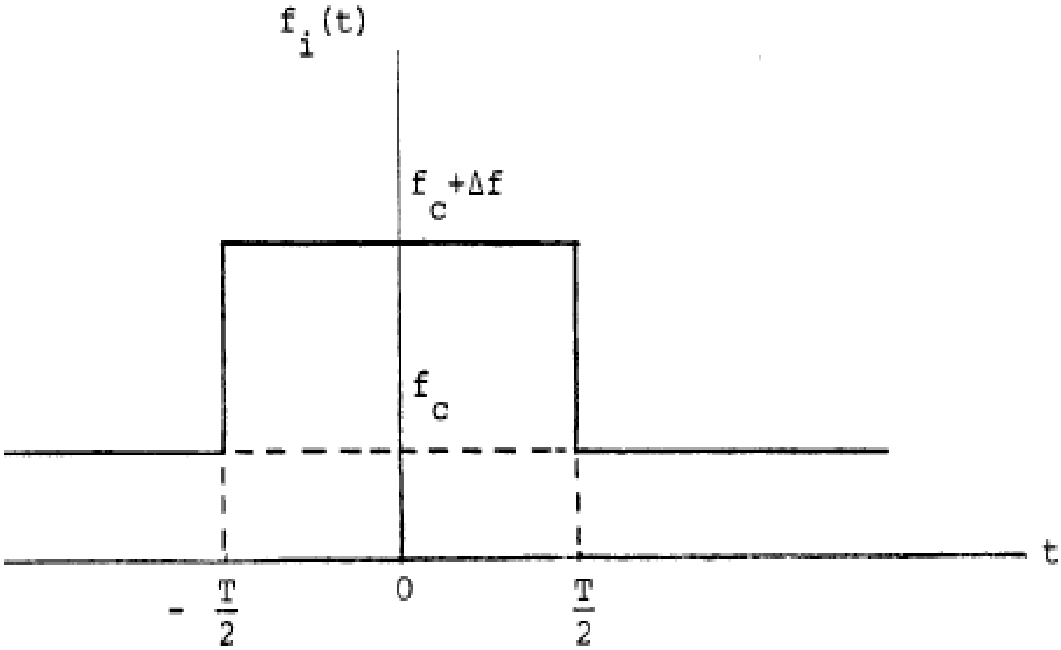
ΗΥ-430 Λύσεις Τέταρτης σειράς ασκήσεων

23 Νοεμβρίου 2003

1 Άσκηση

Η στιγμιαία συχνότητα του διαμορφωμένου σήματος $s(t)$ φαίνεται στην ακόλουθη γραφική παράσταση:



Μπορούμε επομένως να εκφράσουμε το $s(t)$ ως εξής:

$$s(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_c t), & t < -\frac{T}{2} \\ cos\big(2\pi(f_c + \Delta f)t\big), & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ \cos(2\pi f_c t), & \frac{T}{2} < t \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $s(t)$ δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
S(f) &= \int_{-\infty}^{-T/2} \cos(2\pi f_c t)\, e^{-j2\pi f t} dt \\
&+ \int_{-T/2}^{T/2} \cos\big(2\pi(f_c+\Delta f)t\big)\, e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t)\, e^{-j2\pi f t} dt \\
&+ \int_{-T/2}^{T/2} \big[\cos\big(2\pi(f_c+\Delta f)t\big) - \cos(2\pi f_c t)\big]\, e^{-j2\pi f t} dt \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος της εξ. (1) είναι η διαφορά ανάμεσα στους μετασχηματισμούς Fourier δύο RF παλμών μοναδιαίου πλάτους, ο ένας με συχνότητα $f_c+\Delta f$ και ο άλλος με συχνότητα f_c. Θεωρώντας ότι $f_c T \gg 1$ μπορούμε να εκφράσουμε το $S(f)$ ως ακολούθως:

$$S(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{T}{2} sinc[T(f-f_c-\Delta f)] - \frac{T}{2} sinc[T(f-f_c)], & f>0 \\ \frac{1}{2}\delta(f+f_c) + \frac{T}{2} sinc[T(f+f_c+\Delta f)] - \frac{T}{2} sinc[T(f+f_c)], & f<0 \end{cases}$$

2 Άσκηση

(α) Η περιβάλλουσα του FM σήματος $s(t)$ είναι

$$a(t) = A_c\sqrt{1+\beta^2\sin^2(2\pi f_m t)}$$

Η μέγιστη τιμή της περιβάλλουσας είναι

$$a_{max} = A_c\sqrt{1+\beta^2}$$

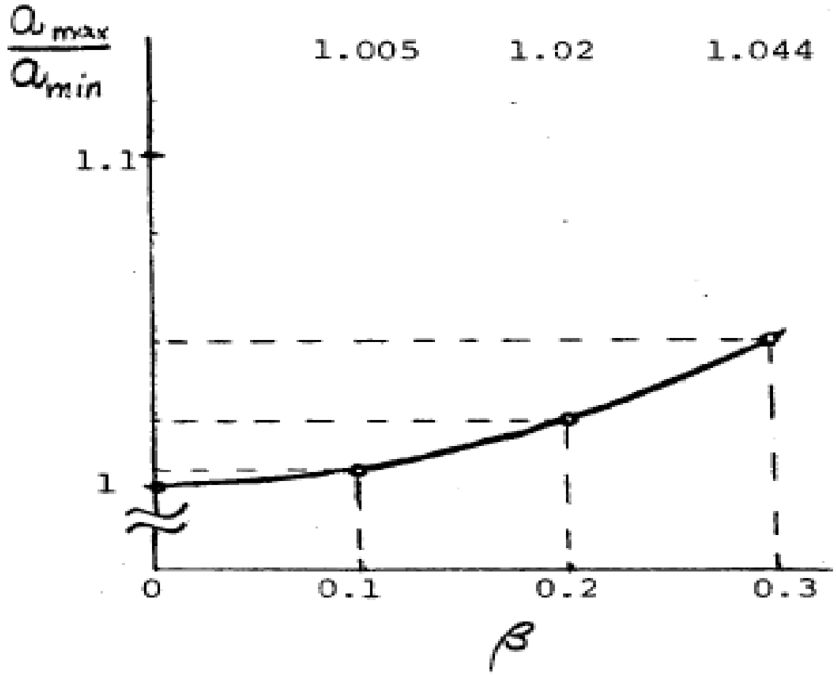
και η ελάχιστη

$$a_{min} = A_c$$

Επομένως,

$$\frac{a_{max}}{a_{min}} = \sqrt{1+\beta^2}$$

Η γραφική παράσταση για $0 \le \beta \le 0.3$ είναι:



(β) Εκφράζοντας το $s(t)$ στη μορφή

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\beta A_c \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \frac{1}{2}\beta A_c \cos[2\pi(f_c - f_m)t]$$

η μέση ισχύς του είναι

$$\begin{aligned} P1 &= \frac{A_c^2}{2} + \frac{\beta^2 A_c^2}{8} + \frac{\beta^2 A_c^2}{8} \\ &= \frac{A_c^2}{2}(1 + \frac{\beta^2}{2}) \end{aligned}$$

Η μέση ισχύς του μη-διαμορφωμένου φέροντος είναι

$$P_c = \frac{A_c^2}{2} \qquad (\beta = 0)$$

Άρα

$$\frac{P_1}{P_c} = 1 + \frac{\beta^2}{2}$$

(γ) Η γωνία $\theta_i(t)$, μπορεί να εκφραστεί ως προς την in-phase συνιστώσα $s_I(t)$ και την quadrature συνιστώσα $s_Q(t)$ ως εξής

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= 2\pi f_c t + tan^{-1}\big(\frac{s_Q(t)}{s_I(t)}\big) \\ &= 2\pi f_c t + tan^{-1}\big(\beta \sin(2\pi f_m t)\big) \end{aligned}$$

Από την υπόδειξη έχουμε

$$\theta_i(t) \simeq 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) - \frac{\beta^3}{3} \sin^3(2\pi f_m t)$$

3 Άσκηση

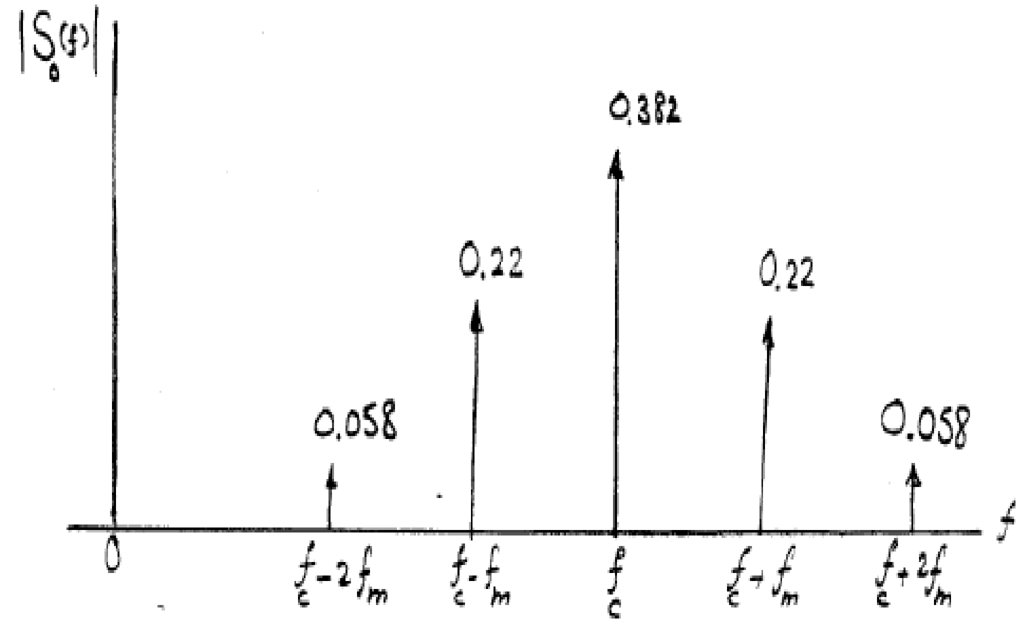
Για $\beta = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} J_0(1) &= 0.765 \\ J_1(1) &= 0.44 \\ J_2(1) &= 0.115 \end{aligned}$$

Η έξοδος του band-pass φίλτρου είναι

$$\begin{aligned} s_o(t) &= 0.765 \cos(2\pi f_c t) \\ &+ 0.44\big[\cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - f_m)t]\big] \\ &+ 0.115\big[\cos[2\pi(f_c + 2f_m)t] + \cos[2\pi(f_c - 2f_m)t]\big] \end{aligned}$$

και το πλάτος φάσματος (για θετικές συχνότητες) είναι



4 Άσκηση

(α) Το FM σήμα ορίζεται από

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t)dt]$$

Θεωρώντας ότι η f_c είναι μεγάλη συγκρινόμενη με το εύρος φάσματος του $s(t)$ μπορούμε να γράψουμε για τη μιγαδική περιβάλλουσα του $s(t)$:

$$\tilde{s}(t) = A_c\, e^{j2\pi k_f \int_0^t m(t)dt}$$

Εξ ορισμού το pre-envelope του $s(t)$ είναι

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \tilde{s}(t)\, e^{j2\pi f_c t} \\ &= s(t) + j\hat{s}(t) \end{aligned}$$

όπου $\hat{s}(t)$ είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του $s(t)$. Επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned} s(t) + j\hat{s}(t) &= A_c\, e^{j2\pi k_f \int_0^t m(t)dt}\, e^{j2\pi f_c t} \\ &= A_c\big(\cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t)dt] + j\sin[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_o^t m(t)dt]\big) \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη παίρνουμε

$$\hat{s}(t) = A_c\, \sin[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t)dt] \tag{2}$$

(β) Στην περίπτωση της ημιτονοειδούς διαμόρφωσης έχουμε

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

Το αντίστοιχο FM σήμα είναι

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

όπου $\beta = k_f A_m$. Αναπτύσσοντας το $s(t)$ σε σειρά Fourier παίρνουμε

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

Ο μετασχηματισμός Hilbert του $\cos[2\pi(f_c+nf_m)t]$ είναι $\sin[2\pi(f_c+nf_m)t]$ και από τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού Hilbert, βρίσκουμε το μετασχηματισμό Hilbert του $s(t)$,

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \sin[2\pi(f_c + n f_m)t] \\ &= A_c \sin[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \end{aligned}$$

Αυτό είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που πήραμε χρησιμοποιώντας την εξ. (1). Στην περίπτωση της ημιτονοειδούς διαμόρφωσης δεν υπάρχει λάθος στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert του αντίστοιχου FM χρησιμοποιώντας την εξ. (2).