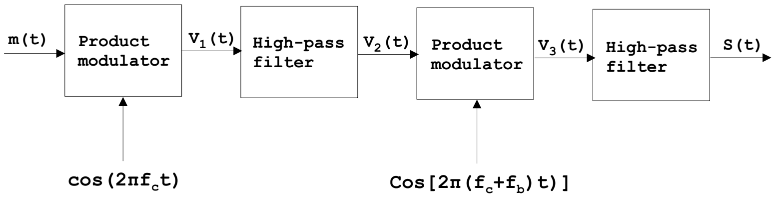
Αφού

$$v_1(t) = A_c[1 + k_a m(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

α) Τότε η έξοδος του square-law detector είναι:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t) \\ &= a_1 A_c[1 + k_a m(t)]\cos(2\pi f_c t) \\ &+ \frac{1}{2} a_2 A_c^2 [1 + 2k_a m(t) + k_a^2 m^2(t)][1 + \cos(4\pi f_c t)] \end{aligned}$$

β) Το επιθυμητό σήμα, δηλαδή το $a_2 A_c^2 k_a m(t)$, οφείλεται στο $a_2 v_1^2(t)$. Η συνιστώσα αυτή μπορεί να εξαχθεί με τη βοήθεια ενός βαθυπερατού φίλτρου. Ο όρος $a_2 A_c^2 k_a m(t)$ δεν είναι ο μόνος που συνεισφέρει στο baseband φάσμα. Υπάρχει και ο όρος $1/2 a_2 A_c^2 k_a m^2(t)$ ο οποίος θα δώσει απόκριση σε παρόμοιες συχνότητες. Ο λόγος του ζητούμενου σήματος προς την παραμόρφωση είναι $2/k_a m(t)$. Οπότε, για να μεγαλώσουμε το λόγο αυτό, αρκεί να κάνουμε το $|k_a m(t)|$ όσο γίνεται μικρότερο σε σχέση με τη μονάδα.



Σχήμα 3

4 Άσκηση

α) Η έξοδος του πρώτου product modulator είναι:

$$v_1(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

Η έξοδος του δεύτερου product modulator είναι:

$$v_3(t) = v_2(t)\cos[2\pi(f_c + f_b)t]$$

Το πλάτος φάσματος των $m(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ και $s(t)$ φαίνεται στο σχήμα 4.

Μπορούμε να εκφράσουμε το σήμα φωνής $m(t)$ ως:

$$m(t) = \frac{1}{2}[m_+(t) + m_-(t)]$$

όπου $m_+(t)$ είναι το pre-envelope του $m(t)$ και $m_-(t) = m_+^*(t)$ είναι το μιγαδικό συζυγές του. Οι μετασχηματισμοί Fourier των $m_+(t)$ και $m_-(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_+(f) = \begin{cases} 2M(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

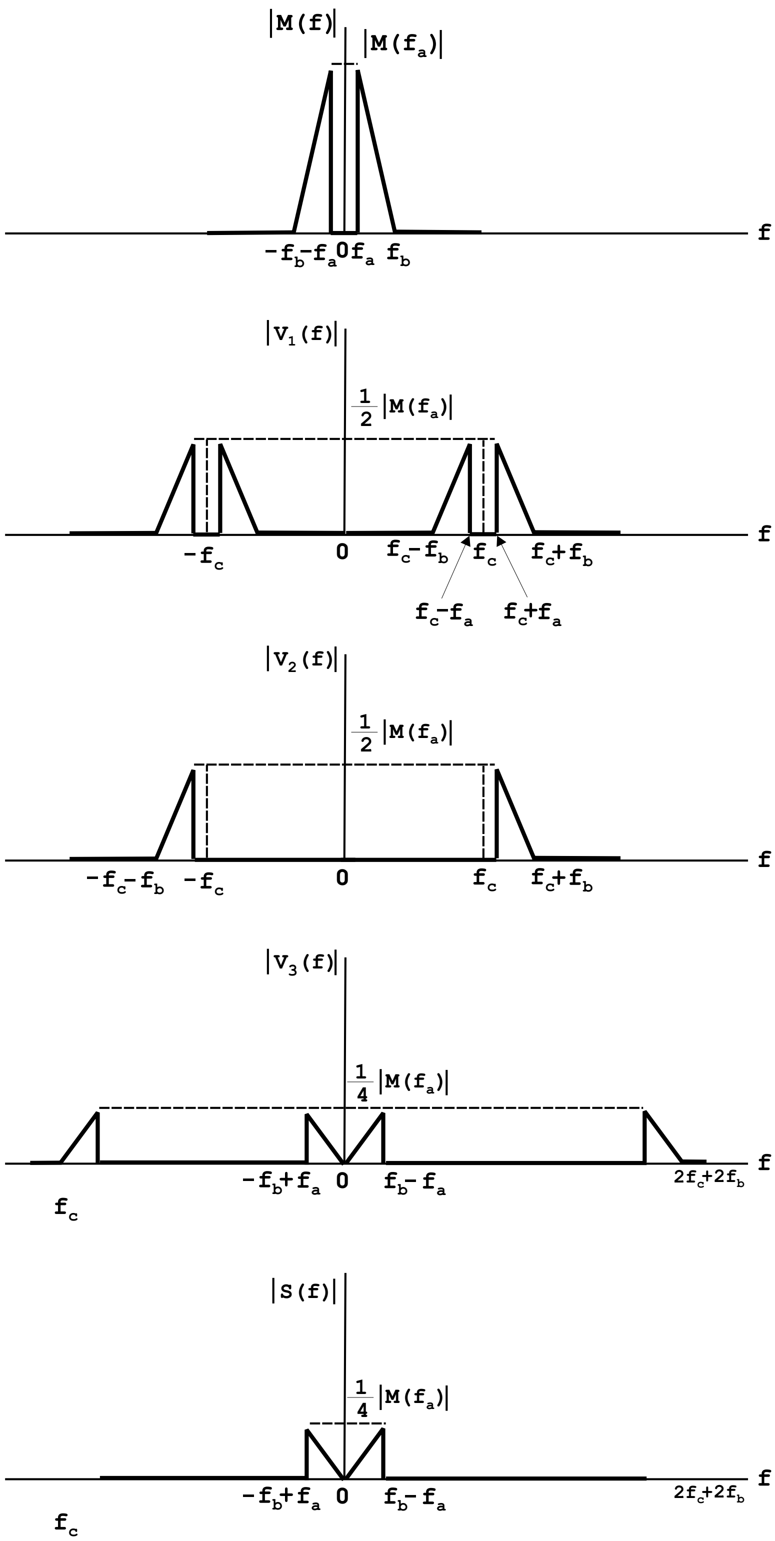
$$M_-(f) = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ 2M(f), & f < 0 \end{cases}$$

Συγκρίνοντας το φάσμα των $s(t)$ και $m(t)$, βλέπουμε πως το $s(t)$ μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση των $m_+(t)$ και $m_-(t)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{8}m_+(t)\exp(-j2\pi f_b t) + \frac{1}{8}m_-(t)\exp(j2\pi f_b t) \\ &= \frac{1}{8}[m(t) + j\widehat{m}(t)]\exp(-j2\pi f_b t) + \frac{1}{8}[m(t) - j\widehat{m}(t)]\exp(j2\pi f_b t) \\ &= \frac{1}{4}m(t)\cos(2\pi f_b t) + \frac{1}{4}\widehat{m}(t)\sin(2\pi f_b t) \end{aligned}$$

β) Έχοντας ως είσοδο το $s(t)$, η έξοδος του πρώτου product modulator είναι:

$$v_1(t) = s(t)\cos(2\pi f_c t)$$


|M(f)|
|M(f_a)|
f
-f_b -f_a 0 f_a f_b
|V_1(f)|
1/2 |M(f_a)|
f
-f_c
0
f_c-f_b
f_c
f_c+f_b
f_c-f_a
f_c+f_a
|V_2(f)|
1/2 |M(f_a)|
f
-f_c-f_b
-f_c
0
f_c
f_c+f_b
|V_3(f)|
1/4 |M(f_a)|
f
-f_b+f_a
0
f_b- f_a
2f_c+2f_b
f_c
|S(f)|
1/4 |M(f_a)|
f
-f_b+f_a
0
f_b- f_a
2f_c+2f_b
f_c

Σχήμα 4

5 Άσκηση

Το πολυπλεγμένο σήμα είναι:

$$s(t) = A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Γι' αυτό:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[M_1(f-f_c) + M_1(f+f_c)] + \frac{A_c}{2j}[M_2(f-f_c) - M_2(f+f_c)]$$

όπου $M_1(f) = \mathcal{F}[m_1(t)]$ και $M_2(f) = \mathcal{F}[m_2(t)]$. Επομένως, το φάσμα του λαμβανόμενου σήματος είναι:

$$\begin{aligned} R(f) &= H(f)S(f) \\ &= \frac{A_c}{2}H(f)[M_1(f-f_c) + M_1(f+f_c) + \frac{1}{j}M_2(f-f_c) - \frac{1}{j}M_2(f+f_c)] \end{aligned}$$

Προκειμένου να ανακτήσουμε το $m_1(t)$, πολλαπλασιάζουμε το $r(t)$, τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του $R(f)$, με $\cos(2\pi f_c t)$ και στη συνέχεια περνάμε την έξοδο που προκύπτει από ένα χαμηλοπερατό φίλτρο, με αποτέλεσμα να προκύψει ένα σήμα με το ακόλουθο φάσμα:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[r(t)\cos(2\pi f_c t)] &= \frac{1}{2}[R(f-f_c) + R(f+f_c)] \\ &= \frac{A_c}{4}H(f-f_c)[M_1(f-2f_c) + M_1(f) + \frac{1}{j}M_2(f-2f_c) - \frac{1}{j}M_2(f)] \\ &+ \frac{A_c}{4}H(f+f_c)[M_1(f+2f_c) \\ &+ M_1(f) - \frac{1}{j}M_2(f+2f_c) + \frac{1}{j}M_2(f)] \end{aligned} \tag{3}$$

Η συνθήκη $H(f_c+f) = H^*(f_c-f)$ είναι ισοδύναμη με την $H(f+f_c) = H(f-f_c)$. Αυτό προκύπτει από το ότι για μια κρουστική απόκριση $h(t)$ισχύει $H(-f) = H^*(f)$. Έτσι, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3), έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[r(t)\cos(2\pi f_c t)] &= \frac{A_c}{2}H(f-f_c)M_1(f) \\ &+ \frac{A_c}{4}H(f-f_c)[M_1(f-2f_c) + \frac{1}{j}M_2(f-2f_c) \\ &+ M_1(f+2f_c) - \frac{1}{j}M_2(f+2f_c)] \end{aligned}$$

Επομένως,η έξοδος του κατωπερατού φίλτρου έχει φάσμα ίσο με $(A_c/2)H(f-f_c)M_1(f)$.

Όμοια, προκειμένου να ανακτήσουμε το $m_2(t)$, πολλαπλασιάζουμε το $r(t)$ με $\sin(2\pi f_c t)$, και στη συνέχεια περνάμε το σήμα που προκύπτει από ένα χαμηλοπερατό φίλτρο. Σε αυτή την περίπτωση το σήμα εξόδου έχει φάσμα ίσο με $(A_c/2)H(f-f_c)M_2(f)$.

6 Άσκηση

Παρατηρούμε ότι $C(f) = M(f) * X(f)$. Από την υπόθεση σχετικά με τα φάσματα των $m(t)$ και $x(t)$ παρατηρούμε ότι το $C(f)$ αποτελέιται από δύο τμήματα για τις θετικές και τις αρνητικές συχνότητες αντίστοιχα, τα οποία δεν επικαλύπτονται. Τα τμήματα αυτά τα συμβολίζουμε με $C_+(f)$ και $C_-(f)$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι:

$$C_+(f) = M(f) * X_+(f)$$

και

$$C_-(f) = M(f) * X_-(f)$$

Για να βρούμε τον μετασχηματισμό Hilbert του $c(t)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\hat{c}(t)] &= -jsgn(f)C(f) \\
&= -jC_+(f) + jC_-(f) \\
&= -jM(f) * X_+(f) + jM(f) * X_-(f) \\
&= M(f) * [-jX_+(f) + jX_-(f)] \\
&= M(f) * [-jsgn(f)X(f)] \\
&= M(f) * \mathcal{F}[\hat{x}(t)]
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου, έχουμε:

$$\hat{c}(t) = m(t)\hat{x}(t)$$

7 Άσκηση

$$\begin{aligned}
x(t) = sinct \cos 2\pi f_0 t \quad &\Longrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}\Pi(f + f_0)) + \frac{1}{2}\Pi(f - f_0)) \\
h(t) = sinc^2 t \sin 2\pi f_0 t \quad &\Longrightarrow \quad H(f) = -\frac{1}{2j}\Lambda(f + f_0)) + \frac{1}{2j}\Lambda(f - f_0))
\end{aligned}$$

Τα lowpass equivalents είναι:

$$\begin{aligned}
X_l(f) &= 2u(f + f_0)X(f + f_0) = \Pi(f) \\
H_l(f) &= 2u(f + f_0)H(f + f_0) = \frac{1}{j}\Lambda(f) \\
Y_l(f) &= \frac{1}{2}X_l(f)H_l(f) = \begin{cases} \frac{1}{2j}(f+1) & -\frac{1}{2} < f \leq 0 \\ \frac{1}{2j}(-f+1) & 0 \leq f < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}
\end{aligned}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του $Y_l(f)$ βρίσκουμε τη lowpass equivalent απόκριση του συστήματος. Έτσι,

$$\begin{aligned} y_l(t) &= \mathcal{F}^{-1}[Y_l(f)] \\ &= \frac{1}{2j}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(f+1)e^{j2\pi ft}df + \frac{1}{2j}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-f+1)e^{j2\pi ft}df \\ &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j2\pi t}fe^{j2\pi ft} + \frac{1}{4\pi^2t^2}e^{j2\pi ft}\right]\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{2j}\frac{1}{j2\pi t}e^{j2\pi ft}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0} \\ &\quad -\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j2\pi t}fe^{j2\pi ft} + \frac{1}{4\pi^2t^2}e^{j2\pi ft}\right]\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2j}\frac{1}{j2\pi t}e^{j2\pi ft}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} \\ &= j\left[-\frac{1}{4\pi t}\sin\pi t + \frac{1}{4\pi^2t^2}(\cos\pi t - 1)\right] \end{aligned}$$

Η έξοδος του συστήματος $y(t)$ υπολογίζεται από $y(t) = Re[y_l(t)e^{j2\pi f_0 t}]$. Και

$$\begin{aligned} y(t) &= Re\left[(j[-\frac{1}{4\pi t}\sin\pi t + \frac{1}{4\pi^2t^2}(\cos\pi t - 1)])(\cos 2\pi f_0 t + j\sin 2\pi f_0 t)\right] \\ &= [\frac{1}{4\pi^2t^2}(1-\cos\pi t) + \frac{1}{4\pi t}\sin\pi t]\sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

8 Άσκηση

(α)

$$\tilde{r}(t) = h_{eq}(t) * \tilde{y}(t) \Rightarrow \tilde{R}(f) = H_{eq}(f)\tilde{Y}(f) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}(f) &= 2U(f+f_0)R(f+f_0) \\ &= 2U(f+f_0)H(f+f_0)Y(f+f_0) \\ &= 2\frac{2}{2}U(f+f_0)U(f+f_0)H(f+f_0)Y(f+f_0) \\ &= \frac{1}{2}\tilde{H}(f)\tilde{Y}(f) \end{aligned} \tag{5}$$

Από $(4), (5)$ έχουμε

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{2}\,\tilde{H}(f) \Rightarrow h_{eq}(t) = \frac{1}{2}\,\tilde{h}(t)$$

(β)

$$
\begin{aligned}
E_{\tilde{y}} &= \|\tilde{y}(t)\|^2 = \|\tilde{Y}(f)\|^2 = \|2U(f+f_0)Y(f+f_0)\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \big(2U(f+f_0)Y(f+f_0)\big)^2\, df \\
&= 4\int_{-\infty}^{\infty} \big(U(f+f_0)Y(f+f_0)\big)^2\, df \\
&= 4\int_{-f_0}^{\infty} \big(Y(f+f_0)\big)^2\, df = 4\int_{0}^{\infty} Y^2(u)\, du \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} Y^2(u)\, du = 2\|Y(u)\|^2 \\
&= 2\|y(t)\|^2 = 2\, E_y
\end{aligned}
$$