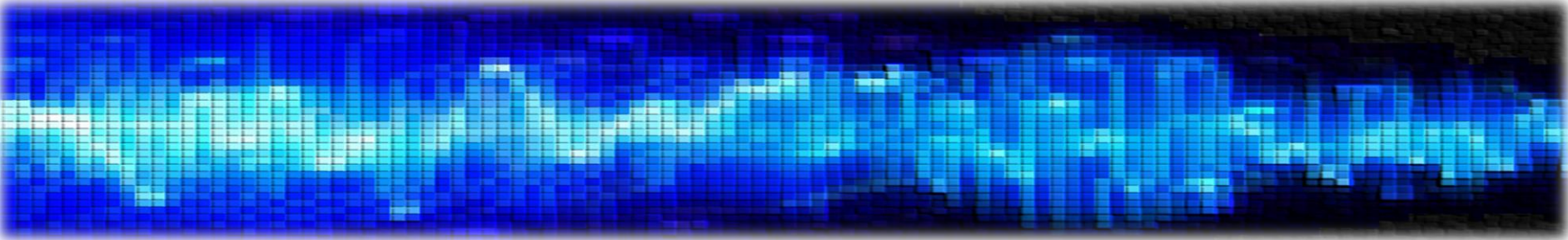


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 11^Η

- 
- Πόλοι & Μηδενικά
 - Συστήματα στο χώρο του Z

- Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- Πεδίο Σύγκλισης: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει
- Σχέση μετασχ. Z με μετασχ. Fourier

Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

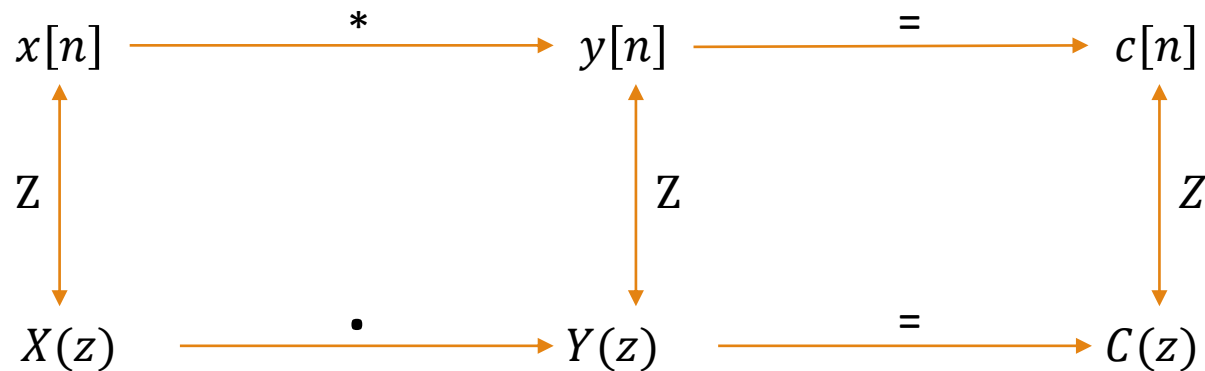
- (α') Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
- (β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.
- (γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

• Ιδιότητες Μετασχ. Z (επανάληψη)

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$y[n]$	$Y(z)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**

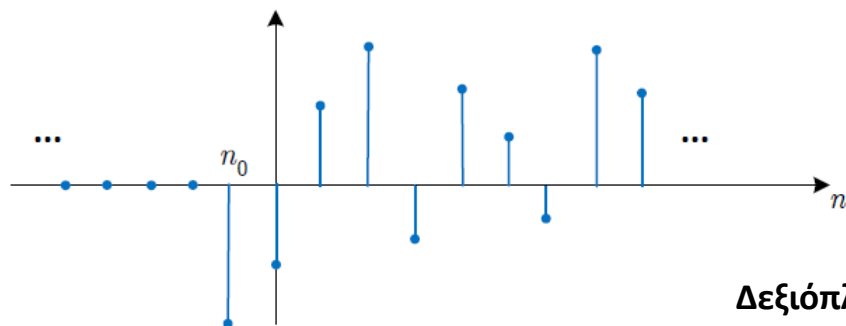
- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του Μετ. Z είναι:



- Θα θυμάστε παρόμοια διαδικασία από τον DTFT...

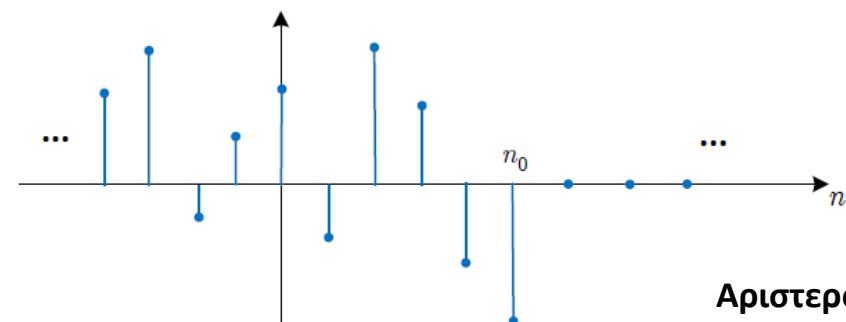
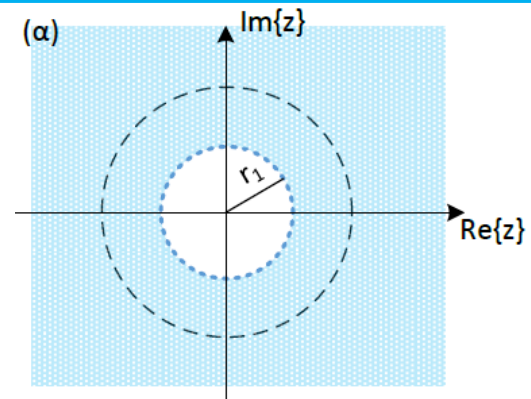
- ...μόνο που τώρα καλύπτουμε μεγαλύτερη «γκάμα» σημάτων ☺
- Ξανά, αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης (επανάληψη)



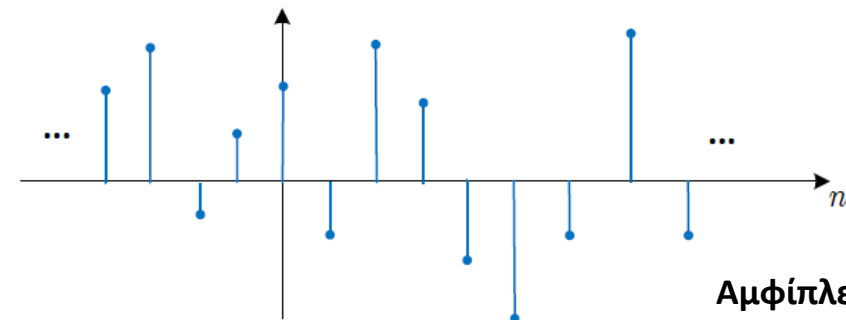
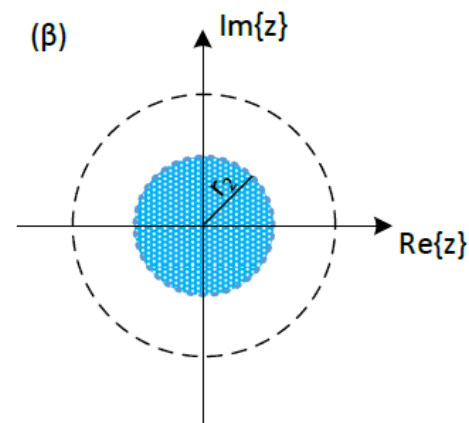
$$x[n] = 0, \\ n < n_0$$

Δεξιόπλευρο $\rightarrow$ Εξωστρεφές ROC

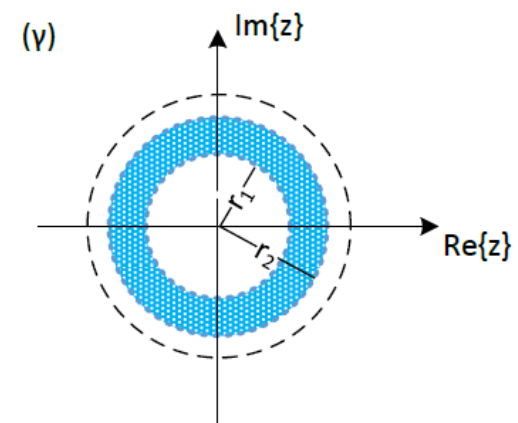


$$x[n] = 0, \\ n > n_0$$

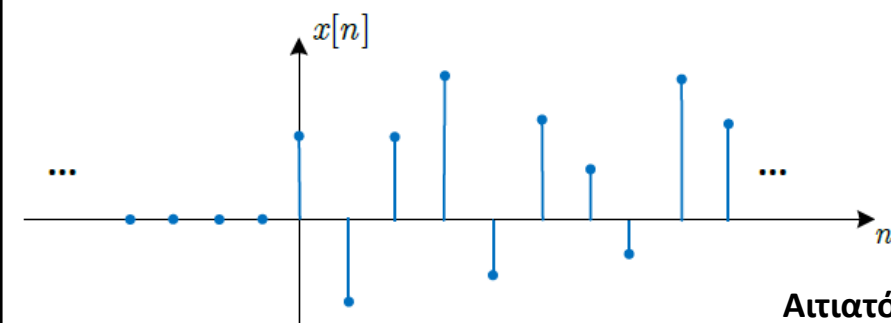
Αριστερόπλευρο $\rightarrow$ Εσωστρεφές ROC



Αμφίπλευρο $\rightarrow$ Δακτυλιοειδές ROC

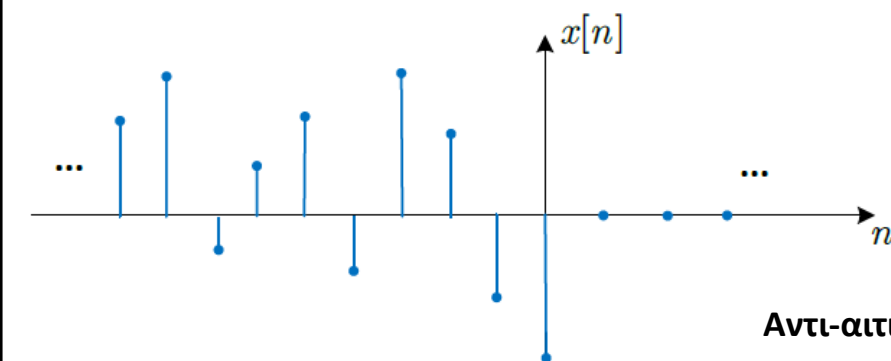
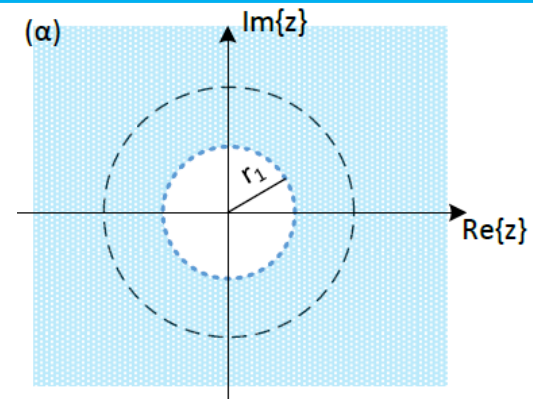


• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης (επανάληψη)



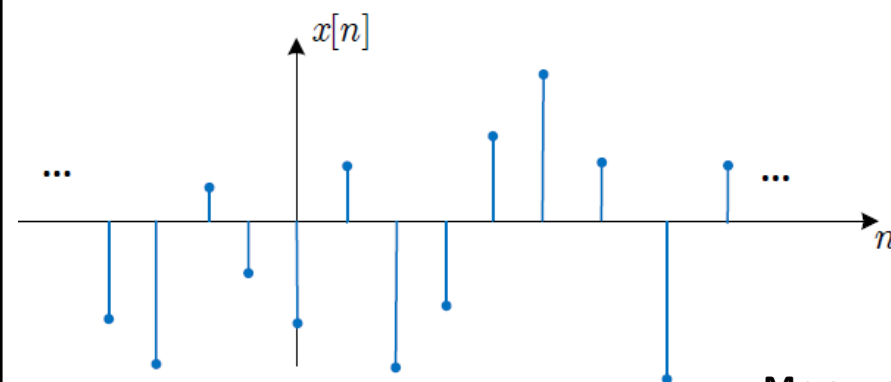
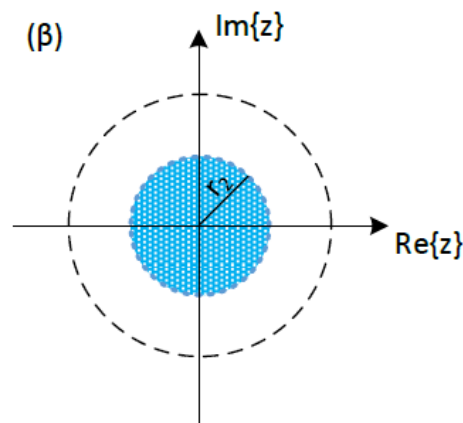
$$x[n] = 0, \\ n < 0$$

Αιτιατό → Εξωστρεφές ROC

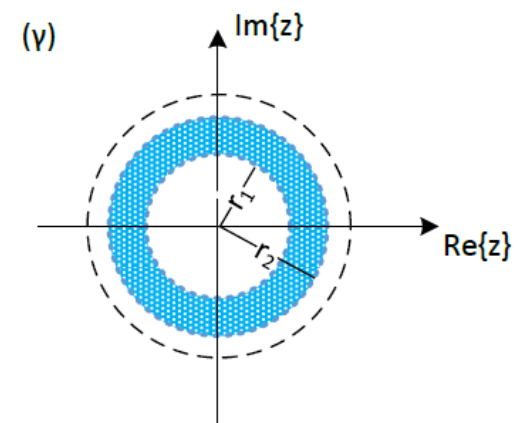


$$x[n] = 0, \\ n > 0$$

Αντι-αιτιατό → Εσωστρεφές ROC



Μη αιτιατό → Δακτυλιοειδές ROC



• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

1. Το ROC μπορεί να είναι α) ένας δακτύλιος, β) μια περιοχή εκτός ενός κυκλικού δίσκου, γ) ένας κυκλικός δίσκος, (δ) όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός ίσως των $|z| = 0$ ή $|z| = \infty$
2. Το ROC **δεν** περιέχει πόλους!
3. Το ROC πρέπει να είναι μια συνεκτική περιοχή του μιγαδικού επιπέδου.
4. Αν το σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο, τότε το ROC περιλαμβάνει όλο το μιγαδικό επίπεδο, πλην ίσως των σημείων $z = 0$ ή $z = \infty$
5. Αν το σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το ROC του είναι εξωστρεφές, δηλ. της μορφής

$$|z| > \max |p_k|$$

με p_k τους πόλους του σήματος

- a) Το $z = \infty$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αιτιατό
- b) Το $z = \infty$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αιτιατό

6. Αν το σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το ROC του είναι εσωστρεφές, δηλ. της μορφής

$$|z| < \min |p_k|$$

με p_k τους πόλους του σήματος

- a) Το $z = 0$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αντι-αιτιατό
- b) Το $z = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αντι-αιτιατό

7. Αν το σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το ROC του είναι ένας δακτύλιος, δηλ. της μορφής

$$|p_i| < |z| < |p_j|$$

με p_i, p_j δυο πόλους του σήματος με $|p_i| < |p_j|$

- Πρέπει ασφαλώς να ικανοποιείται η ιδιότητα 2.

• Ζεύγη Μετασχηματισμών Z

Πεπερασμένης διάρκειας

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	αιτιατό
$\delta[n - n_0], \quad n_0 > 0$	z^{-n_0}	$z \neq 0$	αιτιατό
$\delta[n + n_0], \quad n_0 > 0$	z^{n_0}	$z \neq \infty$	αντι-αιτιατό
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$	αντι-αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $	αιτιατό
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $	αντι-αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$	αιτιατό
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$	αντι-αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $	αιτιατό
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $	αντι-αιτιατό
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	αιτιατό
$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό
$a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	αιτιατό

• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

$$\leadsto |z| > |z_4|$$

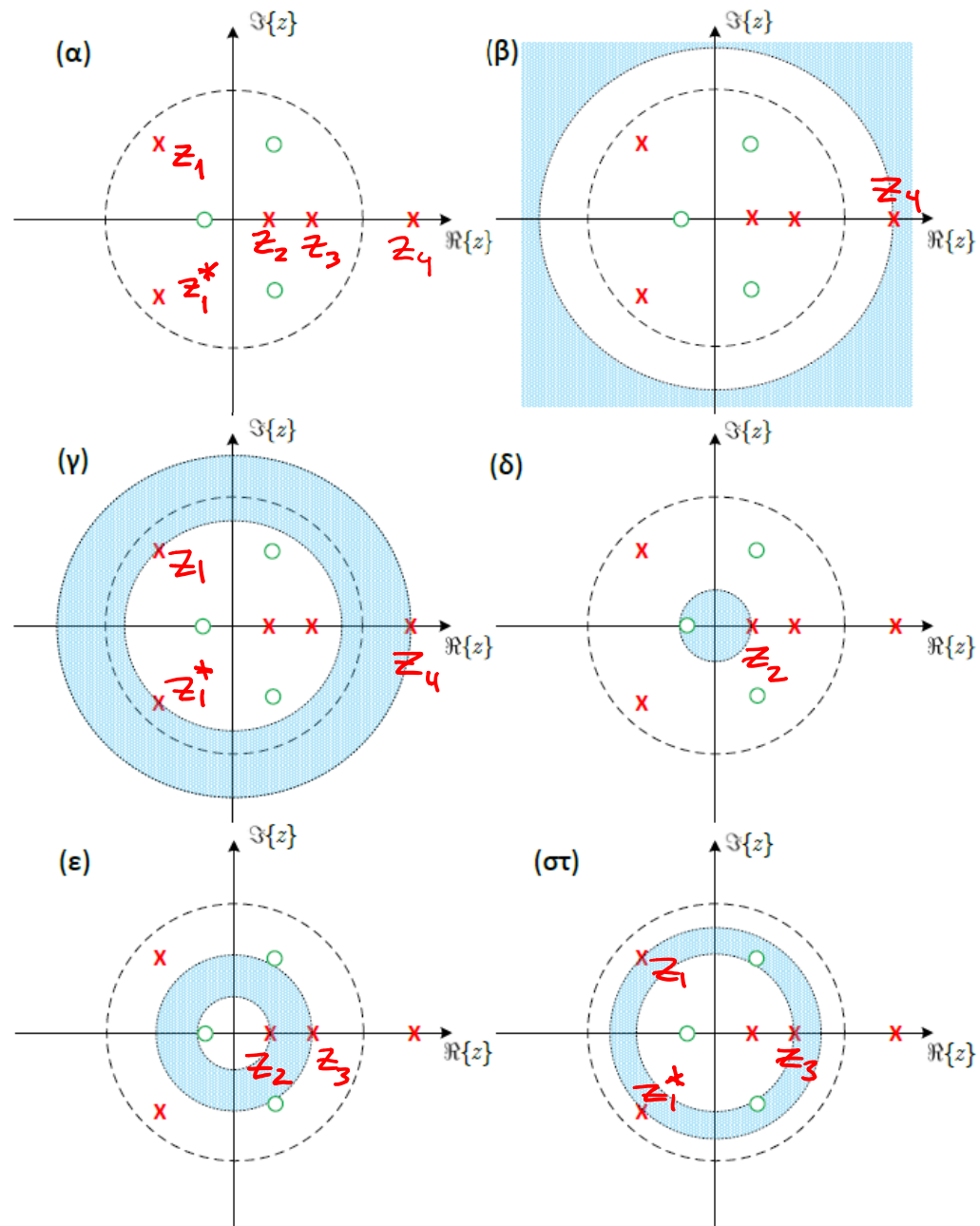
$$\leadsto |z| < |z_2|$$

$$\leadsto |z_1| < |z| < |z_4|$$

$$\leadsto |z_2| < |z| < |z_3|$$

$$\leadsto |z_3| < |z| < |z_1|$$

5 περιοχές σύγκλισης



• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

- Γνωρίζουμε ήδη (διαισθητικά) τη σημασία των πόλων και των μηδενικών στο μετασχ. Z
- Η αναπαράσταση των πόλων και μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο συνιστά το **περίφημο διάγραμμα πόλων-μηδενικών**
- Ας μιλήσουμε λίγο περισσότερο για αυτό το διάγραμμα

- Έστω ότι έχουμε ένα ρητό μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

- Παραγοντοποιώντας

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)}$$

- Προφανώς, τα ξ_k, ψ_l είναι τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα
 - Είναι εμφανές ότι υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι
- Όμως υπάρχει και ο όρος z^{N-M} ! Ας τον δούμε...

• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)}$$

- Αν $N > M$ τότε υπάρχουν επιπλέον $N - M$ μηδενικά στο $z = 0$
- Αν $N < M$ τότε υπάρχουν επιπλέον $M - N$ πόλοι στο $z = 0$
- Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τον **ίδιο αριθμό πόλων και μηδενικών!**

• Αν τώρα

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^N (z - \psi_l)} = \frac{a_0}{b_0} z^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^M \left(1 - \frac{\xi_k}{z}\right)}{\prod_{l=1}^N \left(1 - \frac{\psi_l}{z}\right)}$$

τότε

- Αν $N > M$, τότε $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$, οπότε υπάρχουν επιπλέον $N - M$ μηδενικά στο $z = \infty$
- Αν $N < M$, τότε $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \infty$, οπότε υπάρχουν επιπλέον $M - N$ πόλοι στο $z = \infty$

• Ξανά, όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά!

• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

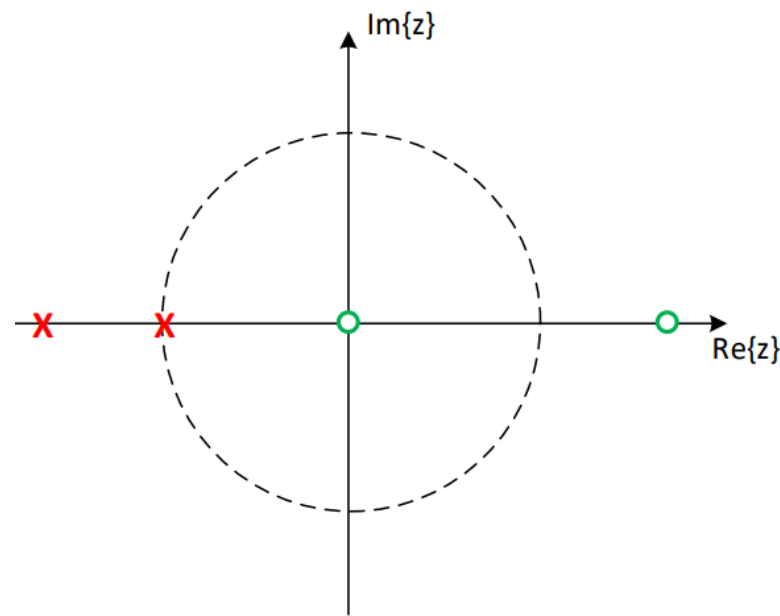
Είναι
$$X(z) = \frac{z^{-1}(z-2)}{z^{-2}(z^2+3z+2)} = \underbrace{z^{-1} \cdot z^2} \cdot \frac{z-2}{(z^2+3z+2)}$$

$$= \frac{z(z-2)}{(z^2+3z+2)}$$

• Μηδενικά: $z(z-2) = 0$ $\begin{matrix} \nearrow z=0 \\ \rightarrow z=2 \end{matrix}$

• Πόλοι: $z^2+3z+2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \rightarrow z=-1 \\ \rightarrow z=-2 \end{matrix}$

2 πόλοι, 2 μηδενικά!



• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

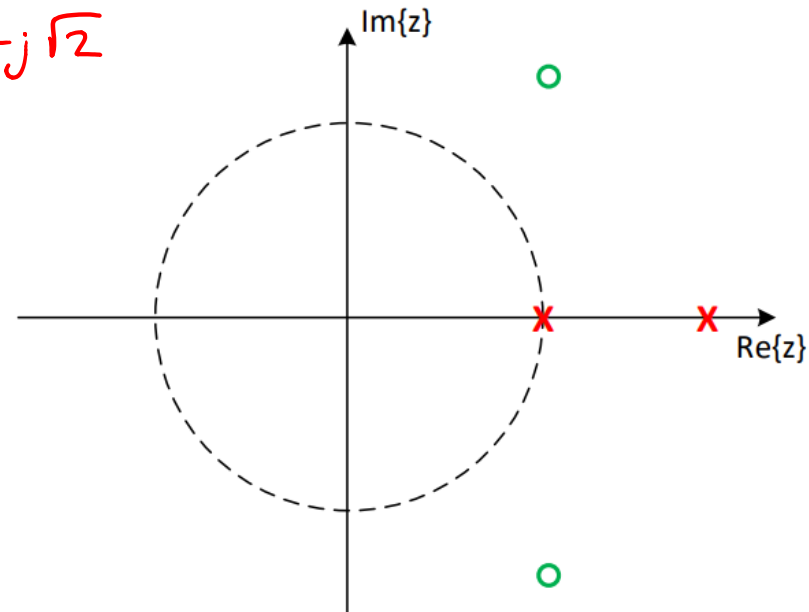
$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Είναι $X(z) = \frac{\cancel{z^{-2}}}{\cancel{z^{-2}}} \cdot \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2}$

• Μηδενικά: $z^2 - 2z + 3 = 0 \rightarrow z = 1 + j\sqrt{2}$
 $\rightarrow z = 1 - j\sqrt{2}$

• Πόλοι: $z^2 - 3z + 2 = 0 \rightarrow z = 1$
 $\rightarrow z = 2$

2 πόλοι, 2 μηδενικά!



• Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z + 1}$$

Είναι

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z + 1} = \frac{z(z - 3)}{(z + 1)}$$

Μηδενικά: $z(z - 3) = 0 \rightarrow z = 0$
 $\rightarrow z = 3$

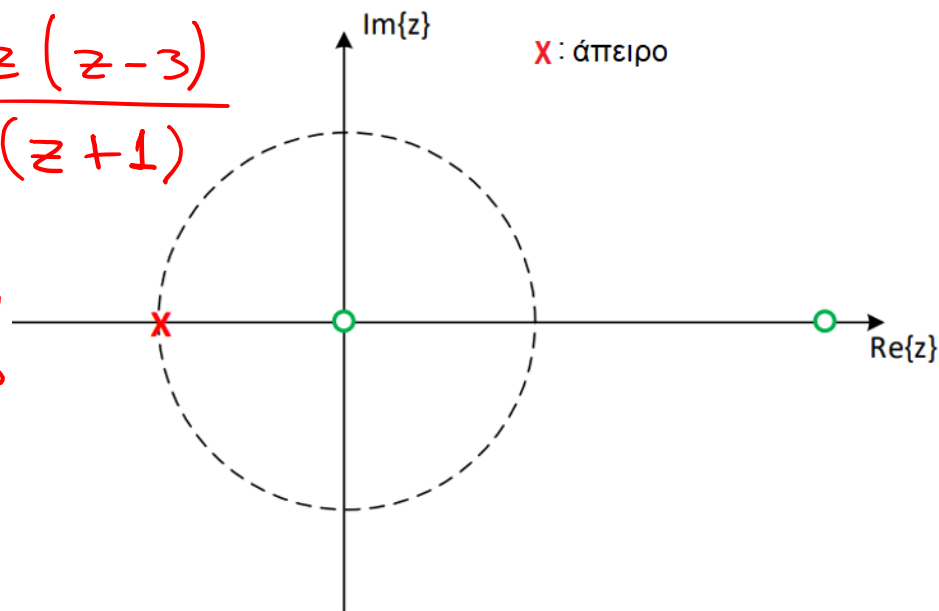
Πόλοι: $z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1$

Όπως $X(z) = z \cdot \cancel{z} \left(1 - \frac{3}{z}\right)$
 $\quad \quad \quad \cancel{z} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$

$$= z \frac{1 - \frac{3}{z}}{1 + \frac{1}{z}}$$

$\leadsto \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \infty$, άρα έχουμε έναν πόλο στο $z = \infty$

2 πόλοι, 2 μηδενικά!



• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Ορισμός:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- Στα πλαίσια των σημάτων και συστημάτων χρησιμοποιούνται εναλλακτικά τρεις τρόποι υπολογισμού του αντιστρόφου

1. Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρές
2. Τη μακρά διαίρεση
3. Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Θα επικεντρωθούμε μόνο στην τελευταία, καθώς σχετίζεται στενά με τα ΓΧΑ συστήματα και την ιδιότητα της συνέλιξης

- Για κάθε μέθοδο μπορείτε να δείτε τις σημειώσεις σας

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Η γενική μορφή ενός μετασχ. Z των σημάτων που είδαμε είναι

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

- Μπορούμε να διασπάσουμε το παραπάνω κλάσμα ως

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^L \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

όπου

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

$$C_m = \frac{1}{(L-m)!(-d_i)^{L-m}} \left\{ \frac{d^{L-m}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i}$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

Παρατηρώ ότι ο αριθμητής είναι ίσα βαθμύ πολλαπλα με τον παρονομαστή, άρα δεν μπορώ να εφαρμόσω Αναπτ. σε Μ. Κλάσματα.
Πρέπει πρώτα να διαφύσω τα πολλαπλά :

$$\begin{array}{l|l} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ - (z^{-2} - 3z^{-1} + 2) & 2 \\ \hline \textcircled{1} z^{-2} + 5z^{-1} - 1 & \end{array} \quad \leadsto \quad X(z) = 2 + \frac{\overbrace{-1 + 5z^{-1}}^{G(z)}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

$$\text{Οπότε} \quad X(z) = 2 + G(z) = 2 + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

$$A = G(z) \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2}$$

$$= \frac{-1 + 5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{9}{-1} = -9$$

$$B = G(z) (1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \dots = 8$$

Αρα

$$X(z) = 2 + \frac{-9}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

• $|z| > \frac{1}{2}$

• $|z| > 1$

• $|z| < \frac{1}{2}$ $\rightarrow R_1$

• $|z| < 1$ $\leftarrow R_2$

$$R_1 \cap R_2 = \left\{ |z| < \frac{1}{2} \right\}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**

- Παράδειγμα:

Απο πίνακα, $x[n]$,

$$x[n] = 2\delta[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 8(1)^n u[-n-1].$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 (1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

Θα είναι

$$X(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{\Gamma}{1 - z^{-1}}$$

Λρα

$$\Gamma = X(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

$$B = X(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{-1} = -1$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

• Παράδειγμα:

$$A = \frac{1}{(2-1)! \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1}} \cdot \frac{d}{dz^{-1}} \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z) \Big|_{z^{-1}=2}$$

$$= -2 \frac{d}{dz^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \dots = -2$$

Άρα

$$X(z) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{4}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

$$C_m = \frac{1}{\underbrace{(L-m)!}_{2} \underbrace{(-d_i)^{L-m}}_{1}} \left\{ \underbrace{\frac{d^{L-m}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)]}_{1} \right\} \Big|_{z=d_i}$$

$$n a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Παράδειγμα:

Καταλήγαμε στο

$$X(z) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{4}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$R_1: \begin{cases} |z| > \frac{1}{2} \\ |z| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$R_2: \begin{cases} |z| > \frac{1}{2} \\ |z| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$R_3: \begin{cases} |z| > 1 \\ |z| < 1 \end{cases}$$

$$\sim R = \{|z| > 1\} = R_1 \cap R_2 \cap R_3$$

$$\left\{ na^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \quad (2) \right.$$

Οπότε

$$x[n] = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - z^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \right\} + 4 u[n] \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1} \cdot 2z}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = 2z \cdot \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \xleftrightarrow[|z| > \frac{1}{2}]{(2)}$$

$$\xleftrightarrow{(2)} 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1], \quad \text{δηλ. } \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \xleftrightarrow{Z} 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1].$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Παράδειγμα:

Συνολικά λαιόν, η ① δίνει

$$x[n] = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + 4u[n].$$

Σημείωση: παρατηρούμε ότι για $n = -1$, η παράσταση

$$-2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$$

δίνει αποτέλεσμα μηδέν. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$x[n] = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n] + 4u[n].$$

- Ο Μετασχ. Z είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αναπαράστασης σημάτων
- Η εμπειρία σας ως τώρα ίσως σας έχει αποκαλύψει τη χρήση του για ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων...
 - ...μέσω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο $\rightarrow$ γινόμενο στο χώρο του Z
- Ας «πλεύσουμε» στο χώρο των συστημάτων με τον ίδιο τρόπο που κάναμε και στο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ξεκινάμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης και ιδιοτιμής!
- Μπορούμε να δείξουμε εύκολα (do it! ☺) ότι το σήμα $x[n] = A(re^{j\omega})^n = Az^n$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος
- Η ιδιοτιμή του δίνεται από την εξίσωση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

η οποία βλέπετε ότι αποτελεί το Μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης του ΓΧΑ συστήματος

- Ο μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

δε θα μπορούσε να μην έχει κι αυτός το δικό του όνομα:

συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)

- Η «έκδοση» του μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα**, όπως ήδη γνωρίζετε
- Θα θυμάστε ίσως ότι τα ΓΧΑ συστήματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:
 - Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)
 - Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)

• FIR συστήματα

- Περιγράφονται από το ζεύγος

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k], \quad N_1, N_2 > 0 \leftrightarrow H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k}$$

- Βλέπετε ότι αποτελείται από θετικές και αρνητικές δυνάμεις του z

- Μπορούμε να το γράψουμε ως ($m = k + N_1$ και πολλ/σμος με $\frac{z^{N_2}}{z^{N_2}}$):

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z^{N_2}} \sum_{m=0}^{N_1+N_2} b_{m-N_1} z^{N_1+N_2-m} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} \\ &= \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} z \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)}{z^{N_2}} \\ &= \frac{b_{-N_1} z^{N_1+N_2} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)}{z^{N_2}} \\ &= z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right) \end{aligned}$$

- Παρατηρήστε ότι έχει N_2 πόλους στο $z = 0$ και N_1 πόλους στο άπειρο

- ROC: $\{0 < |z| < \infty\}$

- Επίσης έχει $N_1 + N_2$ μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

• FIR συστήματα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Αν $N_1 = 0$, τότε έχουμε ένα **αιτιατό** FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_2 πόλους στο $z = 0$

- ROC: $\{|z| > 0\}$

- Επίσης έχει N_2 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

- Αν $N_2 = 0$, τότε έχουμε ένα **αντι-αιτιατό** FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^0 b_k z^{-k} = b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} (z - c_k) = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_1 πόλους στο $z = \infty$

- ROC: $\{|z| < \infty\}$

- Επίσης έχει N_1 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

- FIR συστήματα

- Συμπεράσματα

- Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (παρά μόνο στο μηδέν)
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$
- Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (παρά μόνο στο άπειρο)
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$
- Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$

• IIR συστήματα

- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι:
 - Ένα **αιτιατό** IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο **άπειρο**
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$
 - Ένα **αντι-αιτιατό** IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο **μηδέν**
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$
 - Ένα **μη-αιτιατό** IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες
- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^M b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

↕ Z

$$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z)$$

$$Y(z) = X(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2})$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}, |z| > 0$$

Είναι $H(z) = \frac{z^2}{z^2} (1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = \frac{z^2 + 2z - 3}{z^2}$

Πόλοι: $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$, διπλός πόλος

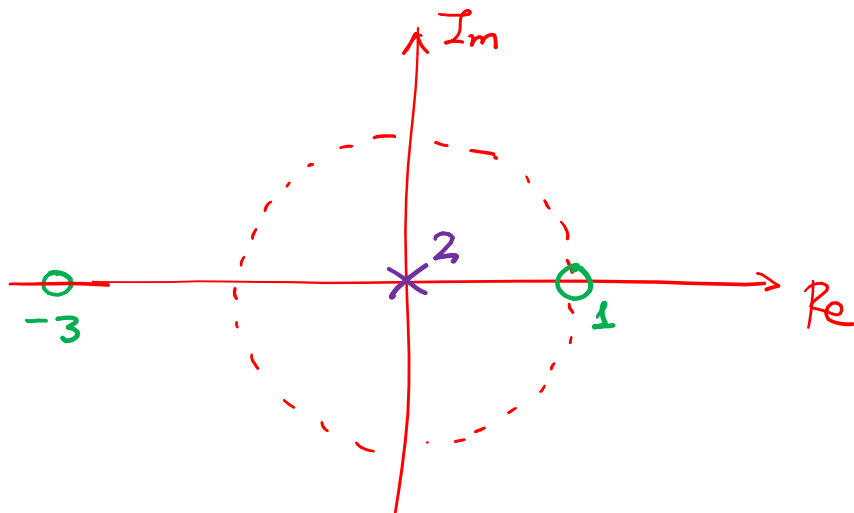
- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

Μηδενικά: $z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$$= \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow z_1 = -3$$

$$\rightarrow z_2 = 1$$



Απόκριση ηλίκτας: επειδή ο μοναδ. κύκλος $\in$ ROC, μπορούμε να βρούμε το μεταρχ. Fourier θέτοντας $z = e^{j\omega}$.

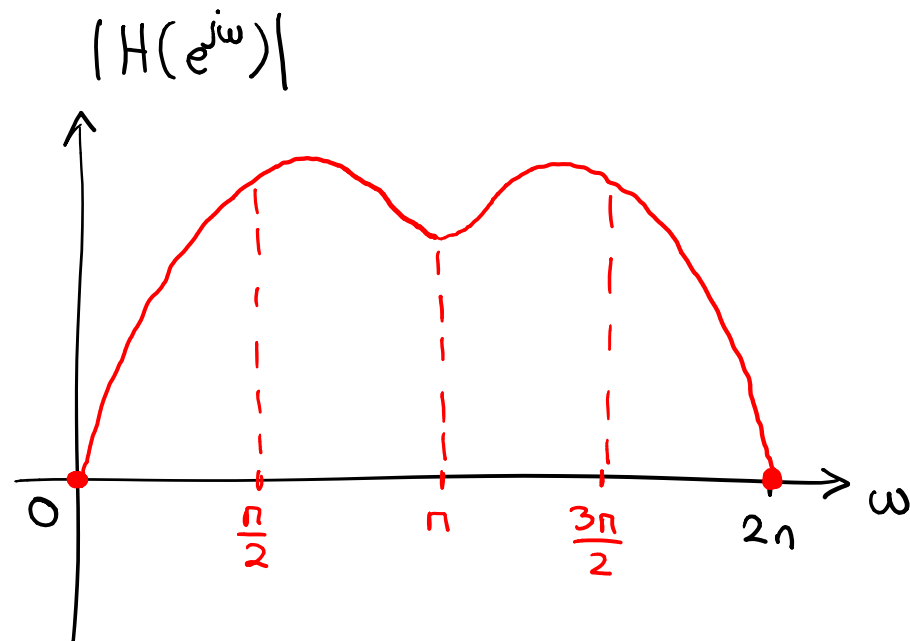
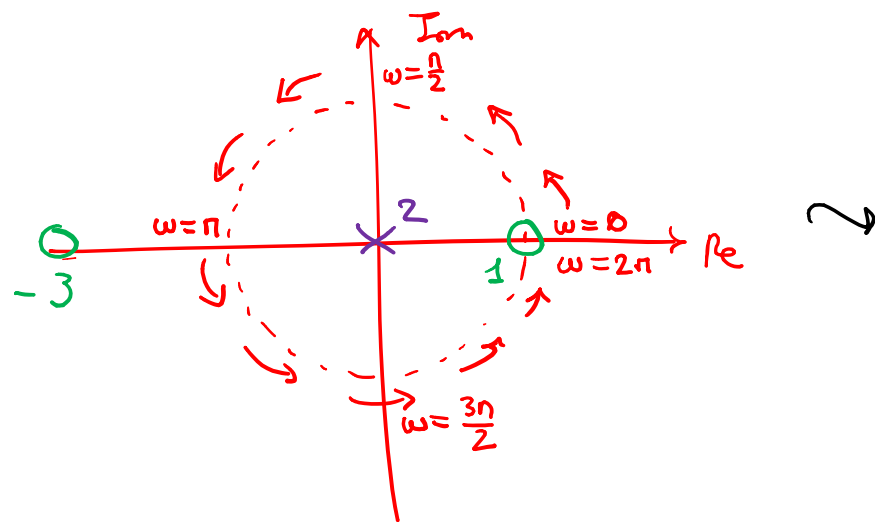
Άρα $H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} - 3e^{-j2\omega}$: απόκριση σε συχνότητα

και $|H(e^{j\omega})| = |1 + 2e^{-j\omega} - 3e^{-j2\omega}|$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

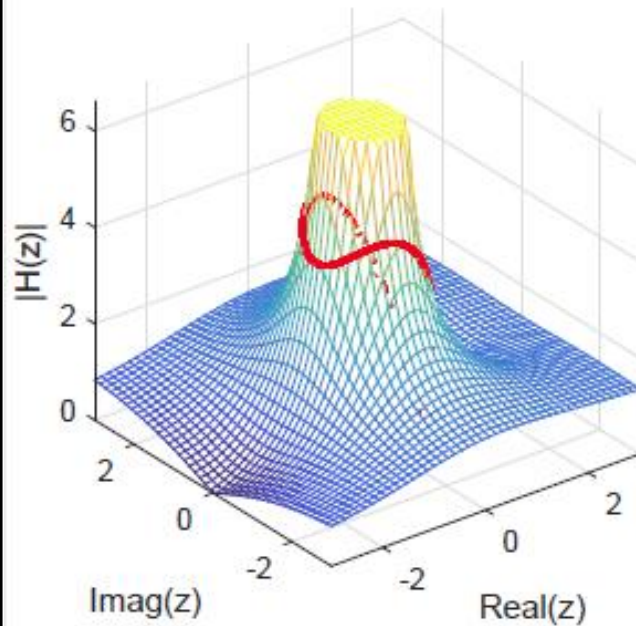
• Παράδειγμα:

Η απόκριση πλάτους μπορεί να σχεδιαστεί "χονδρικά" αν "ληφτεί-
 βαρ-ε" πάνω στο μοναδιαίο κύκλο από τη συχνότητα $\omega = 0$ ως
 τη συχνότητα $\omega = 2\pi$, ελέγχοντας αν "εκεί γύρω" υπάρχουν πόλοι
 ή μηδενικά!

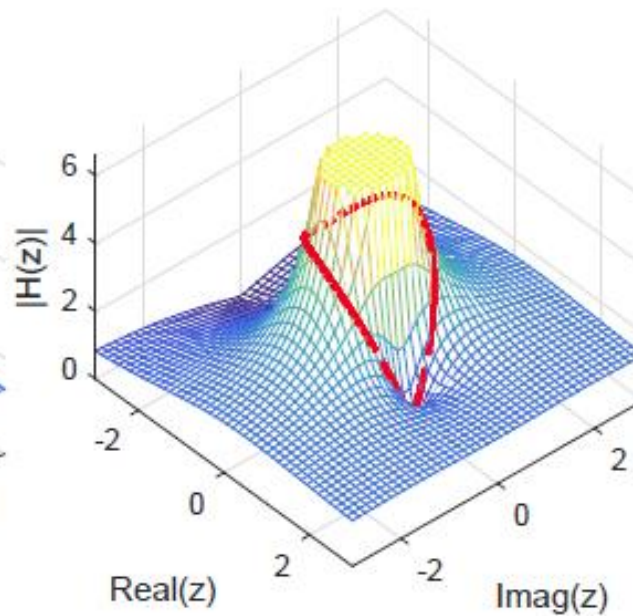


- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών
- Παράδειγμα:

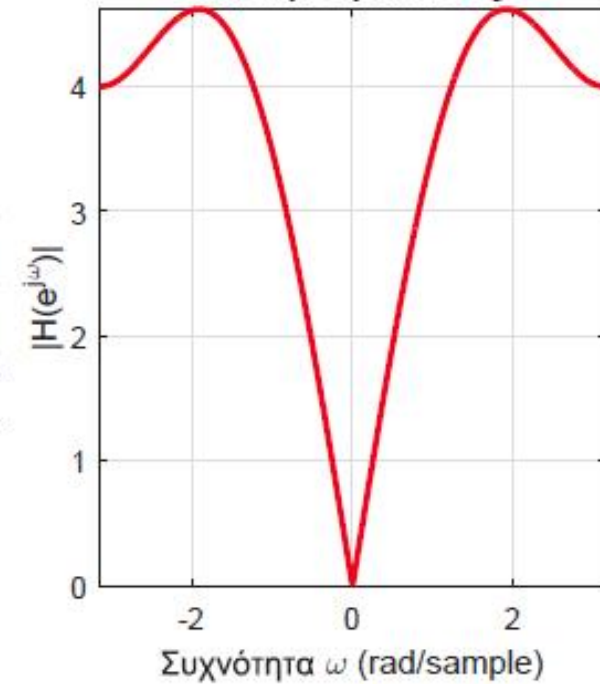
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



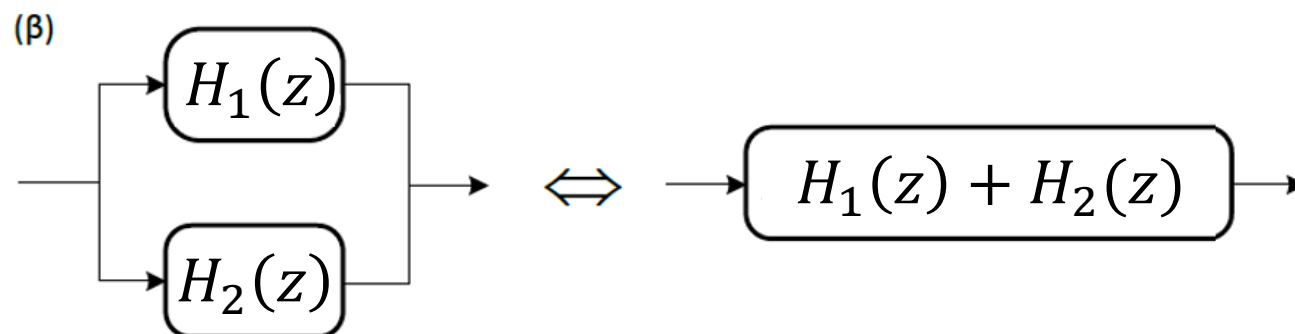
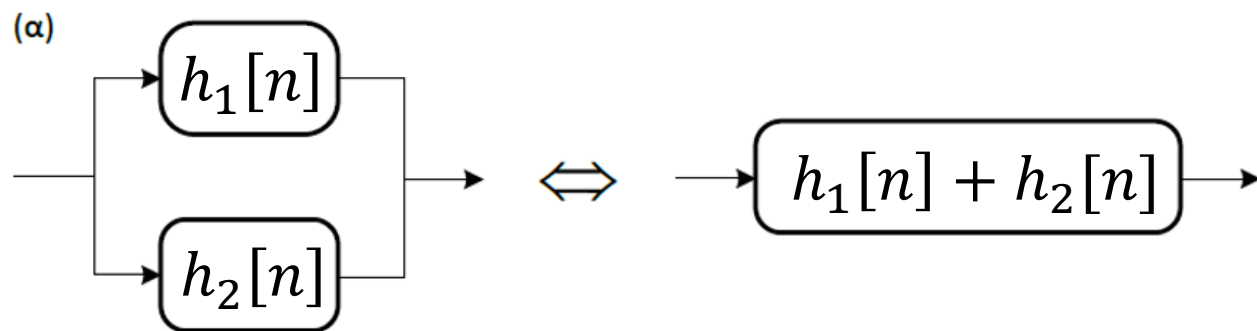
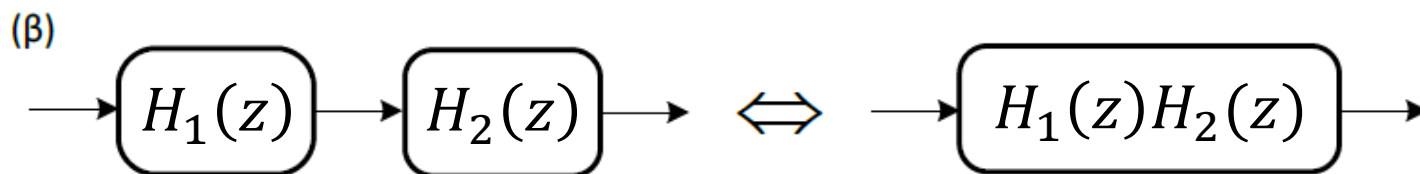
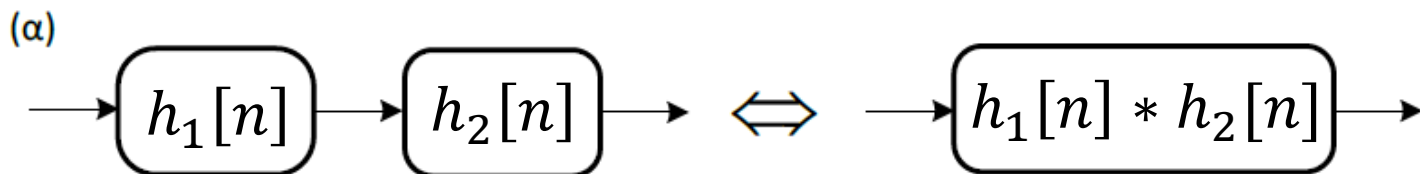
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$



Απόκριση Πλάτους



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Διατάξεις Συστημάτων



- **Ευστάθεια στο χώρο του Z**

- Έχουμε δείξει ότι αν $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν $|\gamma_i| < 1, \forall i$, όπου γ_i οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του $h[n]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall \omega$



- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

- Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

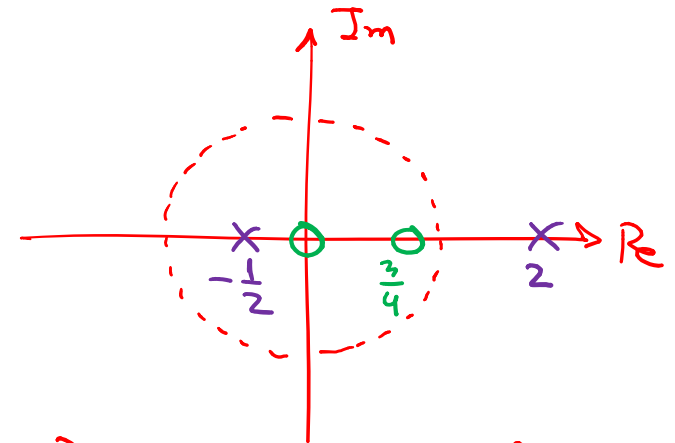
$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

$$\text{Είναι } H(z) = \frac{2z^2 - \frac{3}{2}z}{(z-2)(z+\frac{1}{2})} = \frac{z(2z - \frac{3}{2})}{(z-2)(z+\frac{1}{2})}$$

$$\text{Πόλοι: } (z-2)(z+\frac{1}{2})=0 \rightarrow \begin{aligned} & z_1 = 2 \\ & z_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Μηδενικά: } z(2z - \frac{3}{2})=0 \rightarrow \begin{aligned} & z_1 = 0 \\ & z_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



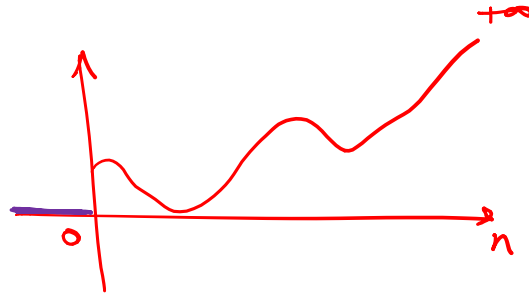
Πιθανά πεδία σύγκλισης: α) $|z| > 2$ β) $\frac{1}{2} < |z| < 2$ γ) $|z| < \frac{1}{2}$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

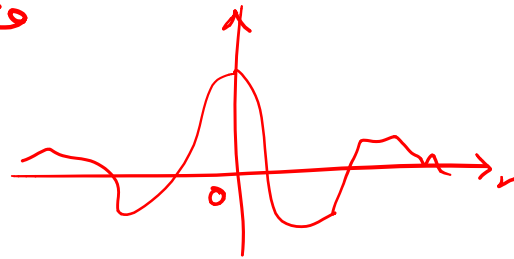
$\leadsto |z| > 2$: ασταθές, αυταυτός

Αναφέρνω $h[n]$ ως



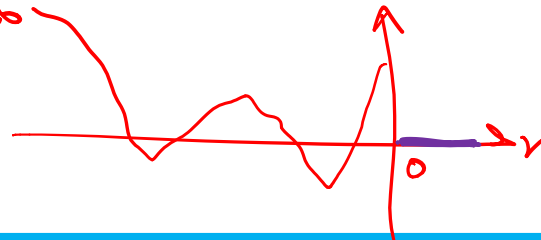
$\leadsto \frac{1}{2} < |z| < 2$: ευσταθές, γιατί ο μοναδ. κύκλος $\in$ ROC,
 η αυταυτός

Αναφέρνω $h[n]$ ως



$\leadsto |z| < \frac{1}{2}$: ασταθές, αυταυτός

Αναφέρνω $h[n]$ ως



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

Αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα το $H(z)$:

$$H(z) = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ με } A = H(z)(1-2z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = 1$$

$$B = H(z)(1+\frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-2} = 1$$

οπότε

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

α) Για να είναι ευσταθές, πρέπει $\frac{1}{2} < |z| < 2$, δηλ. $|z| < 2$ και $|z| > \frac{1}{2}$.

Άρα από νίξεις, $h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

β) Για να είναι ασταθές, πρέπει $|z| > 2$, δηλ. $|z| > 2$ και $|z| > \frac{1}{2}$.

Άρα από νίξεις, $h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

- Παράδειγμα:

Τέλος, μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα προκύπτει ως:

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2} z^{-1}}{1 - \frac{3}{2} z^{-1} - z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Leftrightarrow$$

$$Y(z) \left(1 - \frac{3}{2} z^{-1} - z^{-2}\right) = X(z) \left(2 - \frac{3}{2} z^{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$Y(z) - \frac{3}{2} z^{-1} Y(z) - z^{-2} Y(z) = 2X(z) - \frac{3}{2} z^{-1} X(z)$$

και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόμισης, παίρνουμε

$$y[n] - \frac{3}{2} y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2} x[n-1].$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

