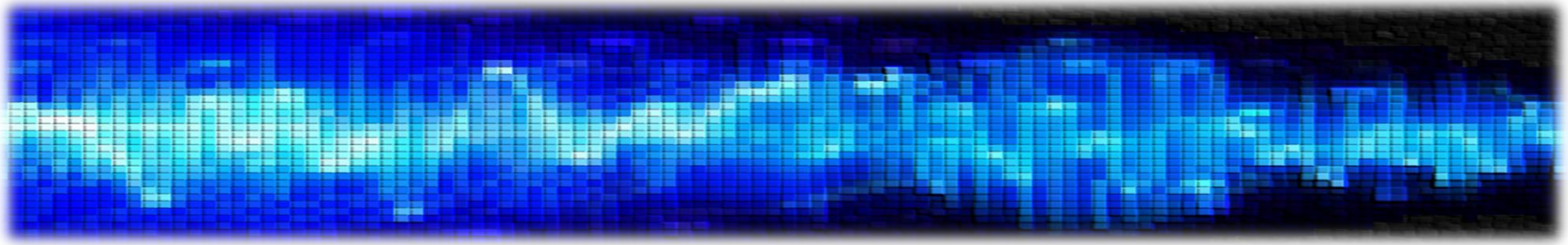
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

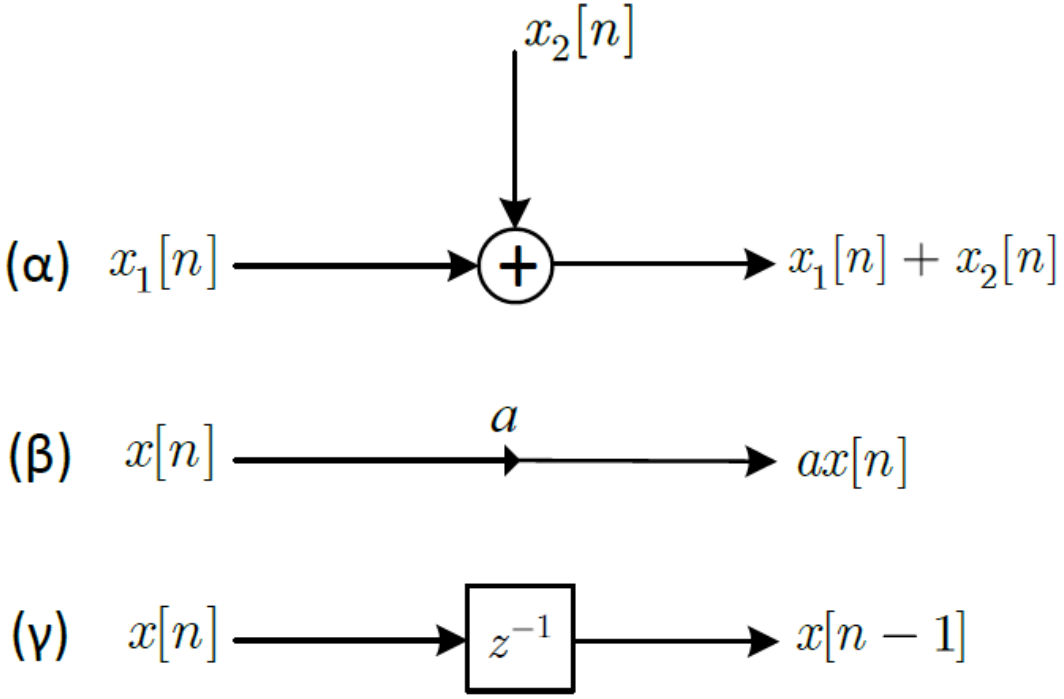


- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Για να υλοποιήσουμε ένα σύστημα πρέπει να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ή την εξίσωση διαφορών σε μια δομή που πραγματοποιείται από την υπάρχουσα τεχνολογία

- Βασικοί δομικοί λίθοι:
  - Πρόσθεση
  - Πολλαπλασιασμός
  - Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Έστω η εξίσωση διαφορών $y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = b_0 x[n]$
- Έχουμε πολλές επιλογές για την υλοποίησή της
- Κόστος:
  - ❑ Πλήθος πράξεων
  - ❑ Πλήθος θέσεων μνήμης
  - ❑ Ευρωστία σε πεπερασμένη αριθμητική ακρίβεια
- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

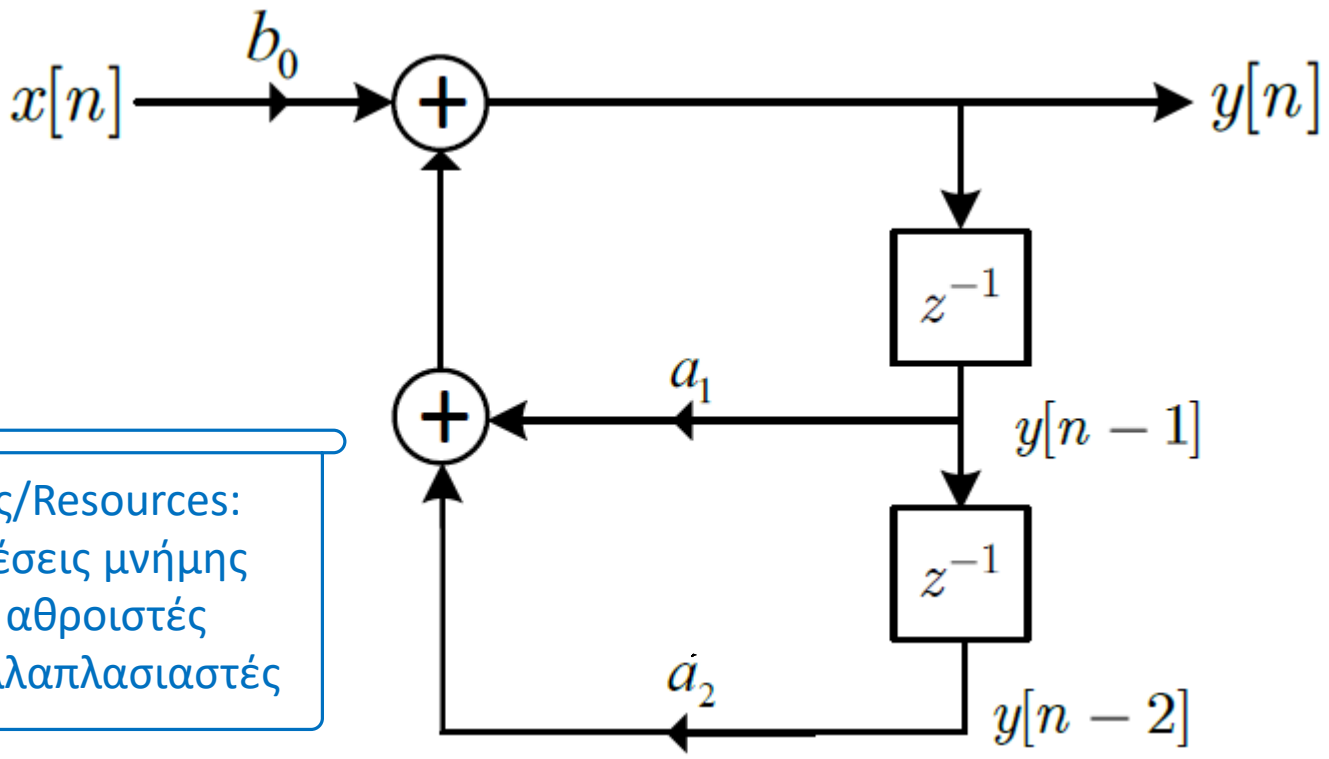
$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$

- Με βάση την εξίσωση διαφορών, μπορούμε κατασκευάσουμε μια δομή που την υλοποιεί

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$



Κόστος/Resources:
- 2 θέσεις μνήμης
- 2 αθροιστές
- 3 πολλαπλασιαστές

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Για μεγαλύτερης τάξης εξίσωσης διαφορών

$$y[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Ξαναγράφουμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

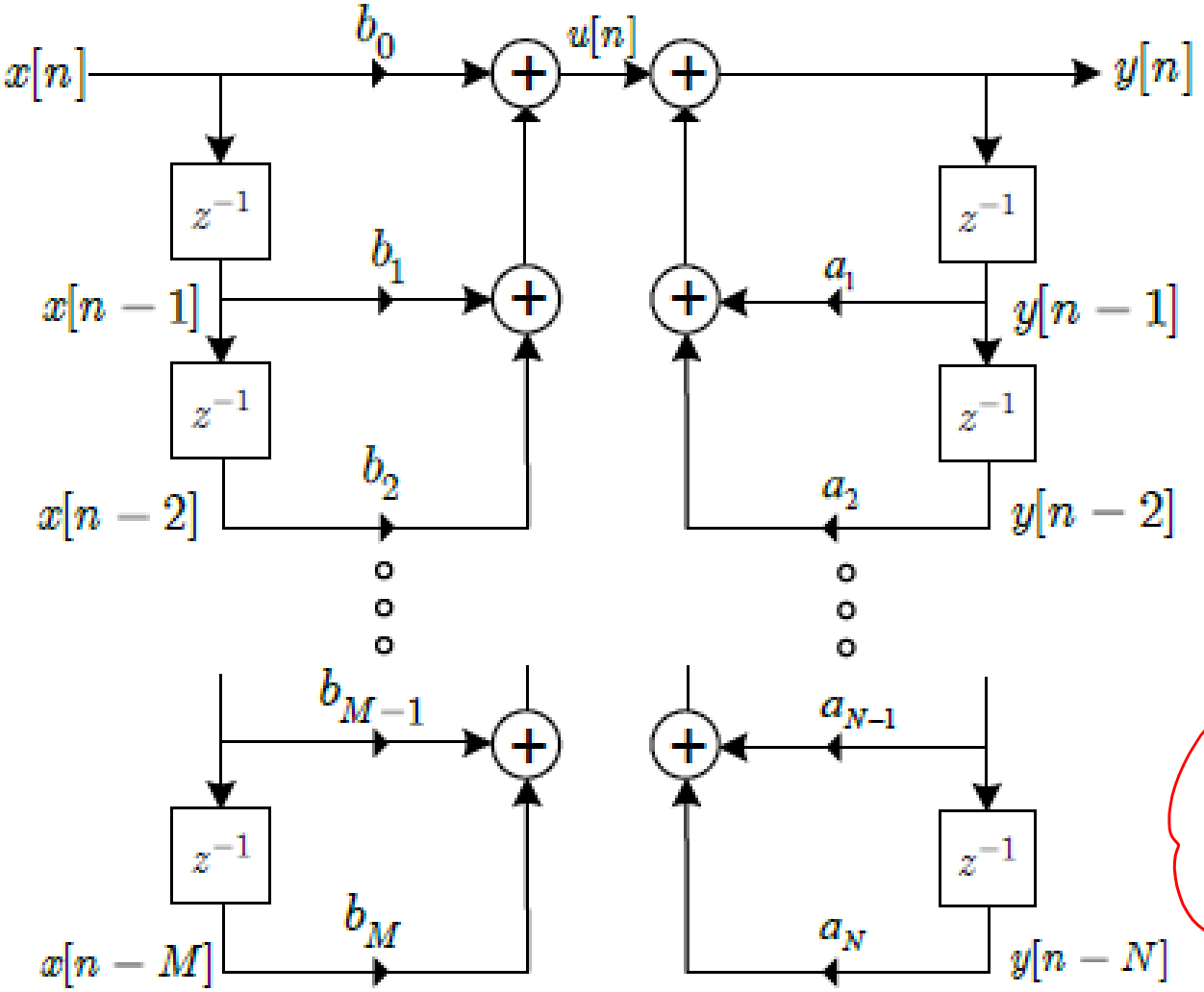
- Δυο υπο-εξισώσεις:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$u[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + u[n]$$



M+N θέσεις μνήμης

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Η προηγούμενη υλοποίηση υλοποιεί πρώτα το FIR τμήμα του φίλτρου (αριθμητή) και στη συνέχεια το IIR κομμάτι (παρονομαστή)

- Η υλοποίηση μπορεί να γραφεί ως

$$u[n] = \sum_k b_k x[n-k] \qquad H(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \right) \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$y[n] - \sum_k a_k y[n-k] = u[n]$$

δηλ. ως δυο υποσυστήματα σε σειρά

$$w[n] - \sum_k a_k w[n-k] = x[n]$$

- Μπορούμε όμως να γράψουμε και ότι

$$H(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \right) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$y[n] = \sum_k b_k w[n-k]$$

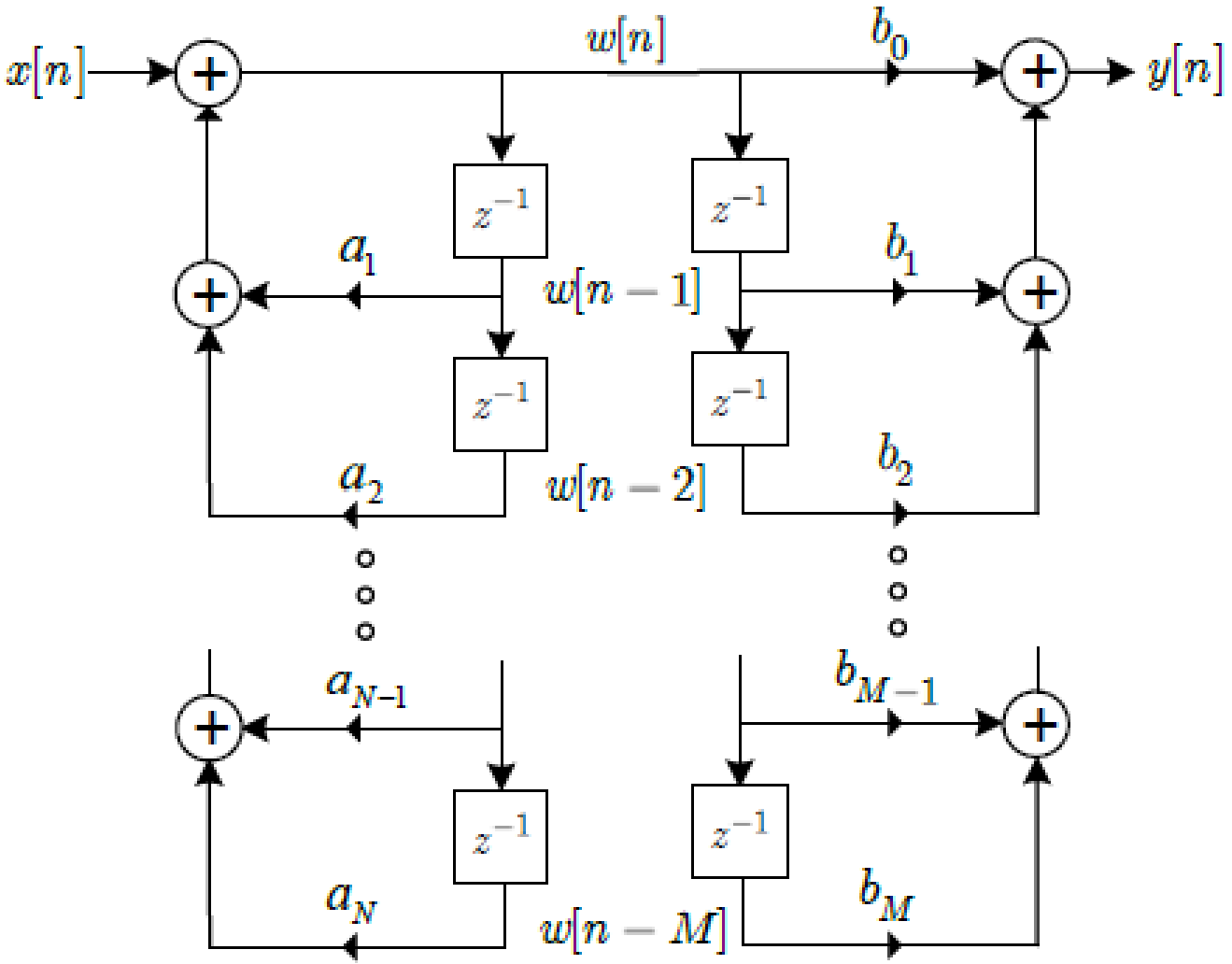
που είναι ισοδύναμη υλοποίηση ως υλοποίηση

- Οδηγεί όμως σε διαφορετικές εξισώσεις διαφορών για κάθε υποσύστημα

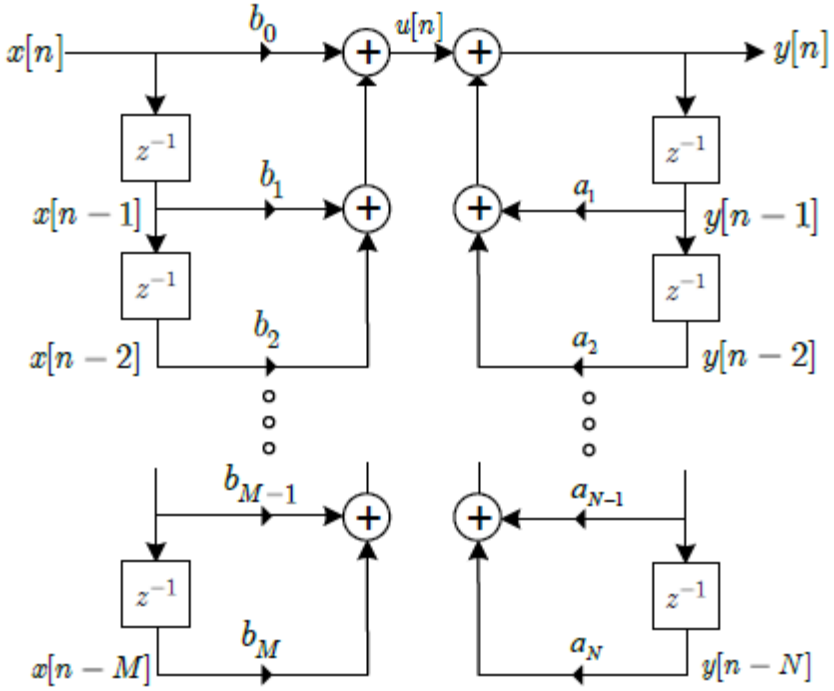
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k] \quad , \quad w[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n]$$

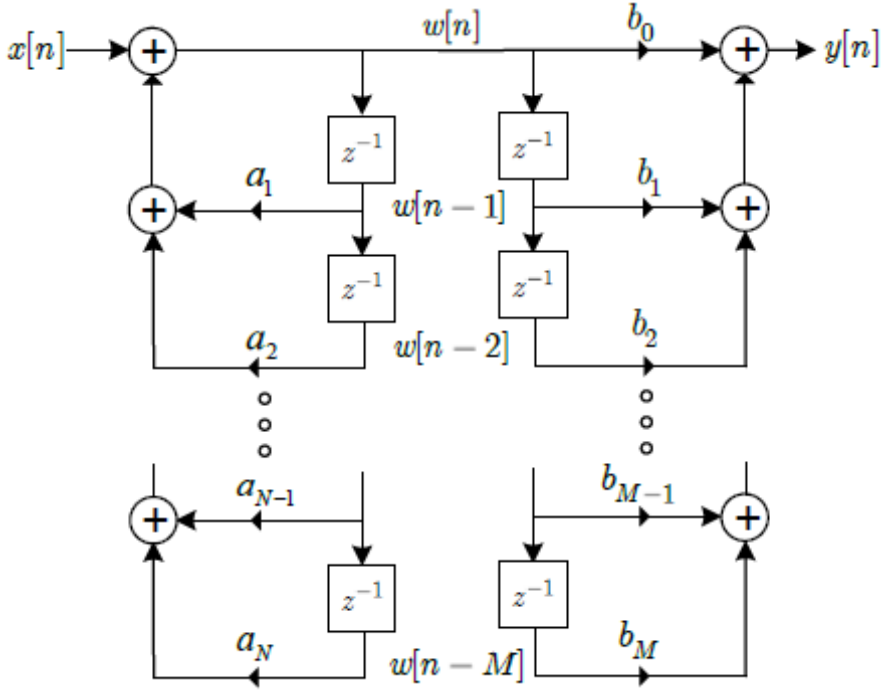
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k] \quad , \quad w[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n]$$



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

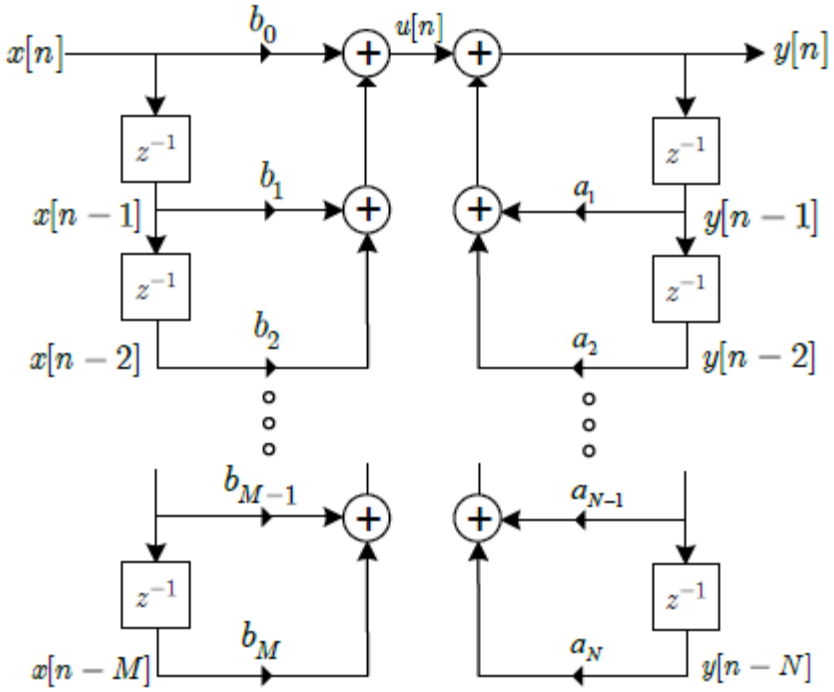


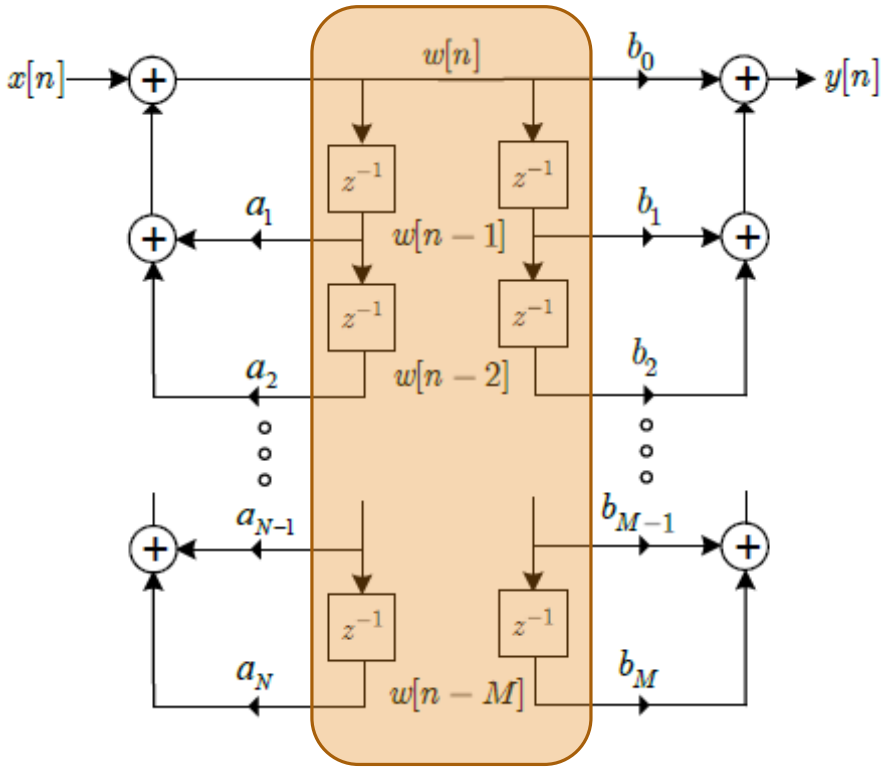


- Βασικές διαφορές των δυο υλοποιήσεων
  - ❑ Στην πρώτη, υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά και μετά οι πόλοι
  - ❑ Στη δεύτερη, υλοποιούνται πρώτα οι πόλοι και μετά τα μηδενικά

- Θεωρητικά, οι δυο υλοποιήσεις είναι ισοδύναμες
  - ❑ Πρακτικά, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές! (λόγω υλοποίησης σε πεπερασμένη ακρίβεια)

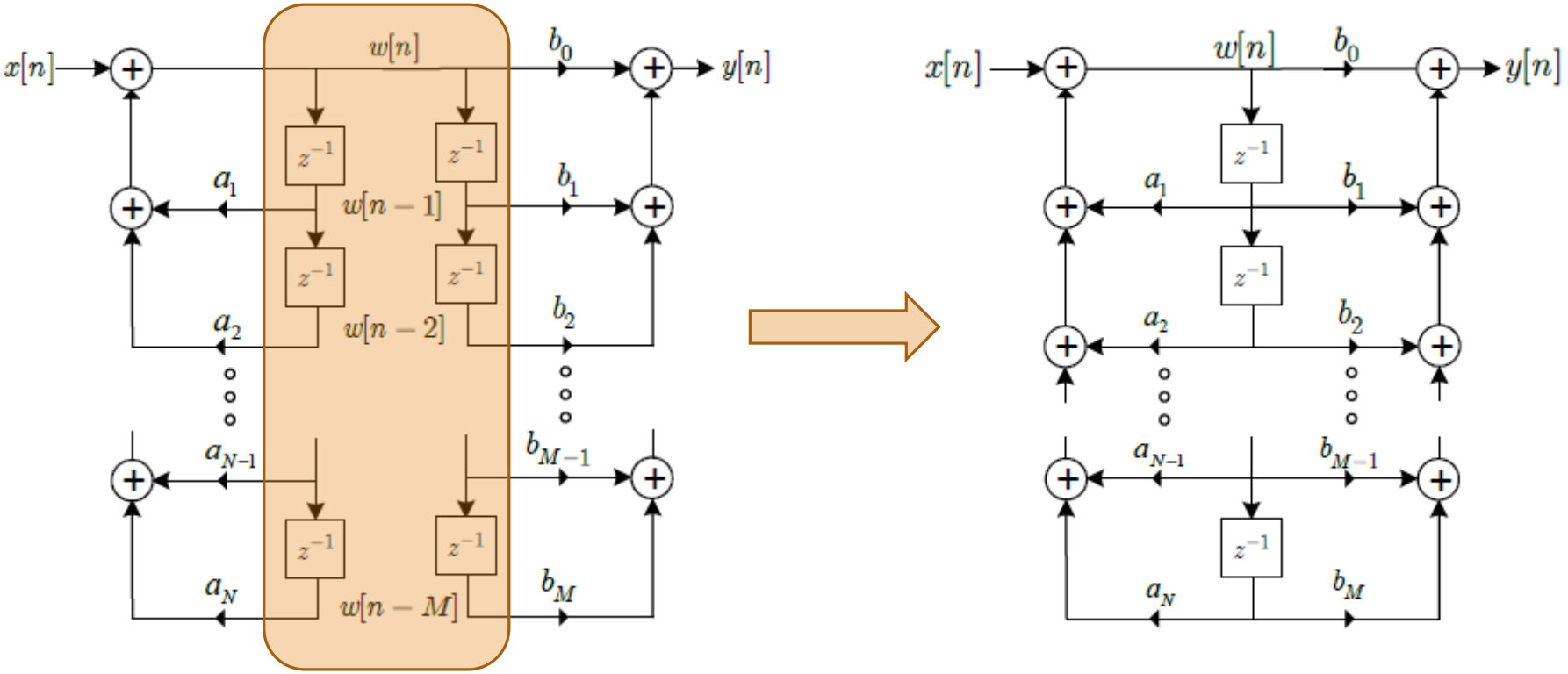
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**





- Παρατήρηση:
  - **Οι μεταβλητές $w[n-k]$ αποθηκεύονται δυο φορές στη δεύτερη υλοποίηση!**
  - Μπορούμε να «γλιτώσουμε» θέσεις μνήμης!
  - Μπορούμε να μοιράσουμε τις ίδιες θέσεις μνήμης και στους δυο κλάδους
  - Αν $M = N$ (όπως στο σχήμα), τότε γλιτώνουμε M θέσεις μνήμης
  - Αν $M \neq N$, τότε γλιτώνουμε $\min(M, N)$ θέσεις μνήμης

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**



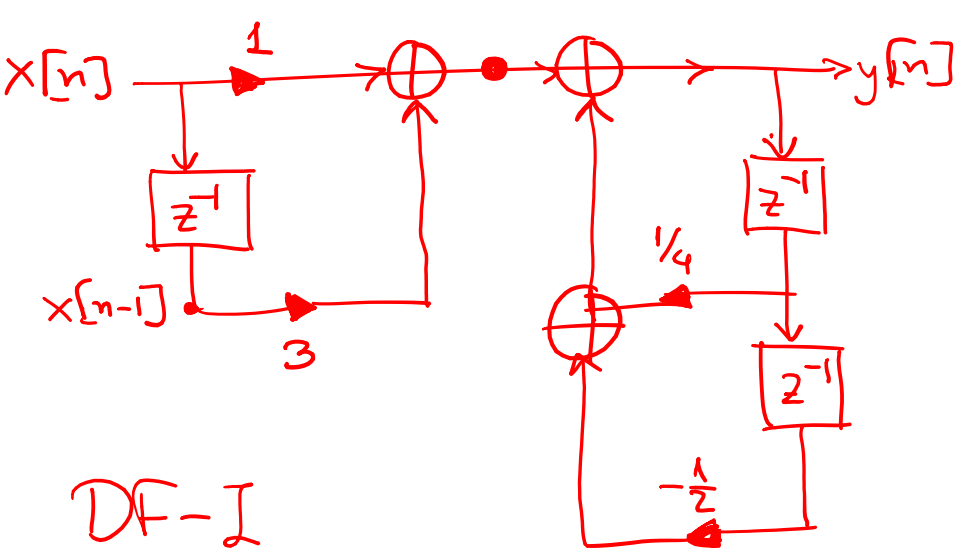
- Η νέα υλοποίηση, που χρησιμοποιεί τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων καθυστέρησης (μνήμης) αναφέρεται ως **κανονική μορφή** (canonical form) ή **Direct Form II**
- Η μη κανονική μορφή στο αριστερό σχήμα ονομάζεται **Direct Form I**

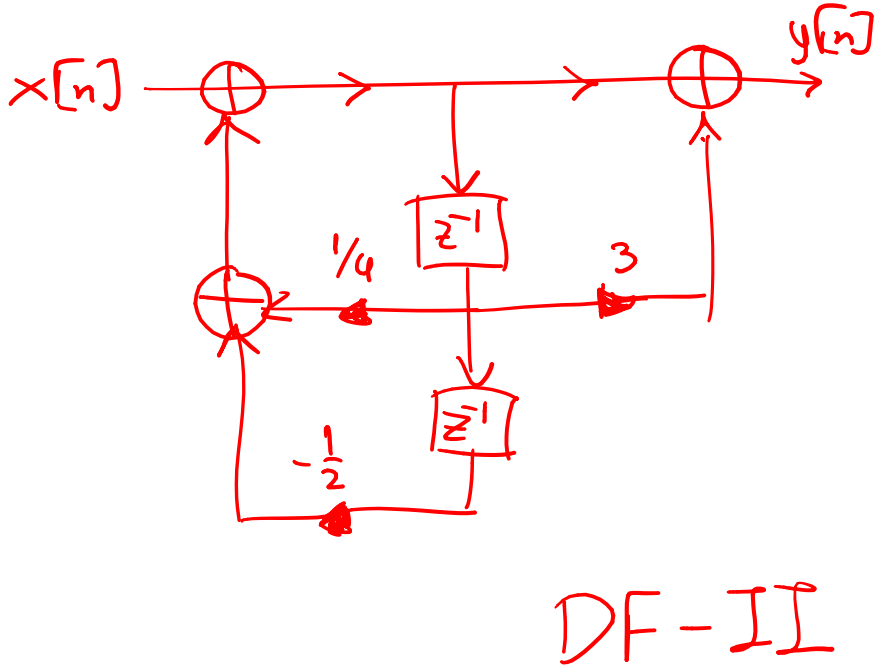
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] + x[n] + 3x[n-1]$$

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \left(\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II

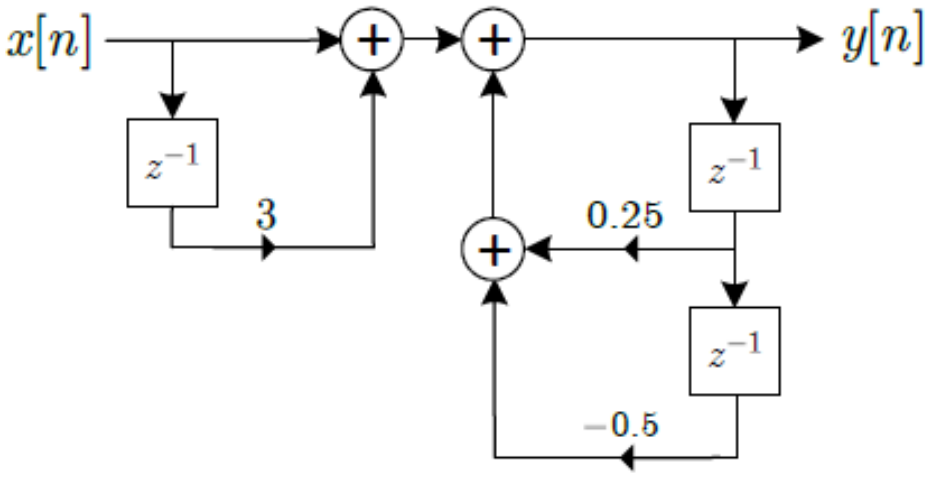




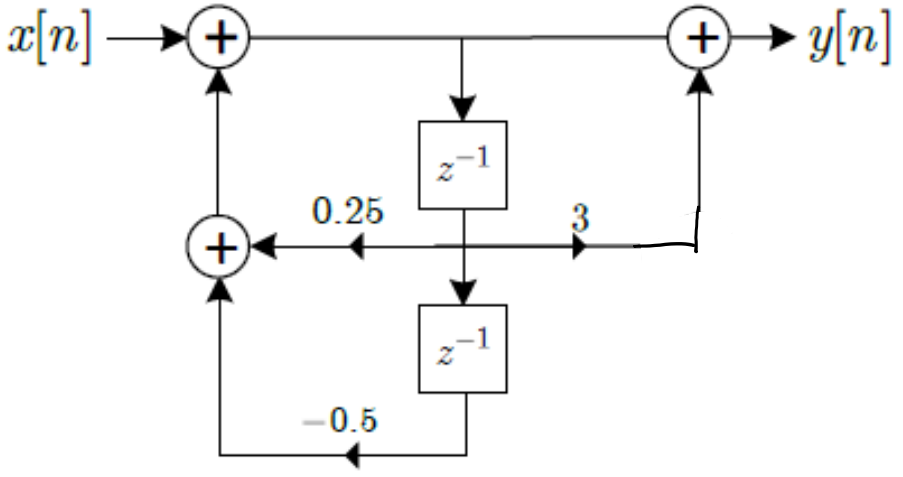
- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



(α)

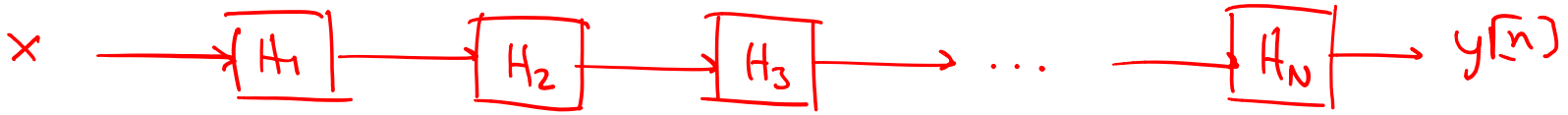


(β)

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Γνωρίζουμε ότι τα συστήματα χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες: FIR, IIR
- Ας δούμε πόσο διαφέρουν οι υλοποιήσεις ανάλογα με την κατηγορία
- Ξεκινάμε με τα IIR
- Θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις ενός IIR συστήματος
- Πώς επιλέγουμε την κατάλληλη;

  - ✓ **Πλήθος πολλαπλασιασμών → χρονοβόρα πράξη**
  - ✓ **Πλήθος καθυστερήσεων → κόστος σε μνήμη**
  - ✓ Εμβαδό, απλότητα, και αρθρωτή υλοποίηση → σημασία σε VLSI υλοποιήσεις
  - ✓ Καταμερισμός αλγορίθμου, επικοινωνία επεξεργαστών → πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον
  - ✓ Ευρωστία σε πεπερασμένη ακρίβεια → προτίμηση από πιο οικονομικές υλοποιήσεις

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Μορφή σε σειρά (cascade form)



- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-e_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

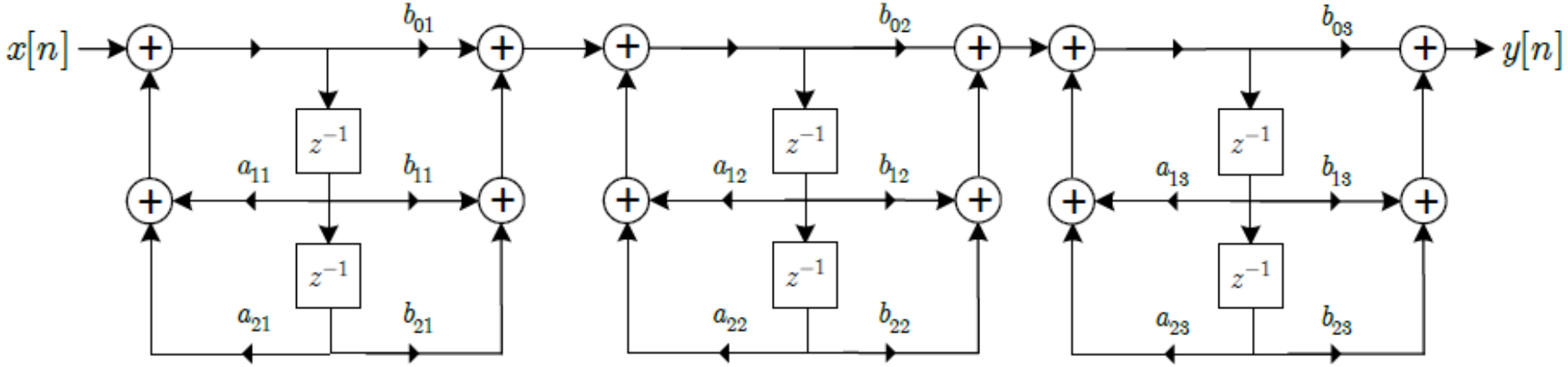
με $N = N_1 + 2N_2, \quad M = M_1 + 2M_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Μορφή σε σειρά (cascade form)
- Παράδειγμα 6ης τάξης



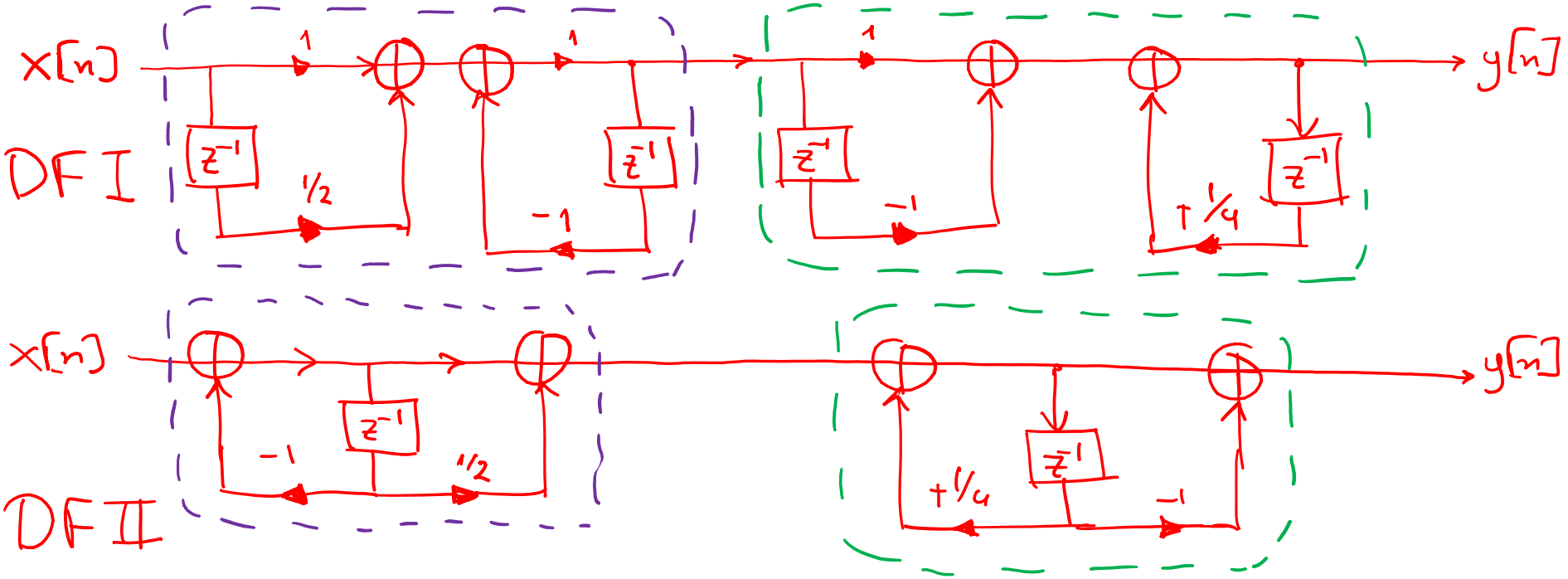
- Οργανωμένο σε υποσυστήματα δευτέρας τάξης Direct Form II

$$H(z) = \prod_{k=1}^{3} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

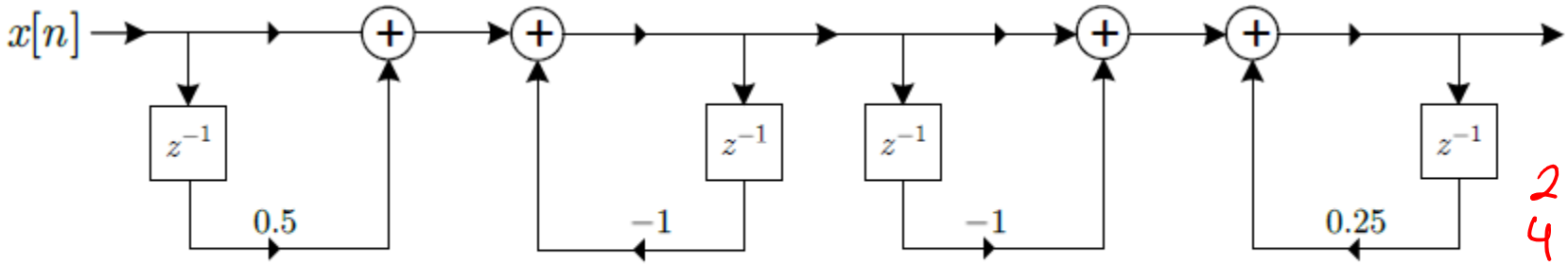
Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων και αναφέρετε το κέρδος σε πολλαπλασιασμούς ή/και θέσεις μνήμης



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

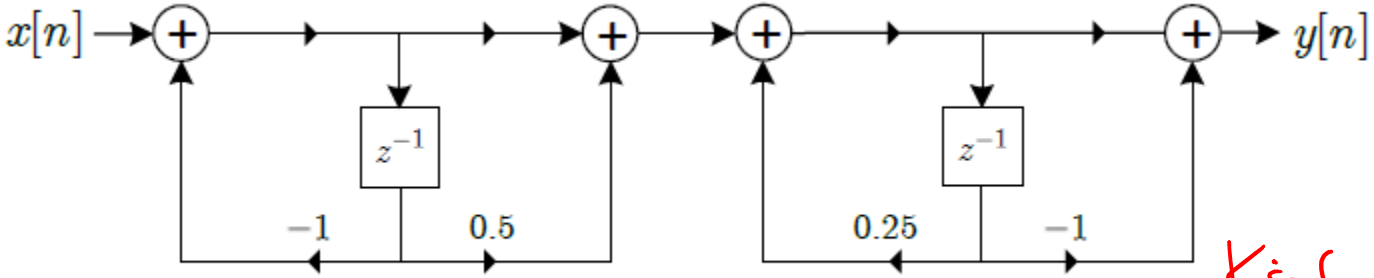
$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων



(α)

2 πολ/στες
4 καθυστ.
4 αθροιστ.



(β)

4 αθροιστ.
2 καθυστ.
2 πολ/στες

Κέρδος: 2 μονάδες!

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
  - Προκύπτει από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2$

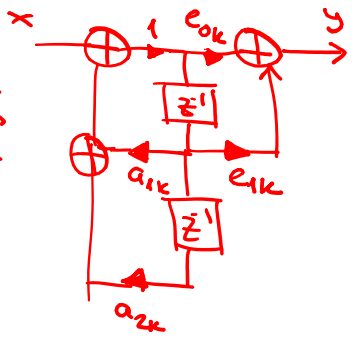
- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

$H_k(z)$

δευτεροβάθμια

π.χ. DFII

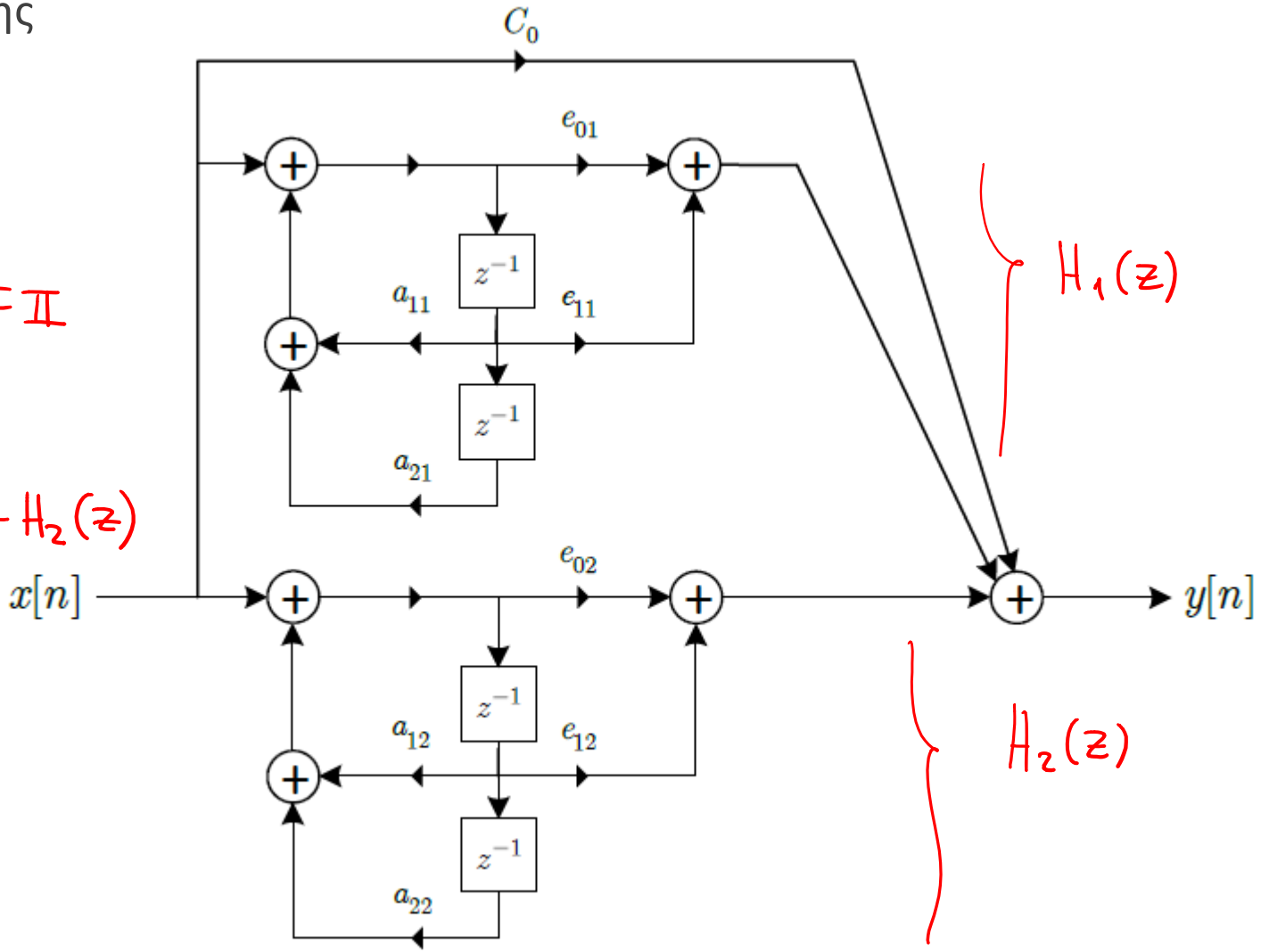


με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
- Παράδειγμα 4ης τάξης

Οργάνωση σε υποσυστήματα DF II δεύτερου βαθμού

$$H(z) = C_0 + H_1(z) + H_2(z)$$



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

~> 2ης Β. Α.Σ.Κ

~> 2ης Β

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης

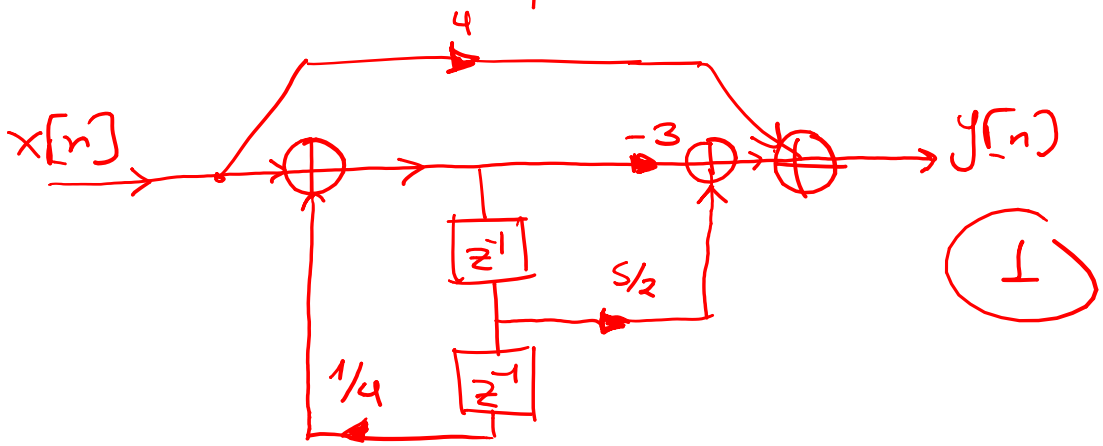
$$-z^{-2} + \frac{5}{2}z^{-1} + 1 \quad \Big| \quad -\frac{1}{4}z^{-2} + 1$$

$$-(-z^{-2} + 0z^{-1} + 4) \quad \Big| \quad 4$$

$$0z^{-2} + \frac{5}{2}z^{-1} - 3$$

$$\rightsquigarrow H(z) = 4 + \frac{-3 + \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (1)$$

$$= 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2)$$



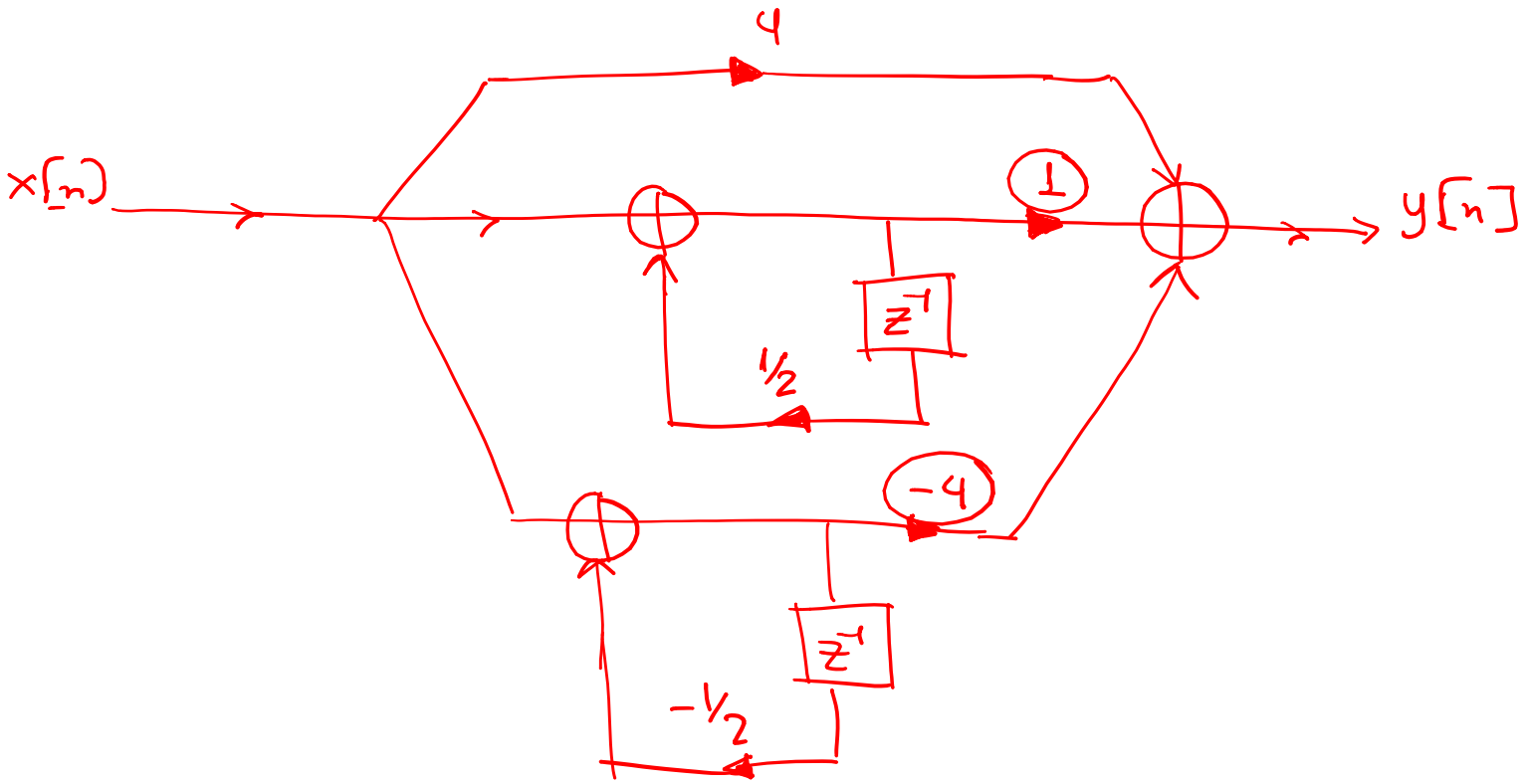
(1)

Υλοποίηση με δευτεροβάθμιο υποσύστημα

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:

$$H(z) = 4 + \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{①} + \underbrace{\frac{-4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}}_{②}$$

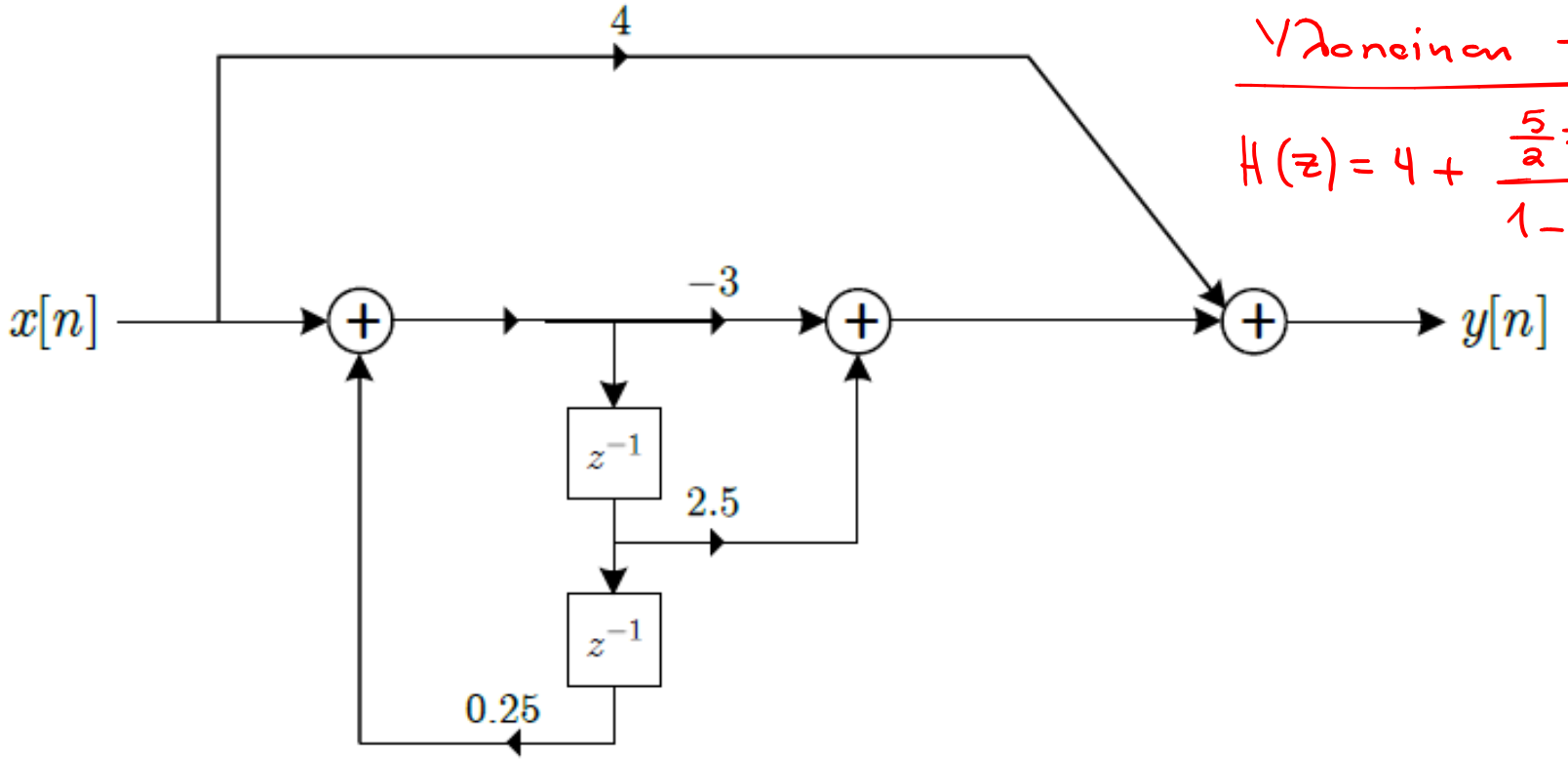
Υλοποίηση της ②:



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης



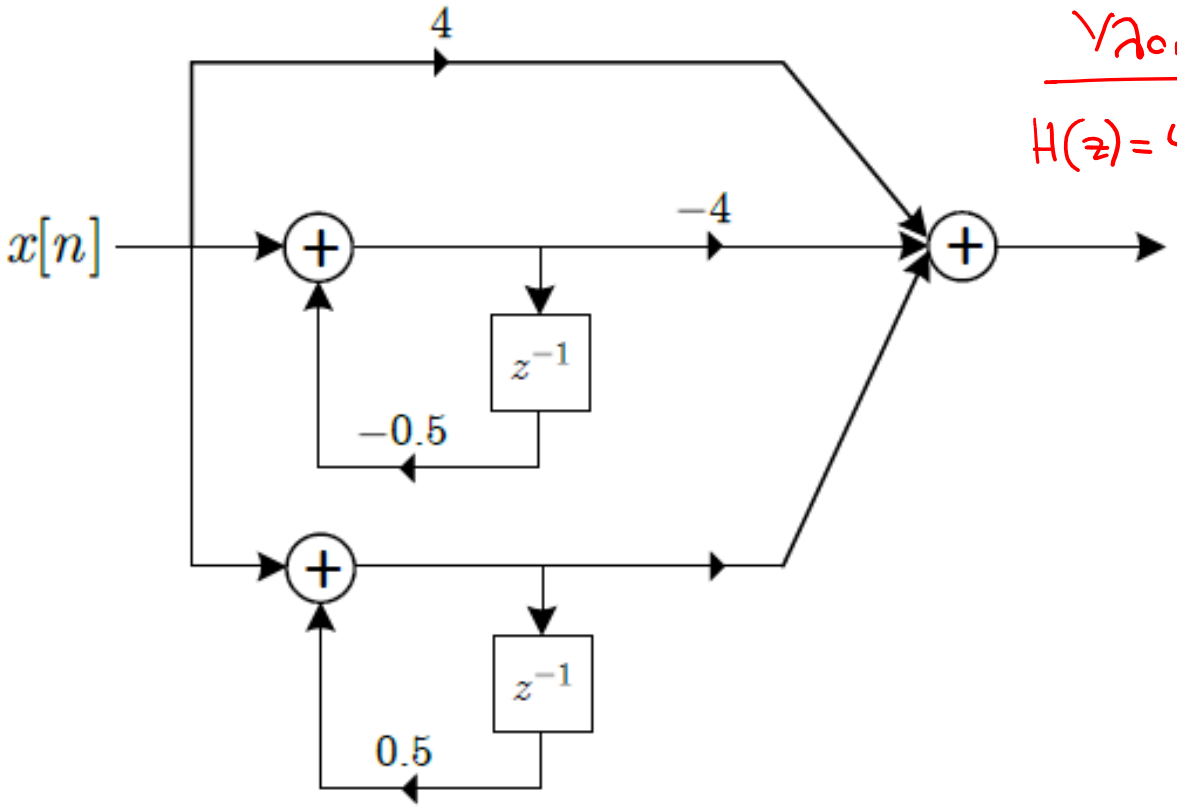
Υλοποίηση της (1)

$$H(z) = 4 + \frac{\frac{5}{2}z^{-1} - 3}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1ης και 2ης τάξης



Υλοποίηση της (2)

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

