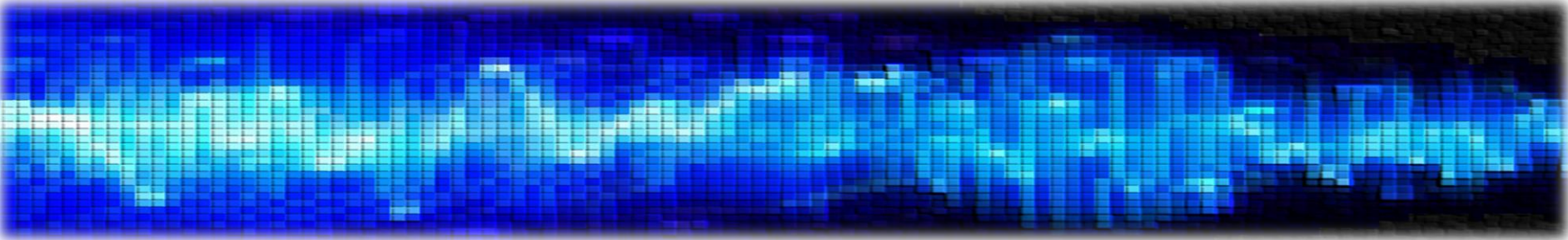


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 7^Η

- 
- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
 - Ιδιότητες

• Μετασχηματισμός
Fourier
Διακριτού Χρόνου

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n - 1], a > 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$(n + 1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$a^{ n }, a < 1,$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n + 1))}{\sin(\omega_c)} u[n], r < 1$	$\frac{1}{1 - 2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega} + r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega (M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \pi e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
k -οστή παραγωγή στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\frac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{j\omega}} X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) , \\ \phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n] = x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n] = -x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$, πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

- Παραδείγματα: Γραμμικότητα

- Έστω

$$\begin{aligned}y[n] = ax_1[n] + bx_2[n] &\leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ax_1[n] + bx_2[n])e^{-j\omega n} \\&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_1[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} bx_2[n]e^{-j\omega n} \\&= a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]e^{-j\omega n} + b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j\omega n} \\&= aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})\end{aligned}$$

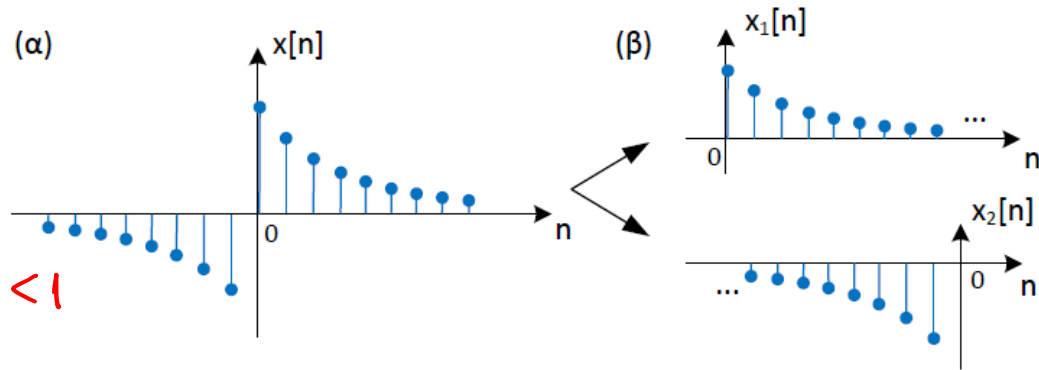
- Άρα

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Γραμμικότητα

○ Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



Έστω $x_1[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$x_2[n] = -b^n u[-n-1], |b| > 1$

Από τις παραπάνω

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, |a| < 1$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}, |b| > 1$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

- Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

- Έστω

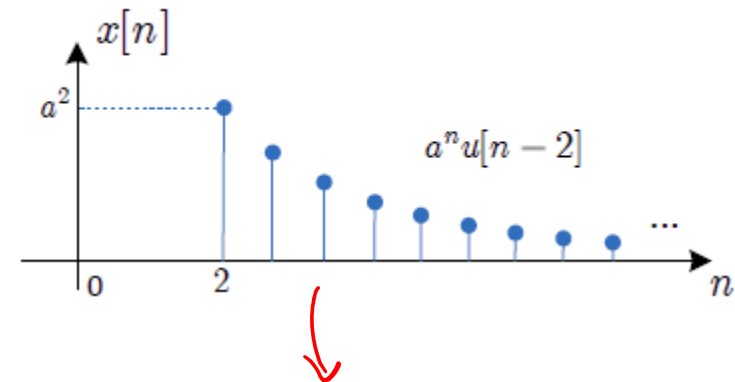
$$\begin{aligned}y[n] = x[n - n_0] &\leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - n_0] e^{-j\omega n} \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega(k+n_0)} \\&= e^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k} \\&= e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})\end{aligned}$$

- Άρα

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση
- Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



- Ξαφ-ε

$$x[n] = a^n u[n-2]$$

$$= \frac{a^{-2}}{a^{-2}} a^n u[n-2]$$

$$= a^{n-2} u[n-2] \cdot \frac{1}{a^{-2}}$$

$$= a^2 (a^{n-2} u[n-2])$$

$$= a^2 y[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = a^2 \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} e^{-j2\omega}.$$

$$x[n] = a^n u[n-2]$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

- Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

- Έστω

$$\begin{aligned}y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n] &\leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} \\&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j(\omega - \omega_0)n} \\&= X(e^{j(\omega - \omega_0)})\end{aligned}$$

- Άρα

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

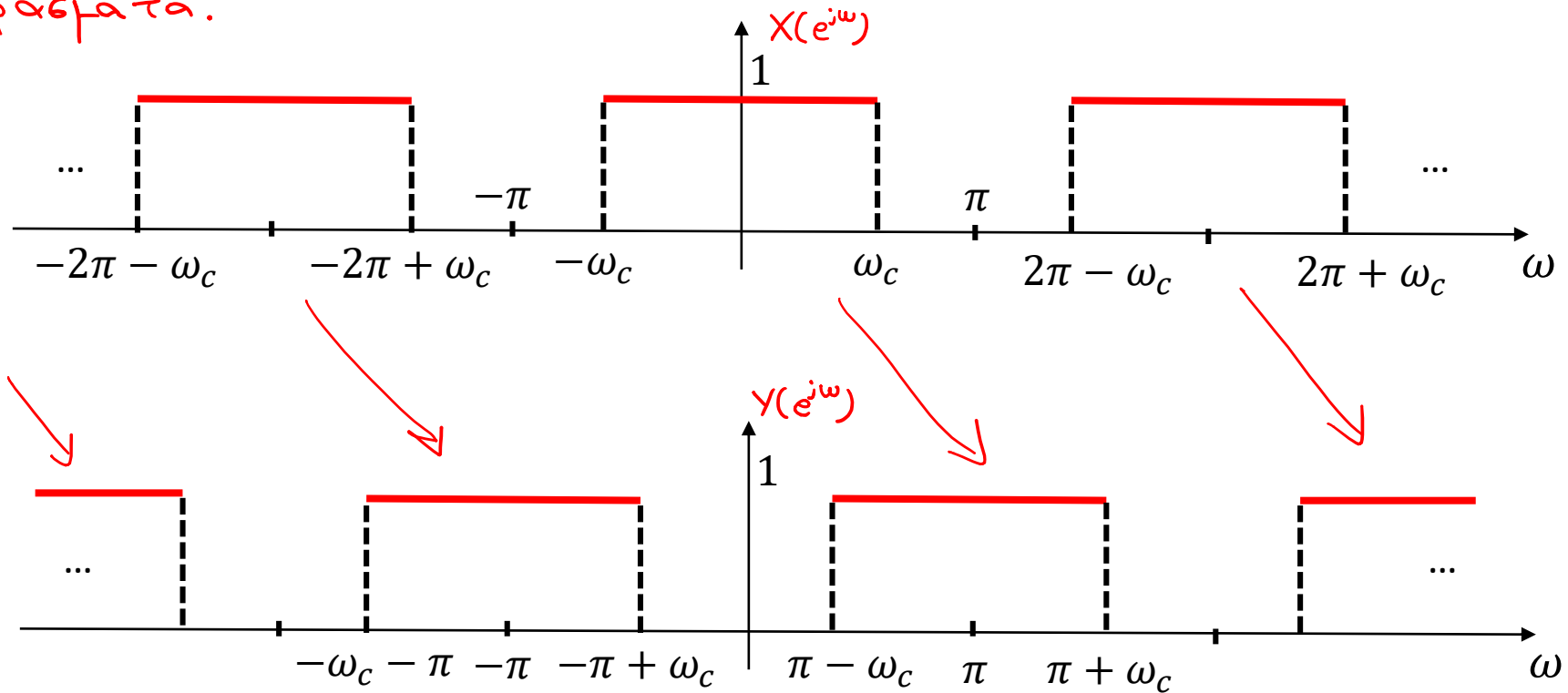
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ αν

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Πριν τη μαθηματική λύση, ας δούμε λίγο γραφικά τα δυο σήματα.



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

- Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

Θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y[n] &= F^{-1} \{ X(e^{j(\omega-n)}) \} \\ &= e^{jn\pi} x[n] \\ &= (-1)^n x[n] \end{aligned}$$

Ξέρουμε ότι

$$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

οπότε

$$y[n] = (-1)^n \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}.$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

- Έστω

$$\begin{aligned}
 c[n] = x[n] * y[n] &\leftrightarrow C(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] * y[n]) e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] y[n-k] e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-k] e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] Y(e^{j\omega}) e^{-j\omega k} \\
 &= Y(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

- Άρα

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x[n] = a^n u[n]$, $y[n] = b^n u[n]$, $|a| < 1$, $|b| < 1$

Είναι $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1 \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

$y[n] = b^n u[n]$, $|b| < 1 \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}$

άρα

$$C(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}$$

$$= \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - be^{-j\omega}} \quad \left| \begin{array}{l} A = C(e^{j\omega})(1 - ae^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{a}} \\ B = \frac{1}{(1 - \cancel{ae^{-j\omega}})(1 - be^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{a}} \end{array} \right.$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$= \frac{1}{1 - be^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{a}} = \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{1}{\frac{a-b}{a}} = \frac{a}{a-b} = A$$

Όφεια, $B = \frac{b}{b-a}$. Άρα

$$C(e^{j\omega}) = \frac{\frac{a}{a-b}}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{\frac{b}{b-a}}{1 - be^{-j\omega}}$$

$$\updownarrow \mathbb{F}^{-1}$$

$$C[n] = \frac{a}{a-b} a^n u[n] + \frac{b}{b-a} b^n u[n].$$

$$= \left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \right) u[n].$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Θεώρημα Parseval

- Έστω

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] x^*[n] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right) x^*[n] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] e^{j\omega n} \right) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right)^* d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα: Θεώρημα Parseval

- Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

Είναι
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\omega_c n)}{\pi^2 n^2} = ?$$

≡ έραφε ότι

$$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Οότε

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \omega \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi} (\omega_c - (-\omega_c)) = \frac{\omega_c}{\pi}. \end{aligned}$$

Τέλος Διάλεξης

