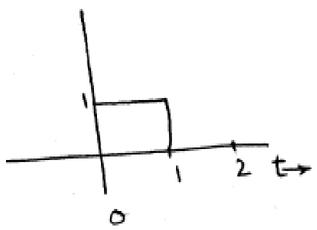
ΗΥ-430 Λύσεις Πρώτης σειράς ασκήσεων

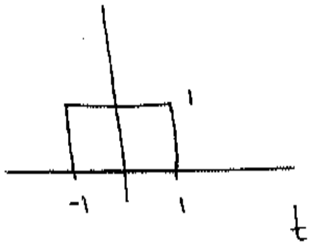
10 Νοεμβρίου 2003

1 Άσκηση

Η $h(t)$ παριστάνεται γραφικά ως:



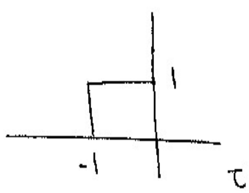
(α) η είσοδος $x_1(t)$ παριστάνεται γραφικά ως:

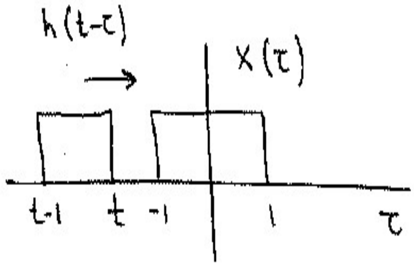


Για την έξοδο έχουμε,

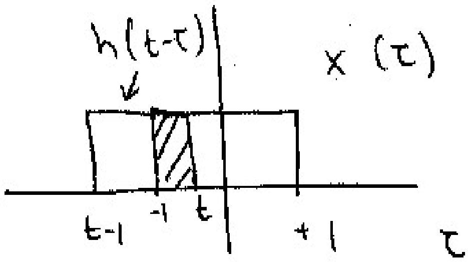
$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Γραφικά η συνέλιξη θα παρασταθεί ως εξής :
η $h(-\tau)$ δίνεται από την



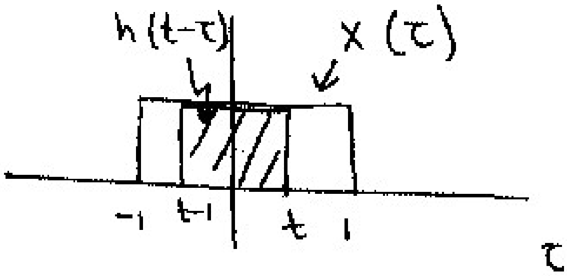


για $t < -1$ έχουμε $y_1(t) = 0$



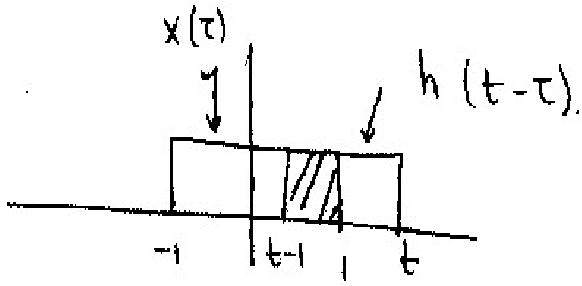
για $-1 \leq t \leq 0$,

$$y_1(t) = \int_{-1}^{t} 1\, d\tau = t + 1$$



για $0 < t \leq 1$,

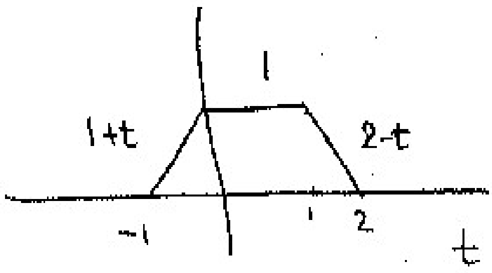
$$y_1(t) = \int_{t-1}^{t} 1\, d\tau = t - (t-1) = 1$$



για $t > 1$ & $t - 1 < 1 \;\Rightarrow\; 1 < t \leq 2$,

$$y_1(t) = \int_{t-1}^{1} 1\, d\tau = 1 - (t-1) = 2 - t$$

Τελικά η έξοδος $y_1(t)$ θα είναι η



(β) Ακολουθώντας ανάλογα βήματα με το (α) παίρνουμε για την έξοδο $y_2(t)$:
για $t \leq -1$, $y_2(t) = 0$
για $-1 < t \leq 0$,

$$y_2(t) = \int_{-1}^{t} 1\, dt = t + 1$$

για $0 < t \leq 1$,

$$y_2(t) = \int_{t-1}^{0} 1\, dt + \int_{0}^{t} -1\, dt = 1 - 2t$$

για $1 < t \leq 2$,

$$y_2(t) = \int_{t-1}^{1} -1\, dt = t - 2$$

για $t > 2$, $y_2(t) = 0$.

$$y_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ t+1, & -1 < t \leq 0 \\ 1-2t, & 0 < t \leq 1 \\ t-2, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

2 Άσκηση

(α)
(1)

$$\begin{aligned} x_3(t) = ax_1(t) &+ bx_2(t) \\ x_3(t) \Rightarrow y_3(t) &= \sin(ax_1(t+1) + bx_2(t+1)) \\ &\neq a\sin(x_1(t+1)) + b\sin(x_2(t+1)) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό
(2)

$$x_1(t) = x(t-1) \Rightarrow y_1(t) = \sin(x(t)) = y(t-1)$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο
(3) Το $y(t)$ εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι μη-αιτιατό
(4) Αν $|x(t)| < \infty$, τότε $|y(t)| < 1$ άρα το σύστημα είναι ευσταθές.
(β)
(1)

$$\begin{aligned} x_3(t) = ax_1(t) &+ bx_2(t) \\ x_3(t) \Rightarrow y_3(t) &= (ax_1(t-1) + bx_2(t-1))^2 \\ &= a^2x_1^2(t-1) + b^2x_2^2(t-1) + 2abx_1(t-1)x_2(t-1) \\ &\neq ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό
(2)

$$x_1(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_1(t) = (x(t-t_0-1))^2 = y(t-t_0)$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο
(3) Το $y(t)$ δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι αιτιατό
(4) Αν $|x(t)| < A$, τότε $|y(t)| < A^2$ άρα το σύστημα είναι ευσταθές.
(γ)
(1)

$$\begin{aligned} x_3(t) = ax_1(t) &+ bx_2(t) \\ y_3(t) &= \int_0^\infty [ax_1(t-\tau) + bx_2(t-\tau)]e^{-\tau}\, d\tau \\ &= a\int_0^\infty x_1(t-\tau)e^{-\tau}\, d\tau + b\int_0^\infty x_2(t-\tau)e^{-\tau}\, d\tau \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

άρα το σύστημα είναι γραμμικό
(2)

$$x_1(t) = x(t - t_0) \Rightarrow y_1(t) = \int_0^{\infty} x(t - t_0 - \tau)e^{-\tau}\, dt = y(t - t_0)$$

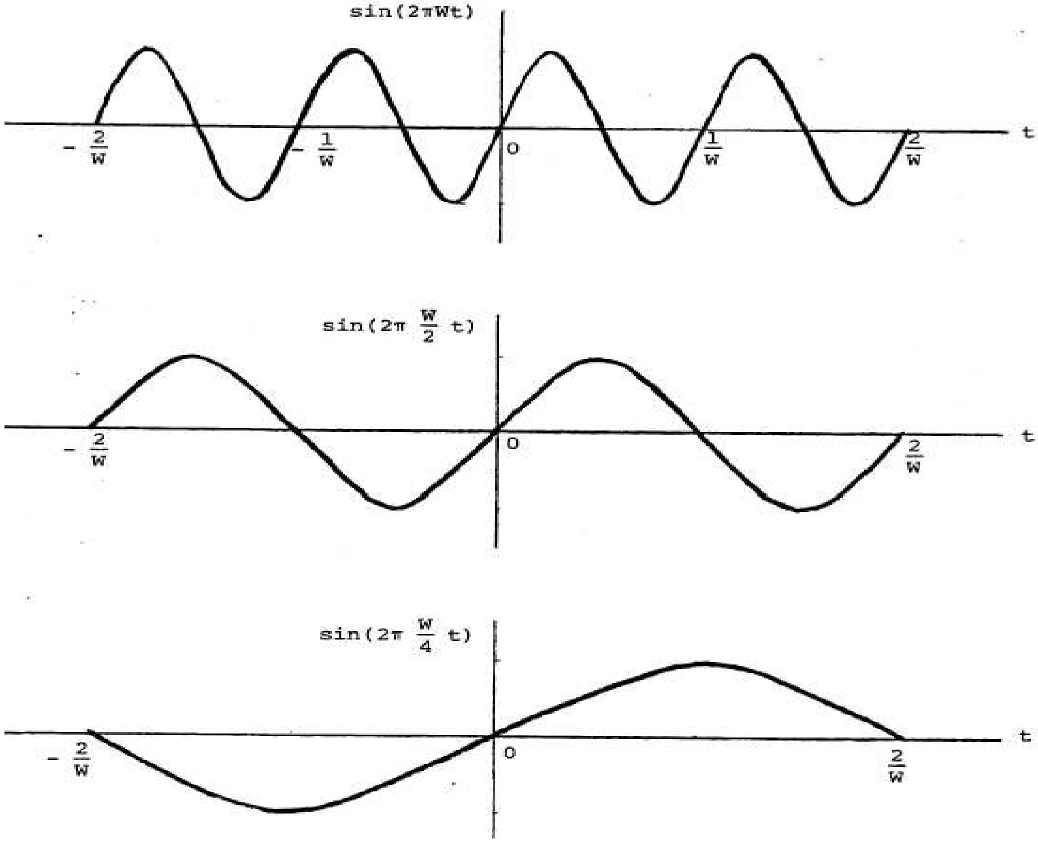
άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο
(3) Το $y(t)$ δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι αιτιατό
(4) Αν $|x(t)| < A$, τότε

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |\int_0^{\infty} (x(t-\tau))e^{-\tau}\, d\tau| \\ &< |\int_0^{\infty} A\, e^{-\tau}\, d\tau| \\ &= |A\int_0^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau| \\ &< |A| = A \end{aligned}$$

άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

3 Άσκηση

Θεωρούμε τρεις συγκεκριμένες πραγματοποιήσεις της $X(t)$ που αντιστοιχούν σε $f_c = W/4$, $W/2$, και W όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Για να δείξουμε ότι η $X(t)$ είναι μη-στάσιμη, χρειάζεται μόνο να παρατηρήσουμε ότι κάθε κυματομορφή (από τις παραπάνω) είναι 0 στο $t = 0$, θετική για $0 < t < 1/2W$, και αρνητική για $-1/2W < t < 0$. Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X(t_1)$ που προκύπτει παρατηρώντας τη $X(t)$ στο $t_1 = 1/4W$ είναι μηδέν για αρνητικές τιμές, ενώ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X(t_2)$ που προκύπτει παρατηρώντας τη $X(t)$ στο $t_2 = -1/4W$ είναι μη-μηδενική για αρνητικές τιμές μόνο. Συνεπώς,

$$f_{X(t_1)}(x) \neq f_{X(t_2)}(x)$$

και η $X(t)$ είναι μη-στάσιμη.

4 Άσκηση

$$X(t) = A\,\cos(2\pi f_c t)$$

Επομένως,

$$X_i = A\,\cos(2\pi f_c t_i)$$

Αφού το πλάτος A είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο, μπορούμε να γράψουμε,

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos(2\pi f_c t_i)}, & 0 \le x \le \cos(2\pi f_c t_i), \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ομοίως μπορούμε να γράψουμε

$$X_{i+\tau} = A\,\cos[2\pi f_c (t_i + \tau)]$$

και

$$f_{X_{i+\tau}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\cos[2\pi f_c (t_i+\tau)]}, & 0 \le y \le \cos[2\pi f_c (t_i + \tau)], \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Βλέπουμε επομένως ότι

$$f_{X_i}(x) \neq f_{X_{i+\tau}}(y)$$

και άρα η διαδικασία $X(t)$ είναι μη-στάσιμη.

5 Άσκηση

(α) Η μέση τιμή της $Z(t_1)$ είναι

$$E[Z(t_1)] = \cos(2\pi t_1)\,E[X] + \sin(2\pi t_1)\,E[Y]$$

Καθώς $E[X] = E[Y] = 0$, έχουμε ότι $E[Z(t_1)] = 0$. Ομοίως, βρίσκουμε ότι $E[Z(t_2)] = 0$. Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Cov[Z(t_1)Z(t_2)] &= E[Z(t_1)Z(t_2)] \\ &= E\{[X\,\cos(2\pi t_1) + Y\,\sin(2\pi t_1)][X\,\cos(2\pi t_2) + Y\,\sin(2\pi t_2)]\} \\ &= \cos(2\pi t_1)\,\cos(2\pi t_2)\,E[X^2] + [\cos(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2) + \sin(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)]E[XY] \\ &+ \sin(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2)E[Y^2] \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας τα παρακάτω

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sigma_X^2 + \{E[X]\}^2 = 1 \\ E[Y^2] &= \sigma_Y^2 + \{E[Y]\}^2 = 1 \\ E[XY] &= 0 \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} Cov[Z(t_1)Z(t_2)] &= \cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2) + \sin(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2) \\ &= \cos[2\pi(t_1 - t_2)] \end{aligned}$$

Η $Z(t)$ είναι Gaussian διαδικασία. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\sigma^2_{Z(t_1)} = E[Z^2(t_1)] = 1$$

Αυτό προκύπτει θέτοντας $t_1 = t_2$ στην παραπάνω σχέση. Ομοίως,

$$\sigma^2_{Z(t_2)} = E[Z^2(t_2)] = 1$$

Επομένως ο συντελεστής συσχέτισης των $Z(t_1)$ και $Z(t_2)$ είναι

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{Cov[Z(t_1)Z(t_2)]}{\sigma_{Z(t_1)}\sigma_{Z(t_2)}} \\ &= \cos[2\pi(t_1 - t_2)]\end{aligned}$$

Άρα η από κοινού pdf των $Z(t_1)$ και $Z(t_2)$ είναι

$$f_{Z(t_1),\,Z(t_2)}(z_1,\, z_2) = C\, e^{-Q(z_1,\, z_2)}$$

όπου

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \cos^2[2\pi(t_1 - t_2)]}} \\ &= \frac{1}{2\pi \sin[2\pi(t_1 - t_2)]}\end{aligned}$$

και

$$Q(z_1,\, z_2) = \frac{1}{2\sin^2[2\pi(t_1 - t_2)]}\{z_1^2 - 2\cos[2\pi(t_1 - t_2)]z_1 z_2 + z_2^2\}$$

(β) Παρατηρούμε ότι η συνδιασπορά των $Z(t_1)$ και $Z(t_2)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $t_1 - t_2$. Η $Z(t)$ είναι επομένως στάσιμη με την ευρεία έννοια. Και επειδή είναι Gaussian είναι επίσης στάσιμη με την αυστηρή έννοια.

6 Άσκηση

(α) Έστω

$$X(t) = A + Y(t)$$

όπου A είναι μια σταθερά και $Y(t)$ είναι μια τυχαία διαδικασία με μέση τιμή μηδέν. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t)$ είναι

$$\begin{aligned}R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] \\ &= E\{[A + Y(t+\tau)][A + Y(t)]\} \\ &= E[A^2 + A\,Y(t+\tau) + A\,Y(t) + Y(t+\tau)\,Y(t)] \\ &= A^2 + R_Y(\tau)\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι η $R_X(\tau)$ περιέχει μια σταθερή συνιστώσα ίση με A^2.
(β) Έστω

$$X(t) = A\,\cos(2\pi f t + \theta) + Z(t)$$

όπου $A\cos(2\pi f t + \theta)$ την ημιτονοειδή συνιστώσα της $X(t)$ και θ είναι μια τυχαία φάση. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t)$ είναι

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] \\
&= E\{[A\cos(2\pi f t + 2\pi f \tau + \theta) + Z(t+\tau)][A\cos(2\pi f t + \theta) + Z(t)]\} \\
&= E[A^2\cos(2\pi f t + 2\pi f\tau + \theta)\cos(2\pi f t + \theta)] \\
&+ E[Z(t+\tau)\,A\,\cos(2\pi f t + \theta)] \\
&+ E[A\,\cos(2\pi f t + 2\pi f \tau + \theta)Z(t)] \\
&+ E[Z(t+\tau)Z(t)] \\
&= (A^2/2)\,\cos(2\pi f \tau) + R_Z(\tau)
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι η $R_X(\tau)$ περιέχει μια ημιτονοειδή συνιστώσα ίδιας συχνότητας με αυτή της $X(t)$.

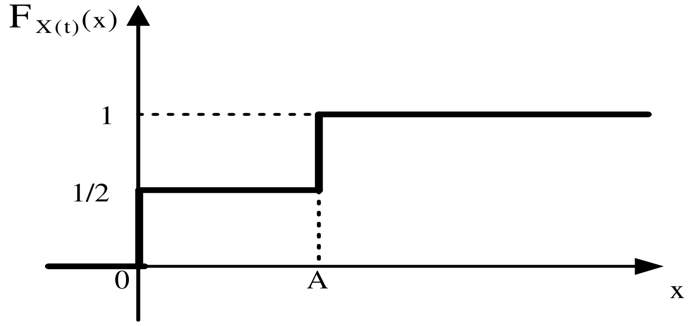
7 Άσκηση

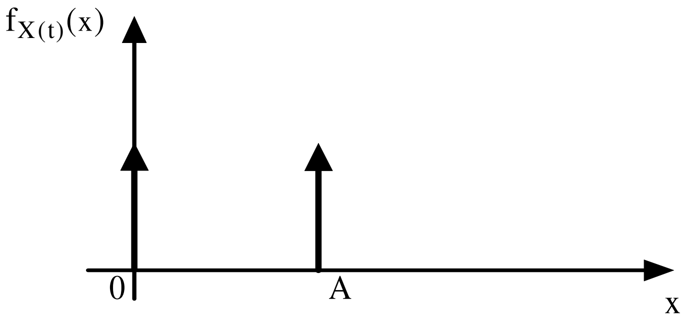
(α) Η συνάρτηση κατανομής της $X(t)$ είναι

$$F_{X(t)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x \le A \\ 1, & x > A \end{cases}$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x - A)$$





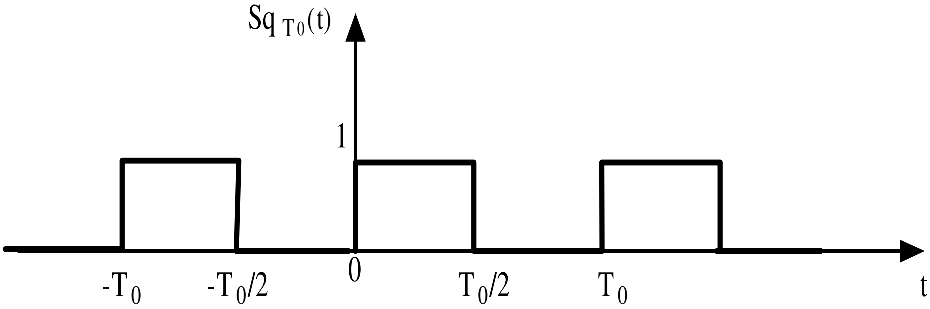
(β) Με χρήση στατιστικής μέσης τιμής έχουμε

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X(t)}(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, [\frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-A)]\, dx \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t)$ είναι

$$R_X(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)]$$

Ορίζουμε την τετραγωνική συνάρτηση $Sq_{T_0}(t)$ όπως φαίνεται παρακάτω:



Τότε έχουμε :

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[(A \cdot Sq_{T_0}(t - t_d + \tau)) \cdot (A \cdot Sq_{T_0}(t - t_d))] \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} Sq_{T_0}(t - t_d + \tau) Sq_{T_0}(t - t_d) f_{T_d}(t_d)\, dt_d \\ &= A^2 \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} Sq_{T_0}(t - t_d + \tau) Sq_{T_0}(t - t_d) \cdot \frac{1}{T_0}\, dt_d \\ &= \frac{A^2}{2}(1 - 2\frac{|\tau|}{T_0}), \qquad |\tau| \le \frac{T_0}{2}. \end{aligned}$$

Και αφού το τετραγωνικό κύμα είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T_0, η $R_X(\tau)$ πρέπει επίσης να είναι περιοδική με περίοδο T_0.
(γ) Με χρήση χρονικής μέσης τιμής (και από τη γραφική παράσταση της κατανομής) έχουμε για τη μέση τιμή:

$$< x(t) >= \frac{A}{2}$$

οπότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η οποία δίνεται από τη σχέση,

$$< x(t+\tau)x(t) >= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)x(t)\,dt$$

έχει μέγιστη τιμή $\frac{A^2}{2}$ στο $\tau = 0$, και φθίνει γραμμικά στο μηδέν στο $\tau = \frac{T_0}{2}$. Επομένως,

$$< x(t+\tau)x(t) >= \frac{A^2}{2}(1 - 2\frac{|\tau|}{T_0}), \qquad |\tau| \leq \frac{T_0}{2}.$$

Και πάλι η αυτοσυσχέτιση πρέπει να είναι περιοδική με περίοδο T_0.