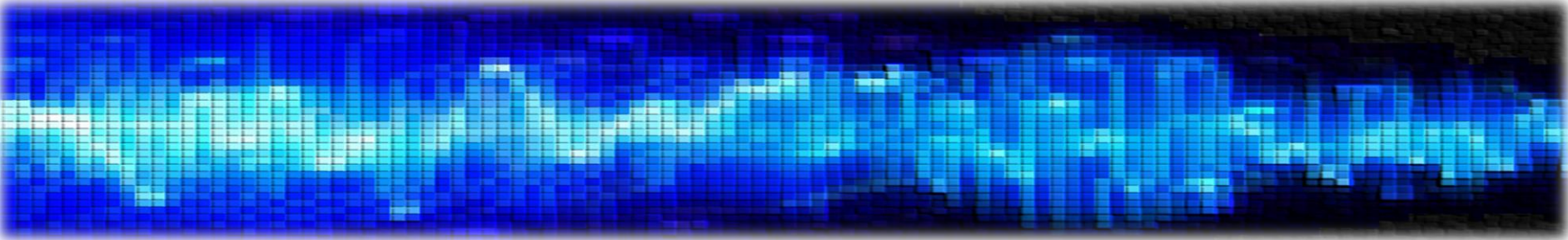
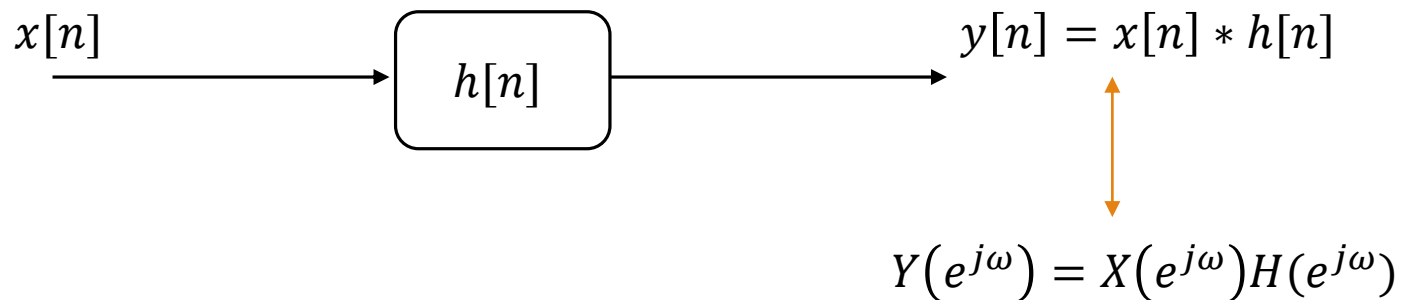


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 9^Η

- 
- Συστήματα στο χώρο του Fourier
 - Καθυστέρηση φάσης και καθυστέρηση ομάδας

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας (επανάληψη...)



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

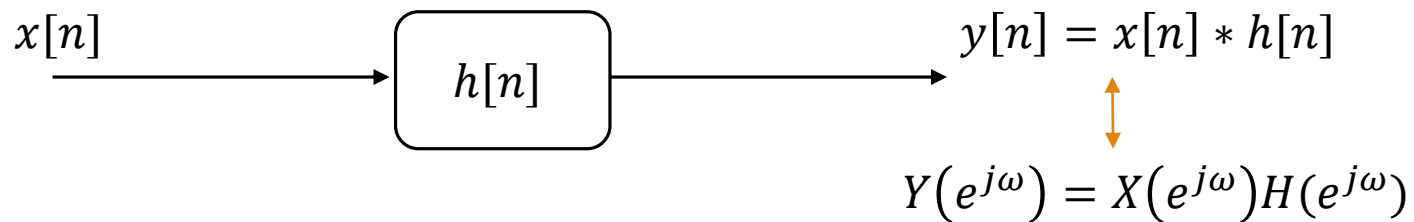
- Οπότε

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$

$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα
 - Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
 - Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Για να μπορούμε να εφαρμόζουμε το μετασχ. Fourier σε μια εξίσωση διαφορών, υποθέτουμε ότι το σύστημα **έχει** μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, ότι η απόκριση σε συχνότητα υπάρχει μέσω της σύγκλισης του μετασχηματισμού
 - Δεν είναι πάντα αληθές αυτό
- Για να υπάρχει η απόκριση σε συχνότητα αρκεί (όπως δείξαμε στη θεωρία του DTFT)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

- Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί συνθήκη ευστάθειας του συστήματος!
- Άρα πρέπει να έχουμε **ευσταθές σύστημα** για να μπορούμε να πάρουμε το μετασχ. Fourier του!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
 - Όσον αφορά την επίδραση της απόκρισης πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του, τα πράγματα είναι σχετικά ξεκάθαρα
 - Η απόκριση πλάτους πολλαπλασιάζεται με το φάσμα πλάτους της εισόδου
 - That's it. 😊
 - **Φαινομενικά** και η επίδραση της απόκρισης φάσης δε συνιστά κάτι πολύπλοκο
 - Η απόκριση φάσης προστίθεται στο φάσμα φάσης της εισόδου
 - Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη χρονική δομή ενός σήματος
 - Φάση = μετατόπιση
 - Οπότε η επίδραση της απόκρισης φάσης διατηρεί ή όχι την αρχική χρονική δομή του σήματος στην έξοδο του συστήματος
 - Όμως τελικά τα πράγματα δεν είναι τα όσο απλά για την απόκριση φάσης. Γιατί?
 - Γιατί η φάση ενός μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα!
 - Η πρόσθεση οποιουδήποτε ακέραιου πολλαπλάσιου του 2π διατηρεί την ίδια τιμή στη φάση

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης, το αποτέλεσμα είναι πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$
 - Αυτή η τιμή ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal phase value)

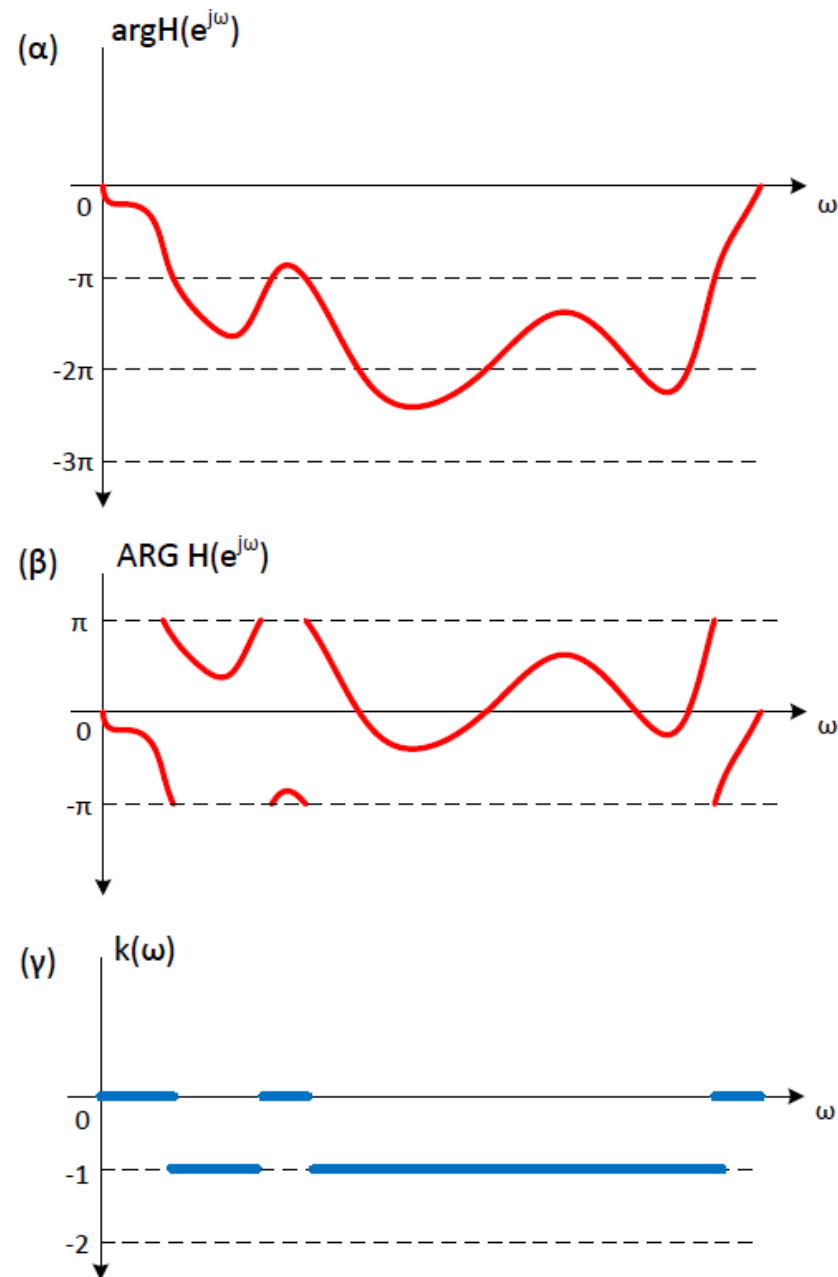
$$-\pi < ARG[H(e^{j\omega})] \leq \pi$$

- Οποιαδήποτε άλλη γωνία μπορεί να γραφεί με βάση την πρωτεύουσα φάση ως

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) = \arg[H(e^{j\omega})] = ARG[H(e^{j\omega})] + 2\pi k(\omega) \longrightarrow \in \mathbb{Z}$$

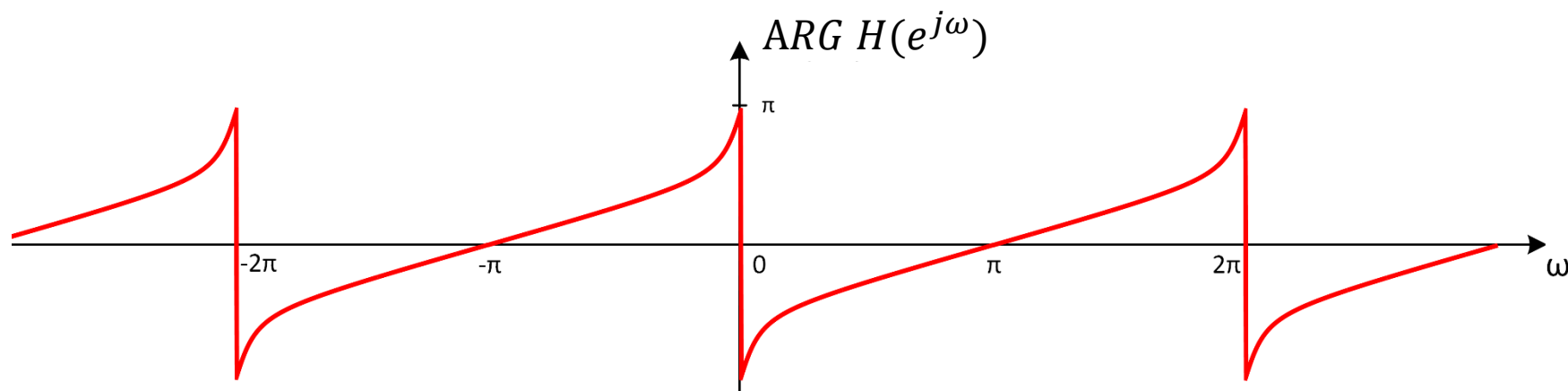
- Η διαδικασία εύρεσης της συνεχούς (ως προς ω) συνάρτησης φάσης από την πρωτεύουσα φάση που παίρνουμε από την αντίστροφη εφαπτομένη ονομάζεται **ξετύλιγμα φάσης (phase unwrapping)**
- Δείτε το ακόλουθο σχήμα

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης



ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

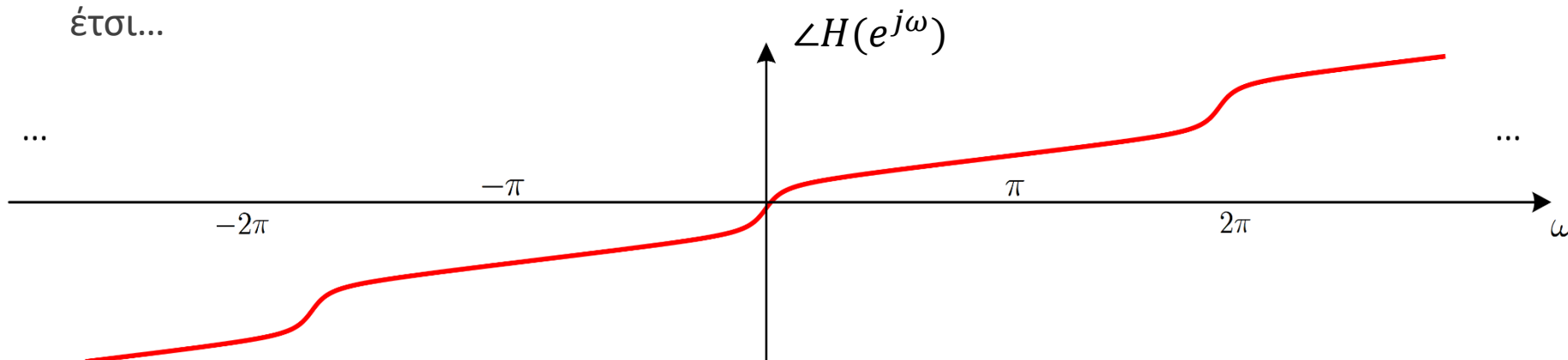
- Παράδειγμα από το παρελθόν ☺



- Αυτή είναι η απόκριση φάσης του γνωστού σας σήματος

$$h[n] = -a^n u[-n - 1], |a| > 1$$

- Αν την «ξετυλίξουμε» θα είναι κάπως έτσι...



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
- Έχουμε δει πως ερμηνεύεται η απόκριση φάσης, όσον αφορά την επίδρασή της σε ένα **άπειρης διάρκειας** ημιτονοειδές σήμα που εμφανίζεται στην είσοδο του συστήματος
 - Αν το σήμα έχει συχνότητα ω_0 τότε η απόκριση φάσης σε αυτή τη συχνότητα προστίθεται στην υπάρχουσα φάση της εισόδου...
 - ...κι έτσι η έξοδος θα έχει εν γένει διαφορετική φάση σε σχέση με την είσοδο
- Το πρόβλημα είναι ότι τα **άπειρης διάρκειας** αυτά σήματα δεν υπάρχουν στην πράξη
- Επιπλέον, τα περισσότερα πραγματικά (δηλ. υπαρκτά «εκεί έξω») σήματα είναι όχι μόνο πεπερασμένης διάρκειας αλλά και μη σταθερού πλάτους
 - ...δηλ. το **ακριβώς αντίθετο** με ένα σήμα της μορφής $A \cos(\omega_0 n + \phi)$!!! ☺
- Πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε την απόκριση φάσης σε τέτοια συστήματα?
 - Ας πάμε βήμα-βήμα... ☺

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \boxed{|H(e^{j\omega})|} e^{j\boxed{\phi_H(e^{j\omega})}}$$

Απόκριση πλάτους

Απόκριση φάσης

- Ένα σήμα εισόδου $x[n]$ μπορεί να γραφεί συχνοτικά μέσω του μετασχ. Fourier του:

$$X(e^{j\omega}) = \boxed{|X(e^{j\omega})|} e^{j\boxed{\phi_X(e^{j\omega})}}$$

Φάσμα πλάτους εισόδου

Φάσμα φάσης εισόδου

- Ξέρουμε ότι στην έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})| e^{j\phi_Y(e^{j\omega})} = \boxed{|H(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})|} e^{j\boxed{(\phi_X(e^{j\omega}) + \phi_H(e^{j\omega}))}}$$

Φάσμα πλάτους εξόδου

Φάσμα φάσης εξόδου

- Έστω μια ημιτονοειδής μορφή εισόδου

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi_x)$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος για ημιτονοειδή είσοδο της μορφής

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi_x) = A \cos\left(\omega_0 \left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0}\right)\right), \quad -\infty < n < +\infty$$



δίνεται ως

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi_x + \varphi_H(e^{j\omega_0}))$$

- Προσέξτε:

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 \left(n + \frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0} + \frac{\phi_x}{\omega_0}\right)\right)$$

- Η ποσότητα

$$-\frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}$$

μας δείχνει τη **χρονική καθυστέρηση σε δείγματα** του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

- Η συνάρτηση

$$\tau_p(e^{j\omega}) = -\frac{\varphi_H(e^{j\omega})}{\omega}$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης (phase delay)**

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos \left(\omega_0 \left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0} \right) \right)$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα πρόσθεσε μια **επιπλέον καθυστέρηση φάσης!**

- Για παράδειγμα, αν για ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} n - \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} (n - 2) \right)$$

η απόκριση φάσης του ΓΧΑ συστήματος ήταν της μορφής $\phi_H(e^{j\omega}) = -2\omega$, τότε το σύστημα εισάγει στην είσοδο φάση ίση με

$$\phi_H(e^{j\pi/3}) = [-2\omega]_{\omega=\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

- Άρα η **καθυστέρηση φάσης** του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

$$\tau_p(e^{j\frac{\pi}{3}}) = -\frac{\phi_H(e^{j\frac{\pi}{3}})}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{-\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}\right)\right)$$

- Άρα η **καθυστέρηση φάσης** του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

$$\tau_p\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\phi_H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{-\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

- Άρα η έξοδος **καθυστερήσε 2 δείγματα σε σχέση με την είσοδο**

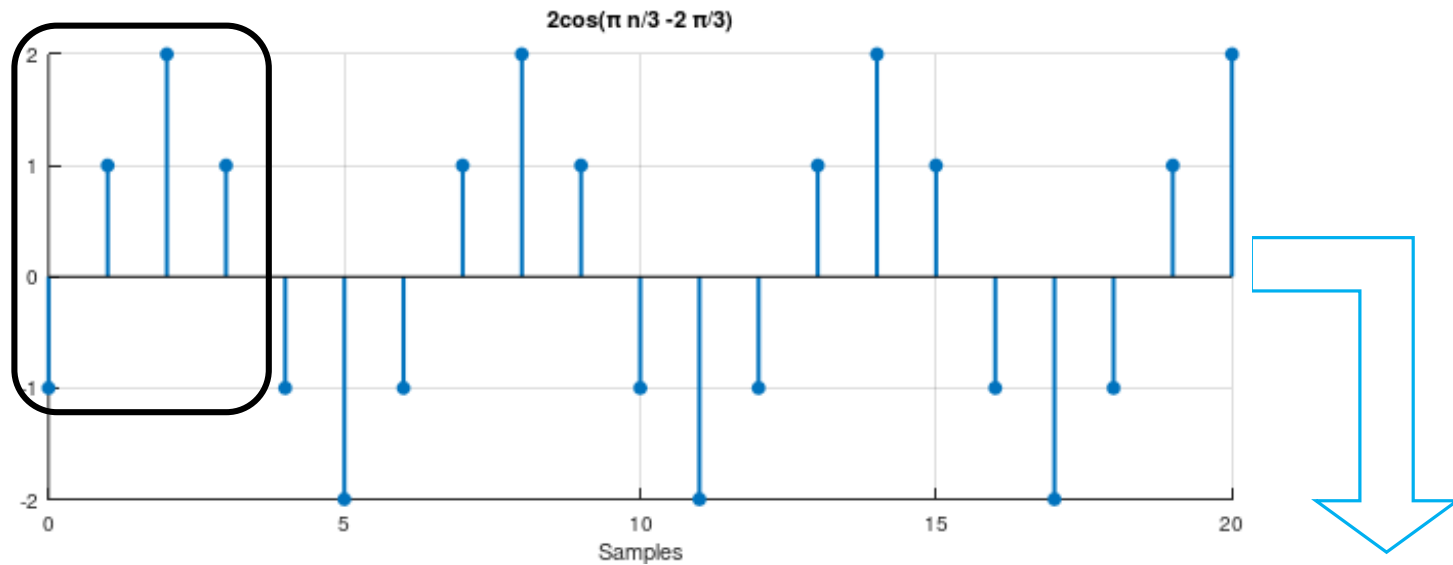
- ... που ήταν ήδη καθυστερημένη κατά 2 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς (0,0)☺
- Συνολικά, η έξοδος έχει καθυστερήσει 4 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς

- Επιβεβαίωση:

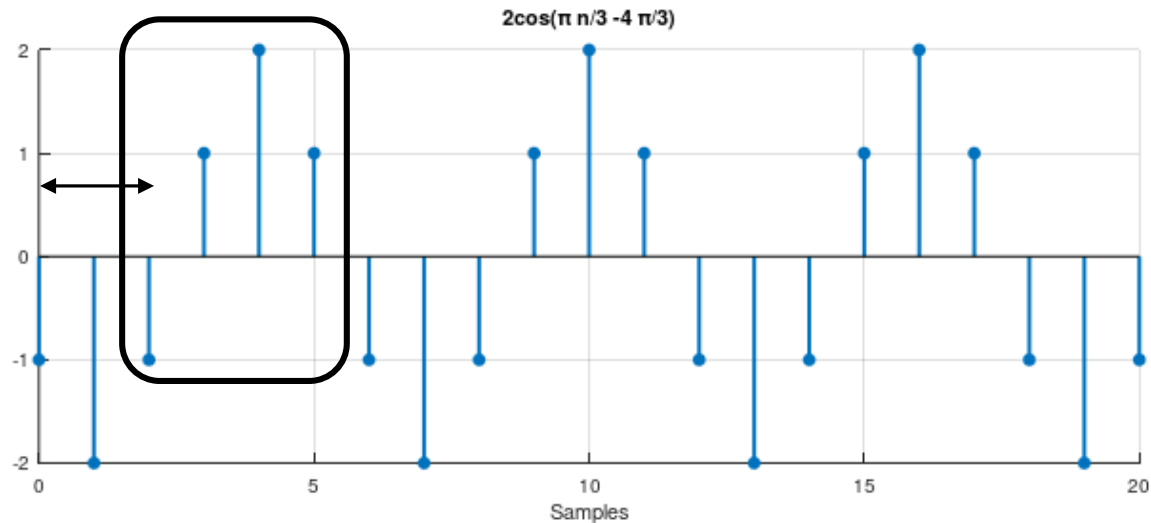
$$y[n] = 2|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(n - \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} - 2\right)\right) = 2|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\frac{\pi}{3}(n - 4)\right)$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Η καθυστέρηση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος ισούται με το πλήθος των δειγμάτων που καθυστερεί ένα άπειρης διάρκειας ημιτονοειδές σήμα εισόδου όταν περάσει στην έξοδο



- Αγνοήσαμε σκόπιμα την επίδραση της απόκρισης πλάτους
 - ...η οποία μπορεί να αλλοιώνει το πλάτος του σήματος εισόδου



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

• Όμως είναι αυτή η *πραγματική* καθυστέρηση ενός σήματος στην έξοδο ενός συστήματος?

• Έστω το σήμα

$$x[n] = A \overset{\text{περιβάλλουσα}}{\cos(\omega_0 n)} \overset{\text{φέρων σήμα}}{\cos(\omega_c n)} = \frac{A}{2} \cos(\omega_l n) + \frac{A}{2} \cos(\omega_u n)$$

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

Ξανά άπειρης διάρκειας **ΑΛΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ!**

και

με χρήση Euler/τριγωνομετρίας και με

$$\omega_l = \omega_c - \omega_0$$

$$\omega_u = \omega_c + \omega_0$$

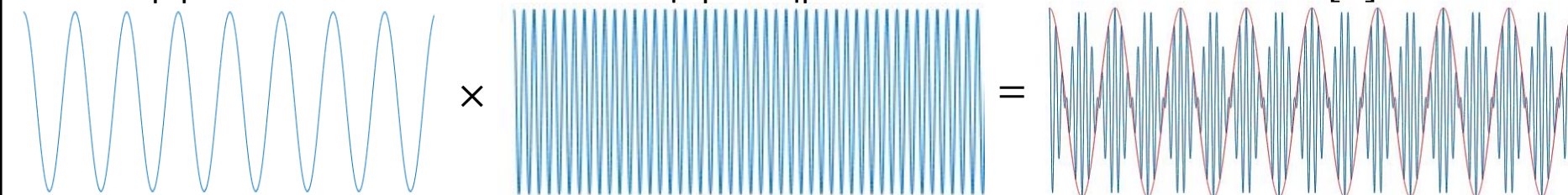
με

$$\omega_c \gg \omega_0$$

περιβάλλουσα

φέρων σήμα

$x[n]$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Αν περάσουμε το σήμα από ένα σύστημα $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos(a) \cos(b)$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi_h(e^{j\omega})}$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \frac{A|H(e^{j\omega_l})|}{2} \cos(\omega_l n + \phi_h(e^{j\omega_l})) + \frac{A|H(e^{j\omega_u})|}{2} \cos(\omega_u n + \phi_h(e^{j\omega_u}))$$

- Αν η απόκριση πλάτους είναι περίπου μοναδιαία (γενικότερα, σταθερή) γύρω από τις συχνότητες ω_u, ω_l τότε

$$y[n] = \frac{A}{2} \cos(\omega_l n + \phi_h(e^{j\omega_l})) + \frac{A}{2} \cos(\omega_u n + \phi_h(e^{j\omega_u}))$$

$$= A \cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(e^{j\omega_u}) - \phi_h(e^{j\omega_l})}{2}\right) \cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(e^{j\omega_u}) + \phi_h(e^{j\omega_l})}{2}\right)$$

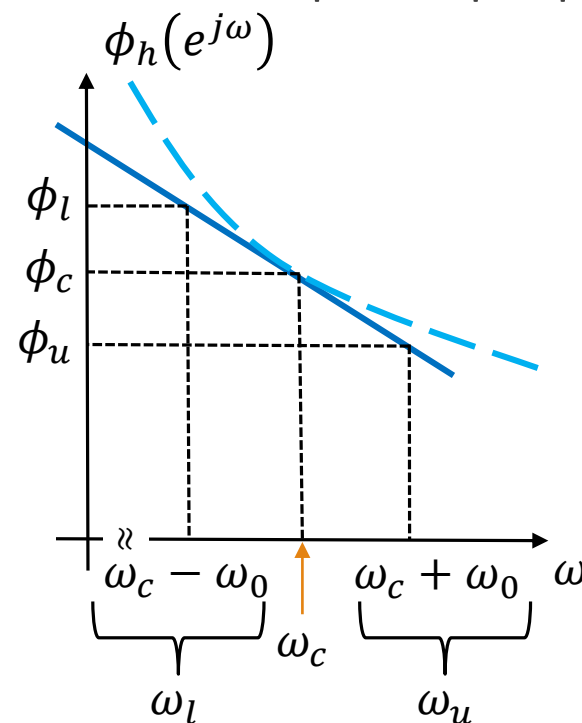
- Επαναφέραμε το άθροισμα σε γινόμενο για να βρούμε πόσο καθυστερεί η περιβάλλουσα και πόσο το φέρον σήμα

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A \cos \left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(e^{j\omega_u}) - \phi_h(e^{j\omega_l})}{2} \right) \cos \left(\omega_c n + \frac{\phi_h(e^{j\omega_u}) + \phi_h(e^{j\omega_l})}{2} \right)$$

- Αφού υποθέσαμε ότι $\omega_c \gg \omega_0$, τότε $\omega_u \approx \omega_c$ και $\omega_l \approx \omega_c$
- Υποθέτουμε ότι η απόκριση φάσης είναι **περίπου γραμμική** γύρω από το ω_c
- Αφού όλες οι τιμές της φάσης στην παραπάνω σχέση εξαρτώνται από την απόκριση φάσης του συστήματος, ας συμβολίσουμε για ευκολία:

- $\phi_l = \phi_h(e^{j\omega_l}) = \phi_h(e^{j(\omega_c - \omega_0)})$
- $\phi_u = \phi_h(e^{j\omega_u}) = \phi_h(e^{j(\omega_c + \omega_0)})$
- $\phi_c = \phi_h(e^{j\omega_c})$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A \cos \left(\omega_0 \left(n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0} \right) \right) \cos \left(\omega_c \left(n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c} \right) \right)$$

- Με χρήση του παραπάνω, η καθυστέρηση φάσης του δεύτερου όρου του γινομένου θα είναι

$$-\frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c} \approx -\frac{\phi_c}{\omega_c} = -\frac{\phi_h(e^{j\omega_c})}{\omega_c}$$

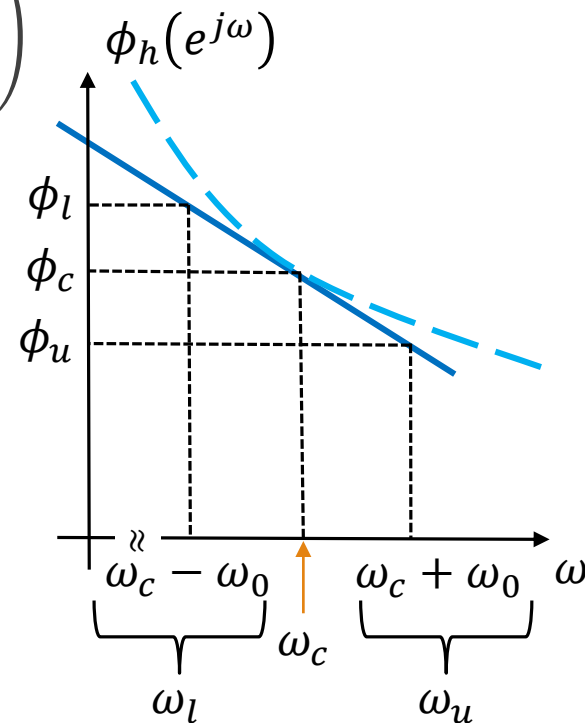
- Για τον πρώτο όρο, η καθυστέρηση φάσης θα είναι

$$-\frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0} = -\frac{\phi_u - \phi_l}{\omega_u - \omega_l} \approx -\frac{d}{d\omega} \phi_h(e^{j\omega_c})$$

που ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)** $\tau_g(e^{j\omega_c})$ στη συχνότητα ω_c

- Η **καθυστέρηση ομάδας** ορίζεται ως

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} \phi_h(e^{j\omega})$$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

• Έτσι το σήμα εξόδου γράφεται ως περιβάλλουσα

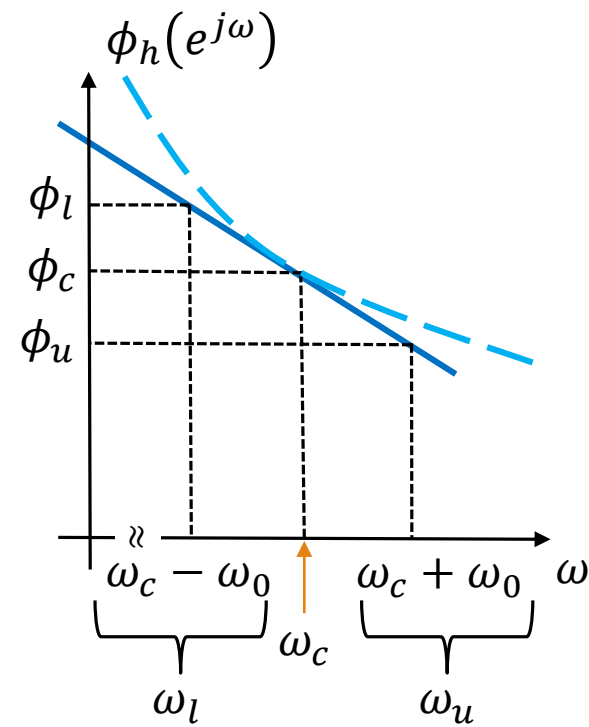
$$y[n] \approx A \underbrace{\cos(\omega_0(n - \tau_g(e^{j\omega_c})))}_{\text{φέρων σήμα}} \underbrace{\cos(\omega_c(n - \tau_p(e^{j\omega_c})))}_{\text{περιβάλλουσα}}$$

• Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα καθυστερεί διαφορετικό χρόνο στην έξοδο από το φέρων σήμα!

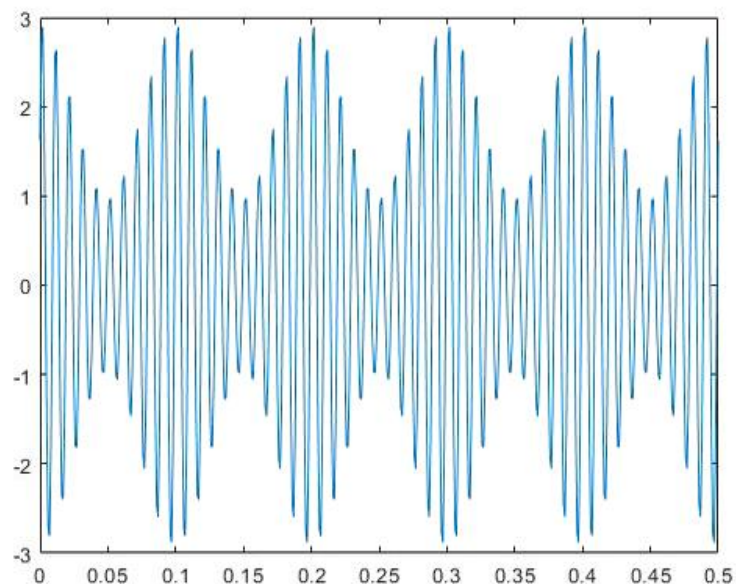
• Παρατηρήστε ότι οι δυο καθυστερήσεις εξαρτώνται από την **κεντρική συχνότητα** ω_c της **ομάδας** των τριών συχνοτήτων!

• Κάναμε **δυο** υποθέσεις:

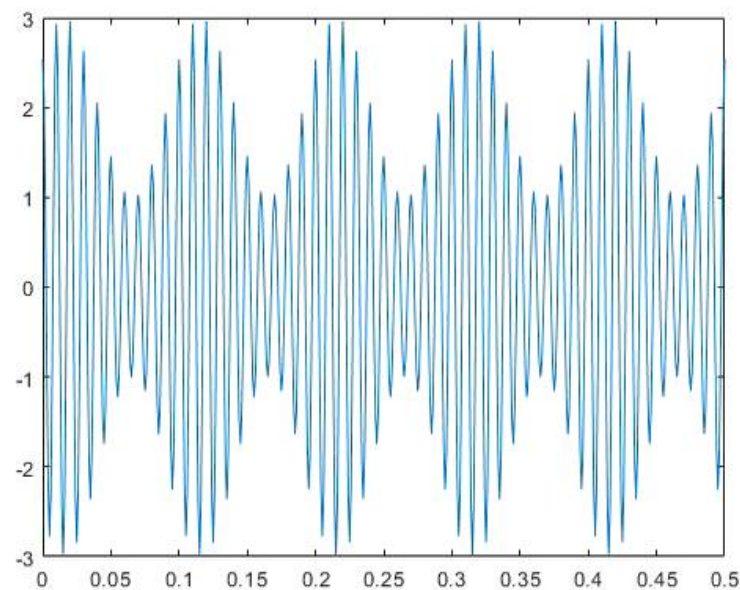
1. Η απόκριση πλάτους είναι (σχεδόν) σταθερή γύρω από τη συχνότητα ω_c
2. Η απόκριση φάσης είναι (σχεδόν) γραμμική γύρω από τη συχνότητα ω_c



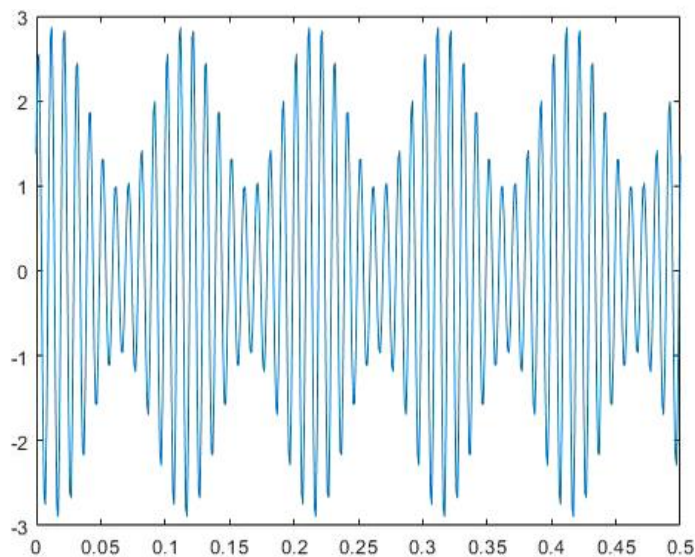
- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



Phase Delay

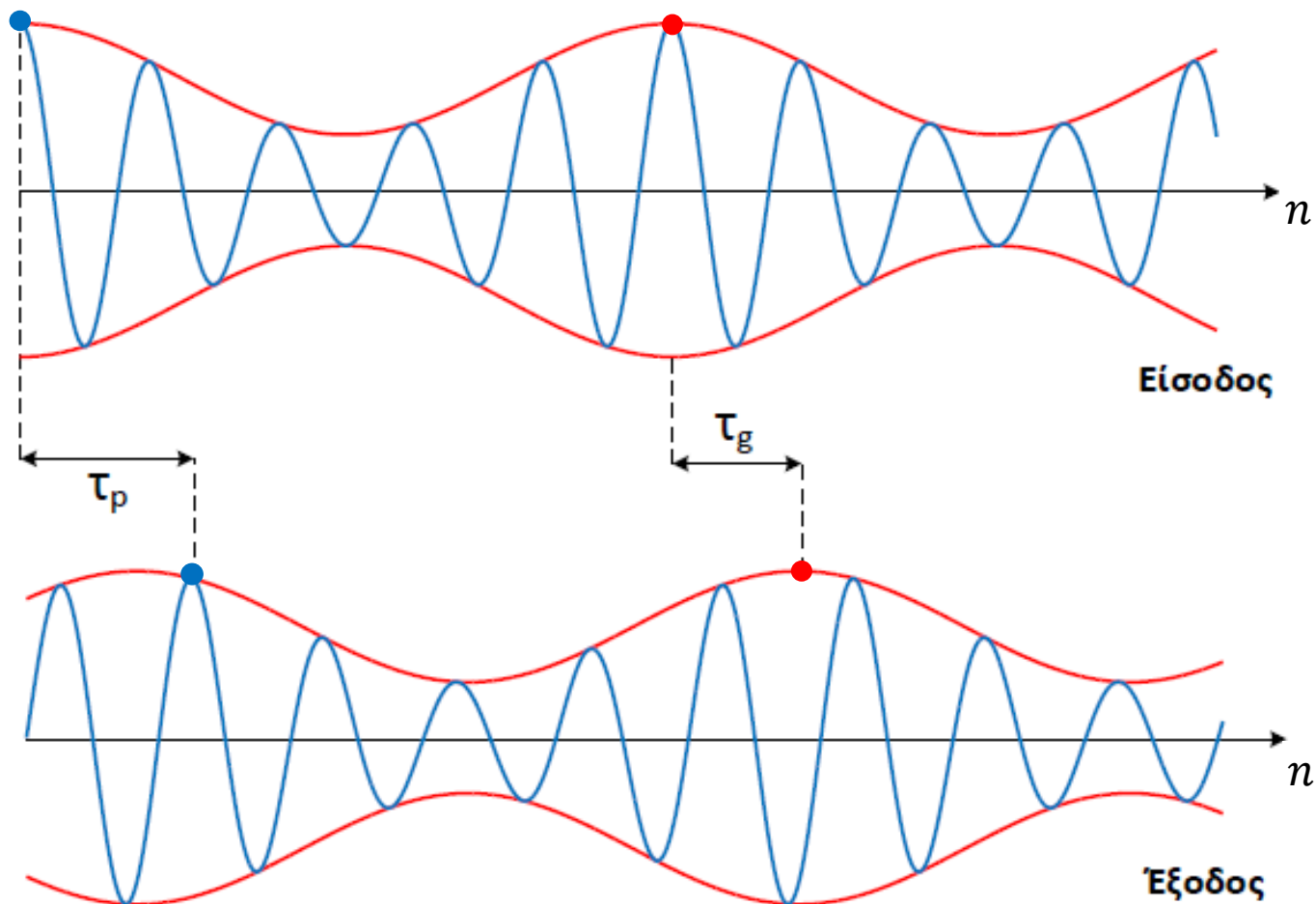


Group Delay



Phase & Group Delay

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



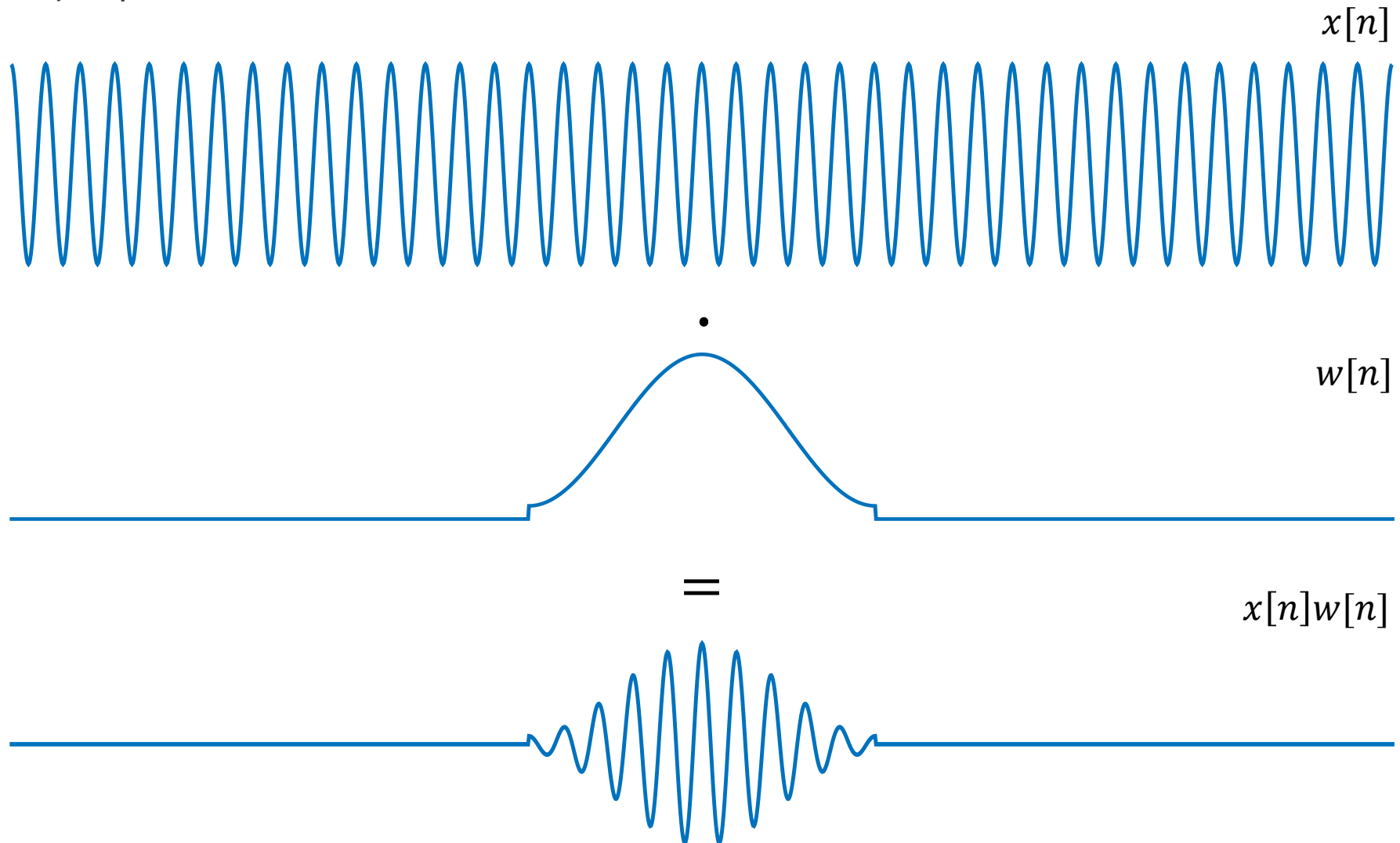
- Ποια από τις δυο μετρικές εκφράζει την καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε ότι το σήμα εισόδου αποτελούνταν από ένα group (ομάδα) δυο συχνοτήτων, **όλες πολύ κοντά και γύρω** από μια:
- Την $\omega = \omega_c$ (δηλ. τη φέρουσα συχνότητα)
- Η ομάδα αποτελούνταν από τις $\omega_c \pm \omega_0$
- Η καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του ΓΧΑ συστήματος καθορίστηκε από την καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα ω_c , υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε
- Όλα τα παραπάνω είχαν μια **ισχυρή υπόθεση**: $-\infty < \mathbf{n} < +\infty$

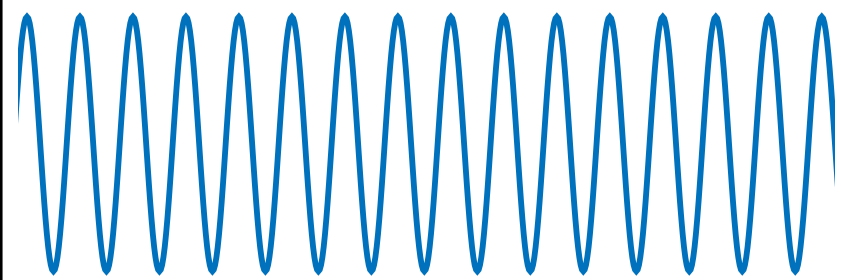


- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Όλα τα παραπάνω είχαν μια ισχυρή υπόθεση: $-\infty < n < +\infty$
- Στην πραγματικότητα δεν έχουμε τέτοιες διάρκειες σημάτων
 - Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα από ένα άπειρης διάρκειας σήμα
- Ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άπειρης διάρκειας σήμα πολλαπλασιασμένο με ένα “παράθυρο”
- Ξέρουμε – και θα δούμε ξανά ξεκάθαρα – ότι οι συχνότητες ενός τέτοιου σήματος θα καθορίζονται από το μετασχ. Fourier του παραθύρου
 - Αυτό είναι το **group συχνοτήτων** μας! 😊
- Ας θεωρήσουμε ένα παράθυρο Hanning κι ας δούμε τι συμβαίνει...

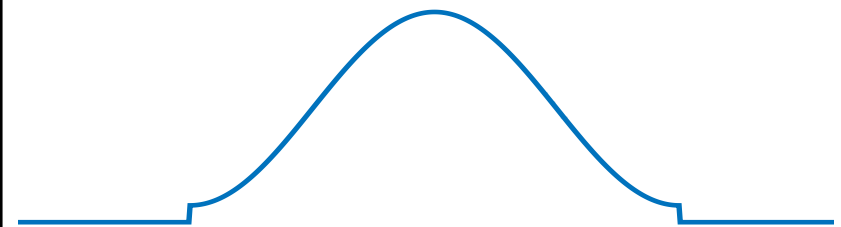
- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, οπότε θα προκύπτει όπως παρακάτω:



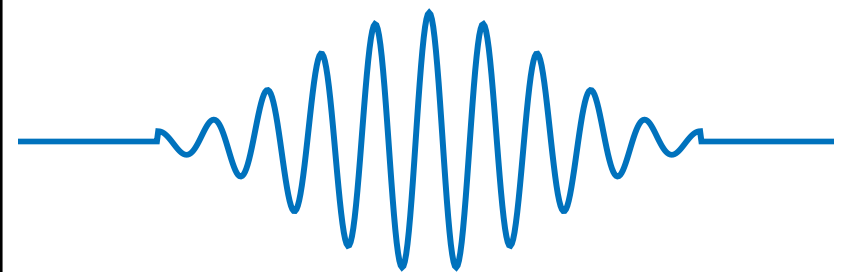
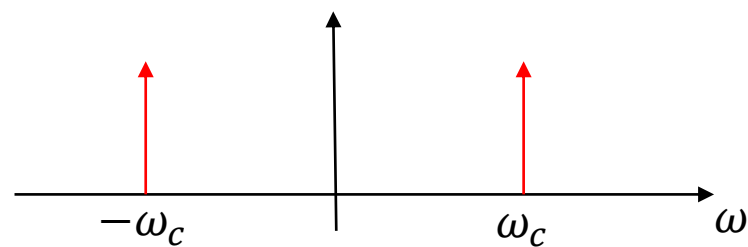
- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



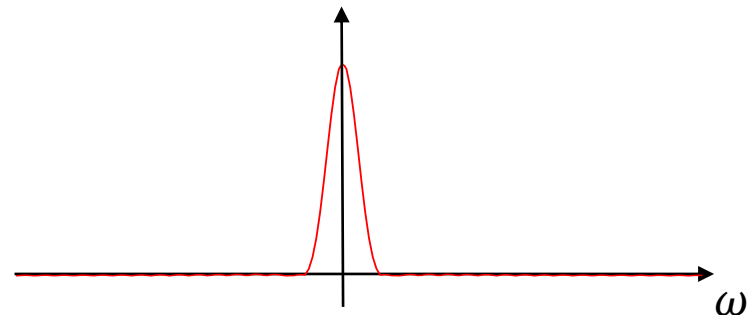
•



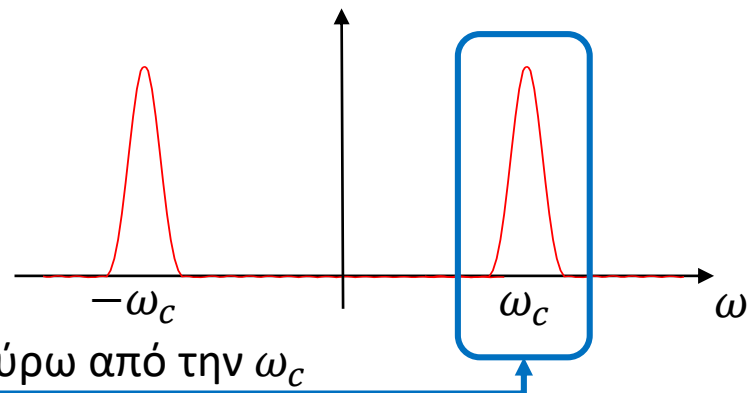
=

 $|F|$ 

*

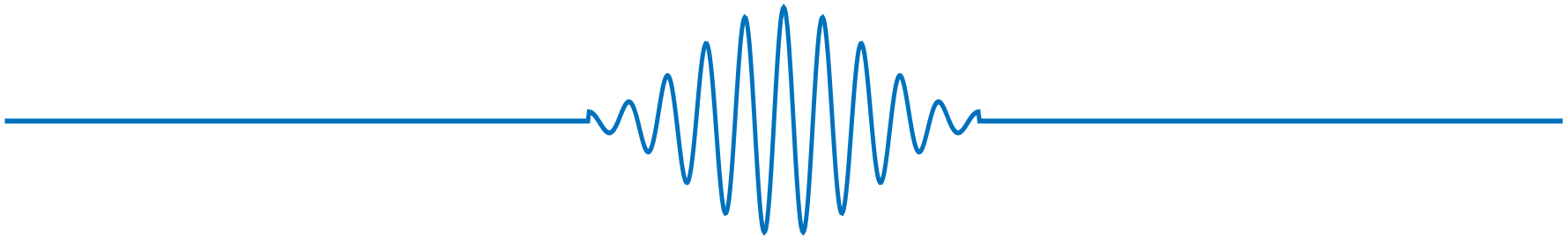


=



Γκρουπ συχνοτήτων γύρω από την ω_c

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



- Παρατηρήσατε ότι ο παραπάνω ημιτονοειδής παλμός δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα ω_c αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

$$w[n] \cdot A \cos(\omega_c n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) * (A\pi\delta(\omega - \omega_c) + A\pi\delta(\omega + \omega_c))$$

$$\frac{A}{2} W(e^{j(\omega - \omega_c)}) + \frac{A}{2} W(e^{j(\omega + \omega_c)})$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει ο ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier $W(e^{j\omega})$ του σήματος της περιβάλλουσας $w[n]$!
- Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε το σήμα ονομάζεται **στενής ζώνης συχνοτήτων**!
- Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα $w[n]$ πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια...
- Γιατί? Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης! $x[kn] \leftrightarrow X(e^{j\frac{\omega}{k}}), k \in \mathbb{Q}$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης – ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ
- Αν

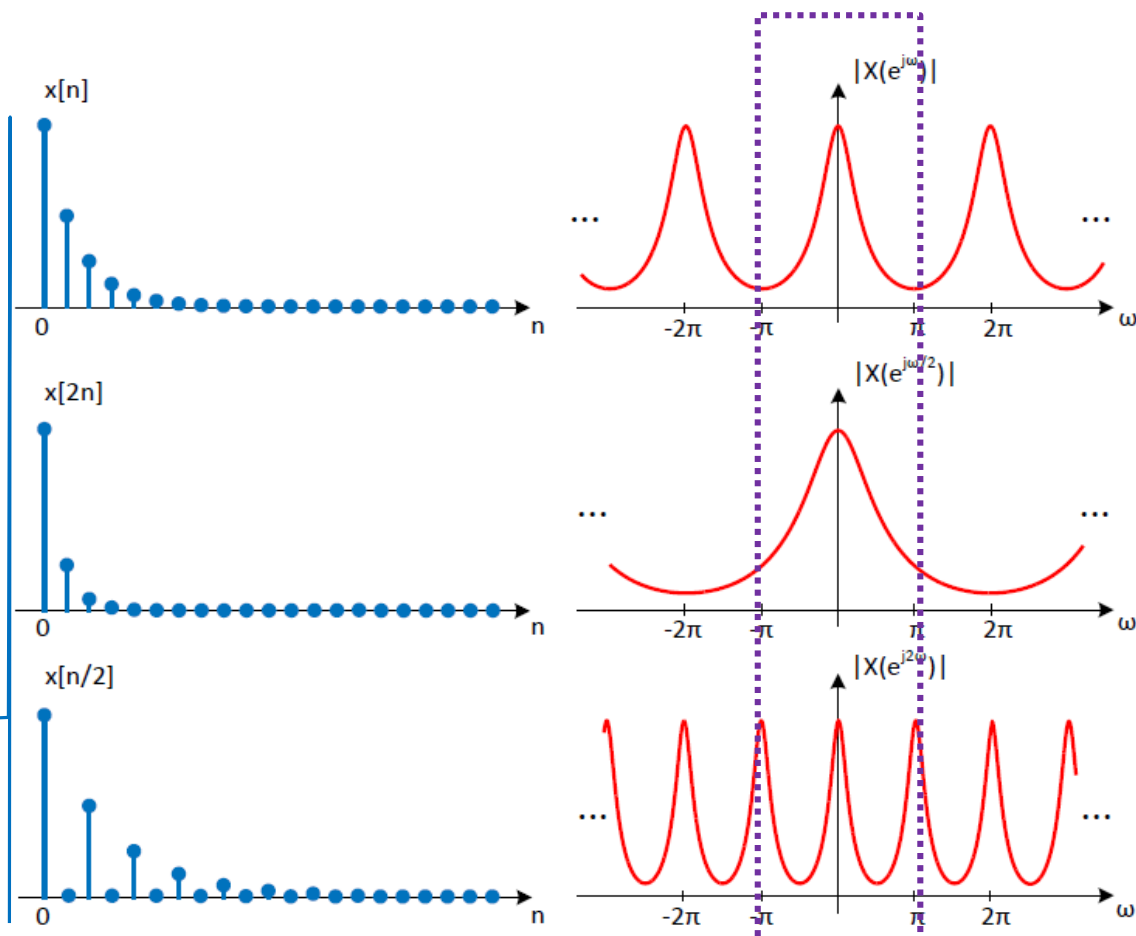
$$y[n] = x[kn], k \in \mathbb{Q} \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega/k})$$

Θα είναι

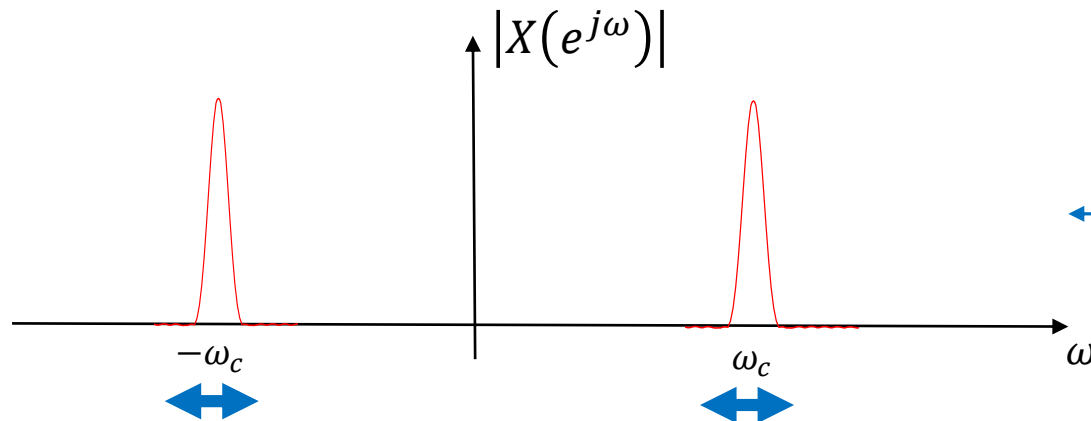
$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[kn] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j\frac{\omega}{k} m} \\ &= X(e^{j\omega/k}) \end{aligned}$$

Θέτοντας $m = kn \Rightarrow n = \frac{m}{k}$

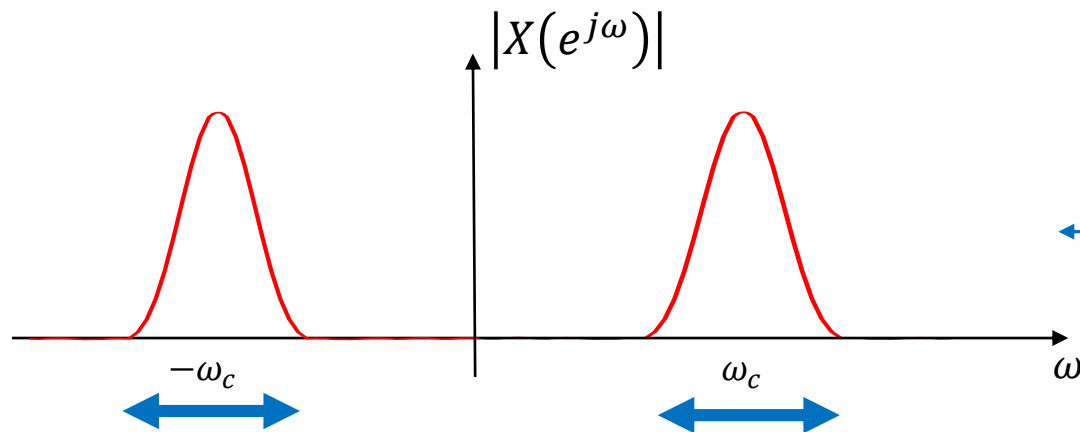
- Μικρή διάρκεια στο χρόνο $\rightarrow$ wideband signal
- Μεγάλη διάρκεια στο χρόνο $\rightarrow$ narrowband signal



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

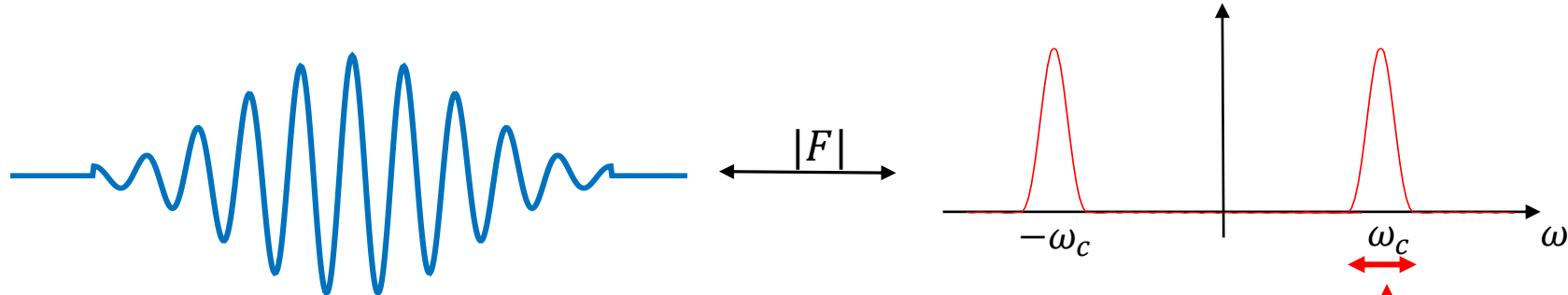


Σήμα στενής ζώνης
(narrowband)



Σήμα ευρείας ζώνης
(wideband)

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



- Παρατηρήστε ότι το ημίτονο είναι **διαμορφωμένο** (πολλαπλασιασμένο) με μια Gaussian-like περιβάλλουσα $w[n]$
- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το «**πακέτο συχνοτήτων**» που αποτελεί τον ημιτονοειδή παλμό!
- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, και αυτά είναι επιπλέον **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα **μικρό εύρος συχνοτήτων**

$$[-\omega_c - B, -\omega_c + B], [\omega_c - B, \omega_c + B]$$

με B μικρό και με ω_c τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης κάθε «πακέτου» της εξόδου!

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

• Για να δούμε ένα τέτοιο άθροισμα διαμορφωμένων σημάτων εισόδου

• Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^N w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

• Έστω ότι η περιβάλλουσα $w_k[n]$ κάθε συχνότητας ω_k είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα, δηλ.

$$w_k[n] \neq 0, \quad N_1 \leq n \leq N_2$$

$$W_k(e^{j\omega}) \approx 0, \quad |\omega| > B_k, \quad B_k \ll \omega_k$$

• Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k(e^{j(\omega-\omega_k)}) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k(e^{j(\omega+\omega_k)}) \right)$$

• Πράγματι έχουμε ένα **άθροισμα σημάτων με φάσματα στενής ζώνης!**

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = \sum_{k=1}^N w_k [n - \tau_g(e^{j\omega_k})] \cos \left(\omega_k \left(n - \tau_p(e^{j\omega_k}) \right) + \theta_k \right)$$

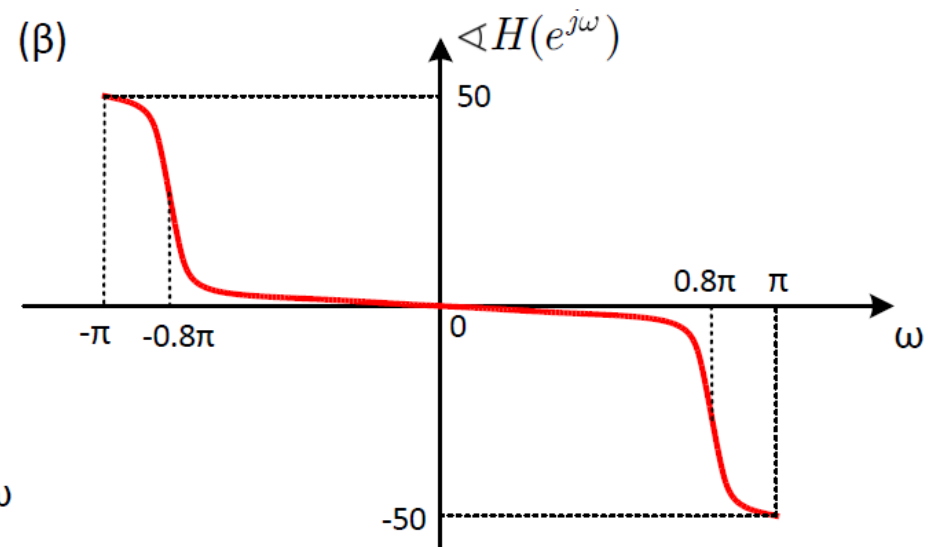
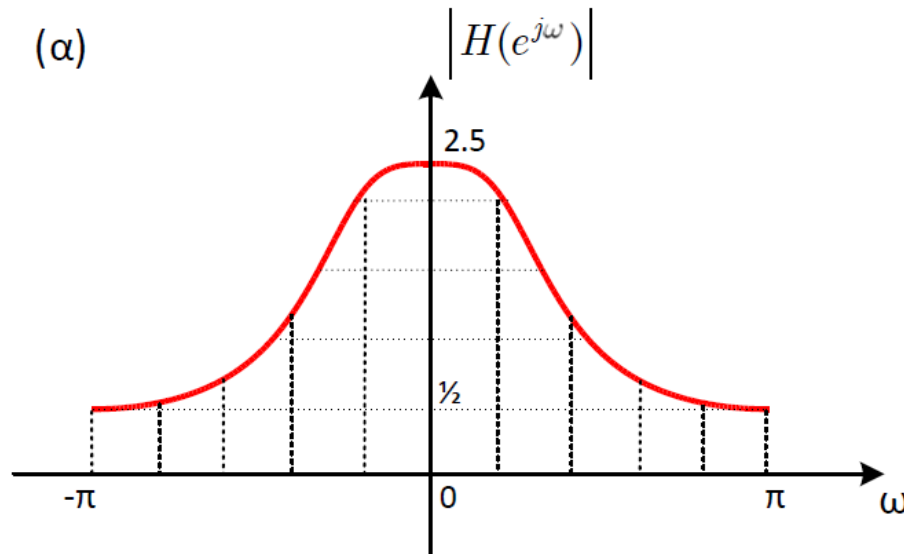
- Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας ω_k έχει καθυστερήσει κατά $\tau_g(e^{j\omega_k})$
- Η ερμηνεία του group delay ως η καθυστέρηση ενός ημιτονοειδούς παλμού στην έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι έγκυρη μόνον αν:

- ☐ Η απόκριση πλάτους γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
- ☐ Το φάσμα πλάτους της εισόδου πρέπει να είναι αρκετά narrowband (“στενής ζώνης”)
- ☐ Η απόκριση φάσης πρέπει να είναι σχεδόν γραμμική γύρω από αυτές
 - ☐ δηλ. η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.



• Είσοδος

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

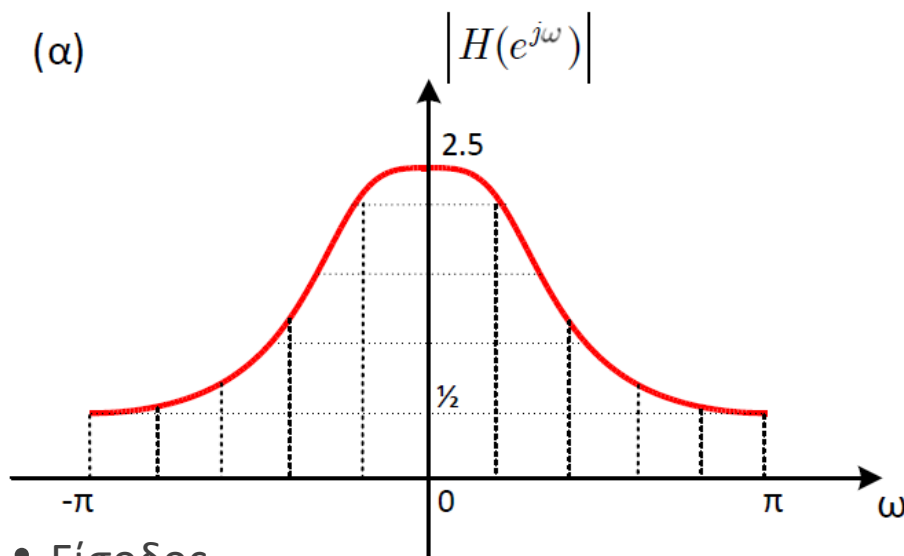
$$= w[n - M] \sin(0.2\pi n) + w[n - M] \sin(0.8\pi n) + w[n - 7M] \sin(0.4\pi n)$$

με $M = 50$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.

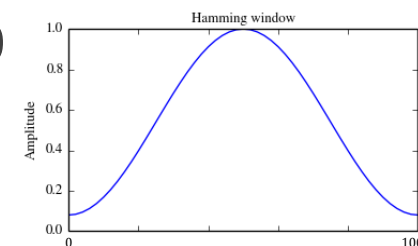
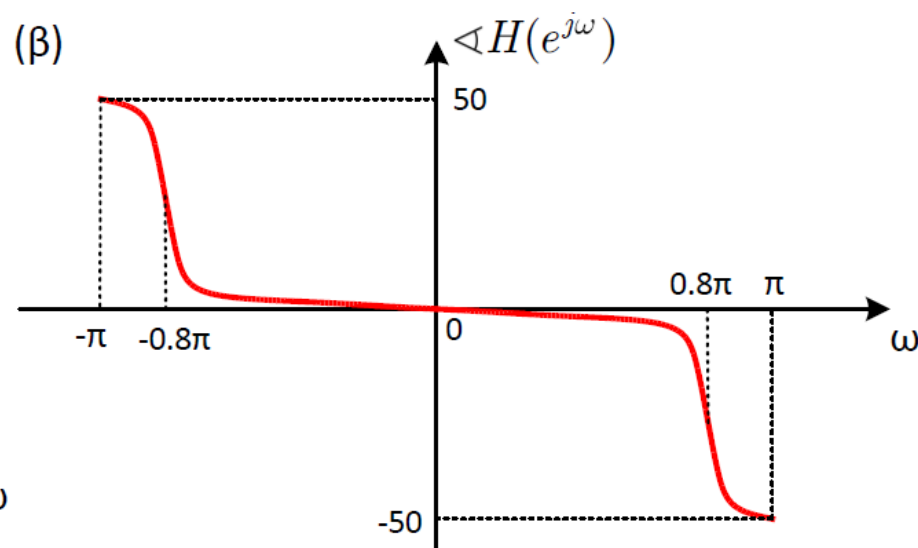


• Είσοδος

$$x[n] = w[n - 50] \sin(0.2\pi n) + w[n - 50] \sin(0.8\pi n) + w[n - 350] \sin(0.4\pi n)$$

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), 0 \leq n \leq N = 100$$

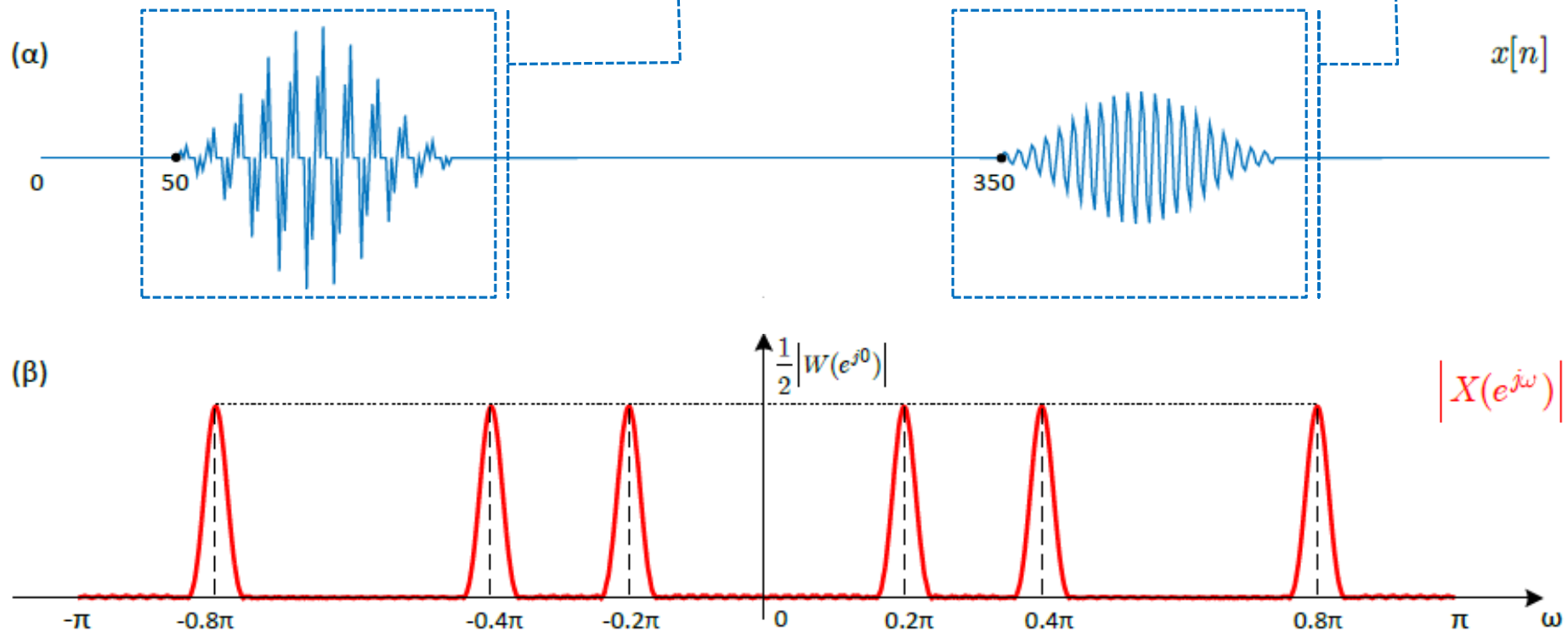
• Το σημαντικό εύρος συχνοτήτων για αυτό το $w[n]$ είναι $\sim \frac{8\pi}{100} \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

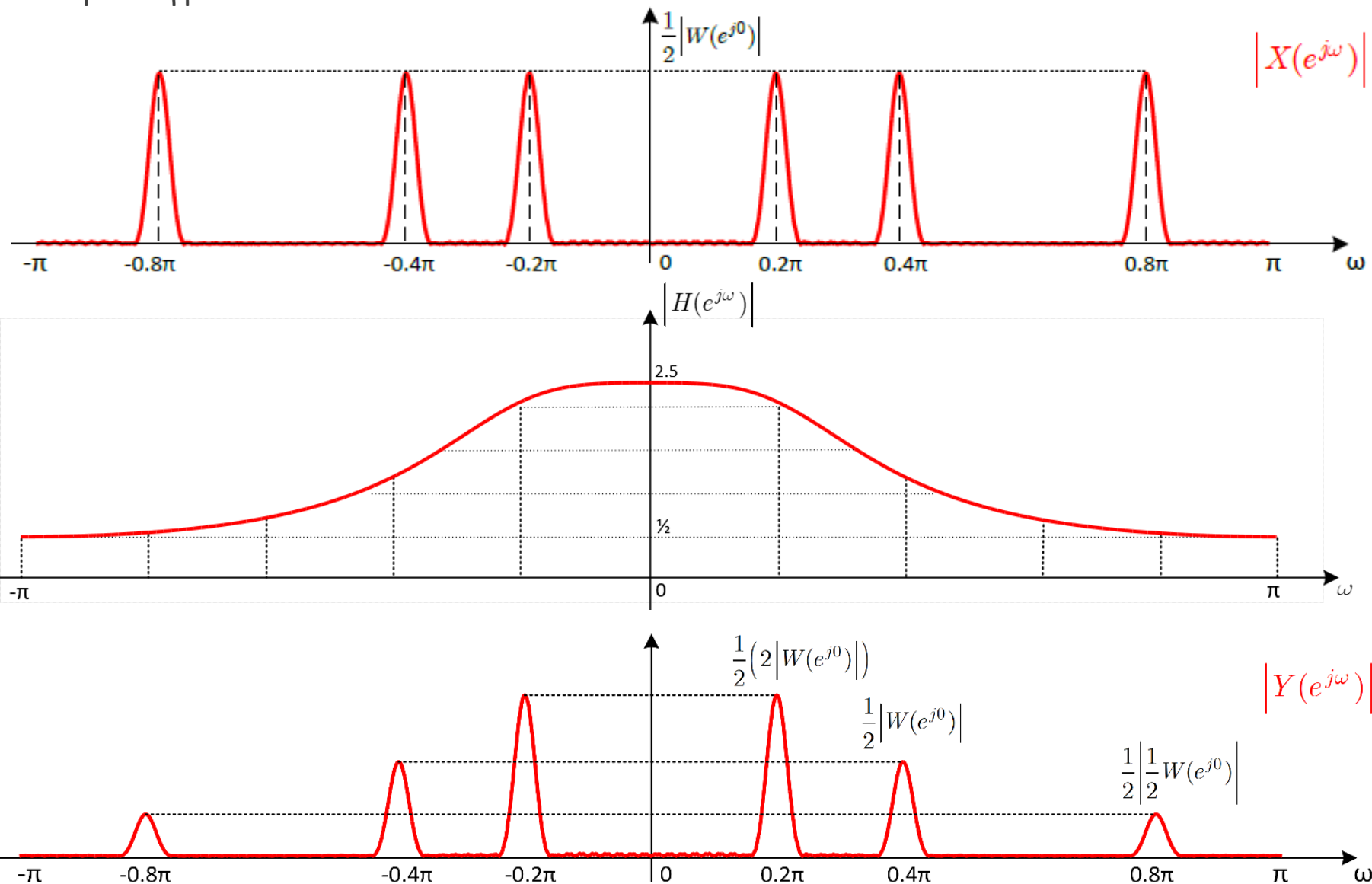
- Παράδειγμα:

$$x[n] = \underbrace{w[n - 50]}_{\text{envelope 1}} \sin(0.2\pi n) + \underbrace{w[n - 50]}_{\text{envelope 2}} \sin(0.8\pi n) + \underbrace{w[n - 350]}_{\text{envelope 3}} \sin(0.4\pi n)$$

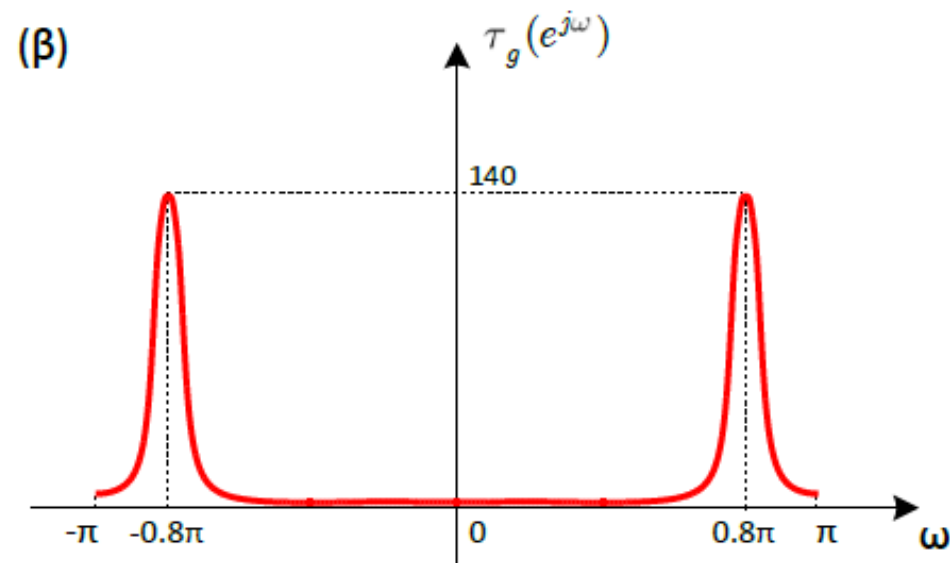
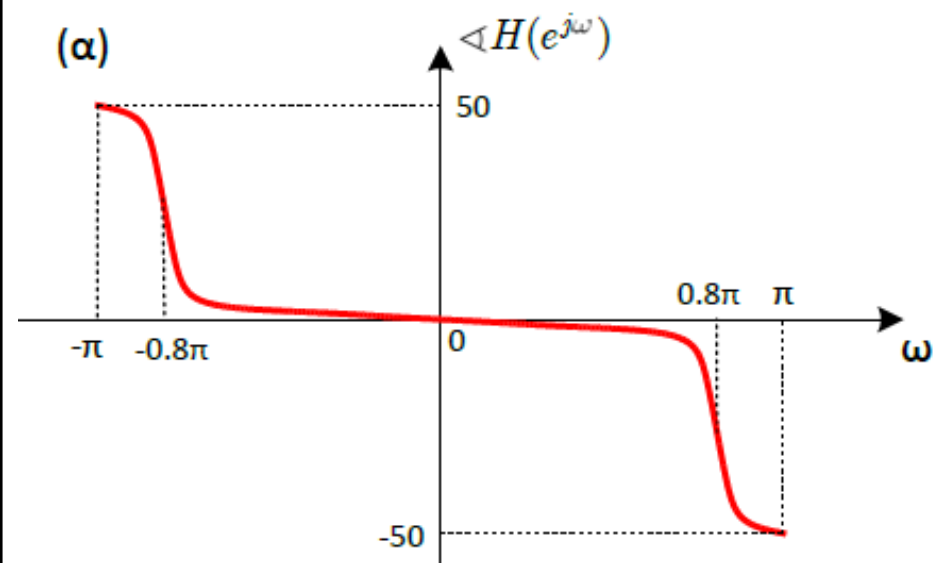


• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Παράδειγμα:

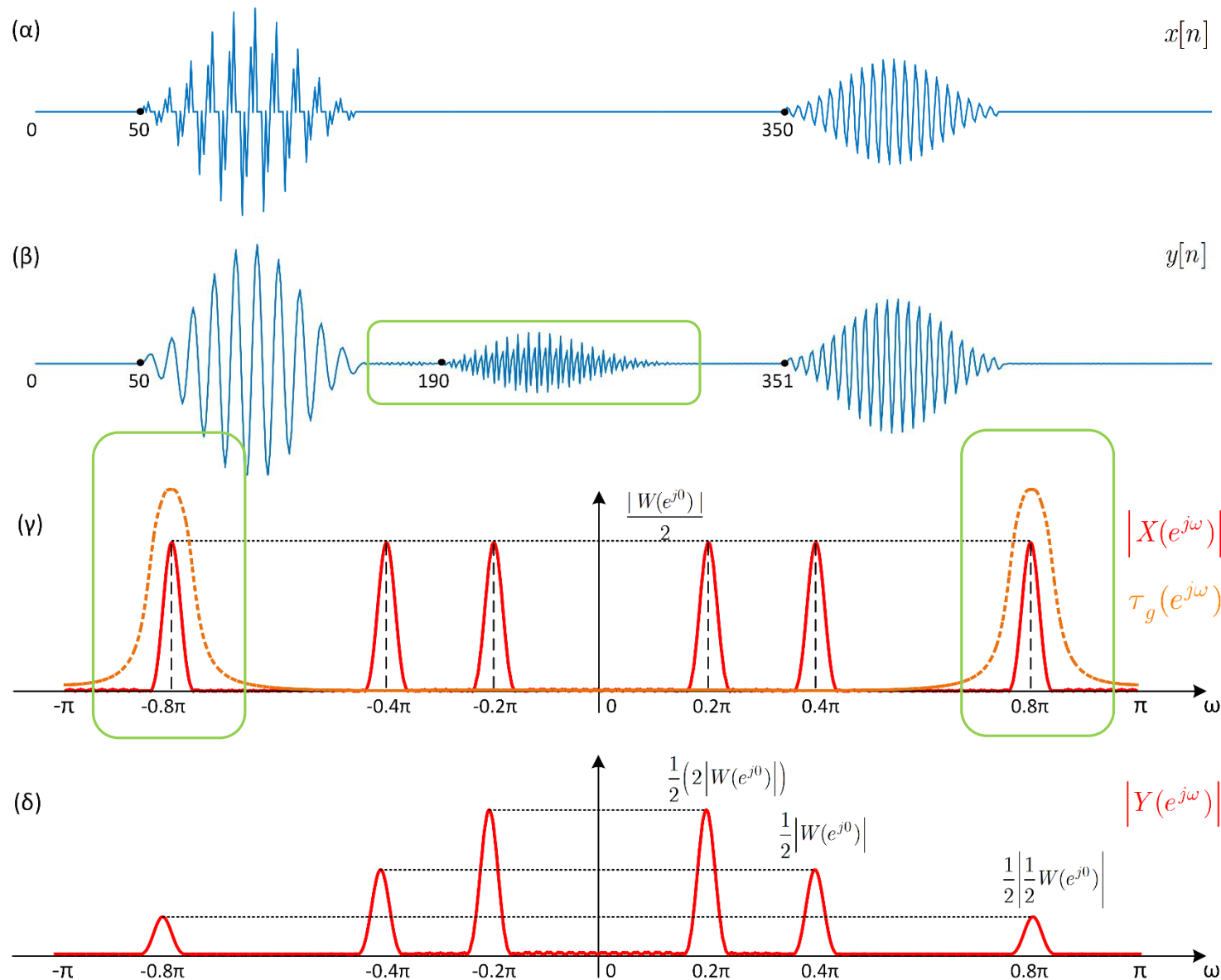


- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Παράδειγμα:



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

• Παράδειγμα:

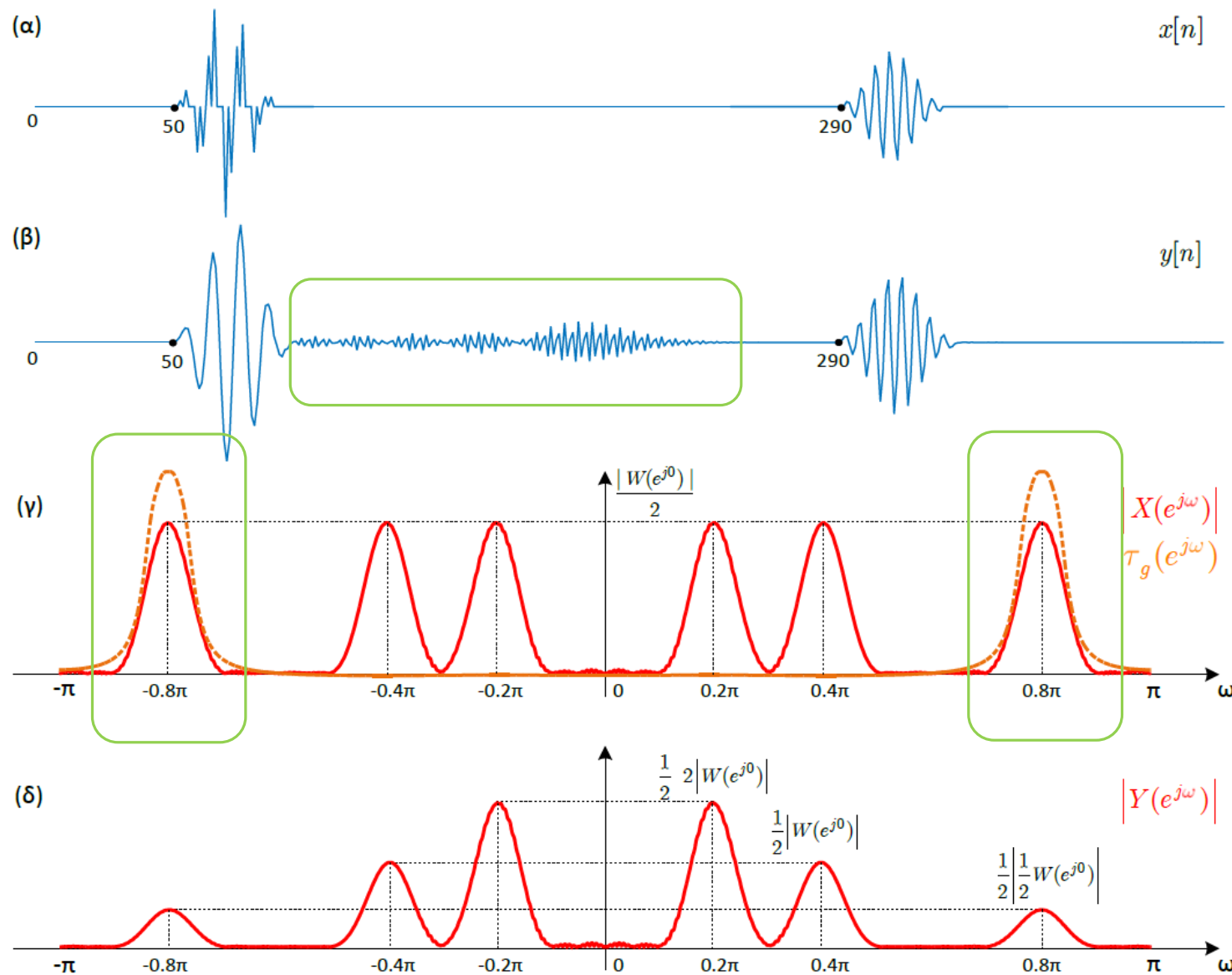


• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

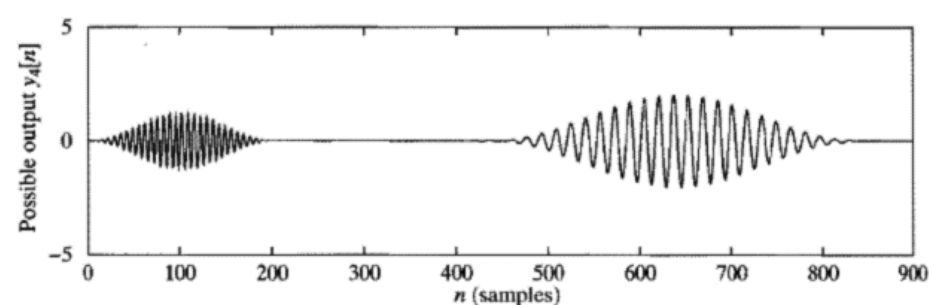
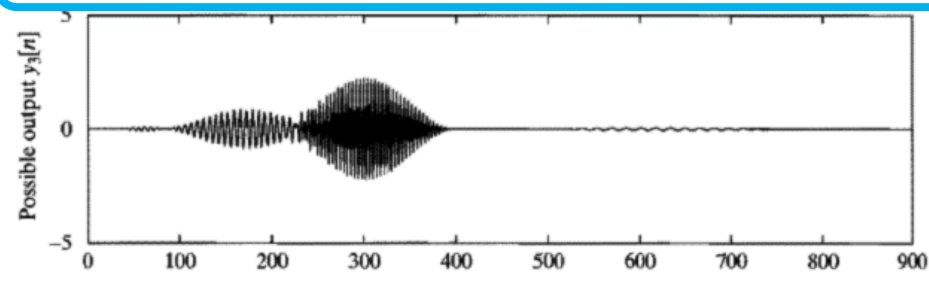
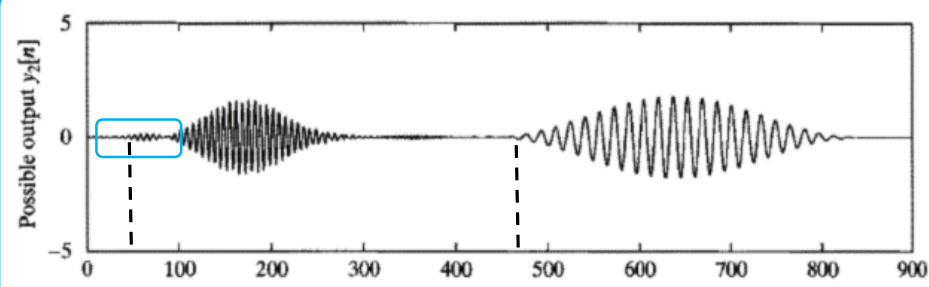
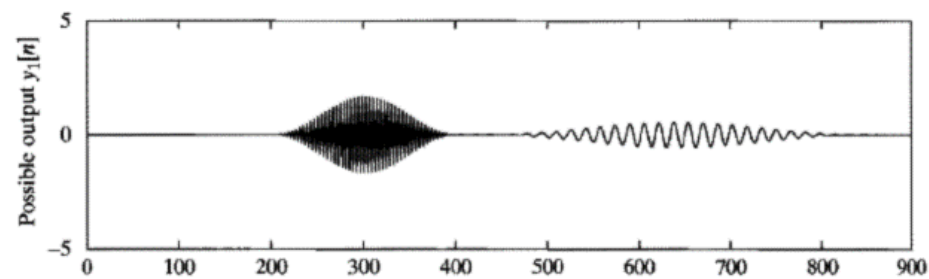
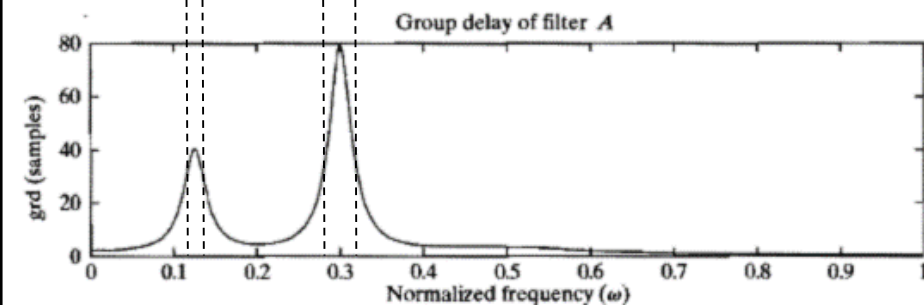
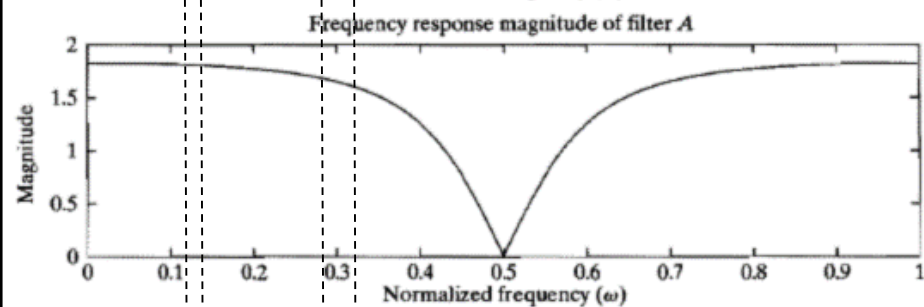
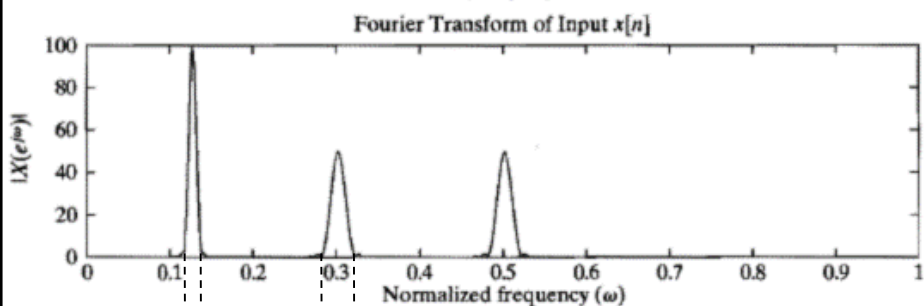
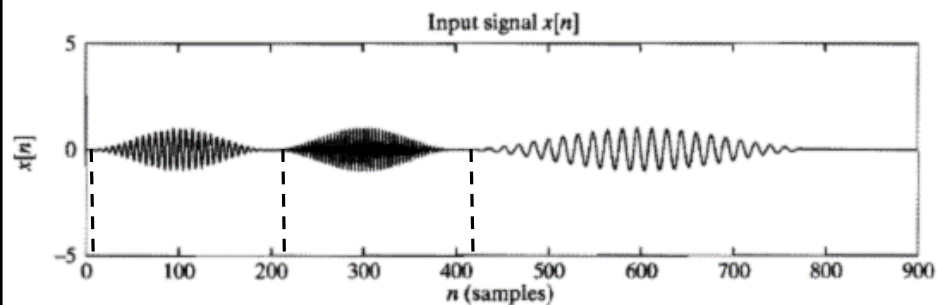
• Παράδειγμα:

Είσοδος ευρείας ζώνης (wideband)

Οι συχνότητες που συνιστούν τον παλμό των 0.8π λαμβάνουν διαφορετική καθυστέρηση ομάδας η καθεμία γιατί είναι πιο «απλωμένες» στη συχνότητα και δε «συγκεντρώνονται» γύρω από κάποια σταθερή τιμή της συνάρτησης καθυστέρησης ομάδας



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

