ΗΥ 380 – Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

1η Σειρά ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/02/2026 στο elearn

Υπεύθυνος βοηθός για το Σετ 1:

Ξηραδάκης Ιωάννης, csdp1453@csd.uoc.gr

Άσκηση 1: Σύγκριση χρόνων εκτέλεσης

Για κάθε συνάρτηση $f(n)$ και για κάθε χρονικό διάστημα t που παρατίθεται στον παρακάτω πίνακα, προσδιορίστε το μέγιστο μέγεθος n του προβλήματος που μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο t, υποθέτοντας ότι ο αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα απαιτεί χρόνο $f(n)$ μικροδευτερόλεπτα. (1 microsecond = 10^{-6} second).

	1 δευτερόλεπτο	1 λεπτό	1 ώρα	1 ημέρα	1 μήνας	1 έτος	1 αιώνας
$\lg(n)$							
$\sqrt{n}$							
n							
$n\lg(n)$							
n^2							
n^3							
2^n							
$n!$							

Άσκηση 2

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, δείξτε ότι όταν το n είναι κάποια δύναμη του 2, η λύση της αναδρομικής σχέσης

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{εάν} \quad n = 2 \\ 2T(n/2) + n & \text{εάν} \quad n = 2^k \end{cases} \quad , \text{για } k > 1$$

είναι $T(n) = n\lg(n)$.

Άσκηση 3: Ορθότητα του κανόνα του Horner

Το ακόλουθο τμήμα κώδικα υλοποιεί τον κανόνα του Horner για την αποτίμηση ενός πολυωνύμου.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + xa_n)\ldots)),$$

όπου δίδονται οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ και μια τιμή του x :

1 $y \leftarrow 0$
2 $i \leftarrow n$
3 **while** $i \geq 0$
4 $\quad y \leftarrow a_i + x \cdot y$
5 $\quad i \leftarrow i - 1$

a'. Ποιος είναι ο ασυμπτωτικός χρόνος εκτέλεσης αυτού του τμήματος κώδικα για τον κανόνα του Horner;

b'. Γράψτε ψευδοκώδικα για την υλοποίηση του απλού αλγορίθμου αποτίμησης πολυωνύμου ο οποίος υπολογίζει κάθε όρο του πολυωνύμου ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσής του; Συγκρίνετέ τον με τον αντίστοιχο χρόνο για τον κανόνα του Horner.

c'. Αποδείξτε ότι η ακόλουθη σχέση εκφράζει μια αναλλοίωτη συνθήκη για τον βρόχο **while** στις γραμμές 3-5.

Στην αρχή της κάθε επανάληψης του βρόχου **while** στις γραμμές 3-5

$$y = \sum_{k=0}^{n-(i+1)} a_{k+i+1} x^k$$

Στην παραπάνω σχέση, υπονοείται ότι μια άθροιση χωρίς κανέναν όρο δίνει αποτέλεσμα 0. Η απόδειξή σας θα πρέπει να βασίζεται στη δομή της απόδειξης αναλλοίωτων συνθηκών, και θα πρέπει τελικά να καταλήγει στο συμπέρασμα ότι κατά τον τερματισμό του βρόχου $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

d'. Τέλος, δείξτε ότι το δεδομένο τμήμα του κώδικα αποτιμά ορθά ένα πολυώνυμο με συντελεστές $a_0, a_1, ..., a_n$.

Άσκηση 4: Σχετική ασυμπτωτική αύξηση

Για κάθε ζεύγος εκφράσεων (A, B) τον παρακάτω πίνακα, προσδιορίστε αν το A έχει αυξητικό χαρακτήρα O, o, Ω, ω, ή Θ του B. Υποθέστε ότι οι ποσότητες $k \geq 1$, $\varepsilon > 0$, και $c > 1$ είναι σταθερές. Απαντήστε καταχωρίζοντας «ναι» ή «όχι» σε κάθε τετραγωνίδιο του πίνακα.

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k(n)$	n^ε					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin(n)}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg(c)}$	$c^{\lg(n)}$					
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

Άσκηση 5: Διάταξη κατά ασυμπτωτικό ρυθμό αύξησης

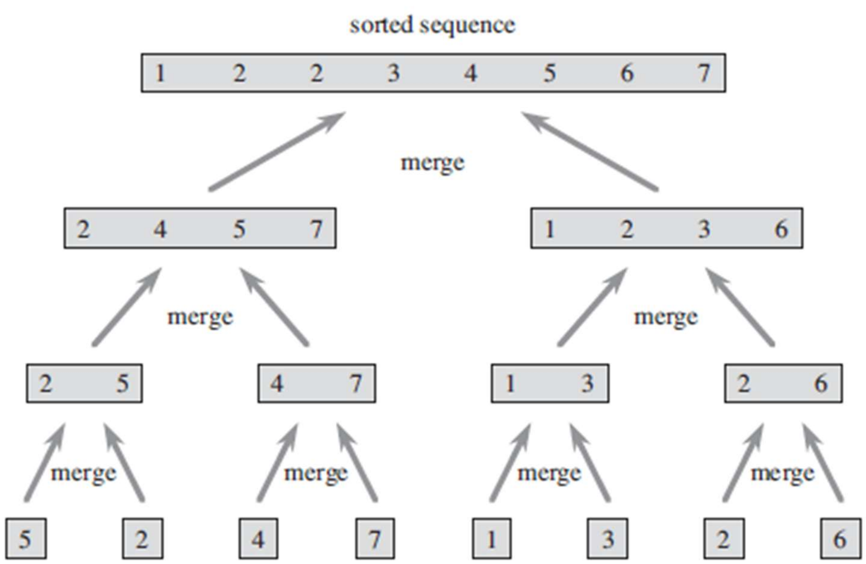
a'. Διατάξτε τις ακόλουθες συναρτήσεις με βάση τον αυξητικό τους χαρακτήρα. Δηλαδή βρείτε μια διάταξη $g_1, g_2, ..., g_{30}$ των συναρτήσεων η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, ... , $g_{29} = \Omega(g_{30})$. Διαμερίστε την λίστα που θα προκύψει σε κλάσεις ισοδυναμίας τέτοιες ώστε οι $f(n)$ και $g(n)$ να ανήκουν στην ίδια κλάση όταν και μόνο όταν $f(n) = \Theta(g(n))$.

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$(\frac{3}{2})^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

b'. Αναφέρετε ένα παράδειγμα μη αρνητικής συνάρτησης $f(n)$ τέτοιας ώστε για όλες τις συναρτήσεις $g_i(n)$ στο υποερώτημα *α'*), η $f(n)$ να μην έχει χαρακτήρα ούτε $O(g_i(n))$ ούτε $\Omega(g_i(n))$.

Άσκηση 6: Συγχωνευτική Ταξινόμηση

Χρησιμοποιώντας σαν υπόδειγμα την εικόνα 1, περιγράψτε σχηματικά τη λειτουργία της συγχωνευτικής ταξινόμησης στην συστοιχία A= {3,41,52,26,38,57,9,49}



Εικόνα 1: Η λειτουργία της συγχωνευτικής ταξινόμησης στην συστοιχία A={5,2,4,7,1,3,2,6} Τα μήκη των συγχωνευόμενων ταξινομημένων ακολουθιών αυξάνονται διαδοχικά καθώς ο αλγόριθμος προχωρά σταδιακά από τη βάση προς την κορυφή.

Άσκηση 7: Ιδιότητες ασυμπτωτικού συμβολισμού

Έστω $f(n)$ και $g(n)$ ασυμπτωτικά θετικές συναρτήσεις. Αποδείξτε ή καταρρίψτε

καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις.

a'. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $g(n) = O(f(n))$.

b'. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$.

c'. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$, όπου $\lg(g(n)) \geq 1$ και

$f(n) \geq 1$ από κάποια τιμή του n και πάνω.

d'. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

e'. $f(n) = O((f(n))^2)$.

f'. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $g(n) = \Omega(f(n))$.

g'. $f(n) = \Theta(f(n/2))$.

h'. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.