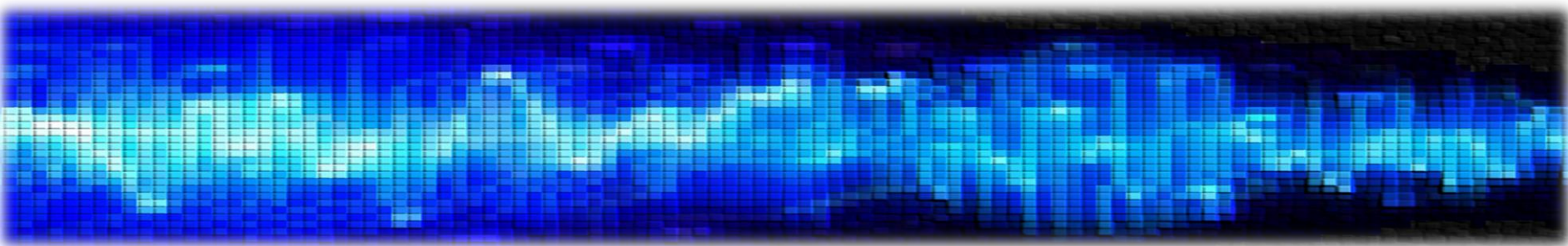


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 6^Η



- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Προς το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου...

- Είδαμε με λεπτομέρεια πως επηρεάζει ένα ΓΧΑ σύστημα ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ή ένα ημίτονο) συχνότητας ω_0 που εμφανίζεται στην είσοδό του
 - Το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά $|H(e^{j\omega_0})|$
 - Στη φάση της εισόδου προστίθεται μια σταθερά $\varphi_H(e^{j\omega_0})$
- Όμως τα περισσότερα σήματα που μας ενδιαφέρουν **δεν** έχουν τη μορφή ενός μιγαδικού εκθετικού (ή ημιτονοειδούς) σήματος
- Η ανάλυση που κάναμε θα μας ήταν **πολύ** χρήσιμη αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση κάποιων μιγαδικών εκθετικών σημάτων που το καθένα θα έχει κάποια συγκεκριμένη συχνότητα
 - Τότε θα γνωρίζαμε πως επηρεάζεται κάθε συχνότητα από το ΓΧΑ σύστημα
- Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! 😊
- Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται – έκπληξη! 😊 – **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Μια πιο εύλογη εξαγωγή του DTFT προέρχεται από τις Σειρές Fourier διακριτού χρόνου, ευθέως ανάλογα με την εξαγωγή του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από τις Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου
- Θα παραλείψουμε εδώ αυτήν την παρουσίαση και θα δώσουμε απευθείας τον ορισμό
- Ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ' αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω :

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad \left| \quad \begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \right.$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

- Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν συνεχείς τιμές στο $(-\pi, \pi]$, και “υπάρχουν” μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.
- Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να συνθέσει το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών όλων των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

$$x[n] \in \mathbb{R}$$

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι **πραγματικό**, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x(e^{j\omega}) = -\varphi_x(e^{-j\omega})$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \varphi_x(e^{j\omega})) d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία **πλάτους** και **φάσης** με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα $[0, \pi]$!!!

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη

- Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος
- Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η μέση τετραγωνική σύγκλιση

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$.

Είναι $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$

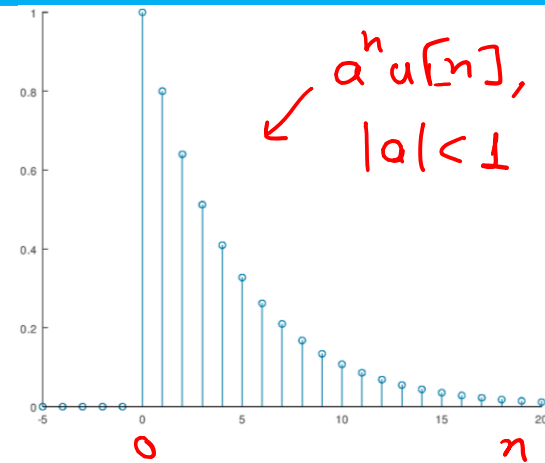
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad \text{για } |a| < 1.$$

Άρα

$$a^n u[n], |a| < 1 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$



$$\begin{aligned} |ae^{-j\omega}| &= \\ &= |a| \underbrace{|e^{-j\omega}|}_1 = |a| < 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

As βρούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος!

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{-j\omega})^*} = \frac{(1 - ae^{-j\omega})^*}{|1 - ae^{-j\omega}|^2} \quad (1)$$

Είνα

$$|1 - ae^{-j\omega}|^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euler}}}{1 - a\cos(\omega) + ja\sin(\omega)}^2 = (1 - a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2$$

$$= 1 - 2a\cos\omega + \underbrace{a^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega}_{a^2} = 1 - 2a\cos(\omega) + a^2 \quad (2)$$

Επίσης, $(1 - ae^{-j\omega})^* = 1 - ae^{j\omega} \quad (3)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \xrightarrow[\textcircled{3}]{\textcircled{2}} X(e^{j\omega}) &= \frac{1 - ae^{j\omega}}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} \xrightarrow{\text{Euler}} \frac{1 - a\cos(\omega) - ja\sin(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} \\ &= \frac{1 - a\cos(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} + j \frac{-a\sin(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} = X_R(e^{j\omega}) + j X_I(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$$

$$\text{Αρ} \propto X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}, \quad X_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}. \quad (4)$$

Ας βρούμε την ποσική μορφή του $X(e^{j\omega})$.

$$\rightarrow \text{Φάσμα πλάτους } |X(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - a e^{-j\omega}|} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}}.$$

$$\rightarrow \text{Φάσμα φάσης } \angle X(e^{j\omega}) = \phi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \stackrel{(4)}{=}$$

$$\stackrel{(4)}{=} \tan^{-1} \frac{\cancel{\dots} - \frac{a \sin(\omega)}{\cancel{\dots}}}{\frac{1 - a \cos(\omega)}{\cancel{\dots}}} = \tan^{-1} \left(\frac{-a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} \right) = -\tan^{-1} \frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)}.$$

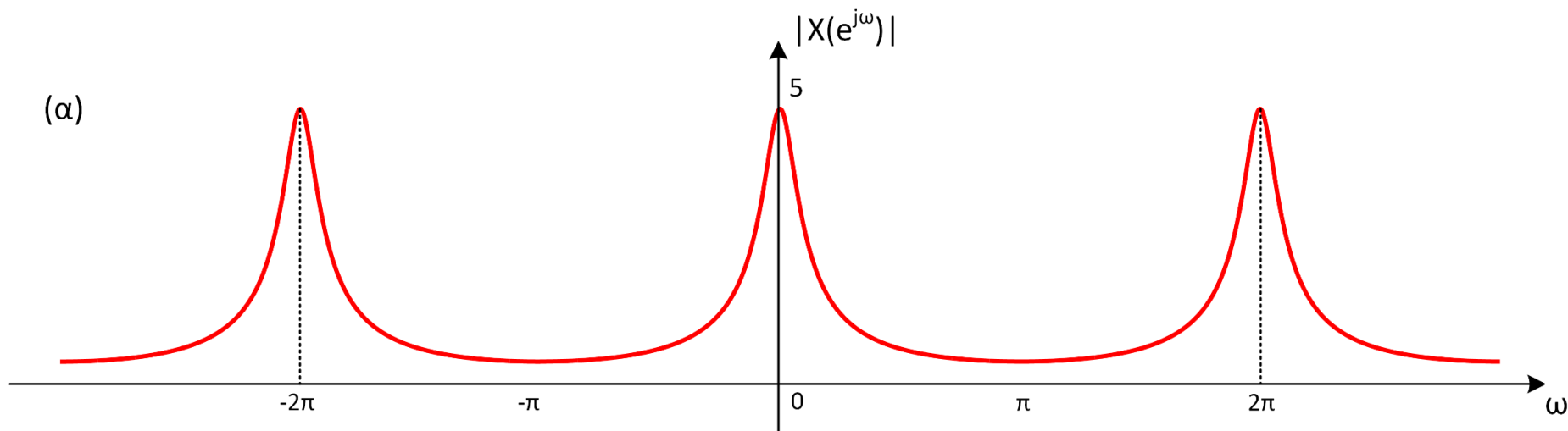
Ας δούμε πως φαίνονται γραφικά αυτές οι συναρτήσεις πλάτους και φάσης.

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

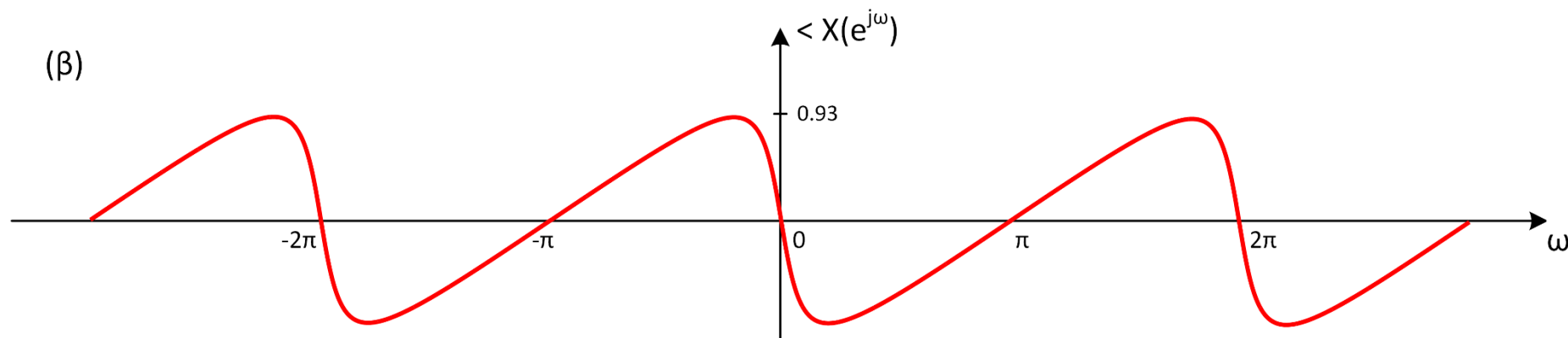
- Παραδείγματα:

$$\alpha = 0.8 = \frac{4}{5}$$

(α)



(β)



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8
n = np.arange(-10, 21)
x = np.hstack([np.zeros((10)), alpha**n[10:31]])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = 1/(1 - alpha * np.exp(-1j*w))

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

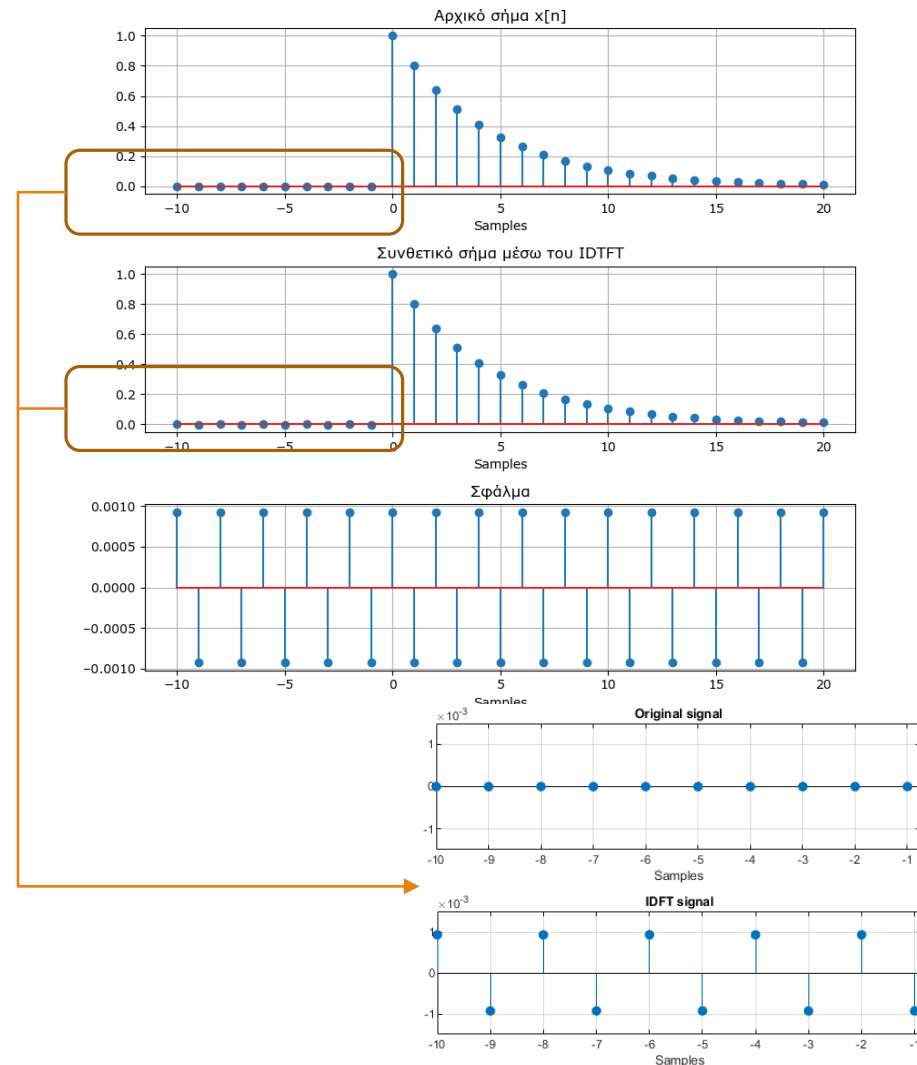
axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```

Riemann Sum:

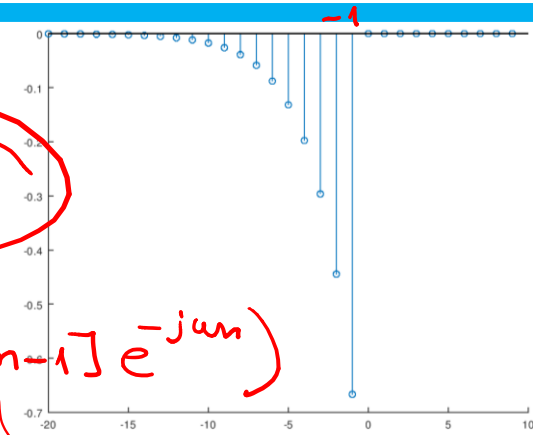
$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \rightarrow 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $|a| > 1$.



Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a^n u[-n-1] e^{-j\omega n})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} =$$

$$\begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{-1} (a e^{-j\omega})^n = - \sum_{n=1}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^{-n} = - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^{-n} - 1 \right)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1} e^{j\omega})^n \stackrel{*}{=} 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} = \frac{1 - a^{-1} e^{j\omega}}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} - \frac{1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}}$$

$$= \frac{-a^{-1} e^{j\omega}}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, \quad |a| > 1.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \stackrel{*}{=} \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

Άρα $-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, |a| > 1$

Πραγματικό και φανταστικό μέρος, καθώς και φάση ημίτονος και φάσης είναι αλγεβρικά ίδια $f \in \pi \text{ rad}$.

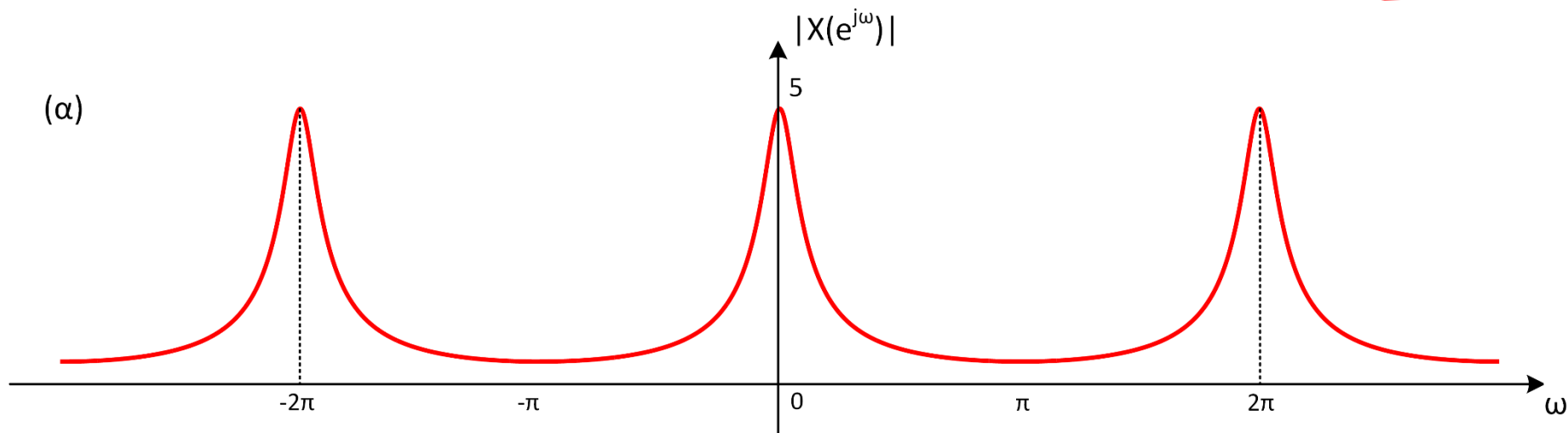
Ας δούμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο τελευταίων.

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

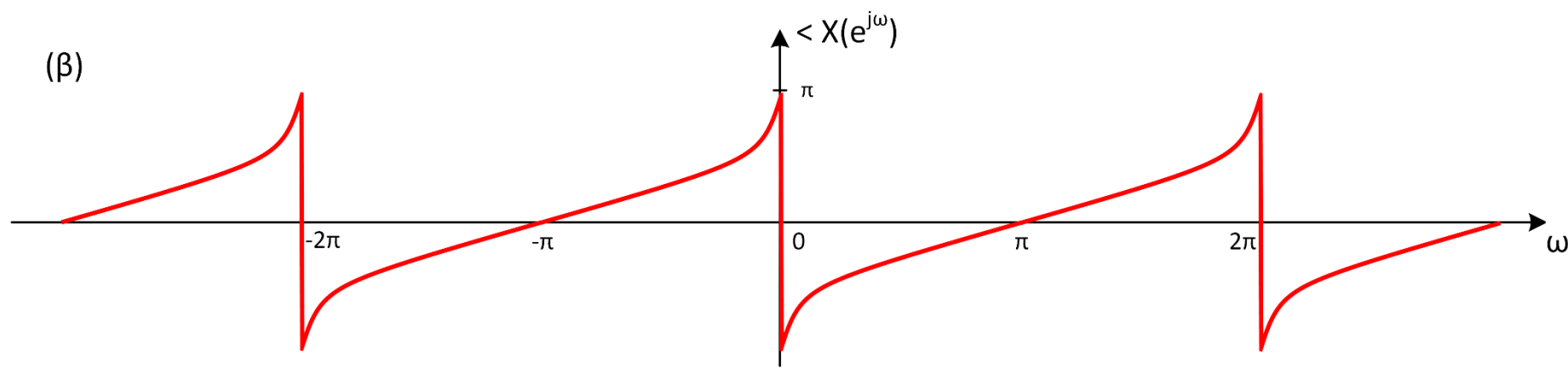
- Παραδείγματα:

$$a = \frac{6}{5}$$

(α)



(β)



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5
n = np.arange(-30, 11)
x = np.hstack([-alpha*n[0:30], np.zeros((11))])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = 1/(1 - alpha * np.exp(-1j*w))

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

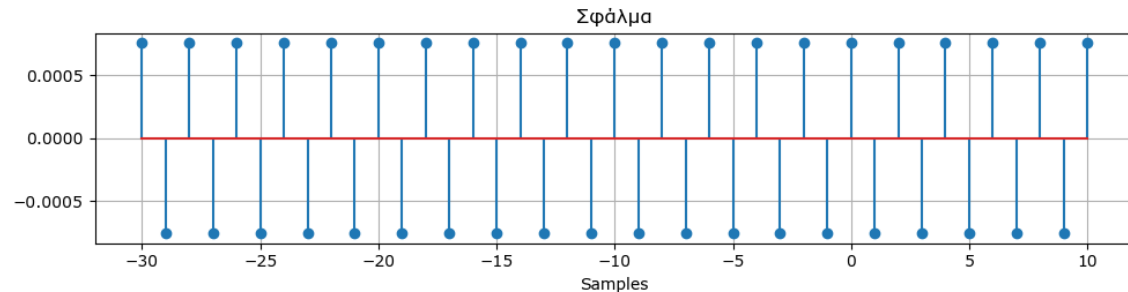
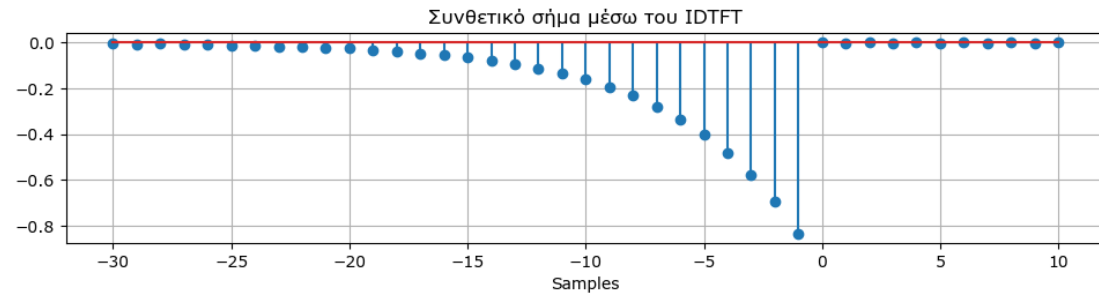
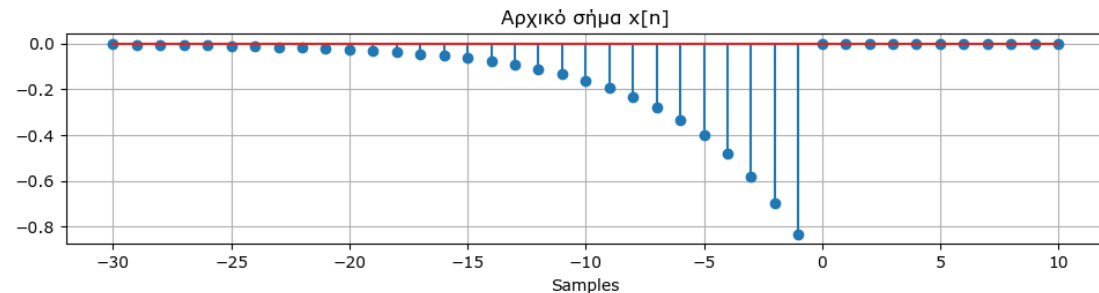
axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \rightarrow 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

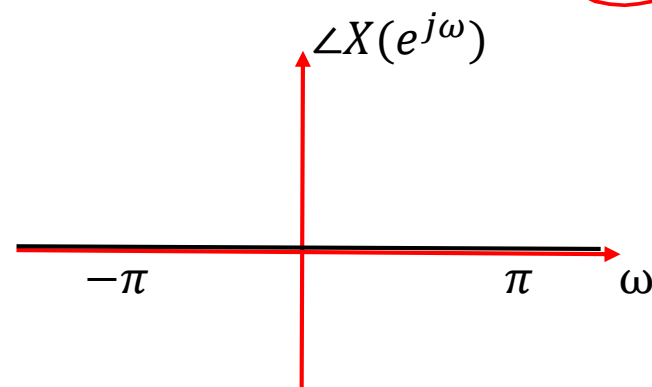
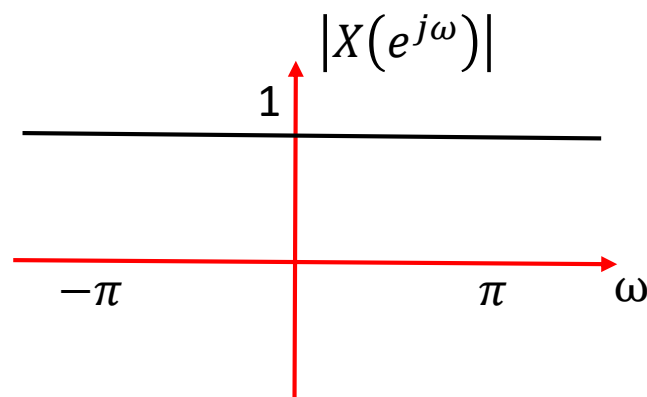
○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Είναι
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\delta[0]} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{e^{-j\omega 0}} = 1$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Άρα
$$\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1, \forall \omega$$

$1 = 1 \cdot e^{j0} \leftarrow \begin{matrix} \text{φάση} \\ \text{πλάτος} \end{matrix}$



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \rightarrow 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-10, 11)
x = np.hstack([np.zeros((10)), 1, np.zeros((10))])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = np.ones_like(w)

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

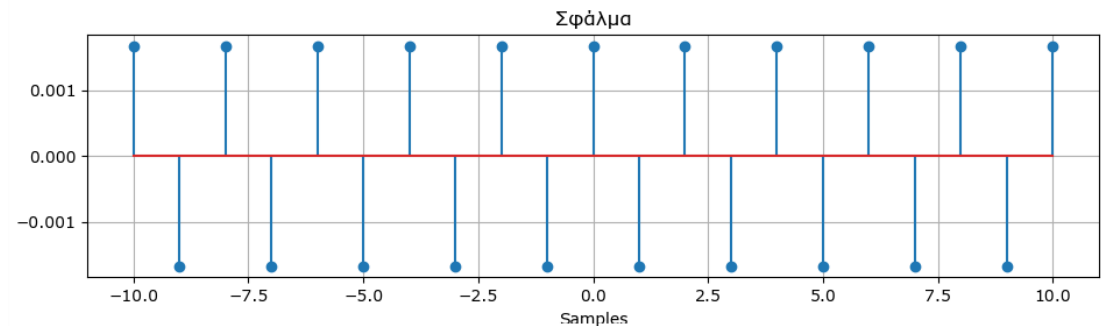
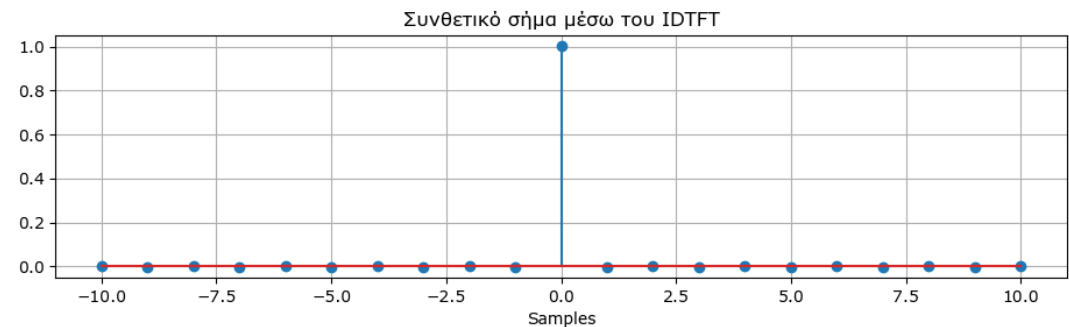
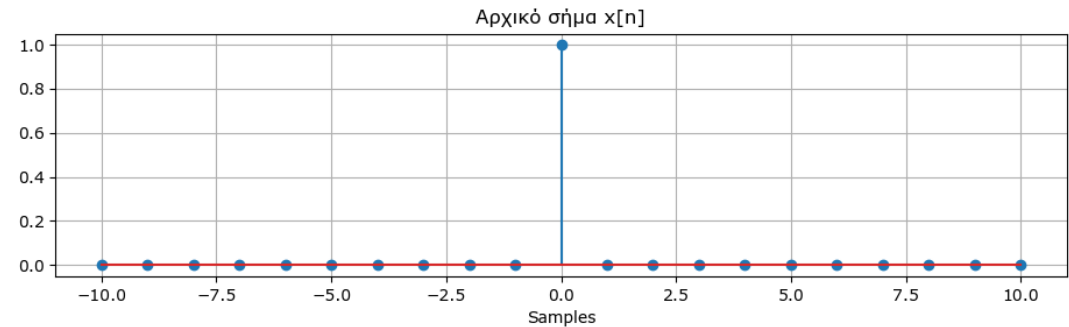
# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

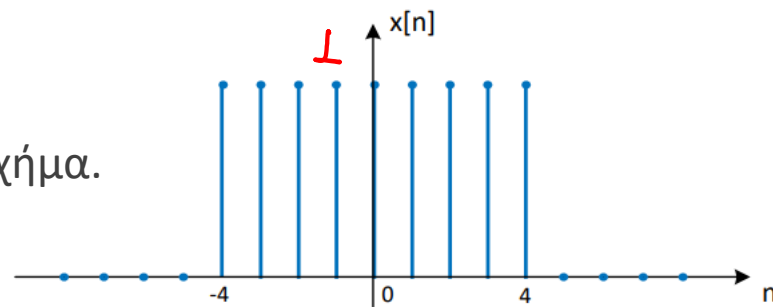
axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



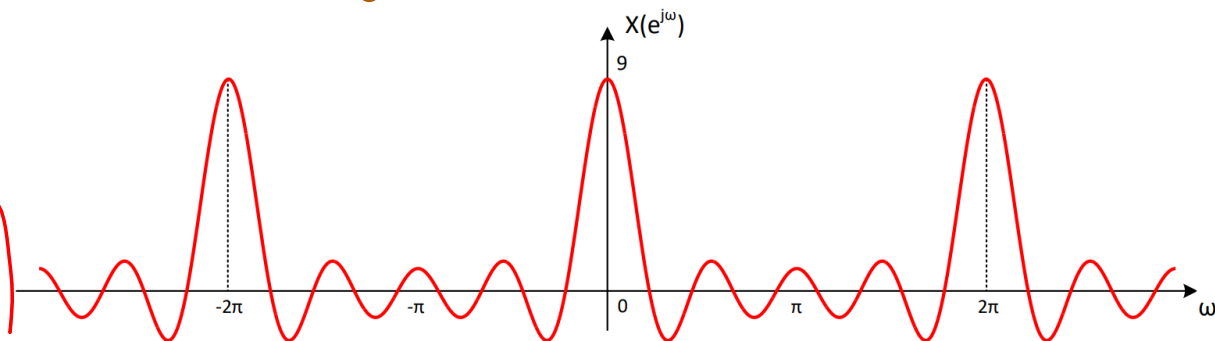
Είναι
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-4}^4 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^4 e^{-j\omega n} \stackrel{\textcircled{\Delta}}{=} \frac{e^{j4\omega} - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}}. \text{ Χρησιμοποιώντας το hint,}$$

$$\text{το hint, } X(e^{j\omega}) \stackrel{*}{=} \frac{e^{-j\omega/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{\sin(9\omega/2)}{\sin(\omega/2)} = \frac{\sin(\frac{9\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}.$$

*Hint: $e^a - e^b = e^{\frac{a+b}{2}} \left(e^{\frac{a-b}{2}} - e^{\frac{b-a}{2}} \right)$

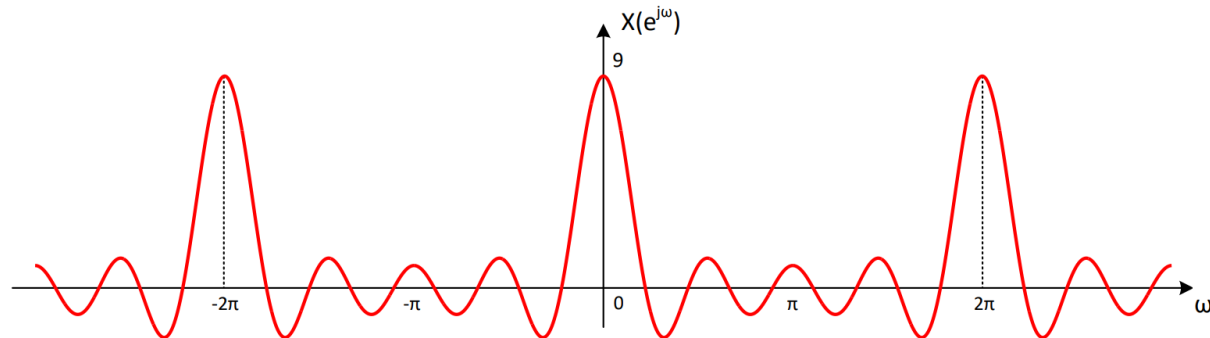
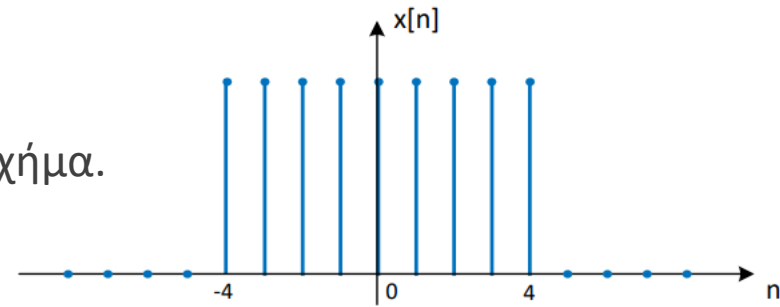
$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a} \quad \textcircled{\Delta}$$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Άρα

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 1, & -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \alpha \lambda \lambda \omega \end{cases} \xleftrightarrow{F} \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \\
 & \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \alpha \lambda \lambda \omega \end{cases} \xleftrightarrow{F} \frac{\sin\left(\frac{2M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \rightarrow 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-10, 11)
x = np.hstack([np.zeros((6)), np.ones((9)), np.zeros((6))])

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]
# Υπολογίζω το X(exp(jw)) όπως στο χαρτί
X = np.sin(9*w/2)/np.sin(w/2)

# Σύνθεση του σήματος x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = np.zeros_like(x)

for i in range(0, len(w)):
    x_syn = x_syn + X[i] * np.exp(1j*w[i]*n)

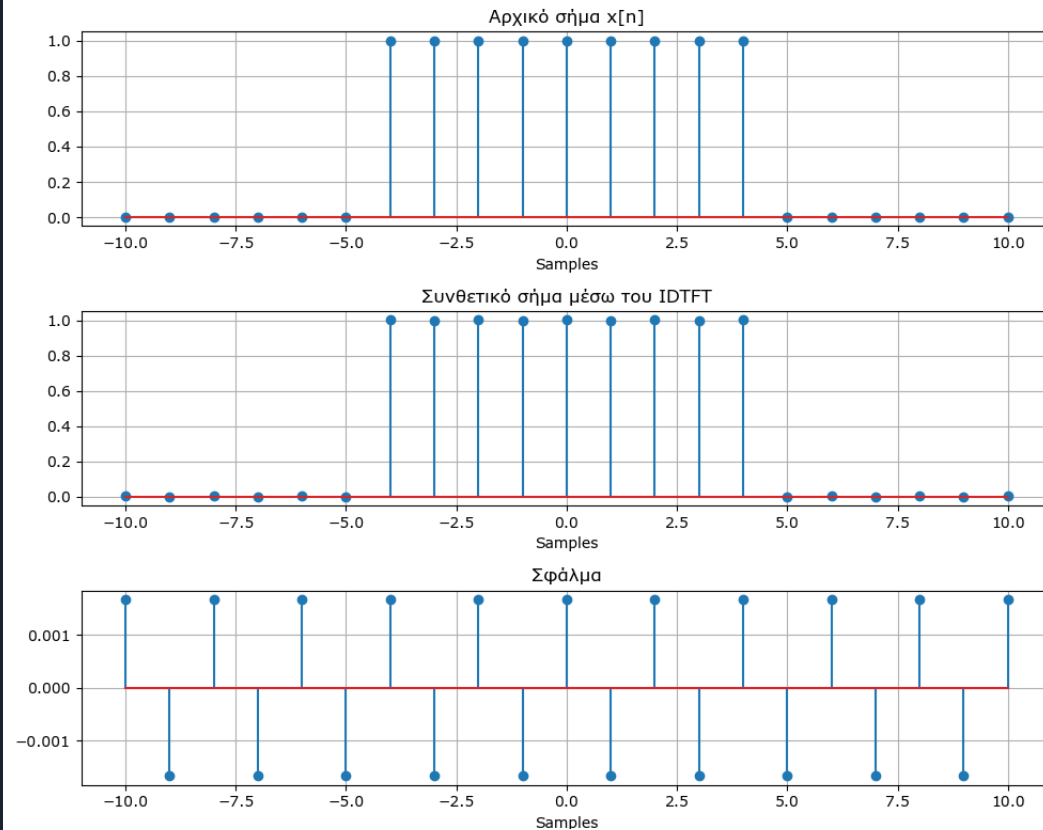
# Άθροισμα Riemann
x_syn = dw*(1/(2*np.pi))*x_syn
# Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, υπάρχει ένα αμελητέο
# φανταστικό μέρος
x_syn = np.real(x_syn)

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x_syn)
axs[1].set_title('Συνθετικό σήμα μέσω του IDTFT')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

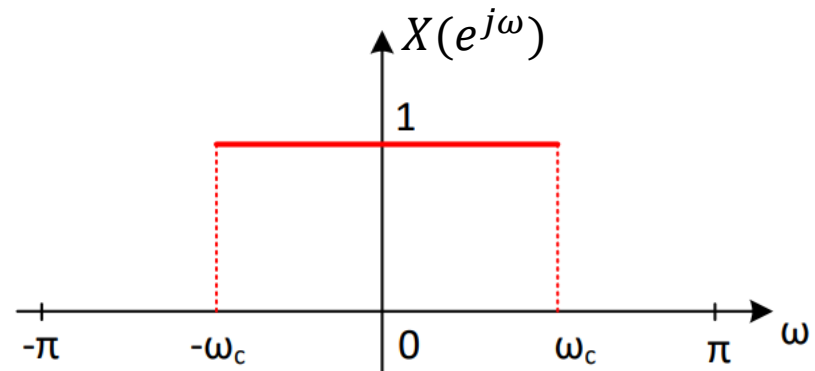
axs[2].stem(n, x_syn-x)
axs[2].set_title('Σφάλμα')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Samples')
```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} e^{j\omega n} \Big|_{\omega=-\omega_c}^{\omega=\omega_c} = \frac{1}{j2\pi n} \underbrace{(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n})}_{2j \sin(\omega_c n)}$$

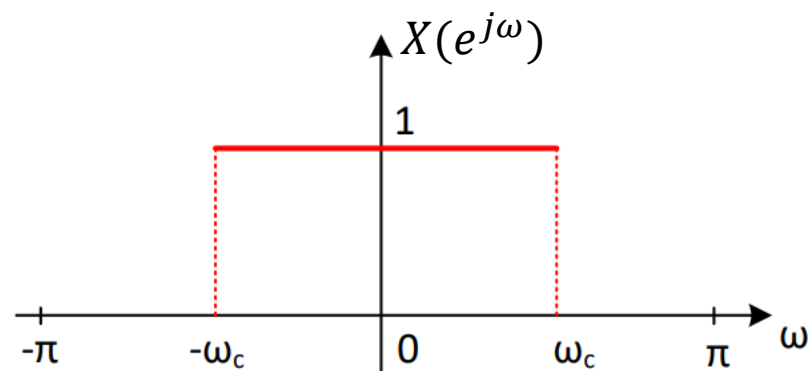
$$= \frac{1}{\cancel{j}2\pi n} \cancel{2j} \sin(\omega_c n) = \frac{1}{\pi n} \sin(\omega_c n).$$

Άρα $\frac{1}{\pi n} \sin(\omega_c n) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

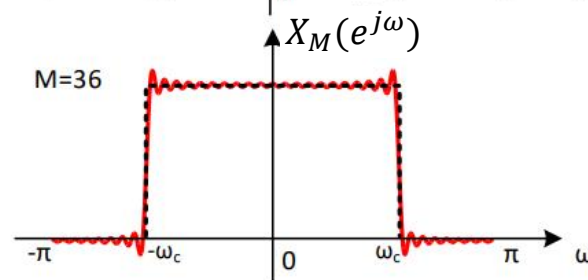
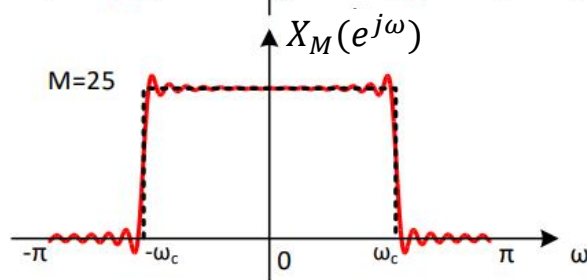
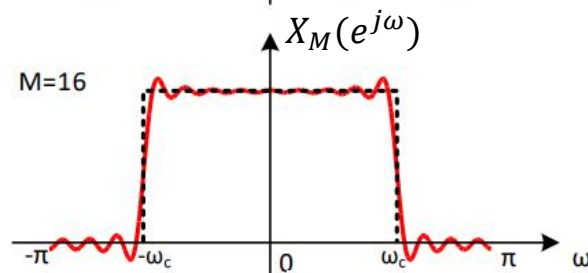
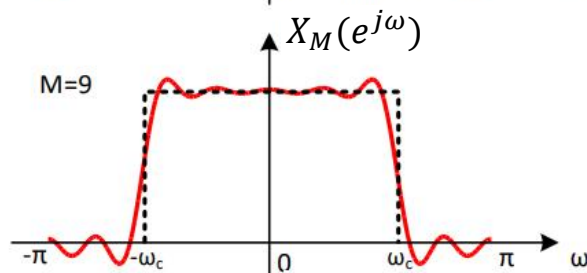
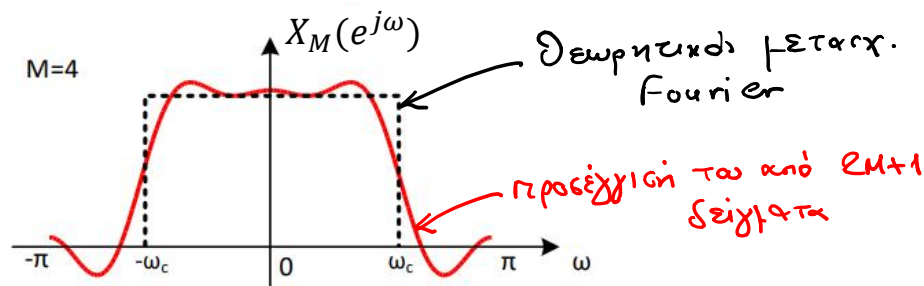
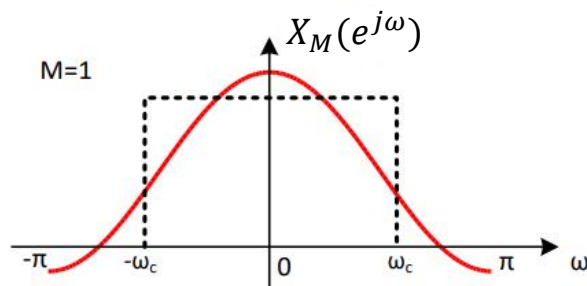
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Έστω ότι παίρνω $2M + 1$ δείγματα του σήματος $x[n]$



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Παραδείγματα:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-150, 151)
wc = np.pi/4 # <--- wc =  $\pi/4$ 

x = np.sin(wc*n)/(np.pi*n)
# Διόρθωση απροσδιοριστίας στο n=0
x[150] = wc/np.pi
# Γράφεται και με χρήση της συνάρτησης sinc() ως
# x = wc/np.pi * np.sinc(wc*n/np.pi)

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
dw = w[1]-w[0]

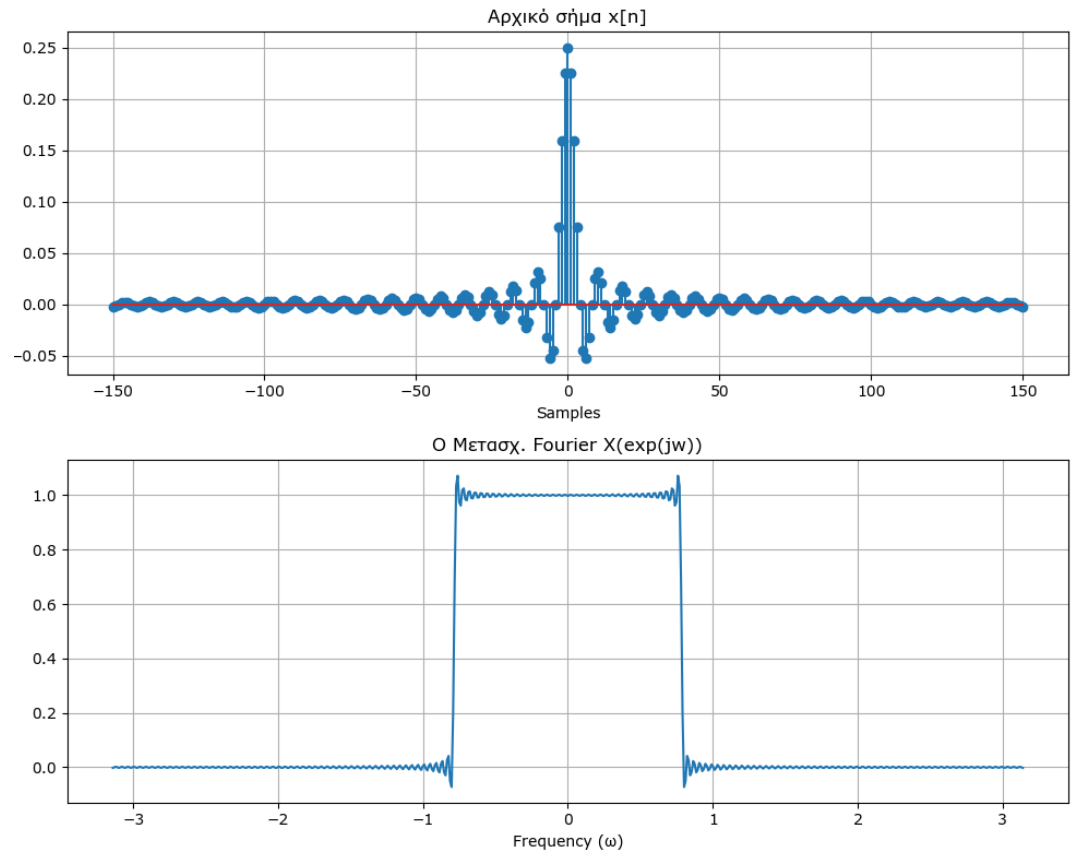
# Σύνθεση του σήματος  $X(\exp(jw))$  μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα  $x[n]$ ')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(w, X_syn)
axs[1].set_title('Ο Μετασχ. Fourier  $X(\exp(jw))$ ')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Frequency ( $\omega$ )')
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

- Ως τώρα, τα σήματα που εξετάσαμε ήταν σήματα ενέργειας
- Ο μετασχ. Fourier συγκλίνει για αυτά τα σήματα
- Όμως ενδιαφέρον έχουν και τα σήματα ισχύος
- Γι'αυτά, ο μετασχ. Fourier **δε** συγκλίνει
- Μπορούμε όμως να ορίσουμε με κάποιο τρόπο το μετασχ. Fourier τους?
 - ...ίσως με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων?

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο IDTFT του σήματος $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$, $\omega \in (-\pi, \pi]$.

$$\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

Είναι

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) \underbrace{e^{j\omega n}}_{f(\omega)} d\omega = f(\omega) \Big|_{\omega=0} = f(0) = e^{j0n} = 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$x[n] = 1, \forall n \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$$

Κατανομή Δέλτα:

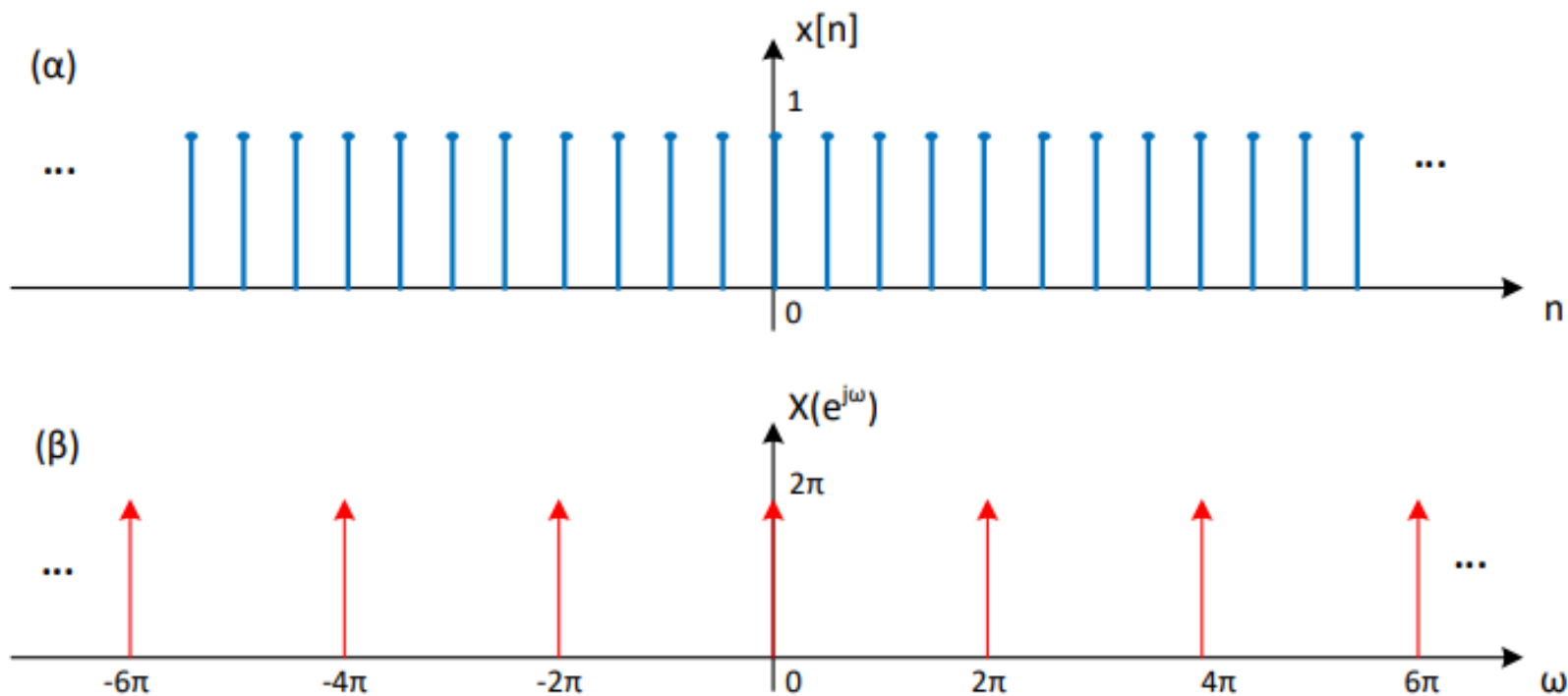
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx &= 1 \\ \delta(x) &= \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Παραδείγματα:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-100, 101)
x = np.ones_like(n)

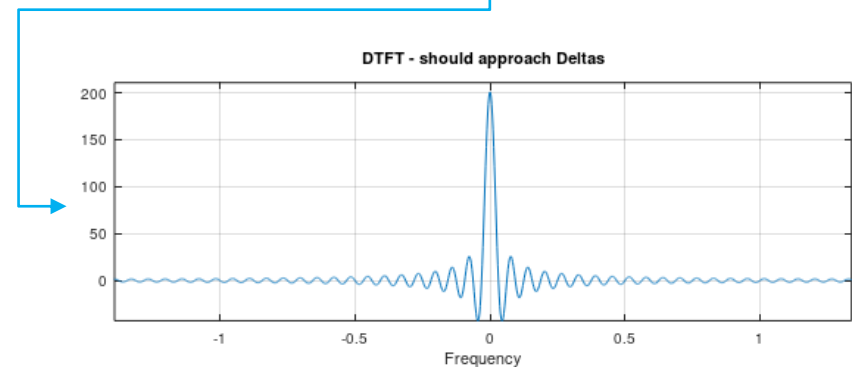
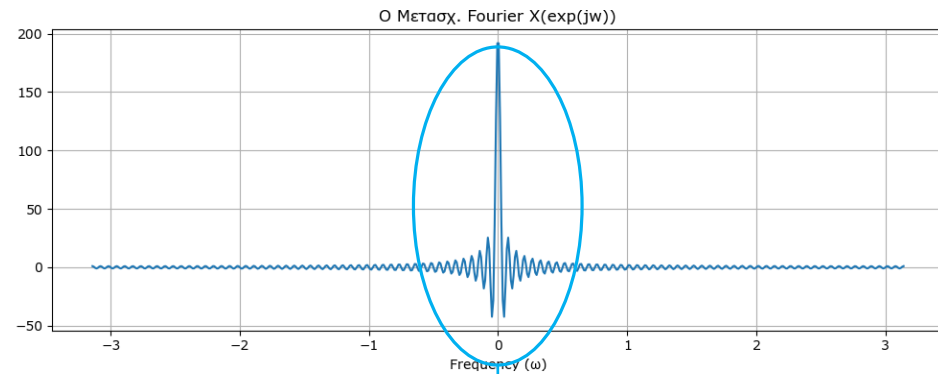
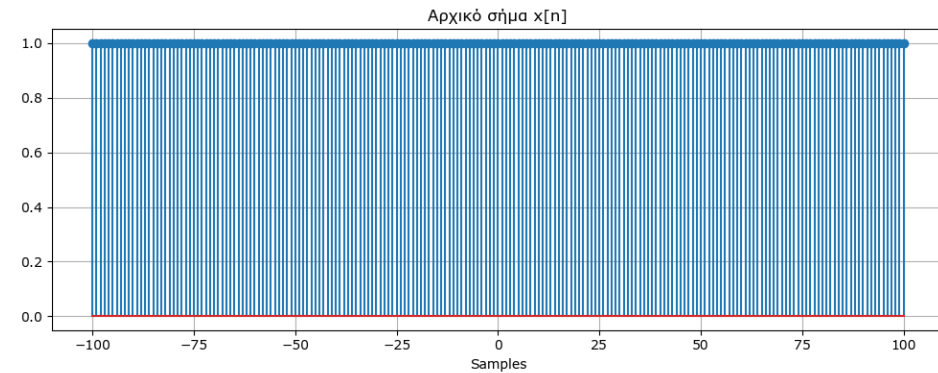
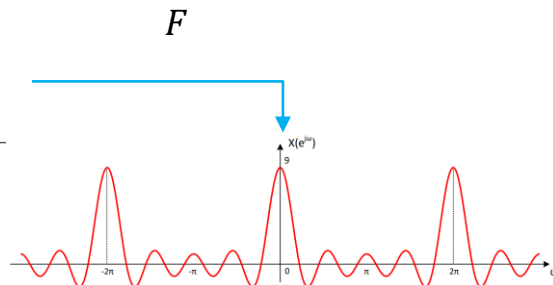
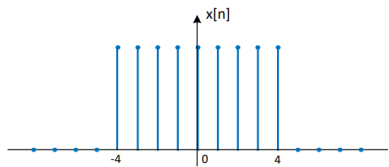
# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
# Σύνθεση του σήματος X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(w, X_syn)
axs[1].set_title('Ο Μετασχ. Fourier X(exp(jw))')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Frequency (ω)')
```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\forall n$, $\omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)n} \rightarrow \infty$$

Από πριν,

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega) \rightarrow X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0), \text{ τότε}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) \underbrace{e^{j\omega n}}_{f(\omega)} d\omega \\ &= f(\omega_0) = e^{j\omega_0 n} \Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

Άρα $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

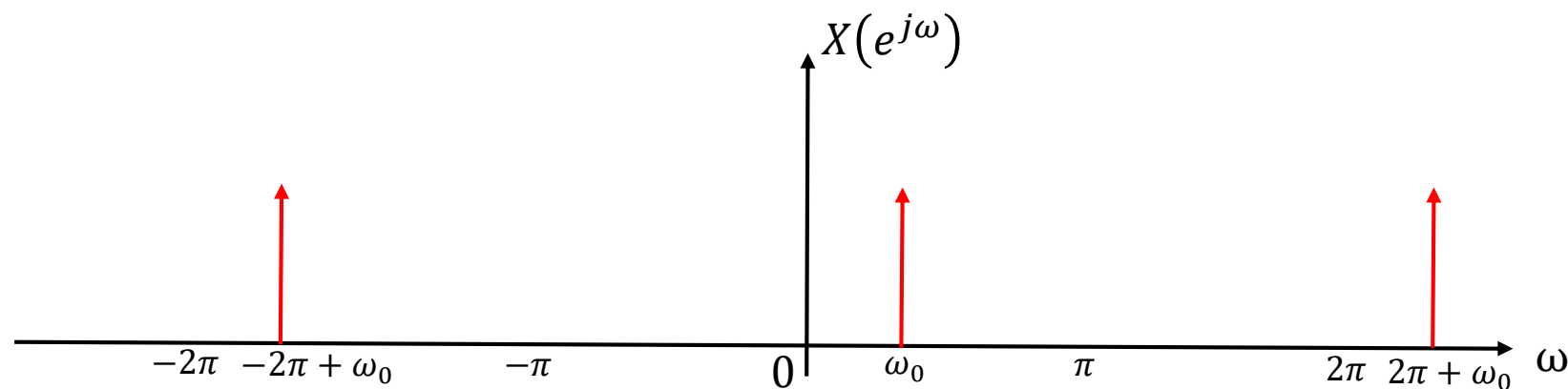
$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\forall n$, $\omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

Αρα $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\forall n \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Παραδείγματα:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-100, 101)
w0 = np.pi/3
x = np.exp(1j*w0*n)

# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
# Σύνθεση του σήματος X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

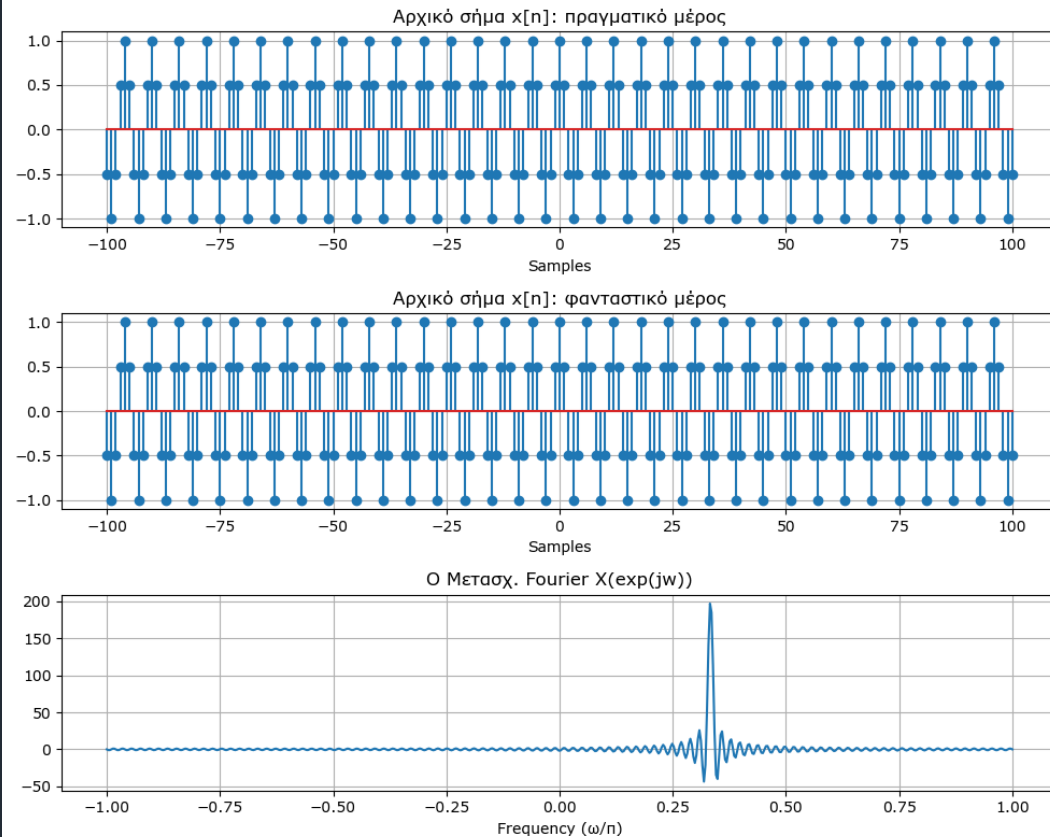
# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα x[n]: πραγματικό μέρος')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].stem(n, x)
axs[1].set_title('Αρχικό σήμα x[n]: φανταστικό μέρος')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')

axs[2].plot(w/np.pi, X_syn)
axs[2].set_title('Ο Μετασχ. Fourier X(exp(jw))')
axs[2].grid()
axs[2].set_xlabel('Frequency (ω/π)')
```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$, $\forall n, \omega_0, \varphi \in (-\pi, \pi]$.

Είναι

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi) \stackrel{\text{Euler}}{=} \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

Είδαμε πριν ότι

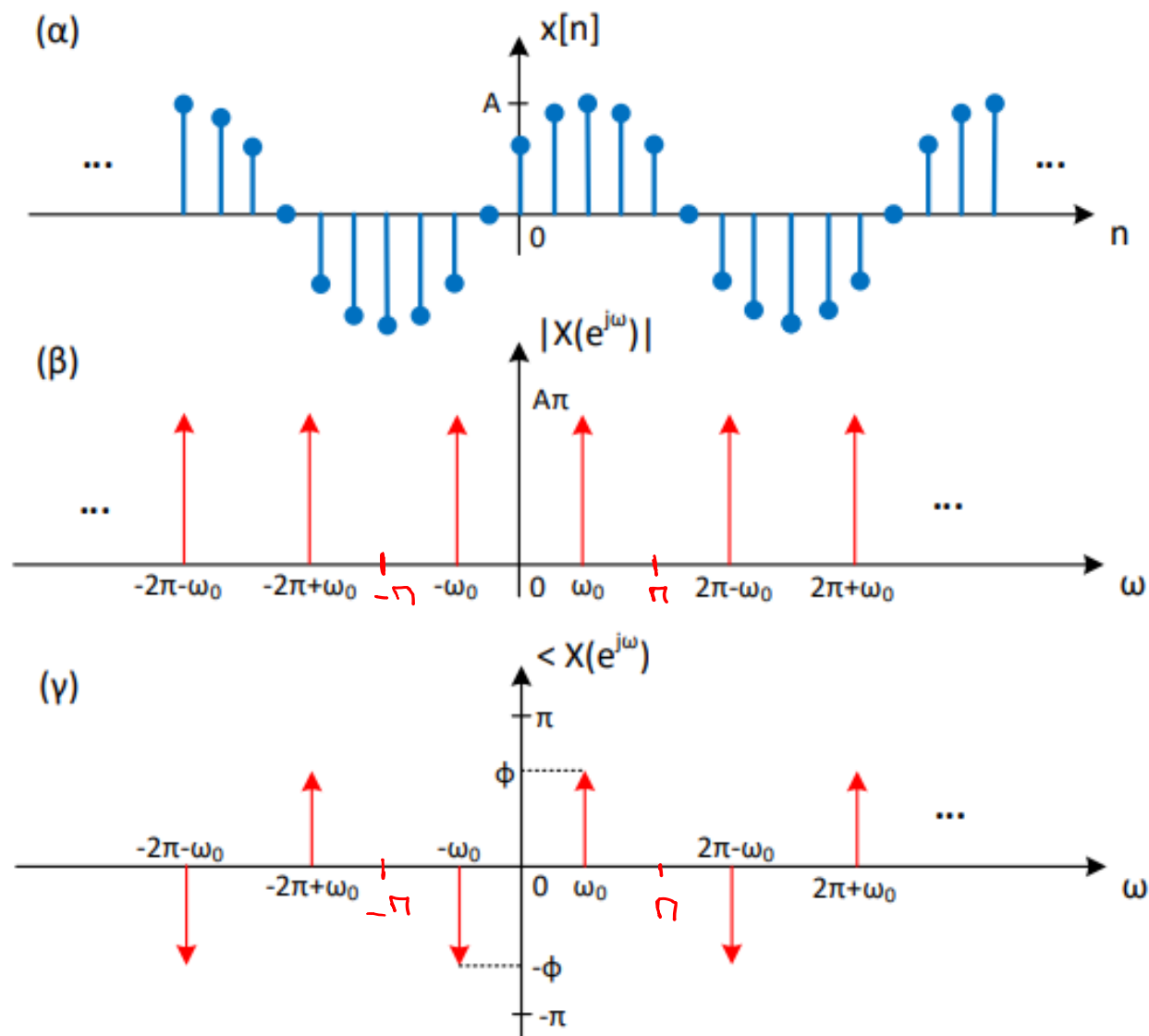
$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 n} &\xleftrightarrow{F} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ e^{-j\omega_0 n} &\xleftrightarrow{F} 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= F \{ A \cos(\omega_0 n + \varphi) \} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + \\ &\quad + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \\ &= A\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Παραδείγματα:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Σήμα στο χρόνο
n = np.arange(-100, 101)
w0 = np.pi/3
x = np.cos(w0*n)

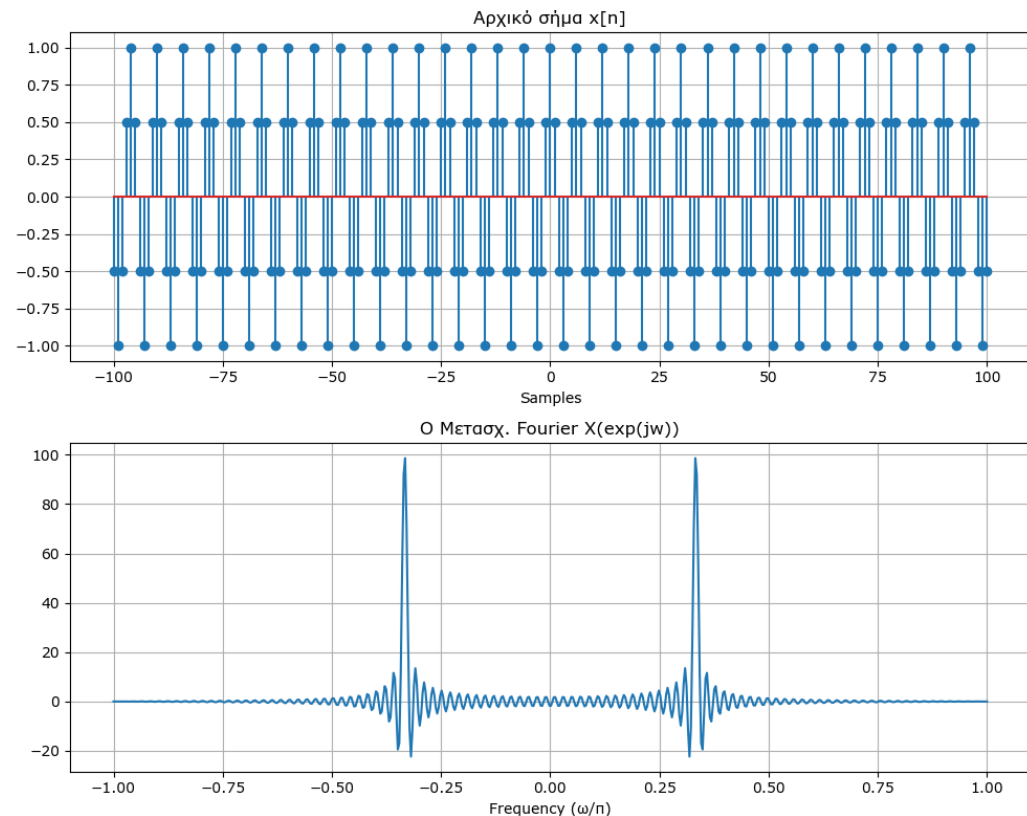
# DTFT στο χέρι
w = np.linspace(-np.pi, np.pi, 600)
# Σύνθεση του σήματος  $X(\exp(jw))$  μέσω του DTFT
X_syn = np.zeros_like(w)

# Άθροισμα του μετ. Fourier
for i in range(0, len(n)):
    X_syn = X_syn + x[i] * np.exp(-1j*w*n[i])

# Απεικόνιση
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10,8))

axs[0].stem(n, x)
axs[0].set_title('Αρχικό σήμα  $x[n]$ ')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(w/np.pi, X_syn)
axs[1].set_title('Ο Μετασχ. Fourier  $X(\exp(jw))$ ')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Frequency ( $w/\pi$ )')
```



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \text{sgn}[n]$.

Από το σχήμα,

$$\begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}[n] - \text{sgn}[n-1] = 2\delta[n], \text{ αλλι}$$

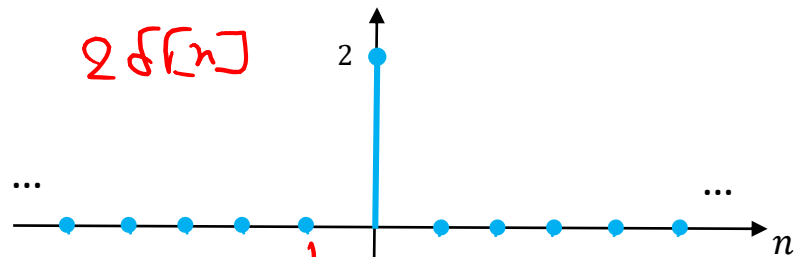
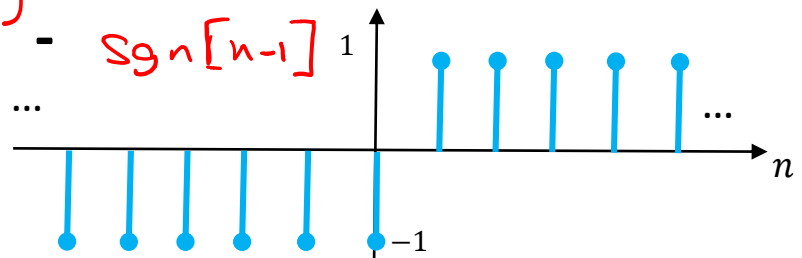
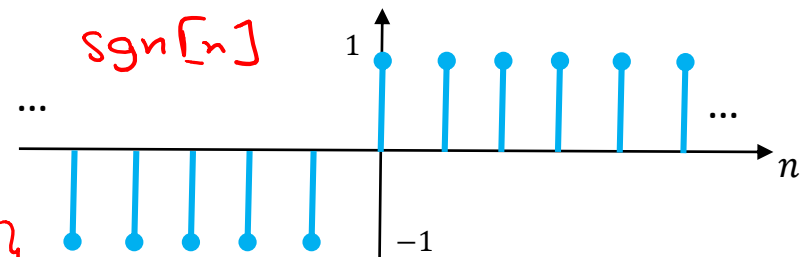
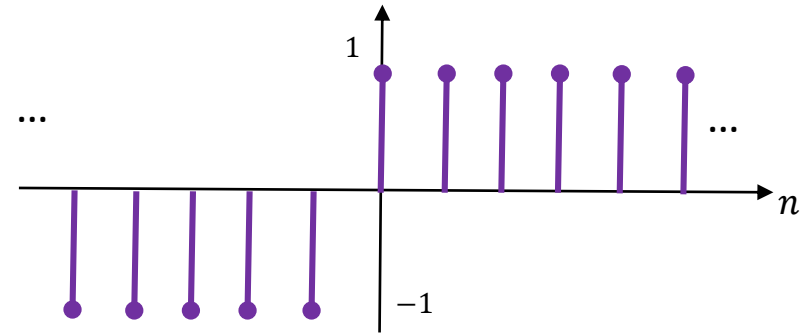
$$F\{\text{sgn}[n]\} - F\{\text{sgn}[n-1]\} = F\{2\delta[n]\}$$

$$S(e^{j\omega}) - Y(e^{j\omega}) = 2 \cdot 1 \quad \textcircled{1}$$

Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sgn}[n-1] e^{-j\omega n} \quad \left. \begin{array}{l} k = n-1 \Rightarrow n = k+1 \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sgn}[k] e^{-j\omega(k+1)} = e^{-j\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sgn}[k] e^{-j\omega k} = e^{-j\omega} S(e^{j\omega})$$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

• Άρα $\gamma(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \delta(e^{j\omega})$ ②

Η ① $\xRightarrow{②} \delta(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} \delta(e^{j\omega}) = 2$

$$\delta(e^{j\omega}) (1 - e^{-j\omega}) = 2$$

$$\delta(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - e^{-j\omega}}.$$

• Άρα

$$\text{sgn}[n] \xleftrightarrow{F} \frac{2}{1 - e^{-j\omega}}.$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

- Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.

Μπορείτε να γράψετε ότι

$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[n], \text{ και}$$

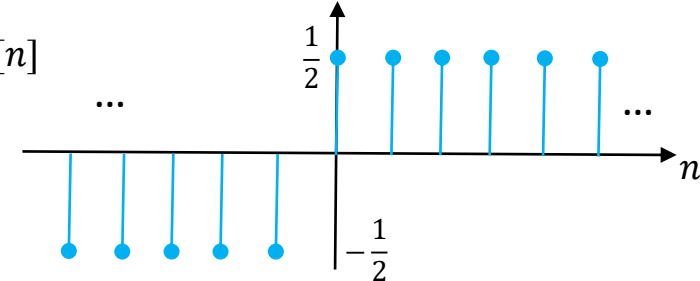
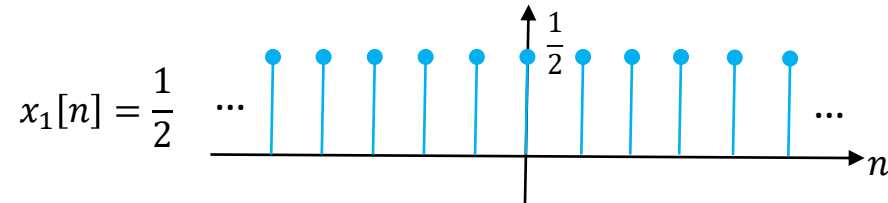
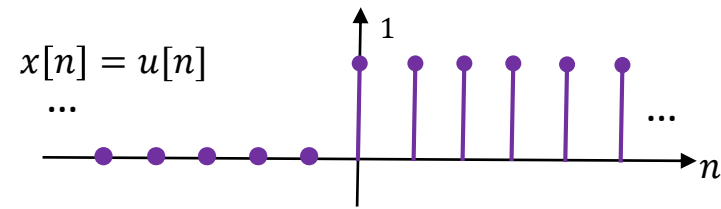
$$F\{u[n]\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}[n]\right\}$$

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \cancel{2\pi} \delta(\omega) + \frac{1}{2} \frac{\cancel{2}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \pi \delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}.$$

Άρα

$$u[n] \xleftrightarrow{F} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}.$$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Οι σχέσεις ισχύουν για $-\infty < \omega < +\infty$

Για να πάρετε τις σχέσεις που αποδείξαμε ($-\pi < \omega < \pi$), θέστε $k = 0$ και βγάλτε τα αθροίσματα (όπου υπάρχουν)

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n - 1], a > 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$(n + 1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$a^{ n }, a < 1,$	$\frac{1}{1 - a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n + 1))}{\sin(\omega_c)} u[n], r < 1$	$\frac{1}{1 - 2r \cos(\omega_c)e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega (M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

