

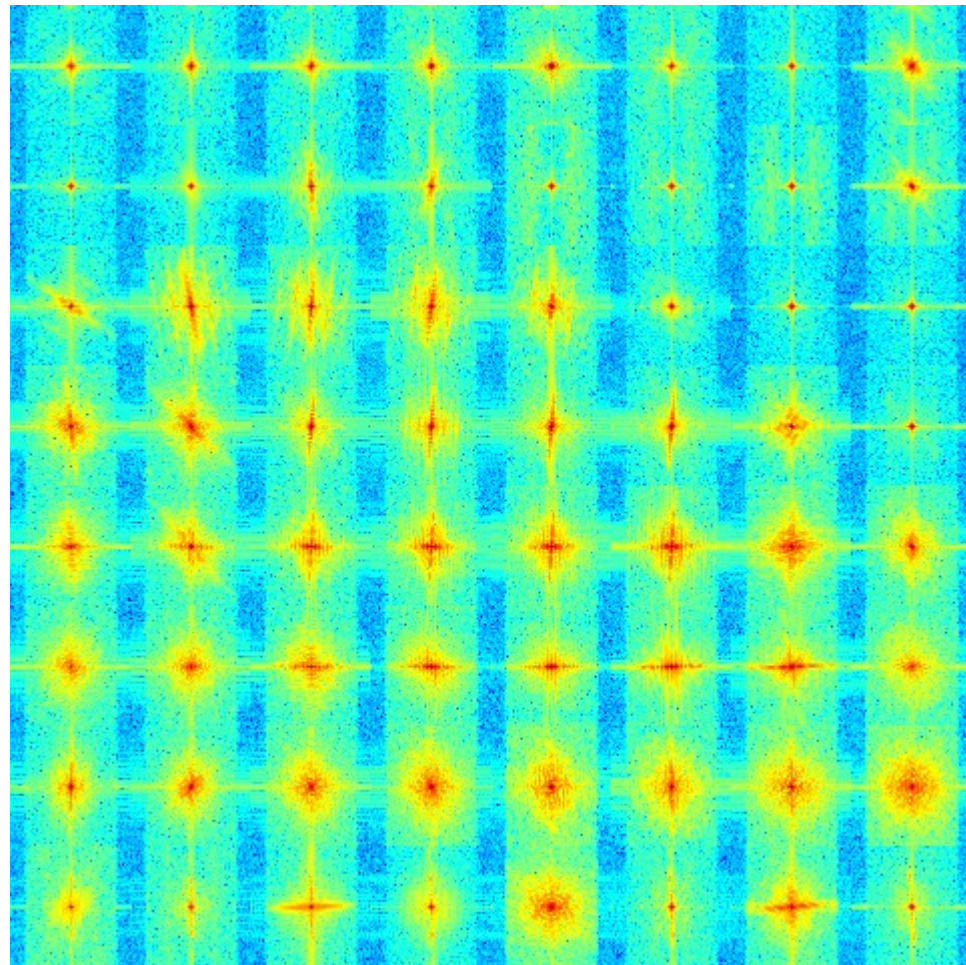
Κυματιδιακός μετασχηματισμός

Διαχωρισμός σε σήματα αντίστοιχα ζωνών συχνοτήτων
Μη στάσιμα χαρακτηριστικά σημάτων

Ανάλυση σημάτων γεωφυσικής
Ανάλυση εικόνων σε πολλές κλίμακες
Συμπύεση σημάτων μέσω ανάλυσης σε ζώνες συχνοτήτων

Γραμμικά συστήματα (διαχωρίσιμα)
Υπο/Υπερ-δειγματοληψία

Τοπικός μετασχηματισμός Fourier Μετασχηματισμός Gabor

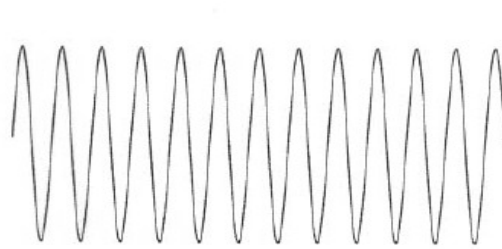
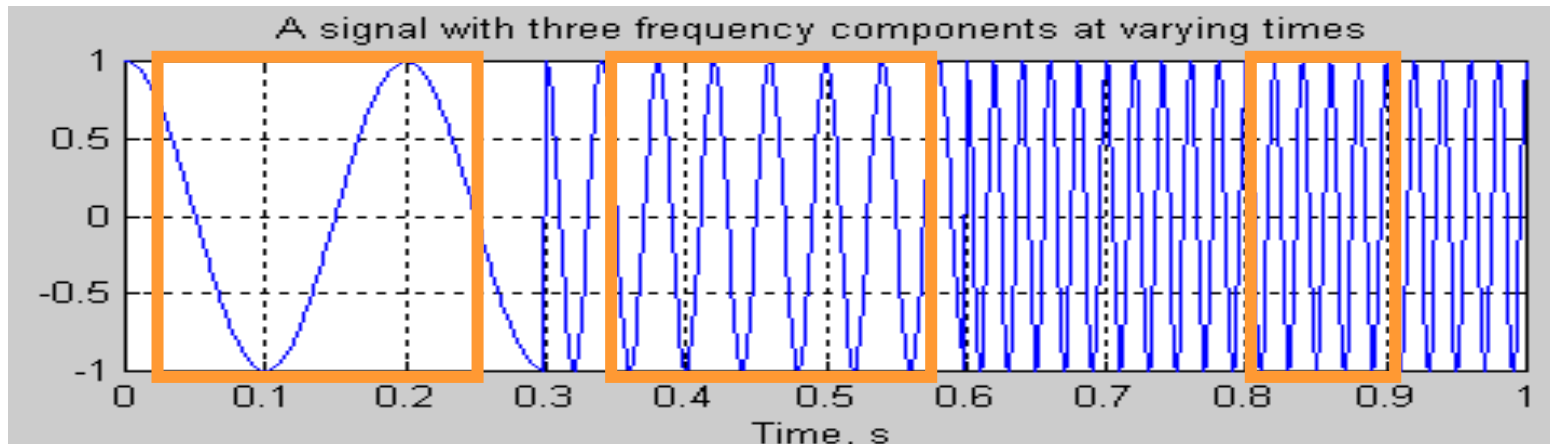


$$STFT(\tau, u) = \int f(t) g(t - \tau) e^{-2j\pi ut} dt$$

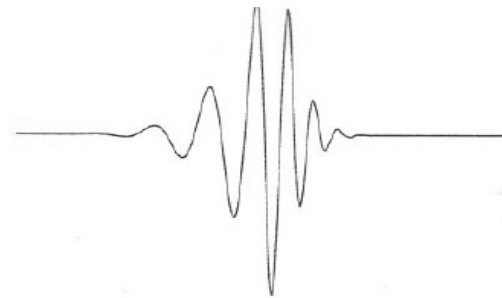
Gauss

Τοπικός μετασχηματισμός

Διάρκεια / έκταση και συχνότητα



'Καθαρή' συχνότητα



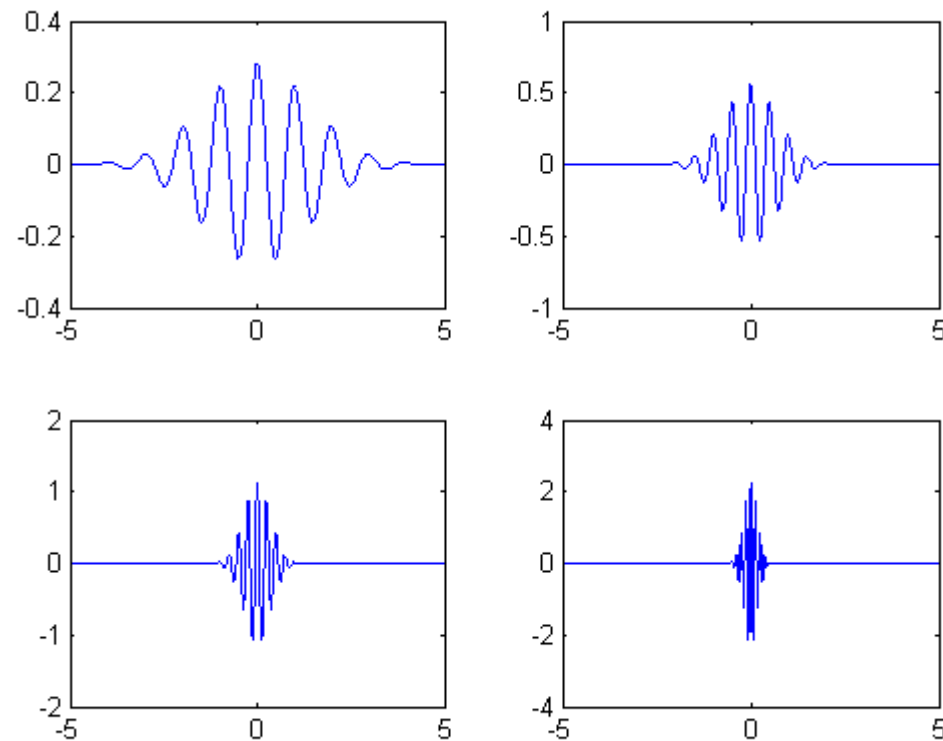
Κυματίδιο

Μετασχηματισμός Gabor

Ανάλυση στο χώρο
και στη συχνότητα

$$\frac{\Delta u}{u} = c$$

$$\Delta t \Delta u = q$$



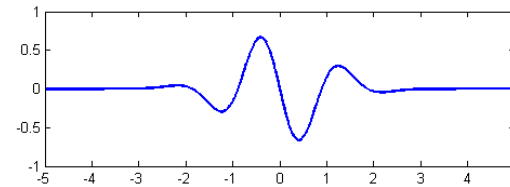
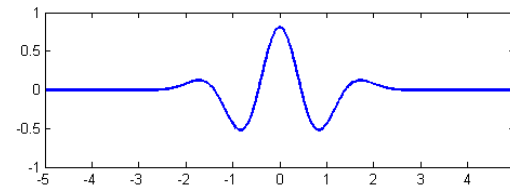
$$G_{\sigma}(t) = c \exp \left(2 j \pi u t - \frac{t^2}{2 \sigma^2} \right)$$

Κυματίδια

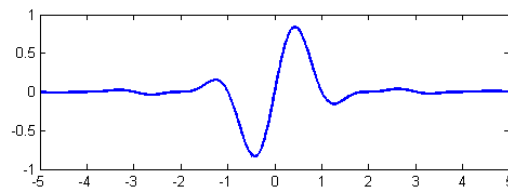
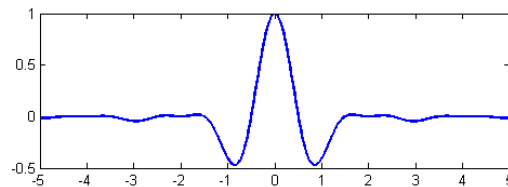
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathcal{R}^+ \quad \mathbf{a : κλίμακα}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \Psi(0) = 0$$

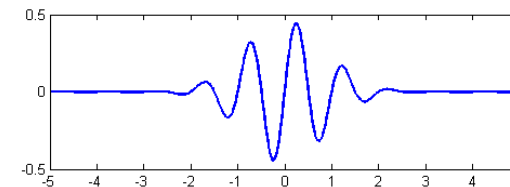
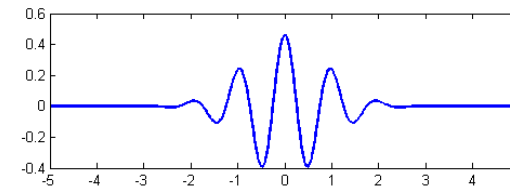
Μιγαδικά κυματίδια



Gabor

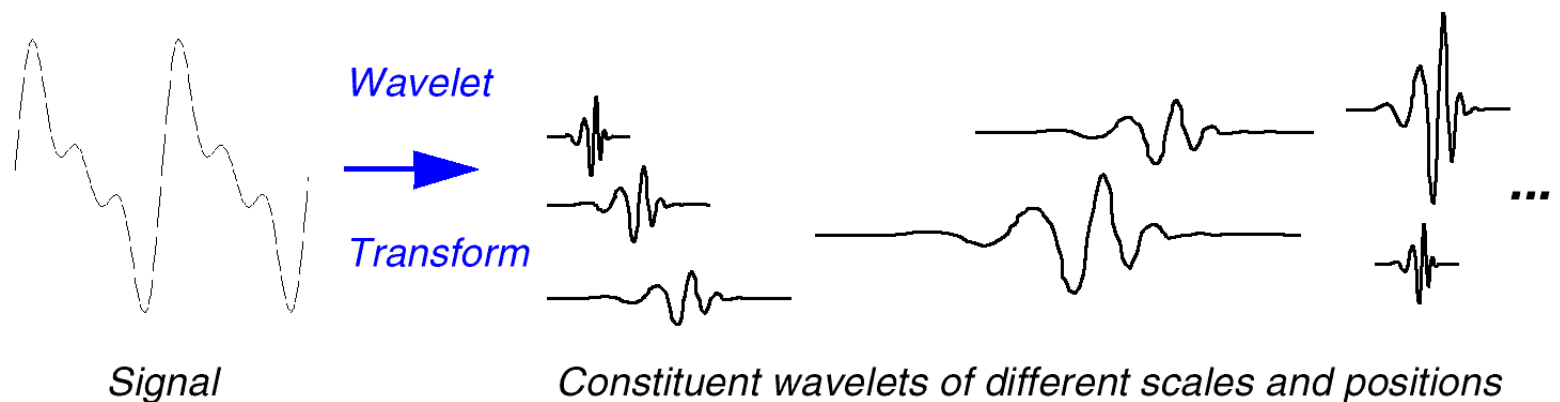
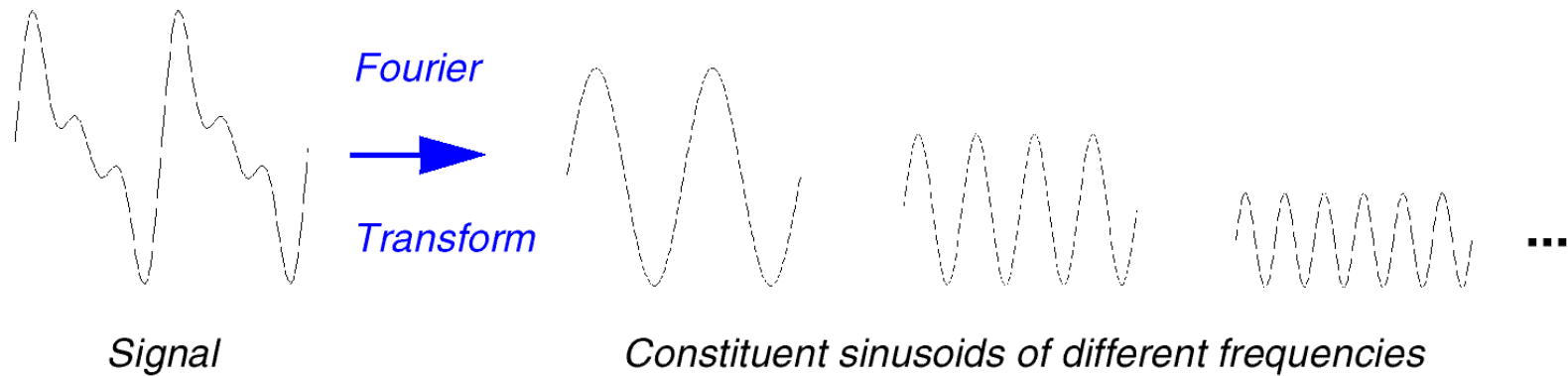


B-spline



Morlet

Κυματίδια και ημιτονοειδή

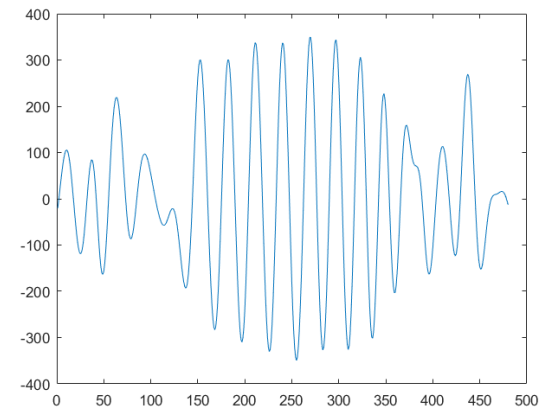
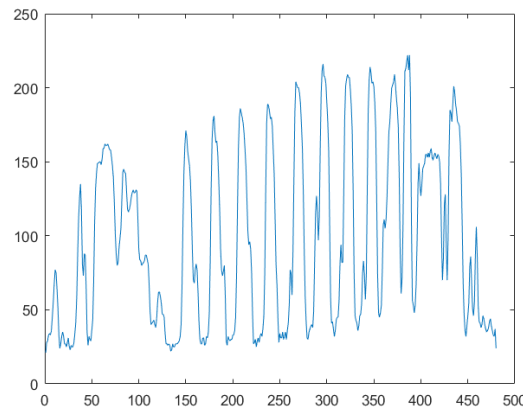


Ταυτόχρονος εντοπισμός θέσης και κλίμακας (μορφή μεταβολών)
Καλύτερη αναπαράσταση ασυνεχειών

Συνεχής κυματιδιακός μετασχηματισμός

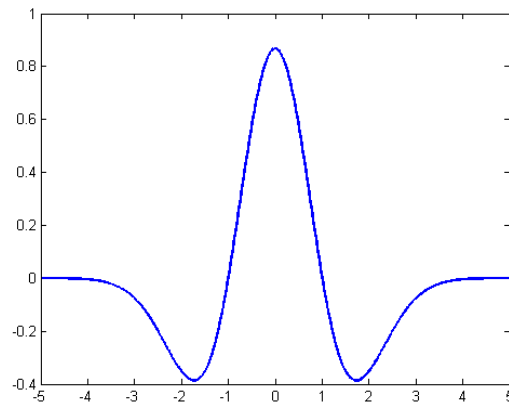
Δεύτερη παράγωγος Gauss
'Μεξικάνικο καπέλο'

$$\psi(t) = c (1-t^2) \exp(-t^2/2)$$

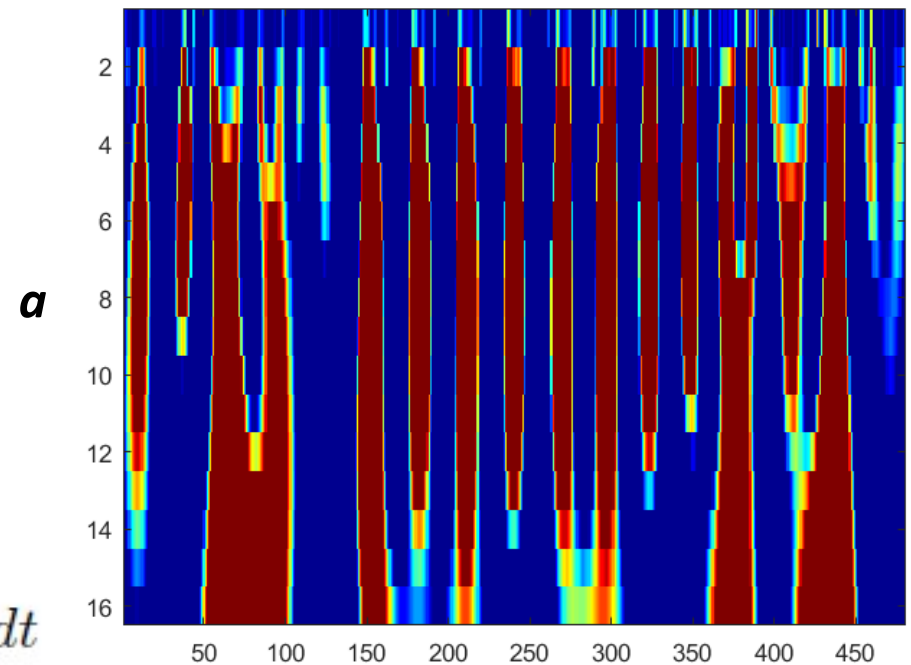


$a = 8$

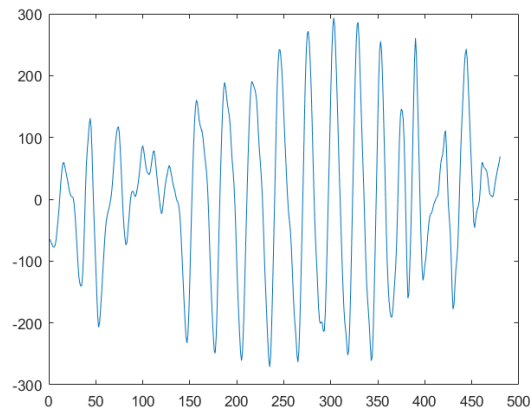
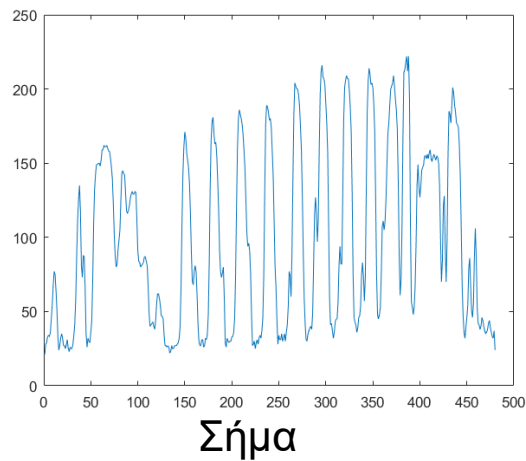
Σήμα



$$CWT_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathcal{R}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) f(t) dt$$

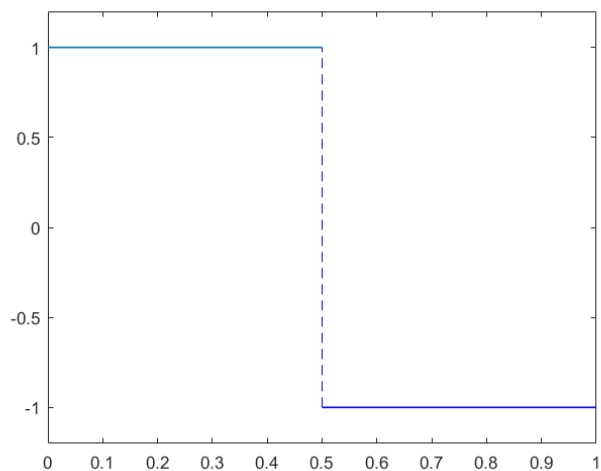


Συνεχής κυματιδιακός μετασχηματισμός

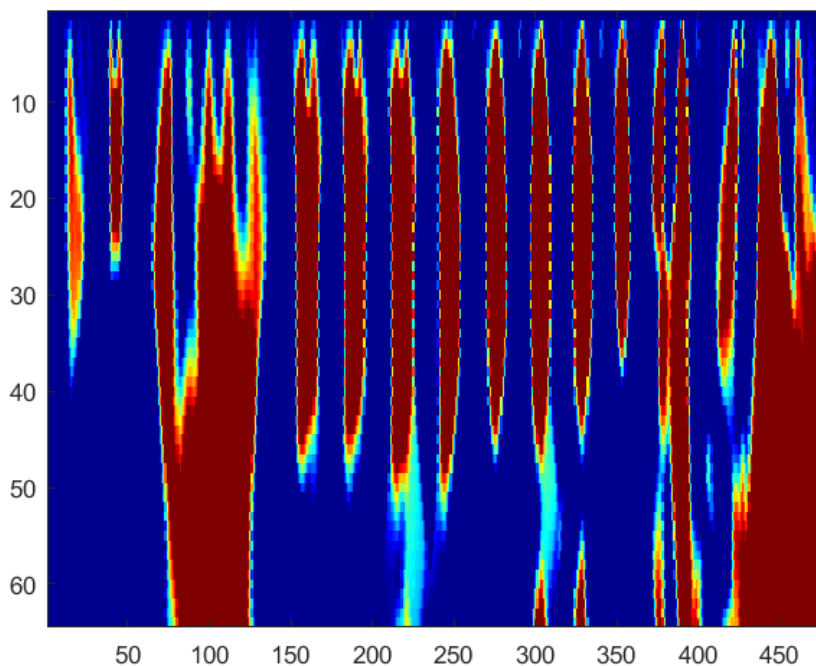


$a = 16$

Κυματίδιο Haar



a

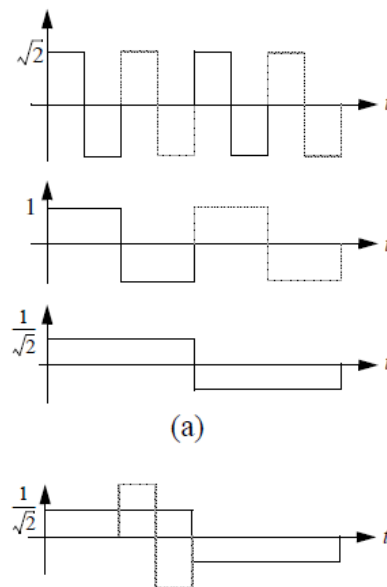


Κυματιδιακή σειρά

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right), \quad a \in \mathcal{R}^+$$

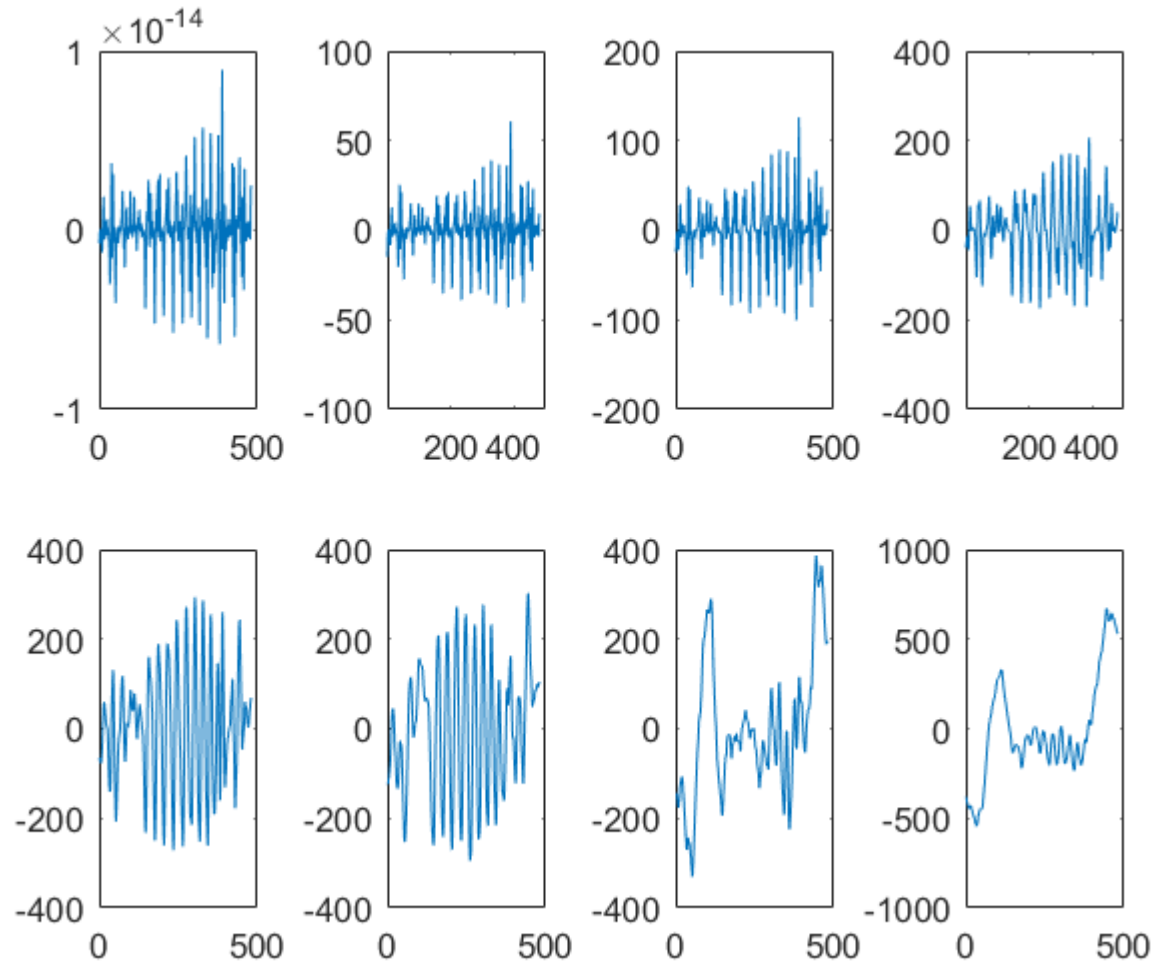
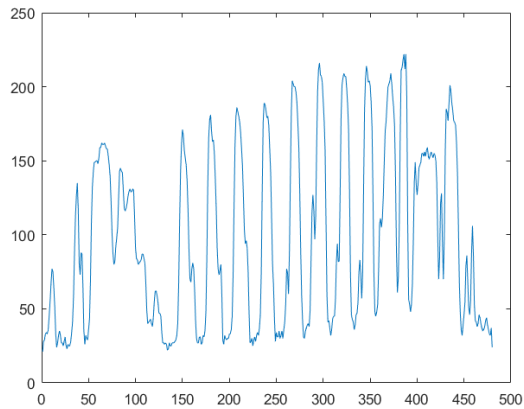
$$a = a_0^{-m} \quad b = n b_0 a_0^{-m} \quad a_0 = 2, b_0 = 1$$

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n)$$



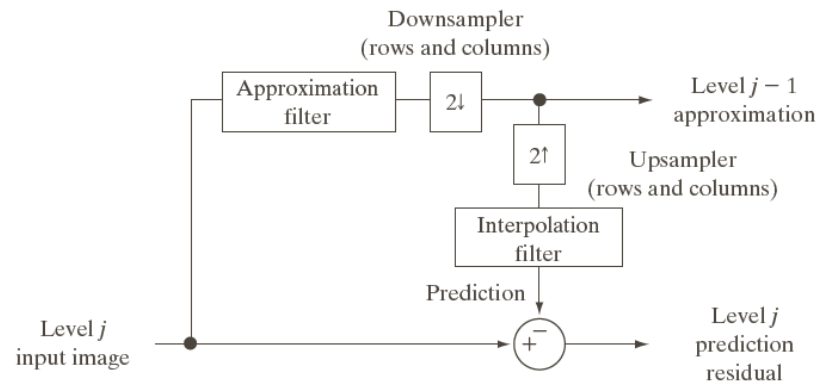
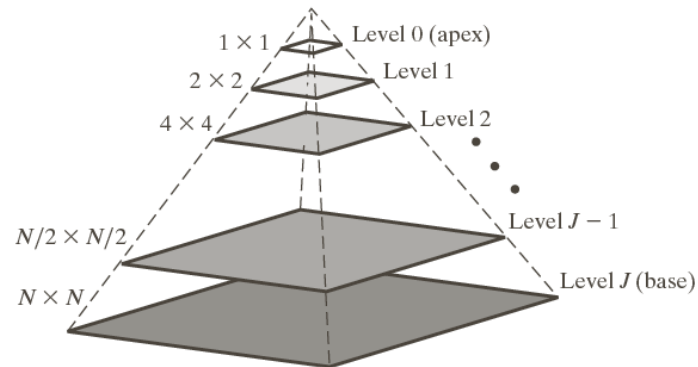
Κυματιδιακή σειρά

Κυματίδιο Haar



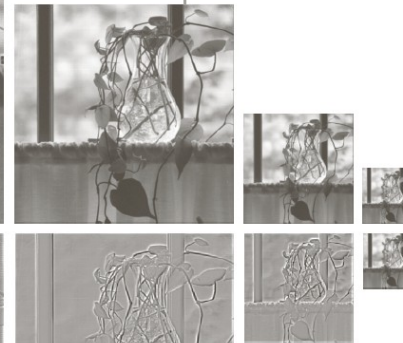
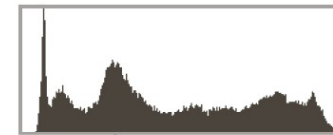
Ανάλυση εικόνων σε πολλές κλίμακες

Πυραμίδα
προσεγγίσεων

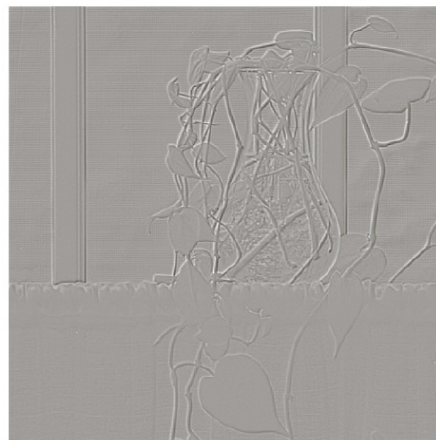


Ανάλυση εικόνων σε πολλές κλίμακες

Πυραμίδα
προσεγγίσεων



Πυραμίδα
υπολοίπων



Ανάλυση σε πολλές κλίμακες

Αύξουσα ακολουθία υποχώρων
Συναρτήσεις πεπερασμένης ενέργειας

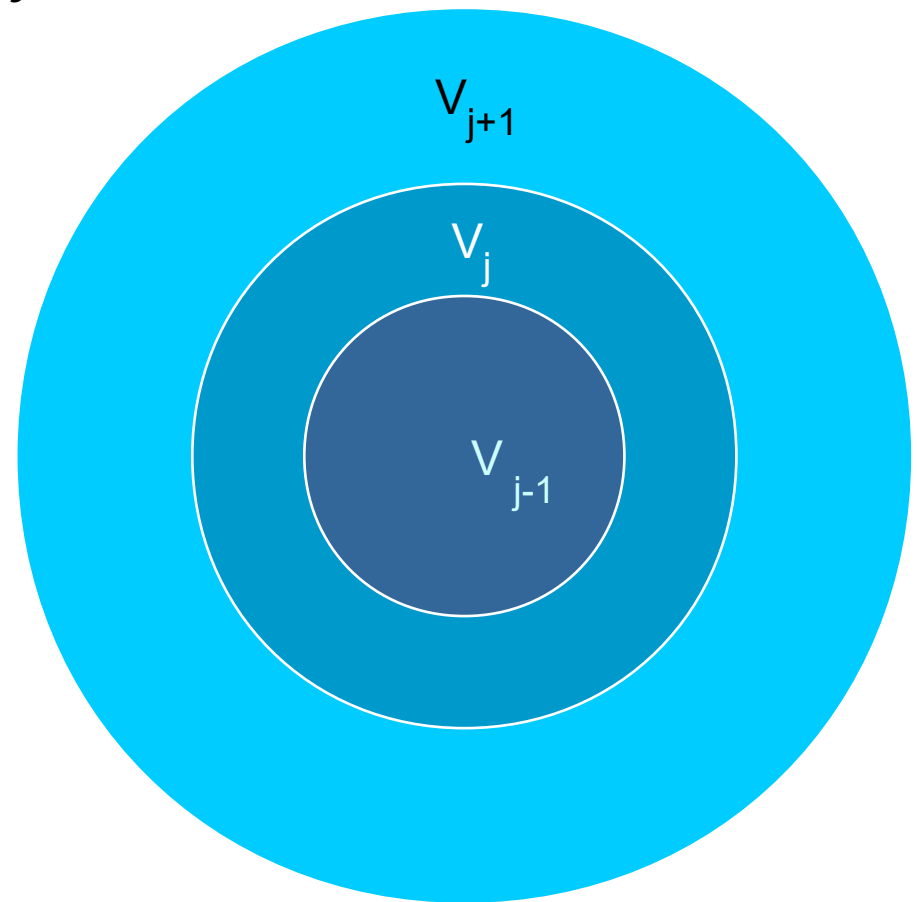
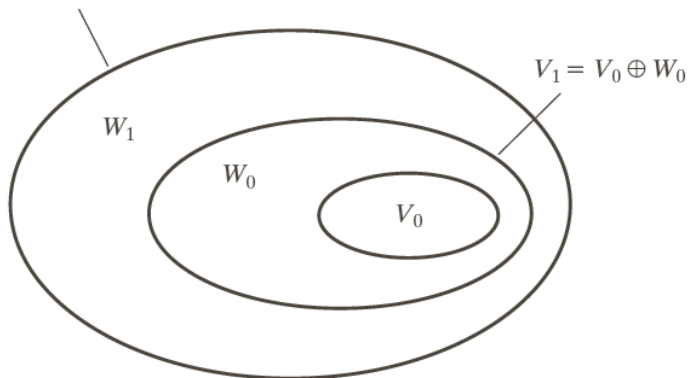
Συνάρτηση κλιμάκωσης $\varphi(t)$:
ορίζει τη βάση σε κάθε υπόχωρο

$$\{\varphi(t - n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

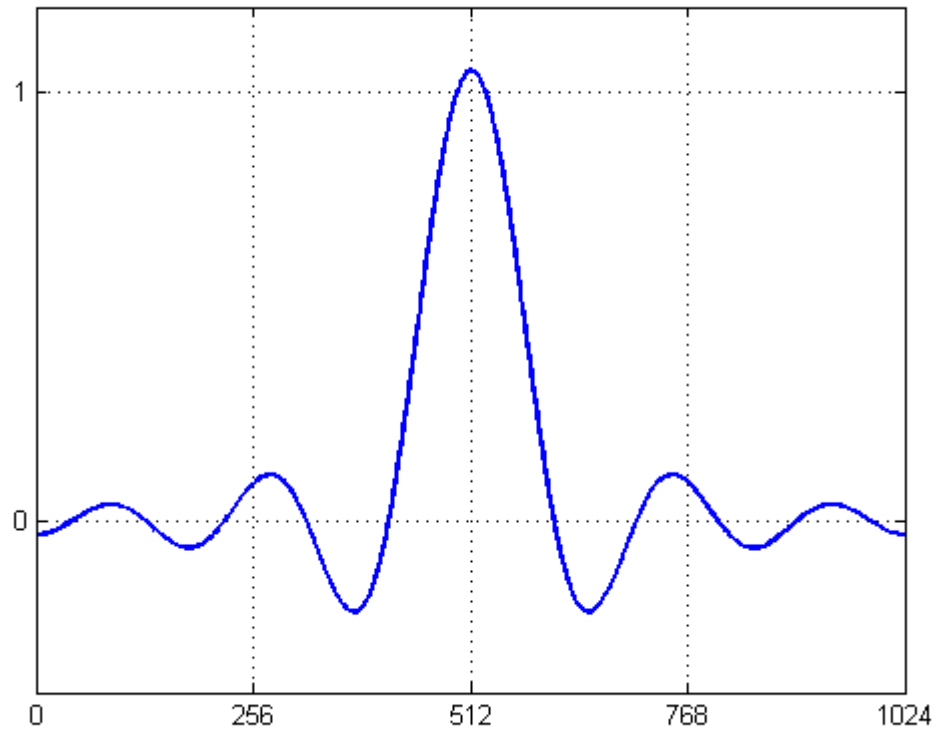
$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$$

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L_2(\mathcal{R})$$

$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1$$

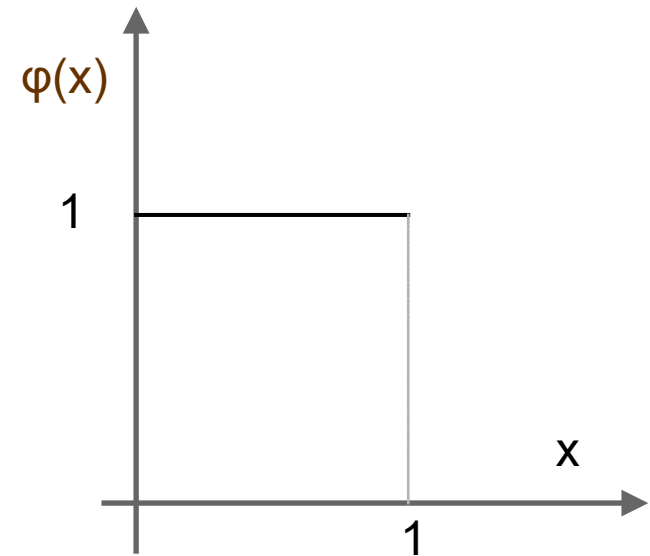


Συνάρτηση κλιμάκωσης

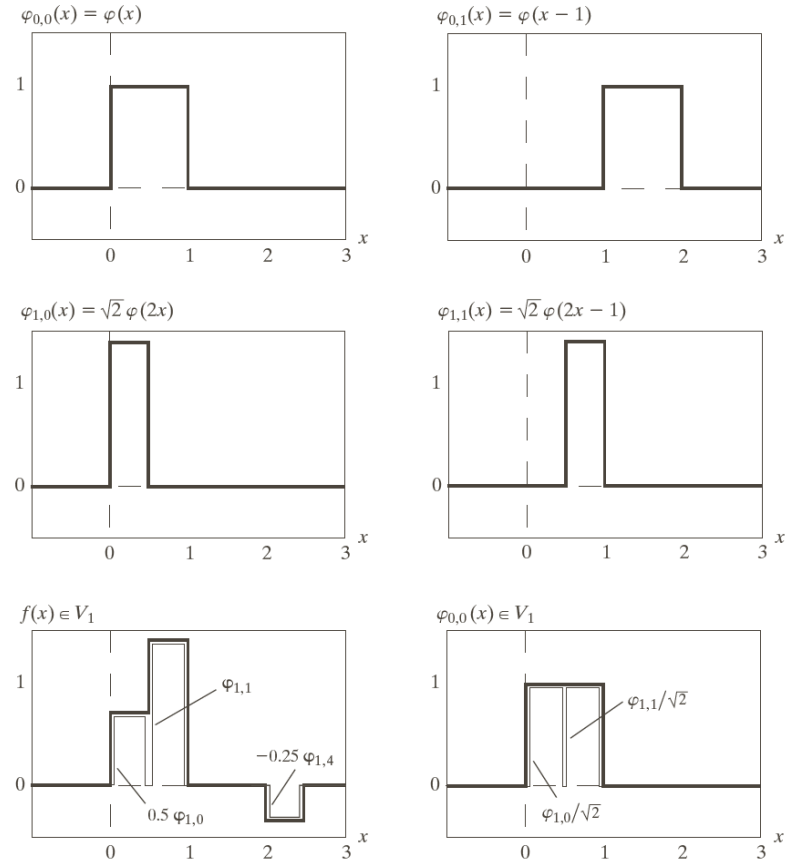


Meyer

Προσέγγιση με συναρτήσεις
τμηματικά σταθερές

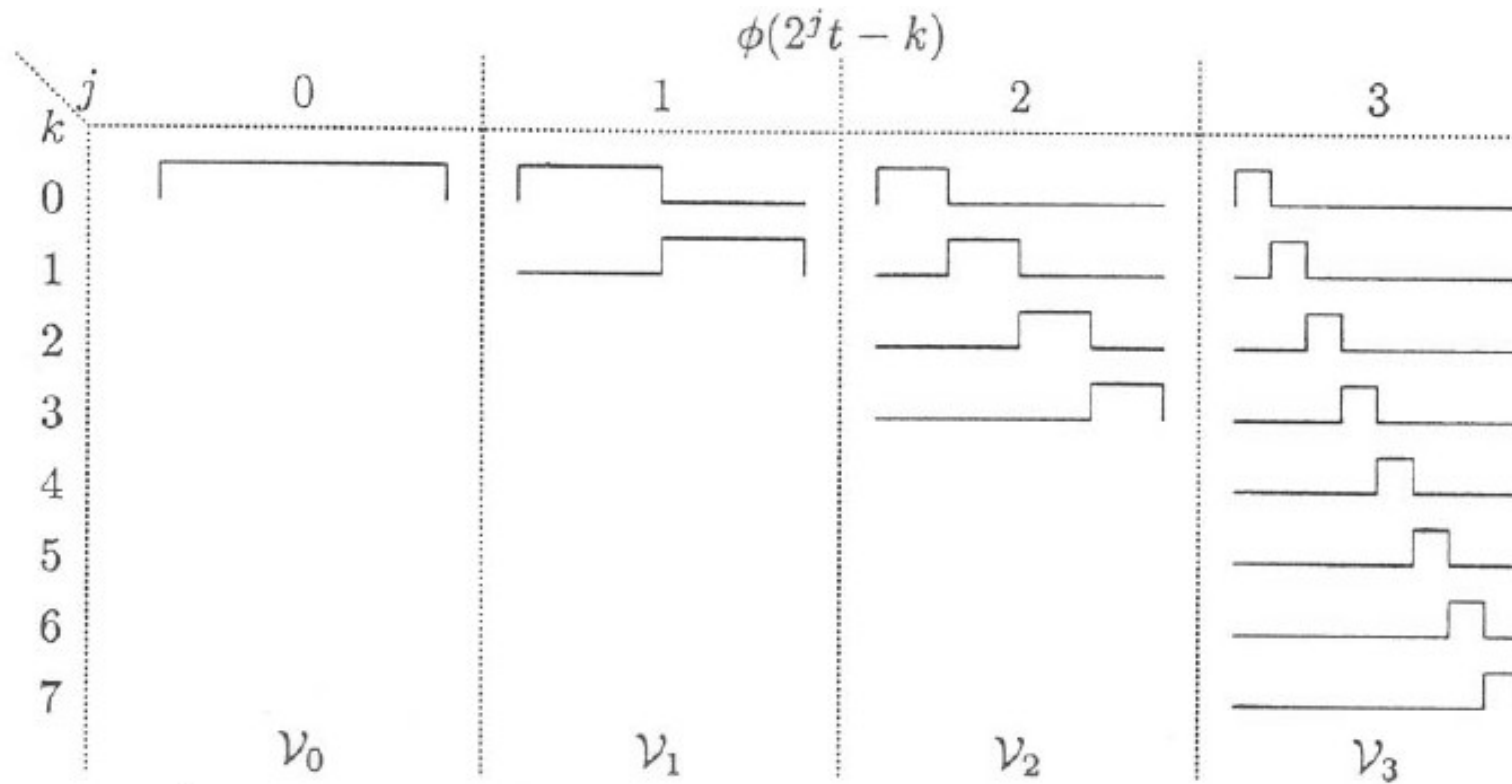


Συνάρτηση κλιμάκωσης Haar

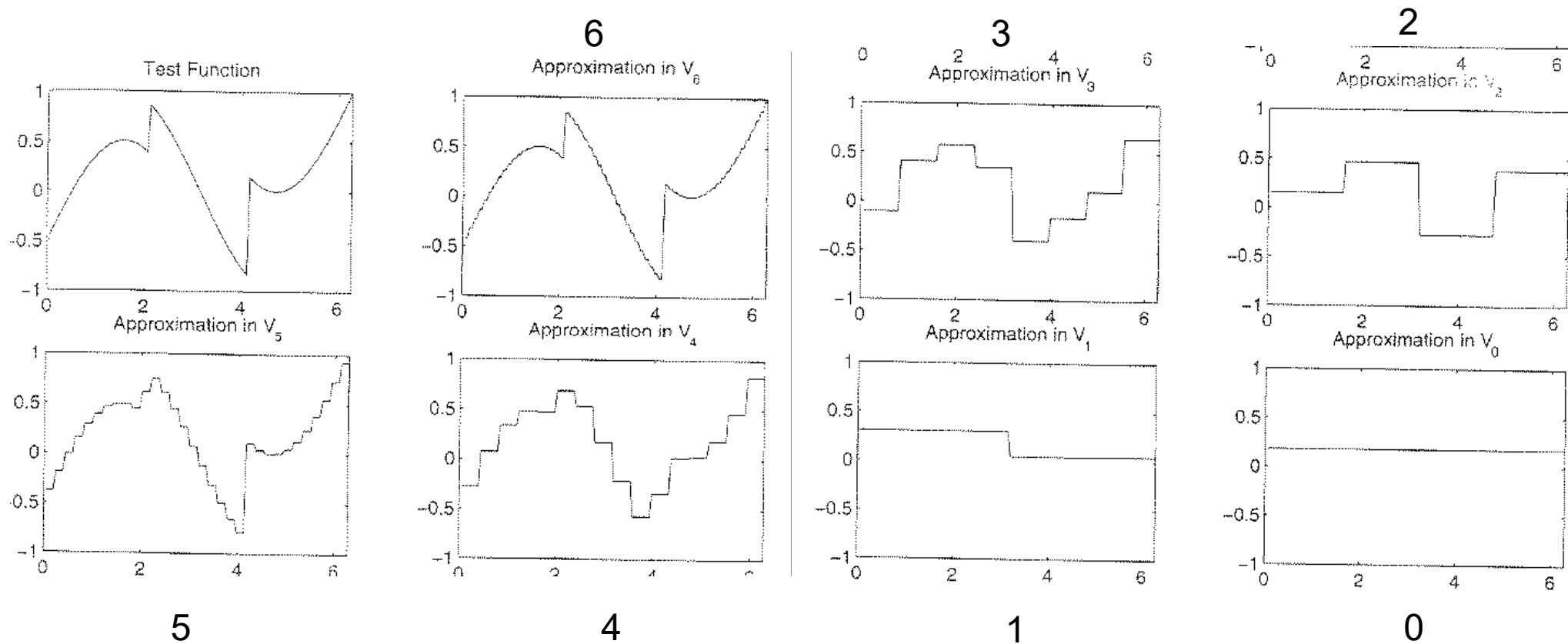


Gonzalez & Woods, Digital Image Processing

Συνάρτηση κλιμάκωσης Haar

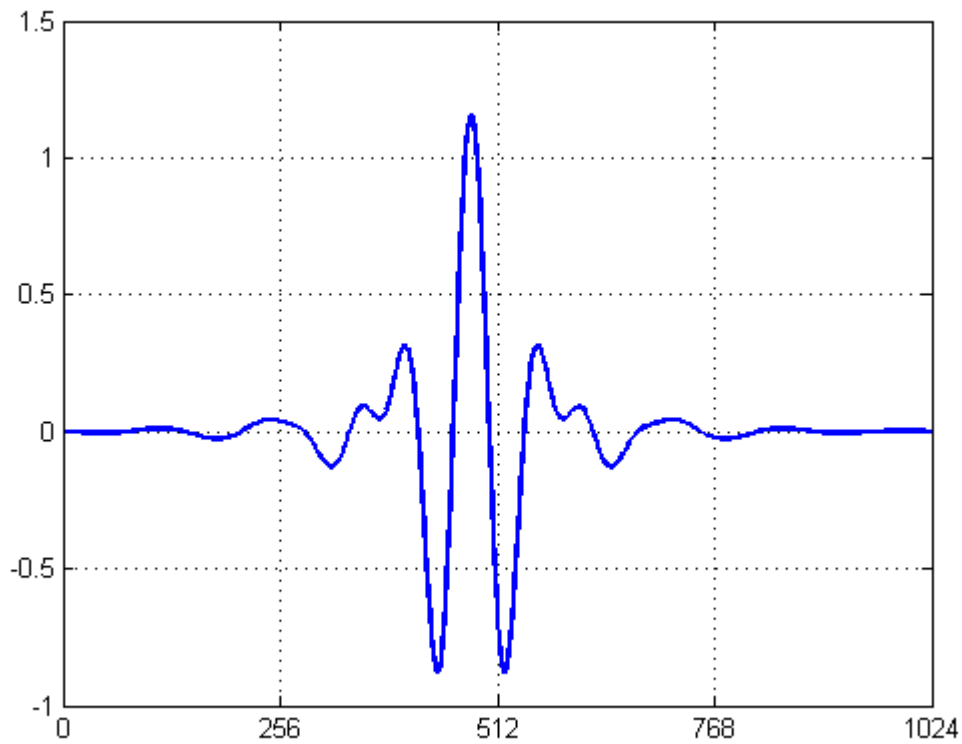


Προσέγγιση σε διαφορετική κλίμακα (Haar)

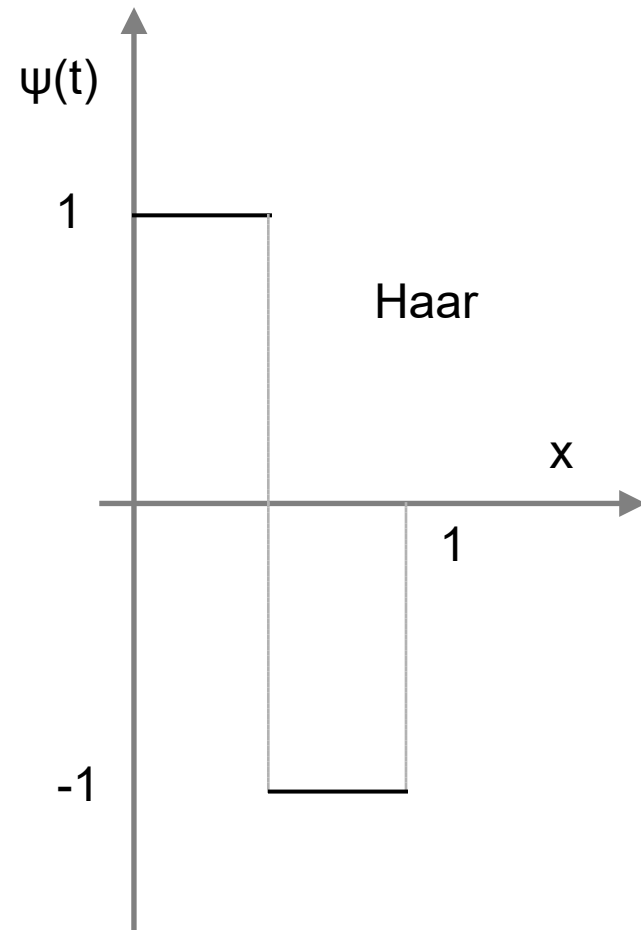


Προσέγγιση με τμηματικά σταθερές συναρτήσεις σε διάφορες κλίμακες

Συνάρτηση κυματιδίου

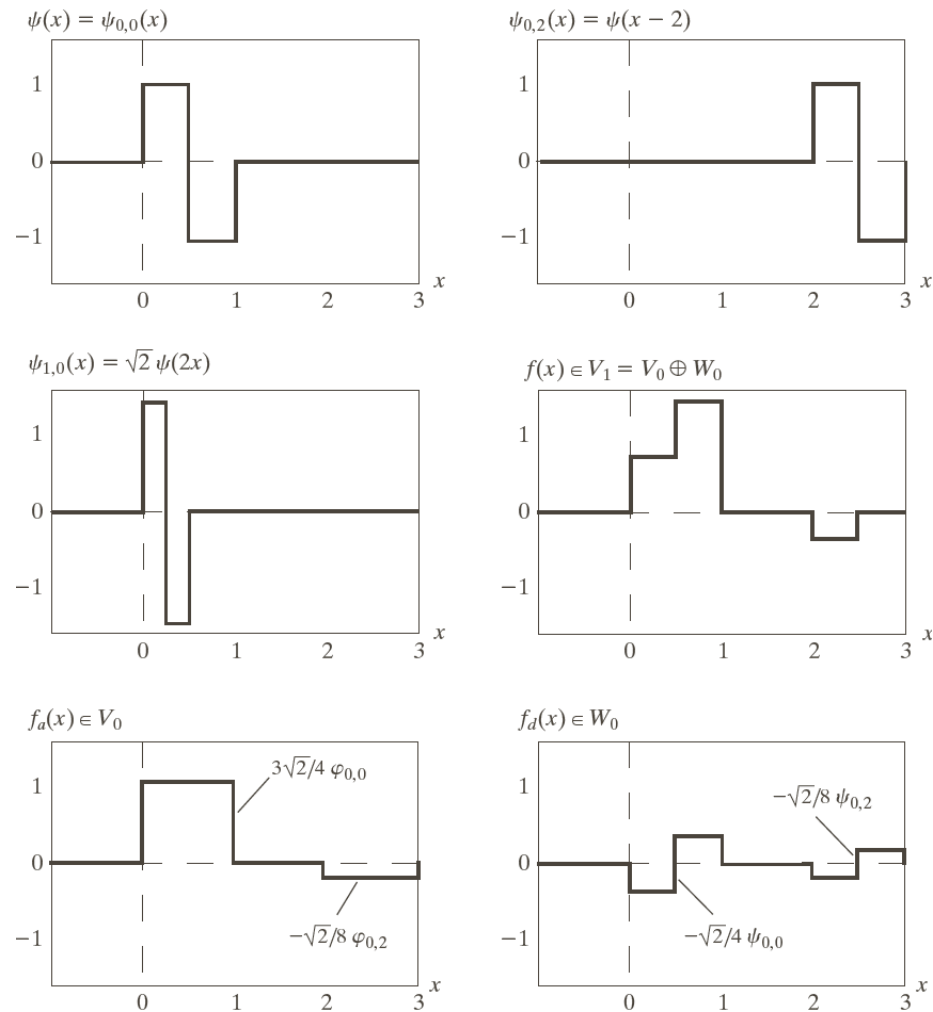


Meyer

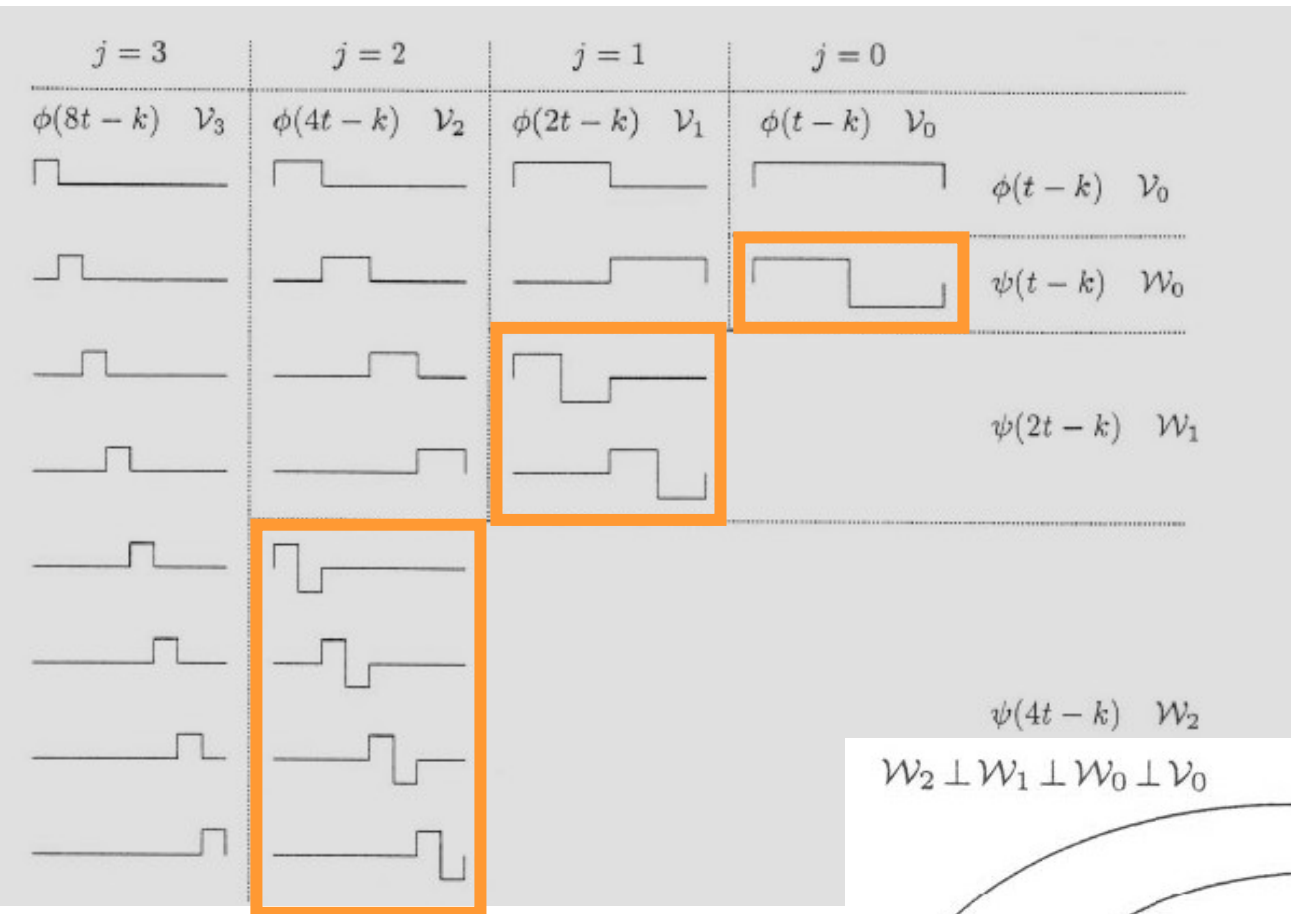


$$\langle \varphi(t - k), \psi(t) \rangle = 0$$

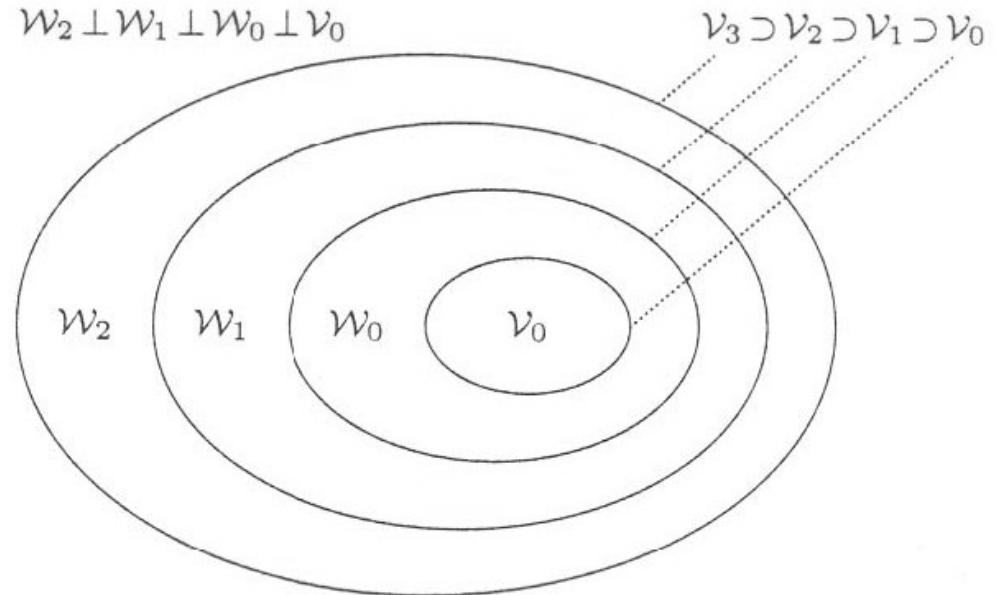
Συνάρτηση κυματιδίου Haar



Αναπαράσταση: προσέγγιση και κυματίδια (Haar)



$$\mathcal{W}_2 \perp \mathcal{W}_1 \perp \mathcal{W}_0 \perp \mathcal{V}_0$$



Εξισώσεις δύο κλιμάκων

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h(k) \varphi(2t - k)$$

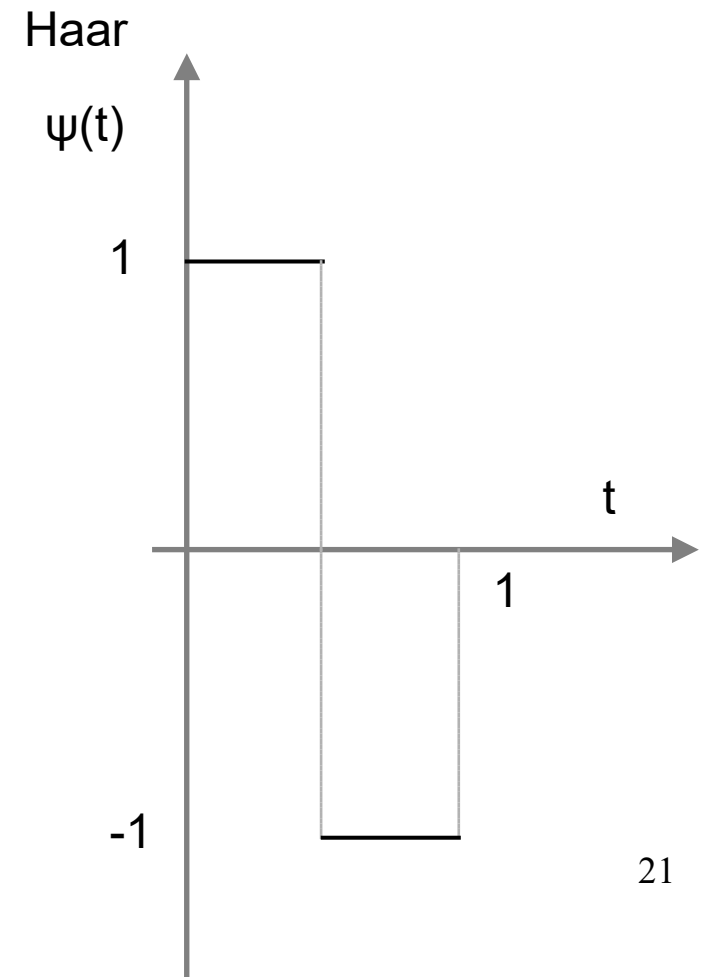
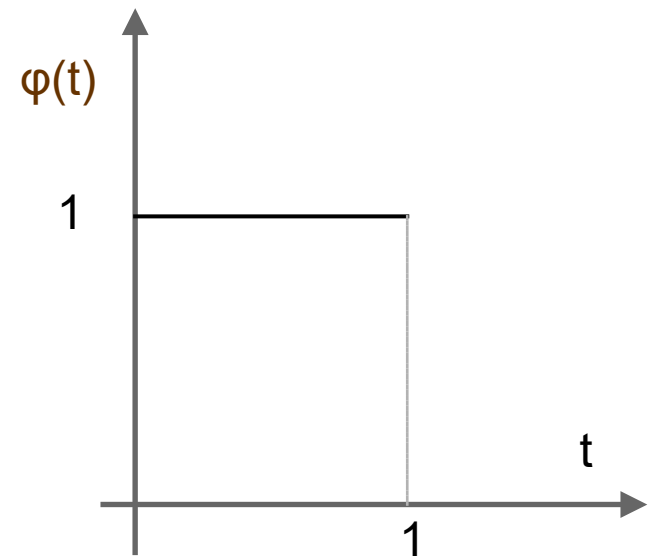
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N g(k) \varphi(2t - k)$$

$$\sum_{k=0}^N h(k) = \sqrt{2} \quad \sum_{k=0}^N g(k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^N h(k) h(k - 2n) = \delta(n)$$

$$\sum_{k=0}^N g(k) g(k - 2n) = \delta(n)$$

$$\sum_{k=0}^N h(k) g(k - 2n) = 0, \quad \forall n$$



Κυματιδιακή σειρά και ανάλυση κλιμάκων

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h(k) \varphi(2t - k)$$

Συντελεστές αναπτύγματος
προσέγγισης

$$a(m, n) = \sum_{k=0}^N h(k - 2n) a(m + 1, k)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N g(k) \psi(2t - k)$$

Συντελεστές αναπτύγματος
κυματιδίων (“λεπτομέρειες”)

$$d(m, n) = \sum_{k=0}^N g(k - 2n) a(m + 1, k)$$