

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 10^Η

- Μετασχηματισμός Z

Τι περιέχει το ΗΥ370?



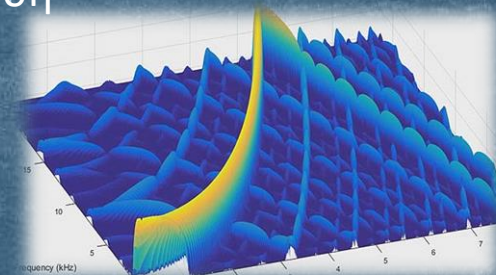
1^ο Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier



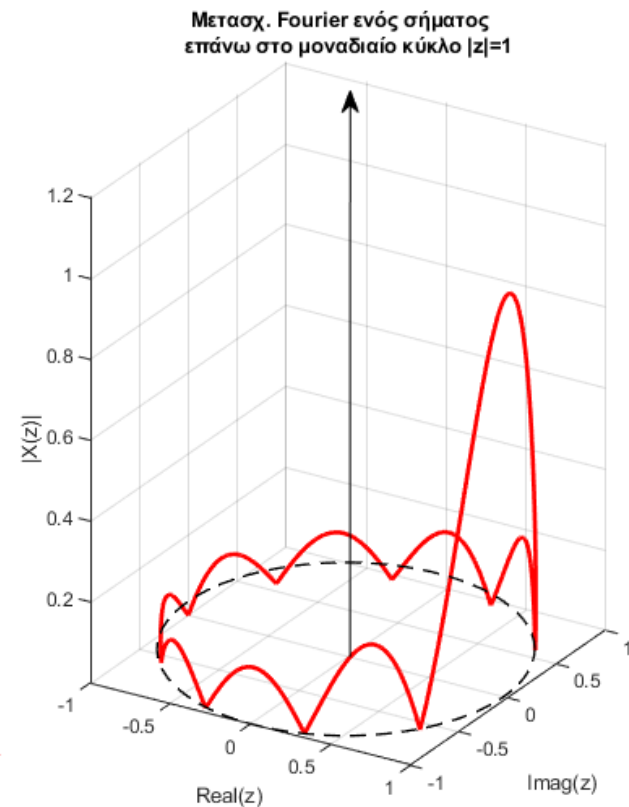
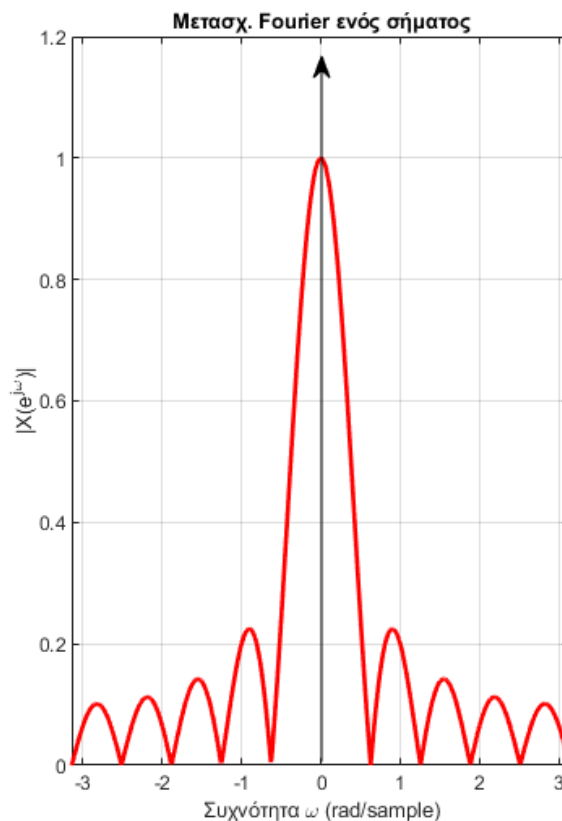
2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας
- Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:
 1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 2. Υπάρχουν συστήματα (a.k.a κρουστικές αποκρίσεις) που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα
- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνотικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!
- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό?
- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

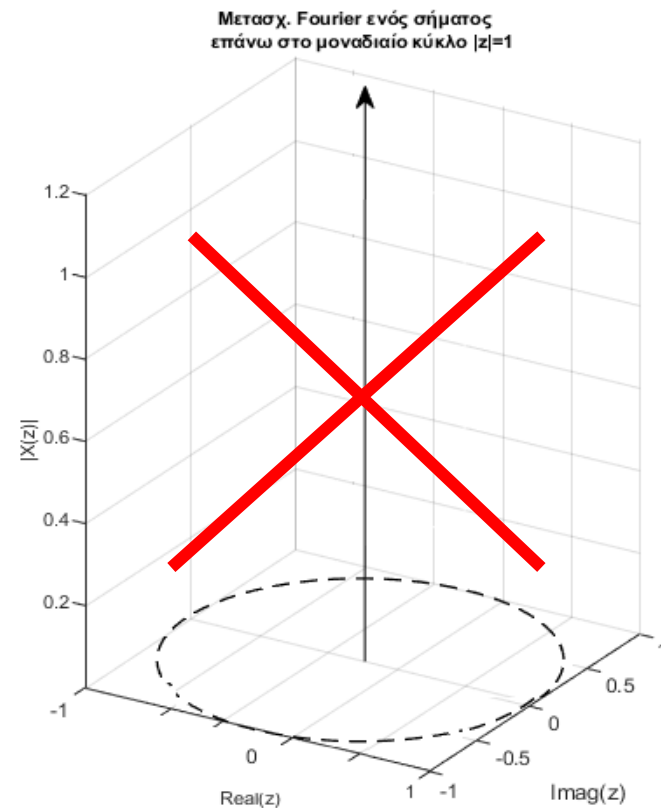
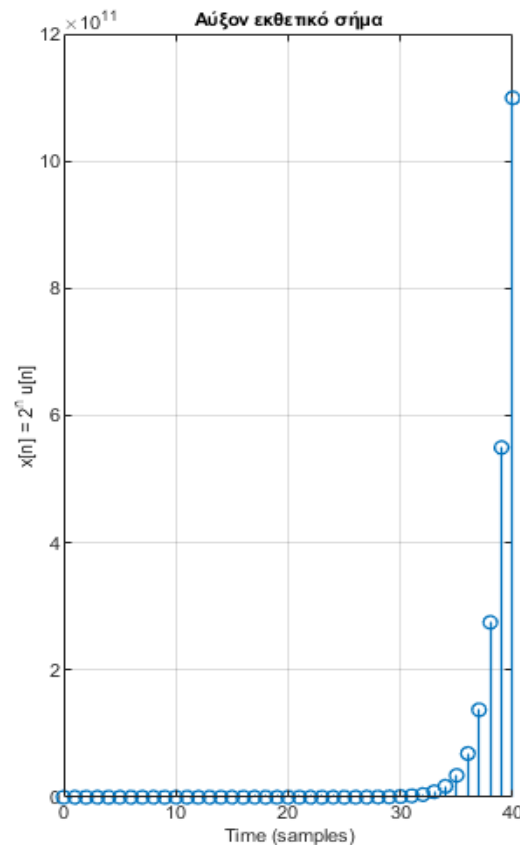
- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους $e^{-j\omega n}$
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον μοναδιαίο κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου
- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα
- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
 - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?



- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους
- Διαφορετικού πλάτους ίσως?



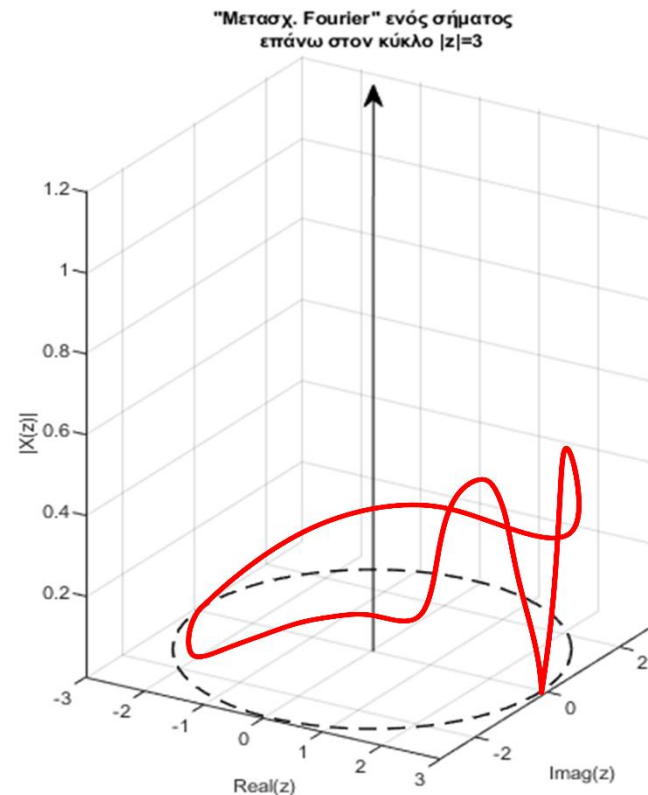
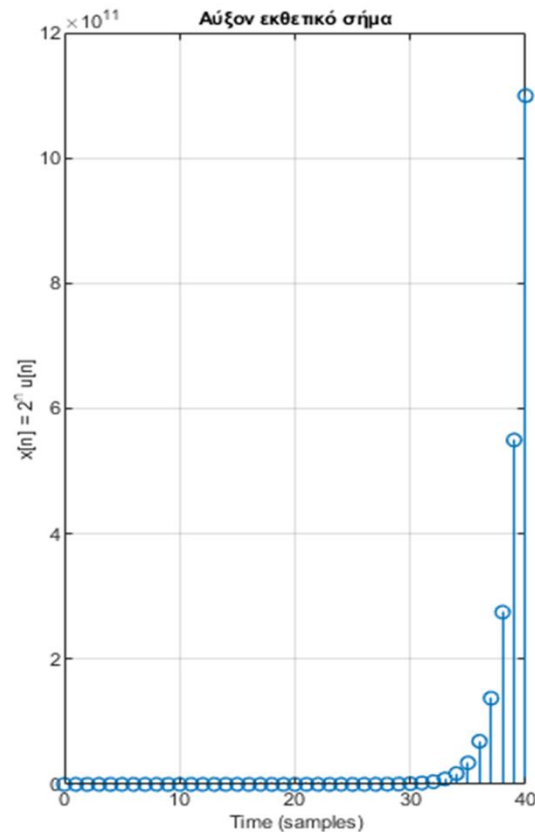
- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$(re^{j\omega})^{-n}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r



- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$(re^{j\omega})^{-n}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προφανώς όταν

$$|X(re^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
 - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη
- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n] = 2^n u[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2^n}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2}{r} \right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, |z| > 2$$

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n u[n]) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |a z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{a}{z} \right| < 1 \Leftrightarrow$$

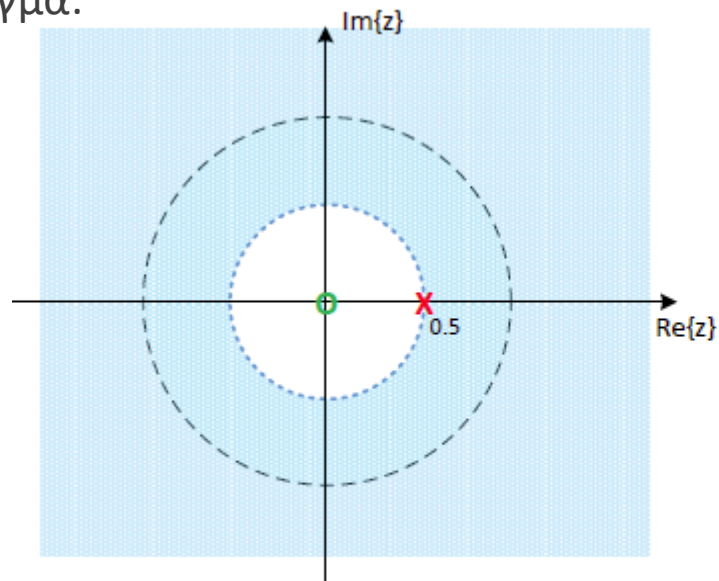
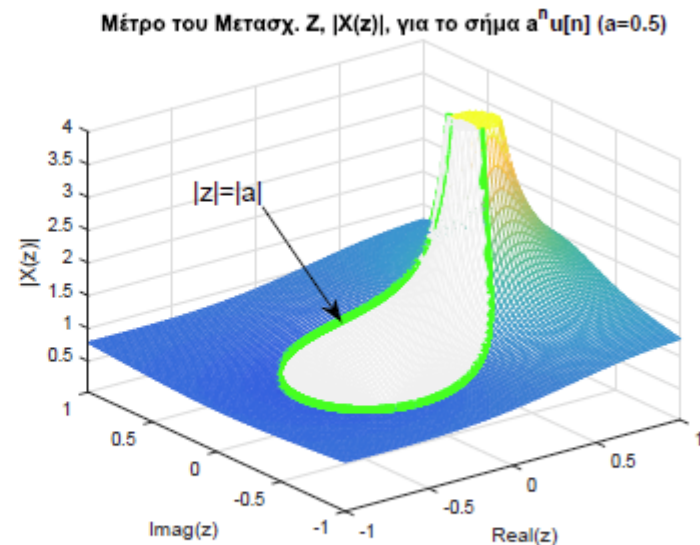
$$\boxed{\begin{array}{c} \uparrow \text{Περιοχή} \\ |z| > |a| \\ \downarrow \text{Σύγκλιση} \end{array}}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \frac{1}{1-b}, \quad \text{ανν} \\ |b| < 1$$

• Παράδειγμα:

$$a = \frac{1}{2}$$

(α) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$ 

(β) Μέτρο μετασχ. Z.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z - a}$$

Μηδενικαί : $X(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Πόλοι : $X(z) \rightarrow \infty \Leftrightarrow z - a = 0 \Leftrightarrow z = a$

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$

Είναι

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a^n u[-n-1]) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n z^{-n}) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (a z^{-1})^n = - \sum_{k=1}^{+\infty} (a z^{-1})^{-k} \\
 &= - \sum_{k=1}^{+\infty} (\bar{a}^{-1} z)^k = - \frac{\bar{a}^{-1} z}{1 - \bar{a}^{-1} z}, \text{ όταν } |\bar{a}^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

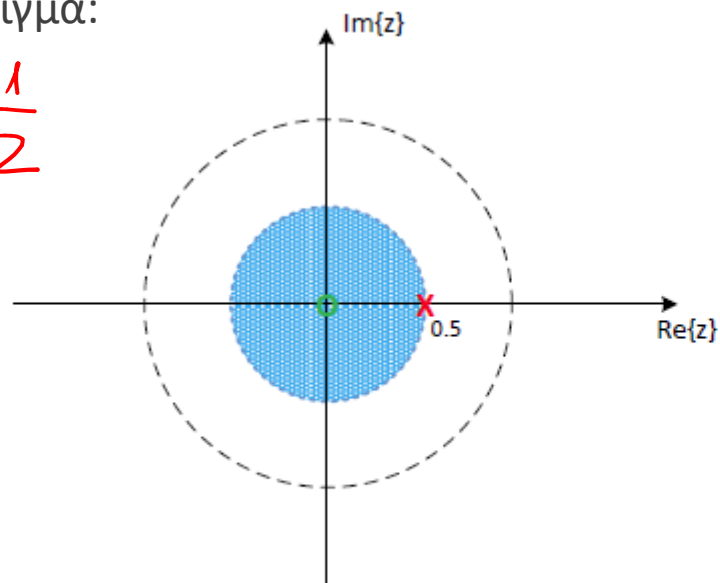
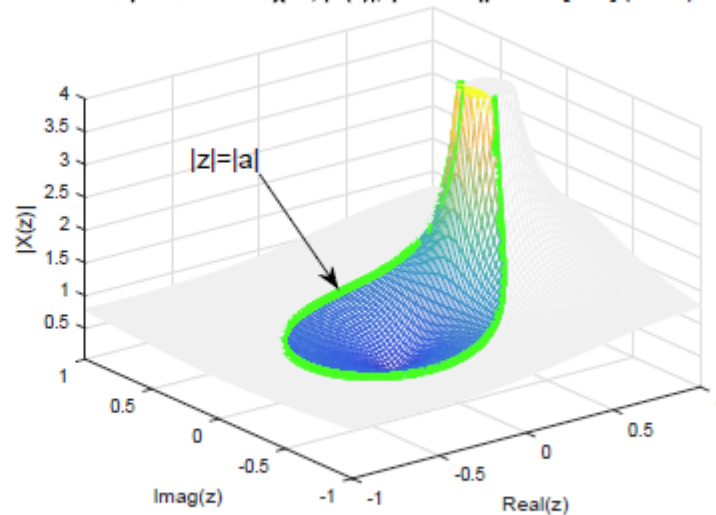
$$\Leftrightarrow |\bar{a}^{-1}| \cdot |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|. \hookrightarrow \text{ROC}$$

Είναι

$$X(z) = \frac{-\bar{a}^{-1} z}{1 - \bar{a}^{-1} z} = \frac{\cancel{-\bar{a}^{-1} z}}{\cancel{-\bar{a}^{-1} z} (-a z^{-1} + 1)} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \cdot \left(\sum_{n=N_1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{N_1}}{1-a}, |a| < 1 \right)$$

• Παράδειγμα:

$$a = \frac{1}{2}$$

(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$ Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $-a^n u[-n-1]$ ($a=0.5$)(β') Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|.$$

$$\text{Μηδενικό: } z = 0$$

$$\text{Πόλοι: } z - a = 0 \Leftrightarrow z = a.$$

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n u[n] - b^n u[-n-1]) z^{-n}$$

δύο ηρωχ.
ναφασ.

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-b^n u[-n-1]) z^{-n}$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

$|z| > |a| \quad |z| < |b|$

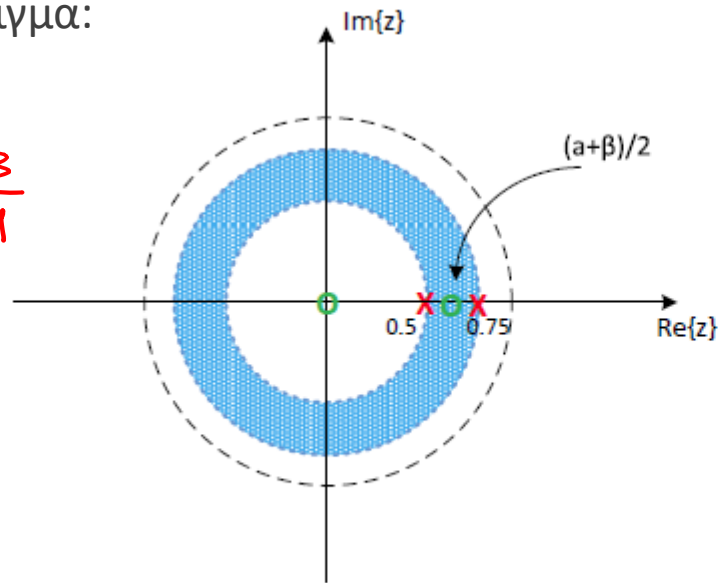
Πεδίο σύγκλισης: $\leadsto |a| > |b|$, η τομή των δύο ηρωχών σύγκλισης είναι το κενό σύνολο: $ROC = \emptyset$

$\leadsto |a| < |b|$, τότε η τομή τους είναι $|a| < |z| < |b|$ και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης.

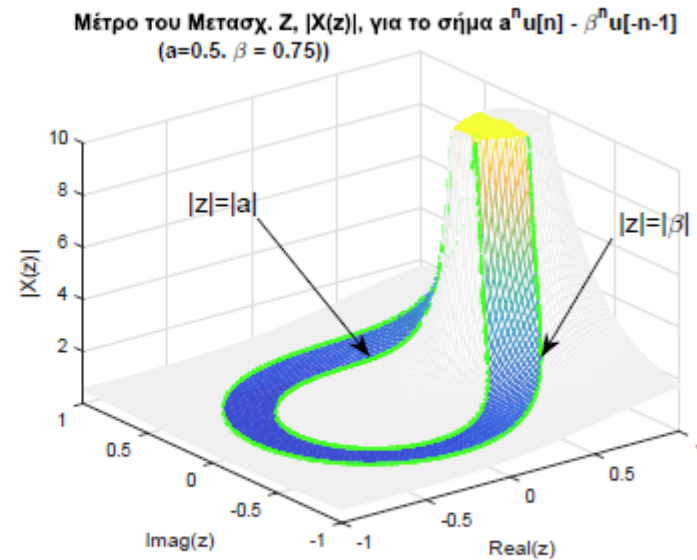
- Παράδειγμα:

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{3}{4}$$



(α') Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



(β') Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Είναι

$$X(z) = \frac{2 - (a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{z^2}{z^2} \frac{2 - (a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} =$$

$$= \frac{2z^2 - (a+b)z}{(z-a)(z-b)}$$

Μηδενικά: $2z^2 - (a+b)z = 0 \Rightarrow z=0$ και $z = \frac{a+b}{2}$.

Πόλοι: $(z-a)(z-b) = 0 \Rightarrow z=a$ και $z=b$.

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = u[n]$

Είναι

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \text{ αν} \end{aligned}$$

$$|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \leftarrow \text{ROC}$$

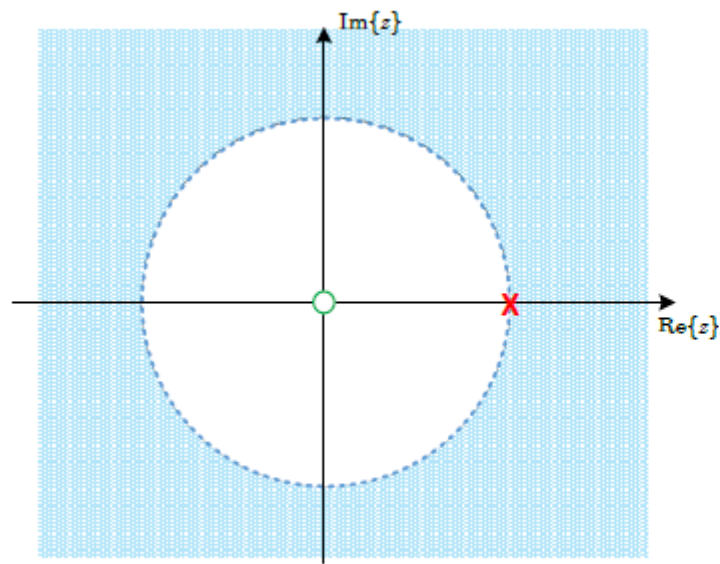
Αρα

$$u[n] \xleftrightarrow{\Sigma} \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

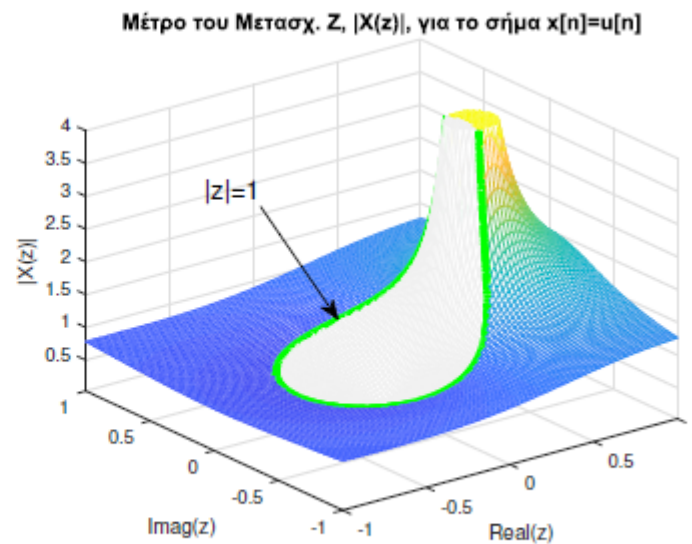
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

$$|a| < 1$$

- Παράδειγμα:



(α) Περιοχή σύγκλισης.

(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = u[n]$.

Είναι
$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Μηδενιστές: $z = 0$

Πόλοι: $z-1=0 \Leftrightarrow z=1.$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

Είναι

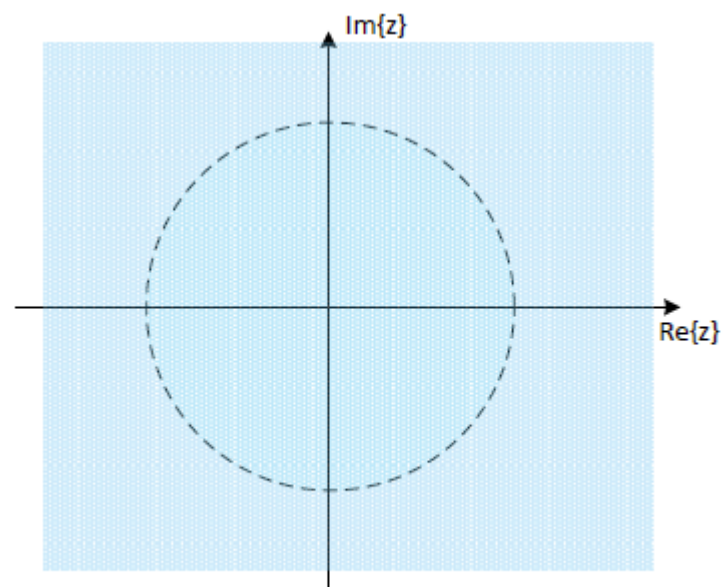
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

$\begin{cases} 1, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$

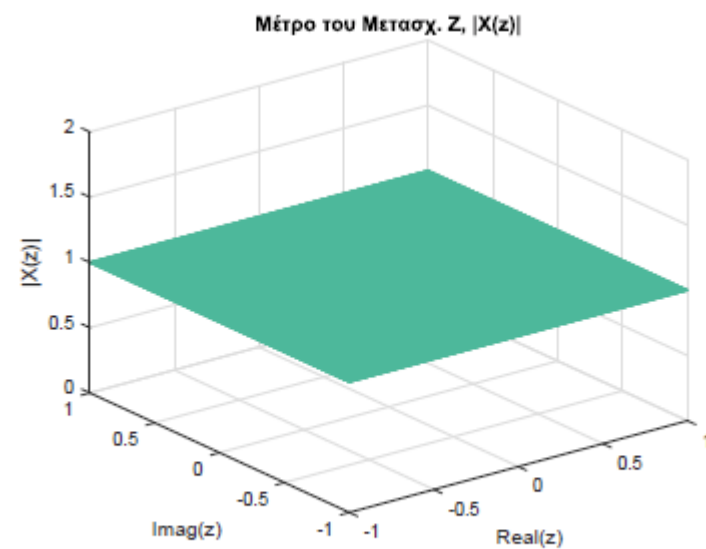
Άρα

$$\delta[n] \xrightarrow{Z} 1, \forall z$$

- Παράδειγμα:



(α') Πεδίο σύγκλισης.



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n]$.

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] z^{-n}$$

$$\begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$= z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}} = \frac{1}{\underbrace{z \cdot z \cdot z \dots z}_{n_0 \text{ φορές}}}$$

~ αν $n_0 > 0$, $X(z) = \frac{1}{z^{n_0}}$, έχει πόλο στο $z=0$

και μηδενικά στο άπειρο γιατί $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$

ROC: $|z| > 0 \leftarrow$

~ αν $n_0 < 0$, $X(z) = z^{n_0}$, έχει πόλο στο άπειρο και

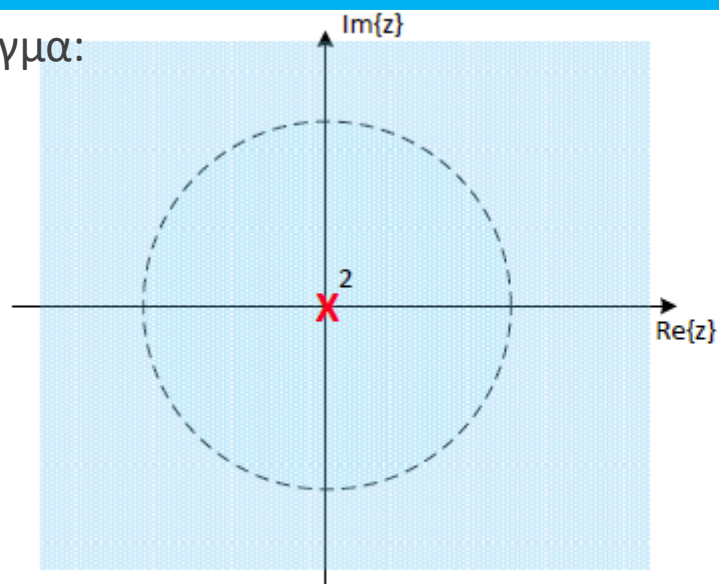
μηδενικά στο $z=0$.

ROC: $|z| < \infty \leftarrow$

$$z^{n_0} = 0 \Rightarrow z = 0, \quad n_0 \text{ φορές}$$

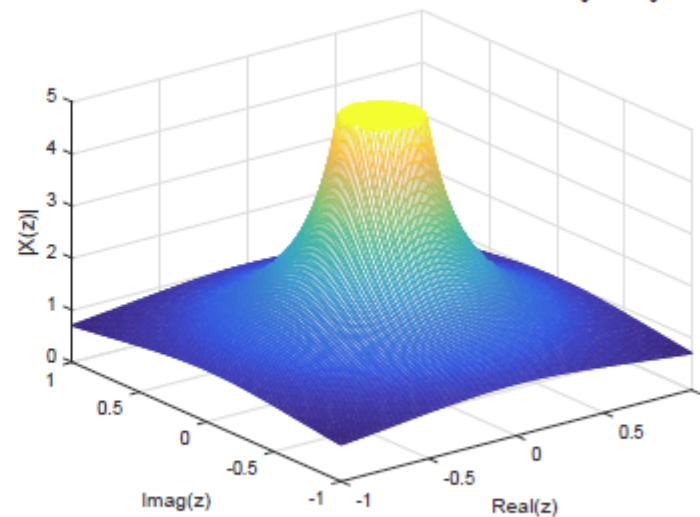
- Παράδειγμα:

$$n_0 = 2$$



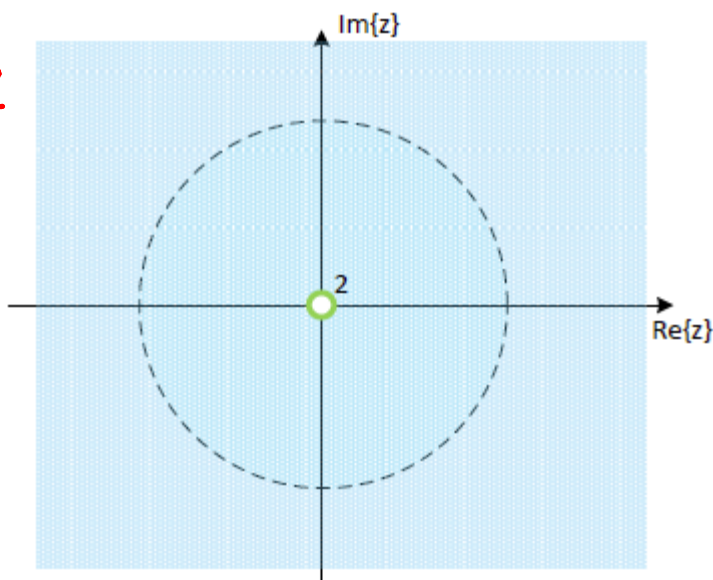
(α') Πεδίο σύγκλισης.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $x[n] = \delta[n-n_0]$, με $n_0 = 2$



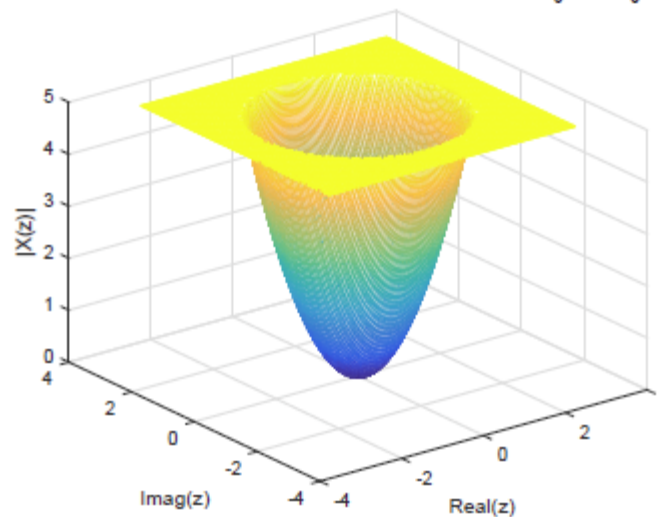
(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = 2$.

$$n_0 = -2$$



(α') Πεδίο σύγκλισης.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, του σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?

- ΌΧΙ!

- Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$


• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Για το σήμα $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$ δείξαμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Ας βάλουμε τιμές στον πόλο a , κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών
- Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$
- Δείτε τι συμβαίνει...

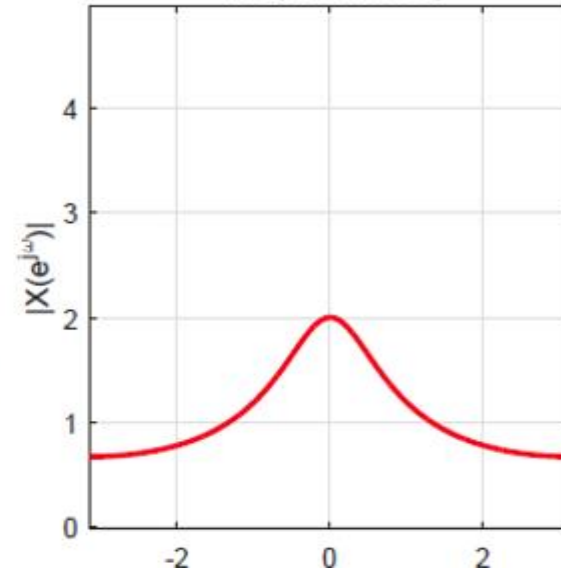
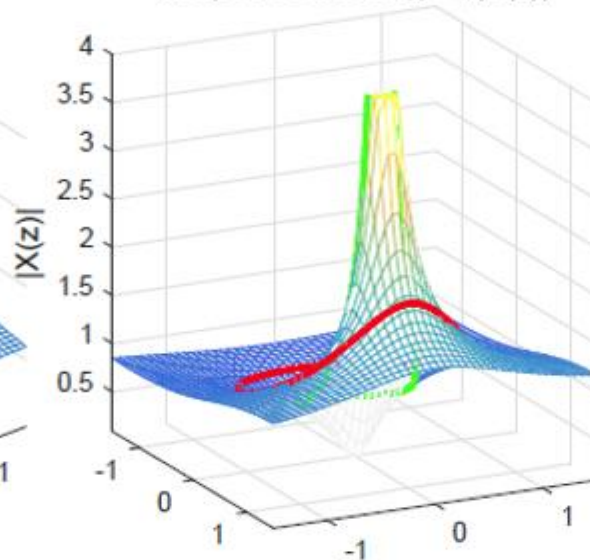
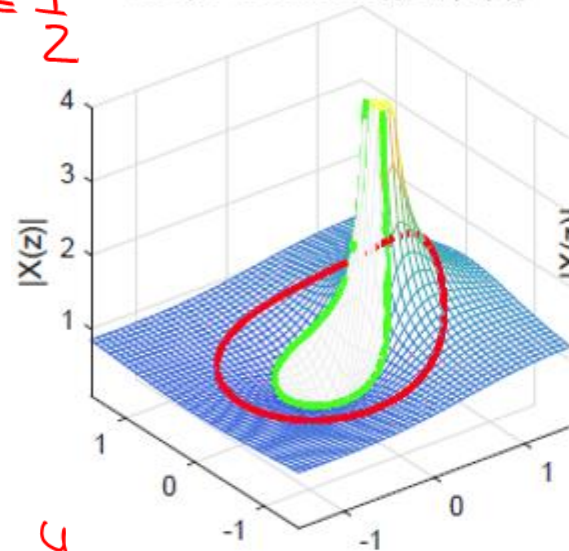
• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

$$a = \frac{1}{2}$$

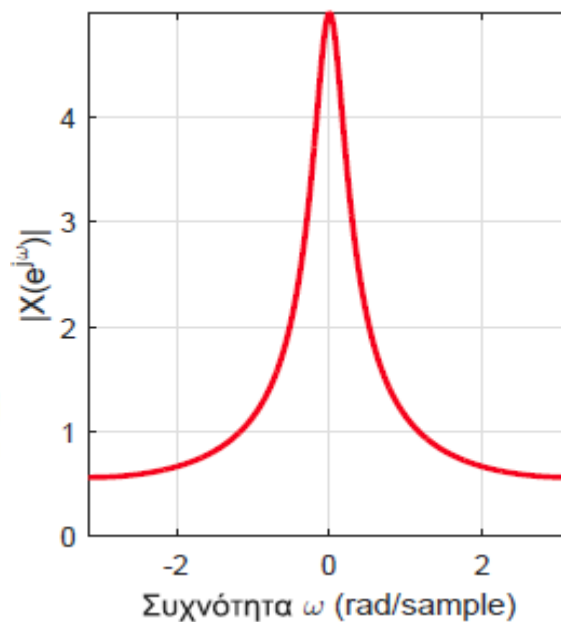
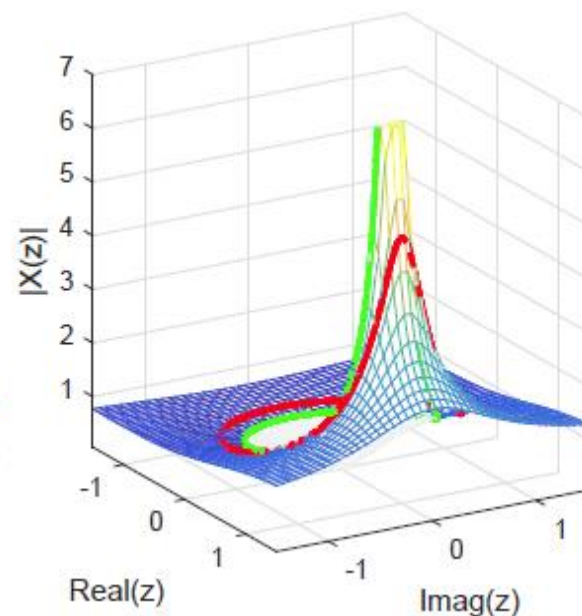
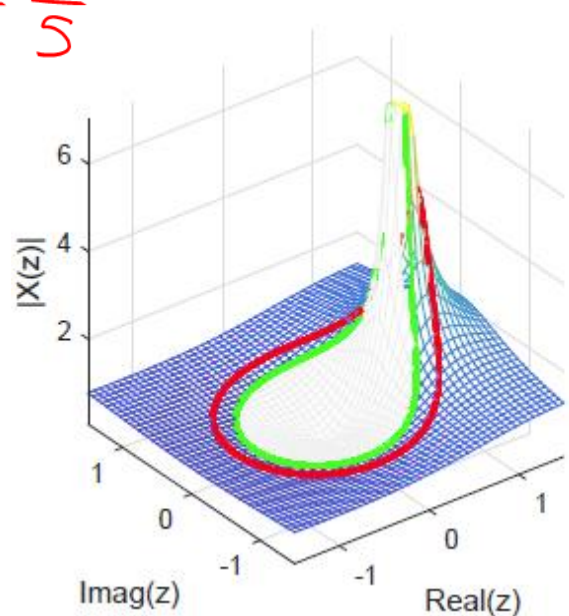
Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$

Φάσμα Πλάτους

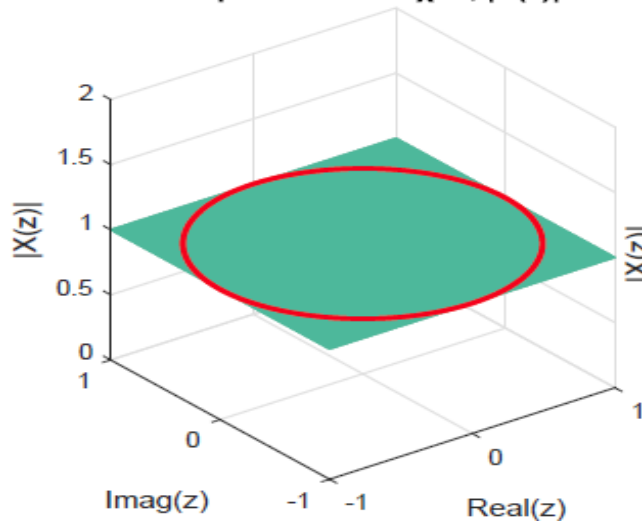
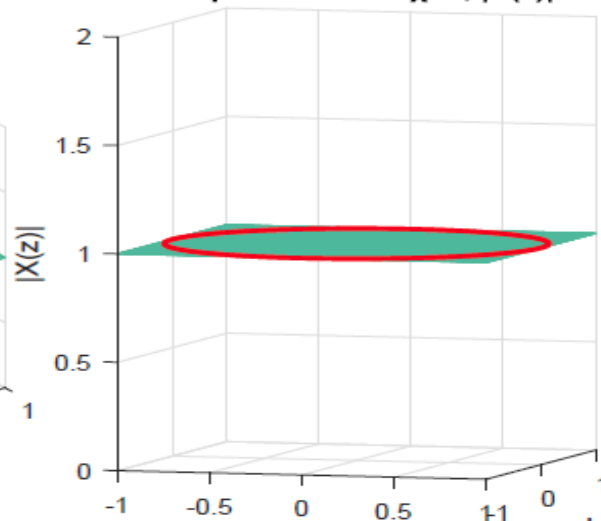


$$a = \frac{5}{5}$$

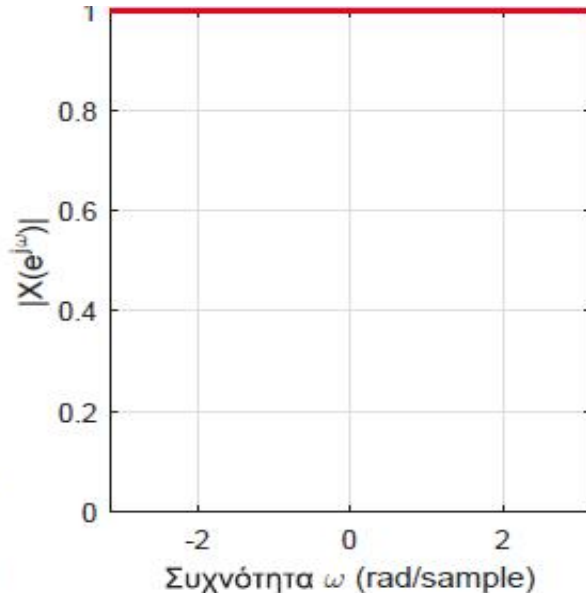
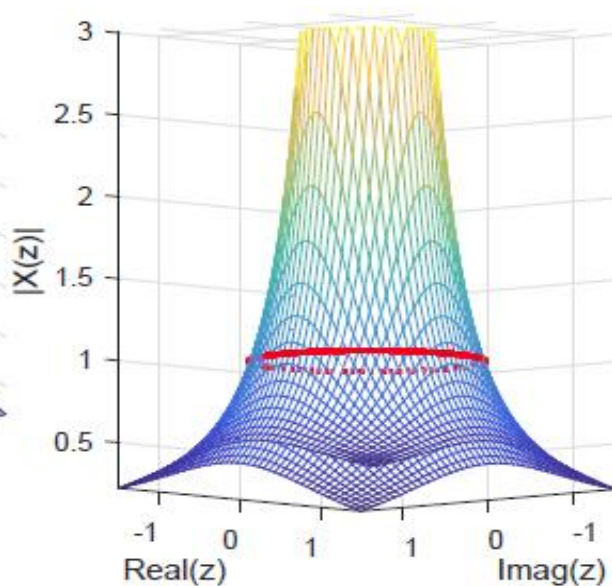
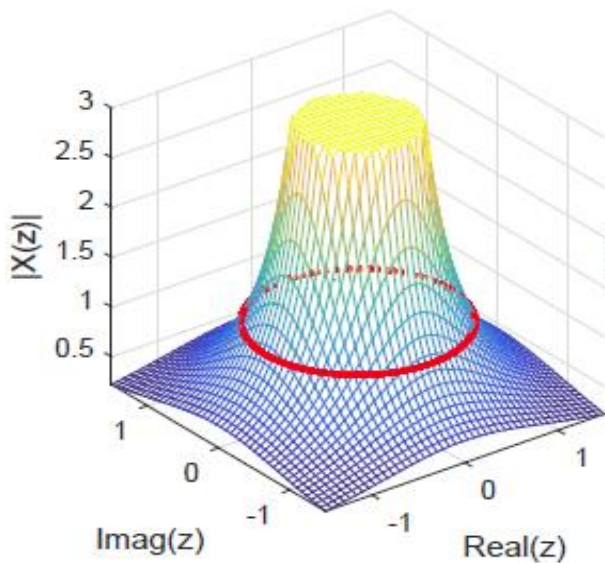
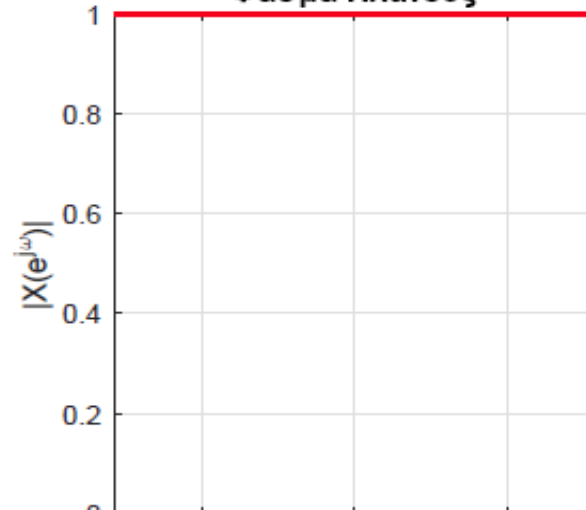


• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n]$, $x[n] = \delta[n - 2]$?

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ 

Φάσμα Πλάτους



- Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

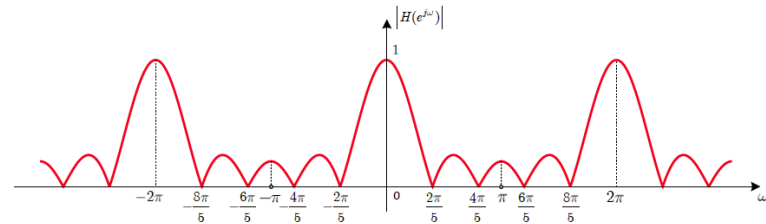
Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

- (α') Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
- (β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.
- (γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

• Παράδειγμα:

○ Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα



$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2 + 1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2 + 1} z^{-n} = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n} \\ &= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{1 - z^{-(M_2 + 1)}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{M_2 + 1} \cdot \frac{z^{M_2 + 1}}{z^{M_2 + 1}} \cdot \frac{1 - z^{-(M_2 + 1)}}{1 - z^{-1}} = \\ &= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{z^{M_2 + 1} - 1}{z^{M_2 + 1} (1 - z^{-1})} = \frac{1}{M_2 + 1} \cdot \frac{z^{M_2 + 1} - 1}{z^{M_2 + 1} - z^{M_2}} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$$

Μηδενικά: $z^{M_2 + 1} = 1 \Leftrightarrow (|z| e^{j\varphi})^{M_2 + 1} = e^{j2\pi k} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |z|^{M_2 + 1} e^{j\varphi(M_2 + 1)} = e^{j2\pi k} \Rightarrow \begin{cases} |z|^{M_2 + 1} = 1 \Rightarrow |z| = 1 \\ \varphi_k = \frac{2\pi k}{M_2 + 1} \end{cases}$
 $k = 0, 1, 2, \dots, M_2$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

• Παράδειγμα:

Πίλο1: $z^{M_2+1} - z^{M_2} = 0 \Leftrightarrow z^{M_2}(z-1) = 0 \Rightarrow M_2$ πόλως στο $z=0$ και ένας πόλος στο $z=1$. Συνολικά M_2+1 πόλως στο μιγαδικό επίπεδο.

Αρα θα έχουμε συνολικά: (έστω $M_2=9$)

→ 10 πόλως

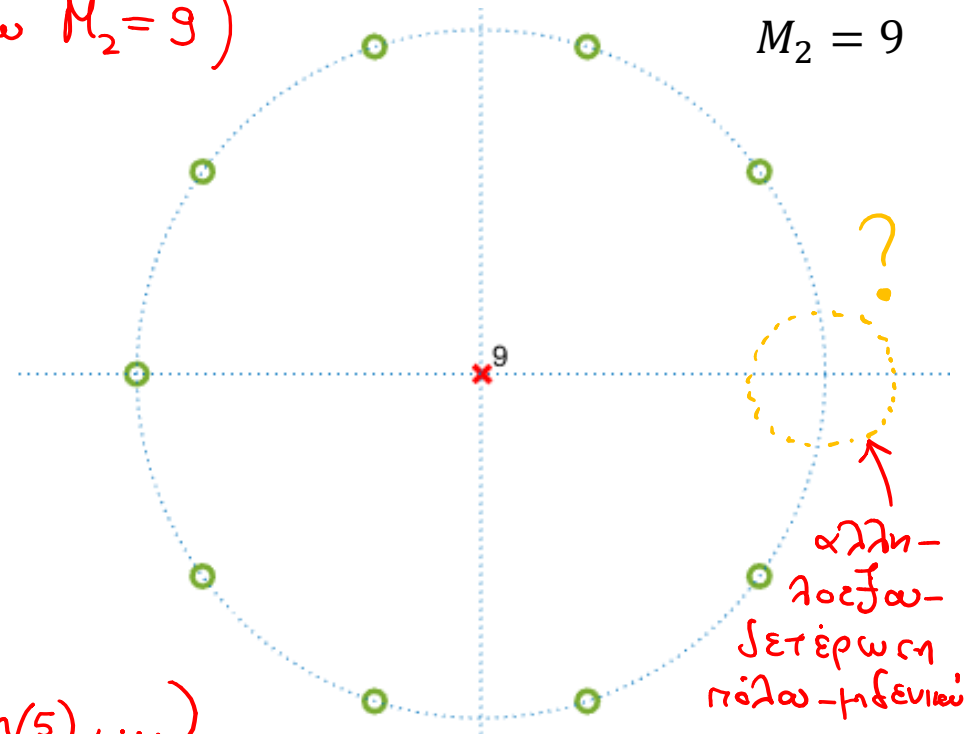
- ένας στο $z=1$
- εννιά στο $z=0$

→ 10 μηδενικά

- όλα στις θέσεις

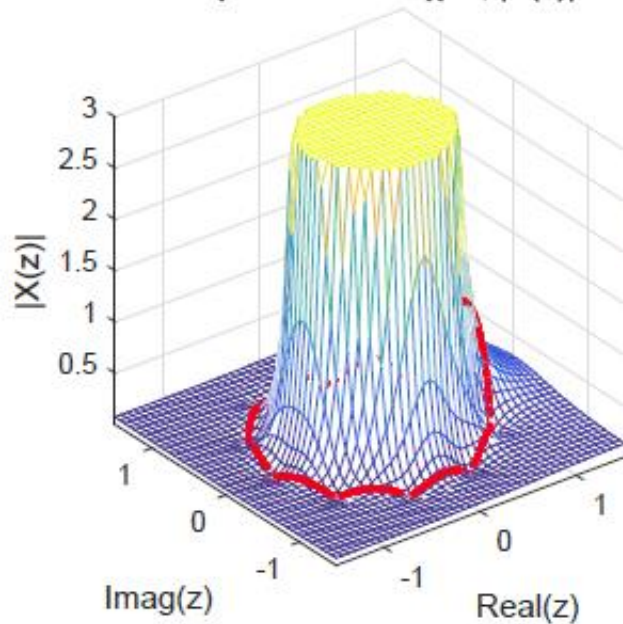
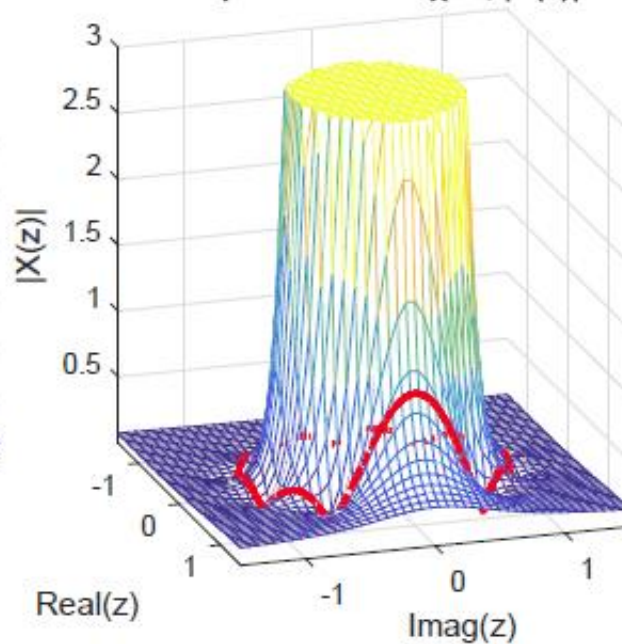
$$z_k = e^{j \frac{2\pi k}{10}}, k=0, \dots, 9.$$

$$(z_0=1, z_1=\exp(j2\pi/10), z_2=\exp(j2\pi/5), \dots)$$

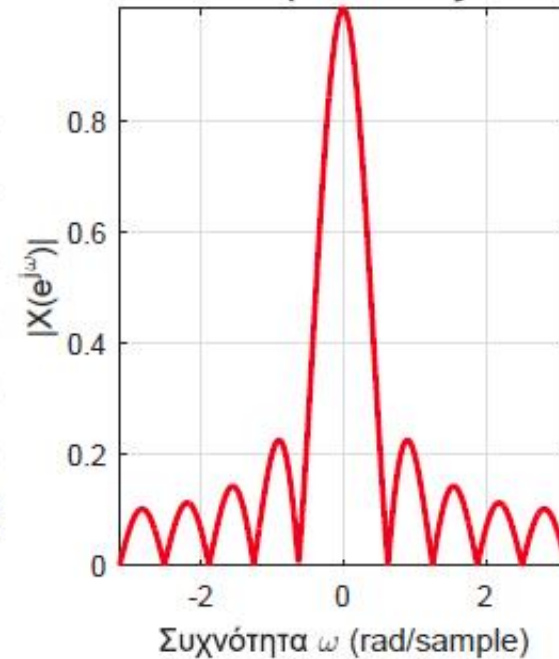


- Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Παράδειγμα:

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ 

Φάσμα Πλάτους



• Ιδιότητες Μετασχ. Z

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$y[n]$	$Y(z)$	R_y
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**

- Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Z του σήματος

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad |z| > 1/2$$

Είναι

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad \begin{matrix} \curvearrowright |z| > \frac{1}{3} \\ \rightarrow |z| < \frac{1}{3} \end{matrix} \quad \rightarrow |z| > \frac{1}{3}$$

υπερσύνολο
των τριών

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$. Υπολογίστε το Μετασχ. Z του.

≡ έραφε ότι $a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a| \leftarrow R_x$

και η ιδιότητα $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z) z^{-n_0}$, ωλ.χ. R_x .

Είναι $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] =$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] = 9 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]}_{y[n+2]}$$

ή $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

Άρα $X(z) = 9 \cdot Y(z) z^2 = 9 \frac{z^2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}.$

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα $x[n] \in \mathbb{R}$ με ρητό μετασχ. Z που έχει

- Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$
- Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση $z = \sqrt{2} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

Βρείτε μια μορφή για το $X(z)$

Αφαι το $x[n] \in \mathbb{R}$, τότε $x^*[n] = x[n]$, κι αφού $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$
και $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$, θα έχουμε $\boxed{X(z) = X^*(z^*)}$ ①

Αν z_0 είναι πόλος, τότε $X(z_0) \rightarrow \infty$ και λόγω ① θα είναι
πόλος και το z_0^* !

Αν z_0 είναι μηδενικό του $X(z)$, τότε $X(z_0) = 0$ και λόγω ①,
το z_0^* θα είναι επίσης μηδενικό του $X(z)$!

Άρα αν $z = e^{-j\frac{\pi}{8}}$ είναι πόλος του $X(z)$, τότε και το $z^* = e^{j\frac{\pi}{8}}$ θα
είναι πόλος του, και το ίδιο θα ισχύει για τα μηδενικά.

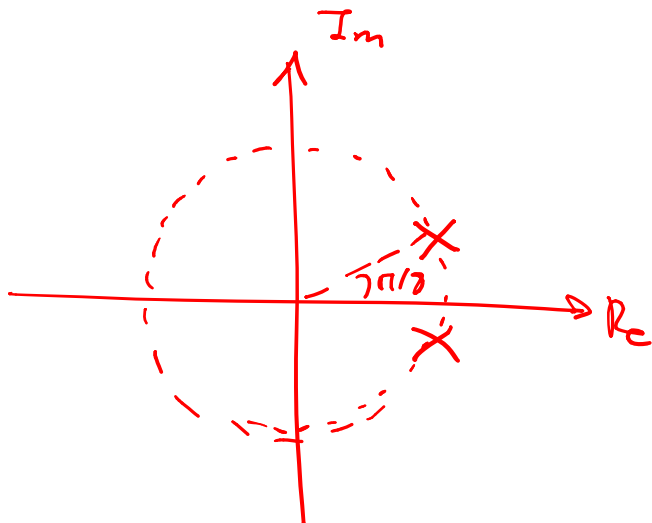
• Ιδιότητες Μετασχ. Z

Οπότε

$$\begin{aligned}
 X(z) &= A \frac{(z - \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(z - \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})}{(z - e^{j\frac{\pi}{8}})(z - e^{-j\frac{\pi}{8}})} \\
 &= A \frac{(1 - \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}{(1 - e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1})(1 - e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1})}
 \end{aligned}$$

Η σταθερά δεν
αλλάζει την
εξίσωση για
πολλές &
μηδενικά!

, $A \in \mathbb{R}$.



$$\rightarrow |z| > 1$$

ή

$$\rightarrow |z| < 1$$

Δεν έχουμε
πληροφορίες για
να ξέρουμε ποιά
από τα δυο πεδία
είναι το σωστό

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

Σημείωση: $\nleftrightarrow$ Για ένα σήμα $x[n] \in \mathbb{R} \nleftrightarrow$

΄δια συζήτηση
ισχύει και για
τους πολούς!

Αν $X(z_0) = 0 \text{ (A)}$, το z_0 είναι μηδενικό του $X(z)$.

Δείξατε ότι και το z_0^* θα είναι μηδενικό του $X(z)$,

γιατί

$$X(z_0) = X^*(z_0^*) \quad \leftarrow \text{λόγω του ότι } x[n] = x^*[n], \text{ για } x[n] \in \mathbb{R}$$

εφαρμόζω συζυγία και στα δύο μέλη

$$(X(z_0))^* = (X^*(z_0^*))^*$$

$$(X(z_0))^* = X(z_0^*)$$

βάζουμε τον τελεστή της συζυγίας
εντός της παρένθεσης στο 2^ο
μέλος μόνο

λόγω (A)

$$0^* = X(z_0^*)$$

$$0 = X(z_0^*)$$

το z_0^* είναι μηδενικό του $X(z)$!

• Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα $x[n] = (2)^n u[n]$, $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε τη συνέλιξή τους

Είναι
$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z), \quad R \supseteq R_x \cap R_y$$

Αρα
$$x[n] = 2^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| > 2 = R_x$$

$$y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} = R_y$$

Οότε

$$C(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$= \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad \text{τε:}$$

- Ιδιότητες Μετασχ. Z

$$A = C(z) (1 - 2z^{-1}) \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

$$B = C(z) \left(1 + \frac{1}{4} z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1} = -4} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = -4} = \frac{1}{1 + 8} = \frac{1}{9}$$

Άρα

$$C(z) = \frac{8}{9} \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{9} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} z^{-1}}$$

$$\bullet |z| > 2$$

$$\bullet |z| < 2$$

$$z^{-1}$$

$$\bullet |z| > \frac{1}{4}$$

$$\bullet |z| < \frac{1}{4}$$

$$\sim R = \{ |z| > 2 \} \cap \{ |z| < \frac{1}{4} \}$$

π από πίνακάκια,

$$C[n] = \frac{8}{9} 2^n u[n] + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

