ΗΥ-430 Δεύτερη σειρά ασκήσεων

24 Νοεμβρίου 2003

1 Άσκηση

α) Η συνάρτηση συσχέτισης $R_{YX}(\tau)$ είναι

$$R_{YX}(\tau) = E[Y(t+\tau)X(t)]$$

Οι $Y(t)$ και $X(t)$ σχετίζονται ως εξής:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)h(t-u)du$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= E[\int_{-\infty}^{\infty} X(u)X(t)h(t+\tau-u)du] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-u)E[X(u)X(t)]du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-u)R_X(u-t)du \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $t+\tau-u$ με u, έχουμε:

$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_X(\tau-u)du$$

β) Αφού $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$, έχουμε:

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_X(-\tau-u)du$$

Επειδή η $R_X(\tau)$ είναι άρτια συνάρτηση του τ:

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_X(\tau+u)du$$

Αντικαθιστώντας το u με $-u$:

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(-u)R_X(\tau-u)du$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) \leftrightarrow S_{YX}(f) = S_{XX}(f)H(f)$$
$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h^*(-\tau) \leftrightarrow S_{XY}(f) = S_{XX}(f)H^*(f)$$

γ) Εάν η $X(t)$ είναι μια διαδικασία λευκού θορύβου με μηδενική μέση τιμή και φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$, έχουμε

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Γι΄ αυτό:

$$R_{YX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\delta(\tau - u)du$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ολίσθησης της συνάρτησης δέλτα:

$$R_{YX}(\tau) = \frac{N_0}{2}h(\tau)$$

Δηλαδή

$$h(t) = \frac{2}{N_0}R_{YX}(\tau)$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μετρήσουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου, εφαρμόζοντας ένα λευκό θόρυβο με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$ στην είσοδο του φίλτρου, παίρνοντας την ετεροσυσχέτιση της εξόδου του φίλτρου με την είσοδό του, και στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με $2/N_0$.

2 Άσκηση

Δίνεται ότι:

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$$

Για $x(t) = \delta(t)$, η κρουστική απόκριση του *running integrator* είναι εξ΄ ορισμού:

$$h(t) = \int_{t-T}^{t} \delta(\tau)d\tau = 1$$

για $t - T \leq 0 \leq t$, ή ισοδύναμα, $0 \leq t \leq T$

Αντίστοιχα, η απόκριση συχνότητας του *running integrator* είναι:

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)exp(-j2\pi ft)dt \\ &= \int_{0}^{T} exp(-j2\pi ft)dt \\ &= \frac{1}{j2\pi ft}[1 - exp(-j2\pi fT)] \\ &= Tsinc(fT)exp(-j\pi fT) \end{aligned}$$

Έτσι, η φασματική πυκνότητα ισχύος $S_Y(f)$ δίνεται από τη σχέση

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = T^2 sinc^2(fT) S_X(f)$$

3 Άσκηση

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] \\ &= A^2 E[\cos(2\pi Ft + 2\pi F\tau - \Theta)\cos(2\pi Ft - \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(4\pi Ft + 2\pi F\tau - 2\Theta) + \cos(2\pi F\tau)] \end{aligned}$$

Παίρνοντας το μέσο όρο ως προς Θ και παρατηρώντας πως το Θ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο $[0, 2\pi]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi F\tau)] \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_F(f) \cos(2\pi f\tau) df \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι η $R_X(\tau)$ σχετίζεται με τη φασματική πυκνότητα ισχύος με τη σχέση

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) cos(2\pi f\tau) df$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$S_X(f) = \frac{A^2}{2} f_F(f)$$

Όταν η συχνότητα παίρνει μια σταθερή τιμή π.χ. f_c, έχουμε:

$$f_F(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)$$

και

$$S_X(f) = \frac{A_2}{4}\delta(f - f_c) + \frac{A_2}{4}\delta(f + f_c)$$

4 Άσκηση

Έστω σ_X^2 η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X_k η οποία προέκυψε από την παρατήρηση της τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ σε χρονική στιγμή t_k. Η διασπορά σ_X^2 σχετίζεται με τη μέση τετραγωνική τιμή της X_k ως εξής:

$$\sigma_X^2 = E[X_k^2] - \mu_X^2$$

όπου $\mu_X = E[X_k]$. Αφού η διαδικασία $X(t)$ έχει μηδενική μέση τιμή,

$$\sigma_X^2 = E[X_k^2]$$

Επίσης:

$$E[X_k^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df$$

Έτσι, ορίζουμε τη διασπορά σ_X^2 ως το εμβαδό κάτω από την $S_X(f)$ ως εξής:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df$$

Έτσι, με τη μέση τιμή $\mu_X = 0$ και τη διασπορά ορισμένη από την προηγούμενη εξίσωση, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X_k ως εξής:

$$f_{X_k}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2})$$

5 Άσκηση

α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y(t_k)$ είναι:

$$f_{Y(t_k)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma_X}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma_X}), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[X^2(t_k)] - \{E[X(t_k)]\}^2 \\ &= E[X^2(t_k)] \\ &= R_X(0) \end{aligned}$$

Επομένως, η μέση τιμή της $Y(t_k)$ είναι:

$$\begin{aligned} E[Y(t_k)] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y(t_k)}(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_0^{\infty} \sqrt{y}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma_X^2})dy \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\frac{y}{\sigma_X^2} = u^2$$

και μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη εξίσωση ως:

$$\begin{aligned} E[Y(t_k)] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_X^2\int_0^{\infty} u^2\exp(-\frac{u^2}{2})du \\ &= \sigma_X^2 \\ &= R_X(0) \end{aligned}$$

β) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Y(t)$ είναι:

$$R_Y(\tau) = E[Y(t+\tau)Y(t)]$$

Αφού $Y(t) = X^2(t)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[X^2(t+\tau)X^2(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 x_2^2 f_{X(t_k+\tau),X(t_k)}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Οι $X(t_k+\tau)$ και $X(t_k)$ είναι από κοινού Gaussian, με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$f_{X(t_k+\tau),X(t_k)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}}\exp[-\frac{x_1^2 - 2\rho_X(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_X^2(1-\rho_X^2(\tau))}]$$

όπου $\sigma_X^2 = R_X(0)$,

$$\rho_X(\tau) = \frac{cov[X(t_k+\tau)X(t_k)]}{\sigma_X^2} = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

Ξαναγράφουμε την εξίσωση (1) στη μορφή:

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2\exp(-\frac{x_2^2}{2\sigma_X^2})g(x_2)dx_2 \qquad (2)$$

όπου

$$g(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \exp\{-\frac{[x_1-\rho_X(\tau)x_2]^2}{2\sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]}\}dx_1$$

Θέτουμε

$$u = \frac{x_1 - \rho_X(\tau)x_2}{\sigma_X\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}}$$

και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την $g(x_2)$ με τη μορφή:

$$g(x_2) = \sigma_X\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{u^2}{2})\{\rho_X^2(\tau)x_2^2 + \sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]u^2 + 2\sigma_X\rho_X\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}ux_2\}du$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{u^2}{2})du &= \sqrt{2\pi} \\ \int_{-\infty}^{\infty}u\exp(-\frac{u^2}{2})du &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}u^2\exp(-\frac{u^2}{2})du &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$g(x_2) = \sigma_X \sqrt{2\pi[1-\rho_X^2(\tau)]}\{\rho_X^2(\tau)x_2^2 + \sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]\}$$

Επομένως, από την εξίσωση (2):

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 \exp(-\frac{x_2^2}{2\sigma_X^2})\{\rho_X^2(\tau)x_2^2 + \sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]\}dx_2$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 \exp(-\frac{x_2^2}{2\sigma_X^2})dx_2 &= \sqrt{2\pi}\sigma_X^3 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_2^4 \exp(-\frac{x_2^2}{2\sigma_X^2})dx_2 &= 3\sqrt{2\pi}\sigma_X^5\end{aligned}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}R_Y(\tau) &= 3\sigma_X^4\rho_X^2(\tau) + \sigma_X^4[1-\rho_X^2(\tau)] \\ &= \sigma_X^4[1+2\rho_X^2(\tau)]\end{aligned}$$

Αφού

$$\sigma_X^2 = R_X(0), \rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}R_Y(\tau) &= R_X^2(0)[1+2\frac{R_X^2(\tau)}{R_X^2(0)}] \\ &= R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau)\end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση αυτομεταβλητότητας της $Y(t)$ είναι:

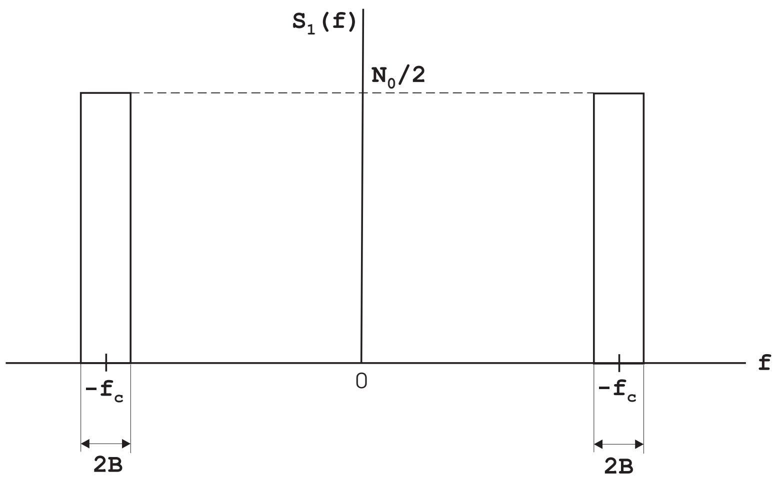
$$\begin{aligned}C_Y(\tau) &= R_Y(\tau) - \{E[Y(t_k)]\}^2 \\ &= R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau) - R_X^2(0) \\ &= 2R_X^2(\tau)\end{aligned}$$

6 Άσκηση

α) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου του φίλτρου είναι:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_W(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

Αφού $R_W(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$, η κρουστική απόκριση $h(t)$ του φίλτρου, πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:



Σχήμα 1

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\delta(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2
\end{aligned}
$$

β) Για να έχει η έξοδος του φίλτρου φασματική πυκνότητα ισχύος ίση με $S_X(f)$, θα πρέπει να επιλέξουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ του φίλτρου έτσι ώστε:

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

ή

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{2S_X(f)}{N_0}}$$

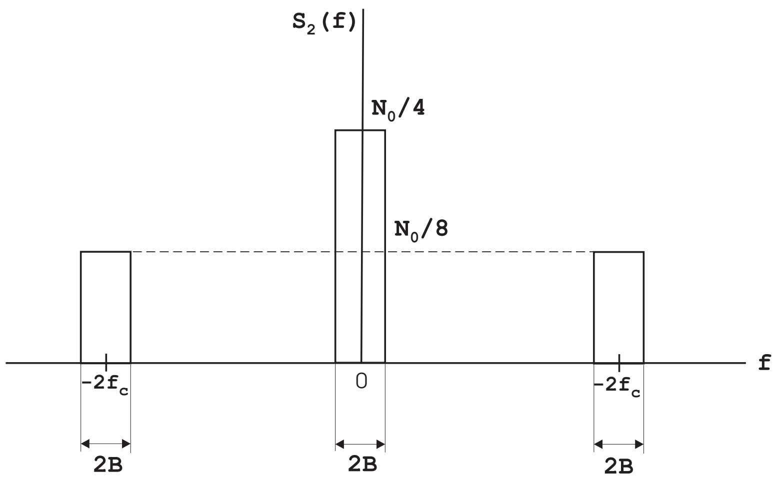
7 Άσκηση

α) Έστω $S_1(f)$ η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου την πρώτη έξοδο του φίλτρου. Η σχέση της $S_1(f)$ με τη συχνότητα φαίνεται στο σχήμα 1:

Έστω $S_2(f)$ φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου στην έξοδο του σχήματος. Έχουμε την εξής σχέση:

$$S_2(f) = \frac{1}{4}[S_1(f+f_c) + S_1(f-f_c)]$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 2:



Σχήμα 2

Έτσι, η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου $n(t)$ στην έξοδο του δεύτερου φίλτρου, ορίζεται από τη σχέση:

$$S_O(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{4}, & -B < f < B \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του θορύβου $n(t)$ είναι:

$$R_O(\tau) = \frac{N_0 B}{2} sinc(2B\tau)$$

β) Η μέση τιμή του θορύβου στην έξοδο του συστήματος είναι μηδέν. Έτσι, η διασπορά και η μέση τετραγωνική τιμή αυτού του θορύβου είναι ίδιες. Το συνολικό εμβαδό κάτω από την $S_O(f)$ είναι ίσο με $(N_0/4)(2B) = N_0B/2$. Επομένως, η διασπορά του θορύβου στην έξοδο του συστήματος είναι $N_0B/2$.

γ) Η μέγιστη συχνότητα με την οποία μπορούμε νε δειγματοληπτίσουμε την $n(t)$ έτσι ώστε τα δείγματα που θα προκύψουν να είναι ουσιαστικά ασυσχέτιστα είναι $2B$ δείγματα το δευτερόλεπτο.