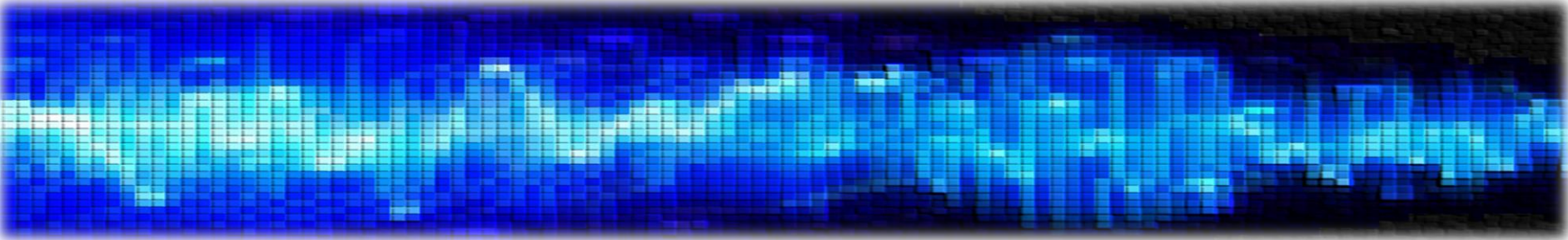


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 5^Η

- 
- Ευστάθεια και Αιτιατότητα ΓΧΑ συστημάτων
 - Απόκριση σε Συχνότητα

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...

- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- **Zero-input response**: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- **Zero-state response**: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...

- **Zero-input response**: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ($a_N + a_{N-1}\gamma + \dots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N$)

- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k

- Γενική μορφή (για απλές ρίζες)

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^N c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

• Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...

• **Zero-state response**: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)

• Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων

• Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω **κρουστικής απόκρισης** $h[n]$

• $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$

• Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα

• Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = \delta[n]$$

• Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ($a_N + a_{N-1}\gamma + \dots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N$)

• Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k

• Γενική μορφή (για απλές ρίζες)

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^N c_k \gamma_k^n u[n]$$

• Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη...

- **Κρουστική Απόκριση**: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$

- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^M b_l h_o[n-l]$$

- **Zero-state response**: η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Διατάξεις συστημάτων

- Σε σειρά: $h_{total}[n] = h_1[n] * h_2[n]$

- Παράλληλα: $h_{total}[n] = h_1[n] + h_2[n]$

Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων

Παράδειγμα:

Ο Έστω το σύστημα της εικόνας, που αποτελείται από τα υποσυστήματα

$$h_1[n] = u[n-1]$$

$$h_2[n] = nu[n]$$

$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα έχει
κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)u[n-1]$$

Η συνολική κρουστική απόκριση

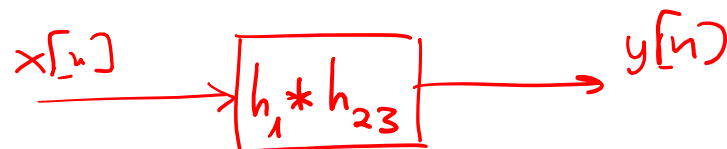
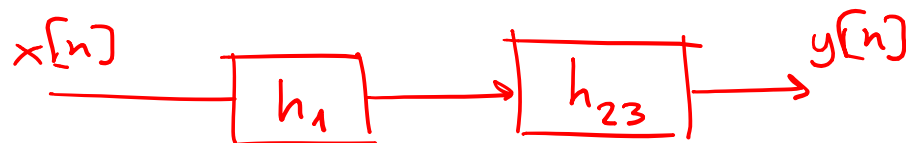
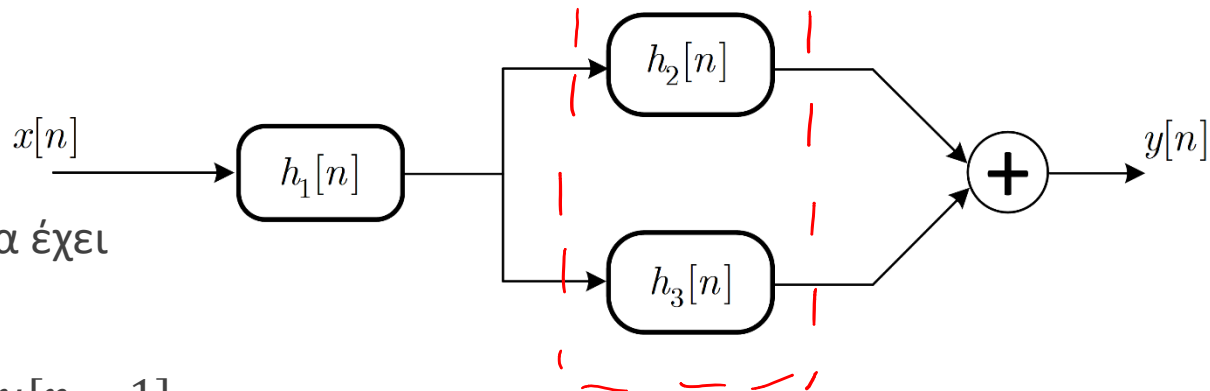
θα είναι:

$$h_{\text{tot}}[n] = h_1[n] * h_{23}[n]$$

$$= u[n-1] * (\delta[n+1] + nu[n])$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

$$h_{23} = h_2 + h_3$$



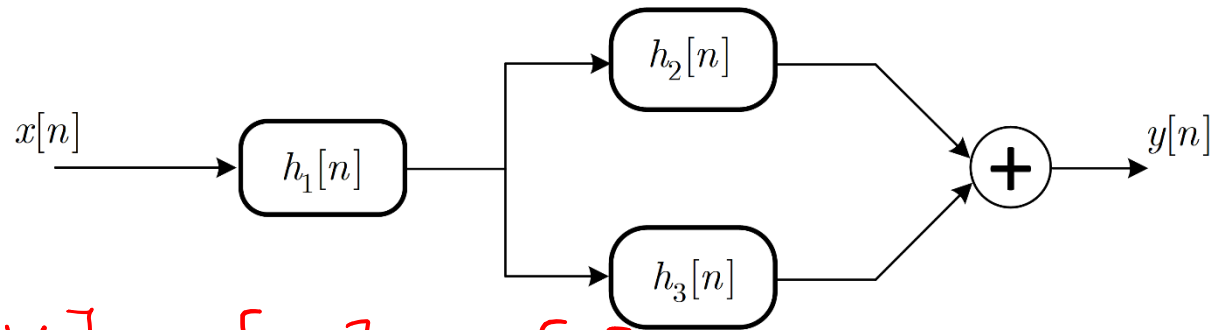
• Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων

• Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$

$$h_2[n] = nu[n]$$

$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



δηλ.
$$h_{tot}[n] = u[n-1+1] + u[n-1] * nu[n]$$

$$= u[n] + \underbrace{u[n-1] * nu[n]}_{?} \quad (1)$$

Είναι
$$u[n-1] * nu[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k-1] k u[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k u[k] u[n-k-1] \quad (2)$$

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$u[n-k-1] = \begin{cases} 1, & n-k-1 \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} u[k]u[n-k-1] = 1, \text{ για} \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{array} \right.$$

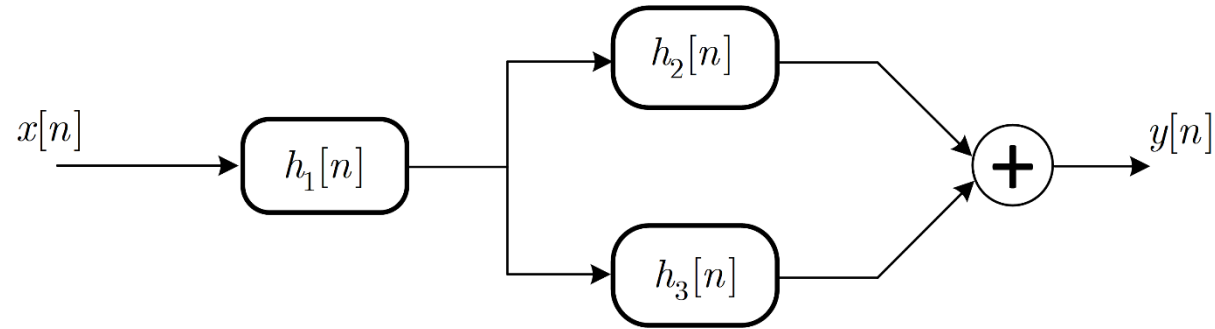
• Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων

• Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$

$$h_2[n] = nu[n]$$

$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



Η ② γράφεται ως

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2} (n-1)(n-2), \text{ για } n-1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1. \quad \textcircled{3}$$

Η ① $\xRightarrow{\textcircled{3}}$ $h_{\text{tot}}[n] = u[n] + \frac{1}{2} (n-1)(n-2) u[n-1]$

Αρα $h_{\text{tot}}[n] = u[n] + \frac{1}{2} (n-1)(n-2) u[n-1]$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Έχουμε συζητήσει για την έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος

$$|x[n]| \leq B_x \Rightarrow |y[n]| \leq B_y, \quad B_x, B_y \in \mathfrak{R}_+$$

- Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Άρα θα πρέπει

$$|y[n]| \leq B_y \Rightarrow |x[n] * h[n]| \leq B_y \Rightarrow \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq B_y$$

- Ξέρουμε ότι $|x[n]| \leq B_x, \quad \forall n$, οπότε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \leq B_y$$

- Η τελευταία σχέση ισχύει αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Η σχέση

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

Κρουστική απόκριση
απολύτως αθροίσιμη

και η οποία αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ευστάθεια** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Δεν αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα εδώ

- Η κρουστική απόκριση μπορεί να αποτελείται από όρους της μορφής

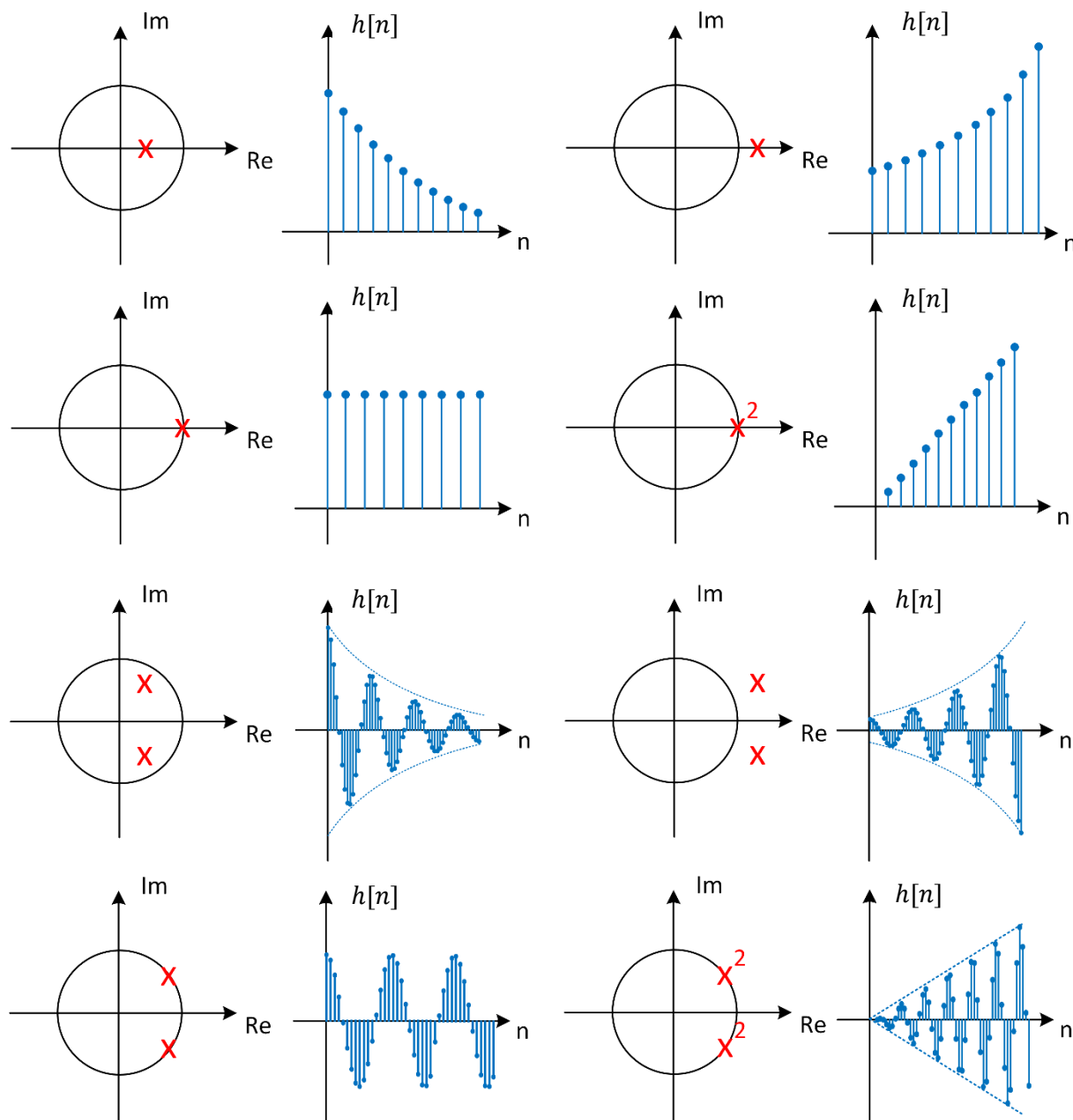
$$\delta[n-k], \gamma_k^n, n^k \gamma_k^n$$

- Προφανώς η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη αν και μόνον αν

$$|\gamma_k| < 1, \quad \forall \gamma_k \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας!}$$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Παραδείγματα θέσης
χαρακτηριστικών ριζών και
το αποτέλεσμα αυτών στην
κρουστική απόκριση



• Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

- Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \quad \forall n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \quad \forall n < n_0$$

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \quad n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = 0, \quad n < n_0$$

- Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
- Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
 - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα
- Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**

- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n - k]$$

τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους... 😊
- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος
- Παρ' όλα αυτά
 - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του γιατί τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
 - Δεν ξέρουμε πώς να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά
- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια **διαφορετική** είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
 - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό...

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

- Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad -\infty < n < +\infty$$

- Η έξοδος τότε θα είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) \end{aligned}$$

με

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

- Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H(e^{j\omega_0})$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό
- Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Το άθροισμα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$|e^{j\theta}| = 1$$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

- Αρκεί

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

αφού $|e^{j\omega n}| = 1, \quad \forall \omega, n$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
 - Θα πούμε περισσότερα αργότερα...

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Η συνάρτηση ως προς ω

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

**Απόκριση σε Συχνότητα
ή
Συχνотική Απόκριση
(frequency response)**

- Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος
- Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι πραγματική συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Η ιδιότητα

$$f(x) = f(-x) \rightarrow \text{άρτια συνάρτηση}$$

$$f(x) = -f(-x) \rightarrow \text{περιττή συνάρτηση}$$

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = -\varphi_H(e^{-j\omega})$$

- Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα
- Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n + \theta)}$, $A \in \mathbb{R}_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$\begin{aligned}y[n] &= H(e^{j\omega_0})Ae^{j(\omega_0 n + \theta)} \\&= A|H(e^{j\omega_0})|e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}e^{j(\omega_0 n + \theta)} \\&= A|H(e^{j\omega_0})|e^{j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))}\end{aligned}$$

- Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

- Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
 - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με πραγματική κρουστική απόκριση

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \theta)}, \quad A \in \mathbb{R}_+$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n)} e^{j\theta} + H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n)} e^{-j\theta} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n)} e^{j\theta} e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})} + |H(e^{-j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n)} e^{-j\theta} e^{j\varphi_H(e^{-j\omega_0})} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))} + |H(e^{-j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \theta - \varphi_H(e^{-j\omega_0}))} \end{aligned}$$

- Όμως

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = -\varphi_H(e^{-j\omega})$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Άρα

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))} + |H(e^{j\omega_0})| \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))} \\ &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0})) \end{aligned}$$

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi_H(e^{j\omega})} \quad \leftarrow \text{πολική μορφή της } H(e^{j\omega})$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = C + A \cos(\omega_0 n + \theta) = C \cos(0n) + A \cos(\omega_0 n + \theta)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH(e^{j0}) + |H(e^{j\omega_0})| A \cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!
- Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^N |H(e^{j\omega_k})| A_k \cos(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H(e^{j\omega_k}))$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος
- Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π !

- Πράγματι

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega} e^{j2\pi}) = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

- Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω , δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
 - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της
- Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
 - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συχνότητες ωn με συντελεστές $h[n]$
 - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π -περιοδικά στη συχνότητα
- Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

- Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

1ος τρόπος: $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$ } $\Rightarrow$

$$y[n] = x[n - n_0] \leadsto h[n] = \delta[n - n_0]$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \\ = \cos(-\omega n_0) + j \sin(-\omega n_0) \end{array} \right.$$

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$\leadsto$ Πραγματικό μέρος: $H_R(e^{j\omega}) = \cos(-\omega n_0) = \cos(\omega n_0)$

$\leadsto$ Φανταστικό μέρος: $H_I(e^{j\omega}) = \sin(-\omega n_0) = -\sin(\omega n_0)$

$\leadsto$ Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = 1$, γιατί $|e^{-j\omega n_0}| = 1$.

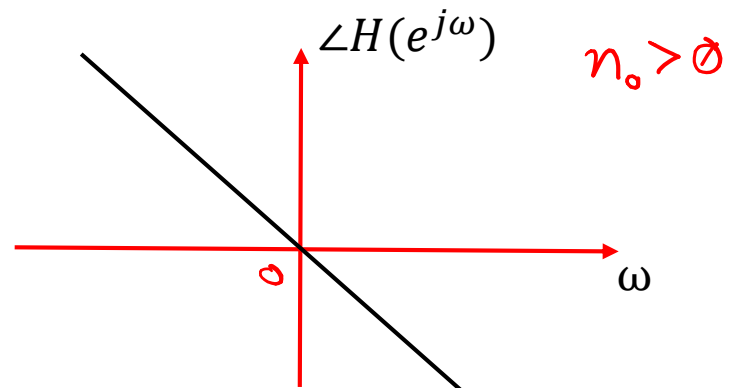
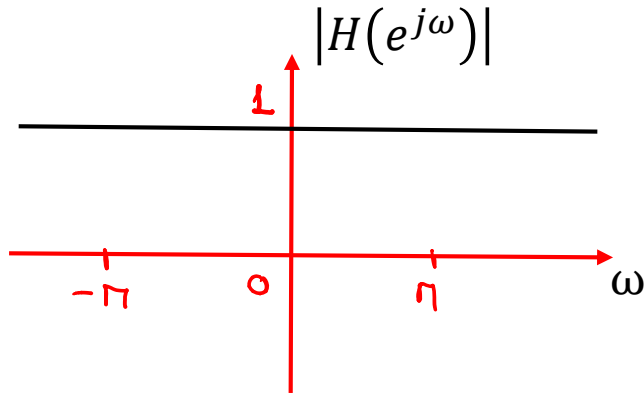
$\leadsto$ Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(H_I(e^{j\omega})/H_R(e^{j\omega})) =$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

$$|H(e^{j\omega})| = 1$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$$



$$\begin{aligned} &= \tan^{-1} \frac{-\sin(\omega n_0)}{\cos(\omega n_0)} = \tan^{-1}(-\tan(\omega n_0)) = -\tan^{-1}(\tan(\omega n_0)) \\ &= -\omega n_0 \Rightarrow \varphi_H(e^{j\omega}) = -\omega n_0. \end{aligned}$$

Έστω $x[n] = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8}\right)$, με $n_0 = 5$.

Η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} y[n] &= 4 \cdot |H(e^{j\frac{\pi}{3}})| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} + \angle H(e^{j\frac{\pi}{3}})\right) \\ &= 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

2^{ος} τρένος: το σήμα $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση των ΓΧΑ συστημάτων. Άρα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\mathcal{S}} y[n] = x[n - n_0] = e^{j\omega_0 (n - n_0)}$$

$$= \underbrace{e^{-j\omega_0 n_0}}_{\text{ιδιοαπνη}} \underbrace{e^{j\omega_0 n}}_{\text{είσοδος}}$$

$$= H(e^{j\omega_0}) x[n] \quad \begin{matrix} H_R(e^{j\omega}) & H_I(e^{j\omega}) \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

Άρα $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} = \cos(-\omega n_0) + j \sin(-\omega n_0) = \cos(\omega n_0) - j \sin(\omega n_0).$

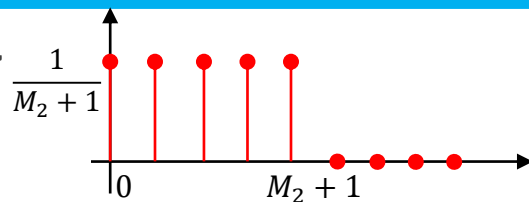
• Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\cos^2(\omega n_0) + (-\sin(\omega n_0))^2} = 1$

• Απόκριση φάσης: η $H(e^{j\omega})$ είναι γραμμική σε φασική μορφή! Άρα

$$\angle H(e^{j\omega}) = \phi_H(e^{j\omega}) = -\omega n_0.$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:



○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0$, δηλ. $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Είναι

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{e^{-j\omega \frac{M_2+1}{2}} (e^{j\omega \frac{M_2+1}{2}} - e^{-j\omega \frac{M_2+1}{2}})}{e^{-j\omega \frac{\omega}{2}} (e^{j\omega \frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega \frac{\omega}{2}})}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\cancel{2j} \sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\cancel{2j} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

*Hint: $1 + e^{j(a+b)} = e^{j\frac{a+b}{2}} (e^{-j\frac{a+b}{2}} + e^{j\frac{a+b}{2}})$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \text{Απόκριση πλάτους : } |H(e^{j\omega})| &= \left| \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| \\ &= \frac{1}{M_2+1} \cdot \underbrace{\left| e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \right|}_1 \cdot \left| \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| = \frac{1}{M_2+1} \cdot \left| \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|. \end{aligned}$$

Ας επιλέξουμε το $[0, 2\pi)$ για τη φέρση της απόκρισης πλάτους.

Για $\omega = 0$, υπάρχει αμροδιοριστία (το ίδιο και για $\omega = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Είναι } \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{M_2+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \stackrel{\text{DL'H}}{\frac{0}{0}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{M_2+1}{2} \cos\left(\omega \frac{M_2+1}{2}\right)}{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = M_2+1.$$

Σημεία μηδενισμού : εκεί που μηδενίζεται ο αριθμητής, δηλ.

$$\sin\left(\omega \frac{M_2+1}{2}\right) = 0 = \sin(\pi k) \Rightarrow \omega_k \frac{M_2+1}{2} = \pi k \Rightarrow \omega_k = \frac{2\pi k}{M_2+1}, k \in \mathbb{Z}.$$

Εκτός από τα ω_k που παίρνουμε για $k = \lambda(M_2+1)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

Έστω $M_2=4$, τότε $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5} \left| \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$.

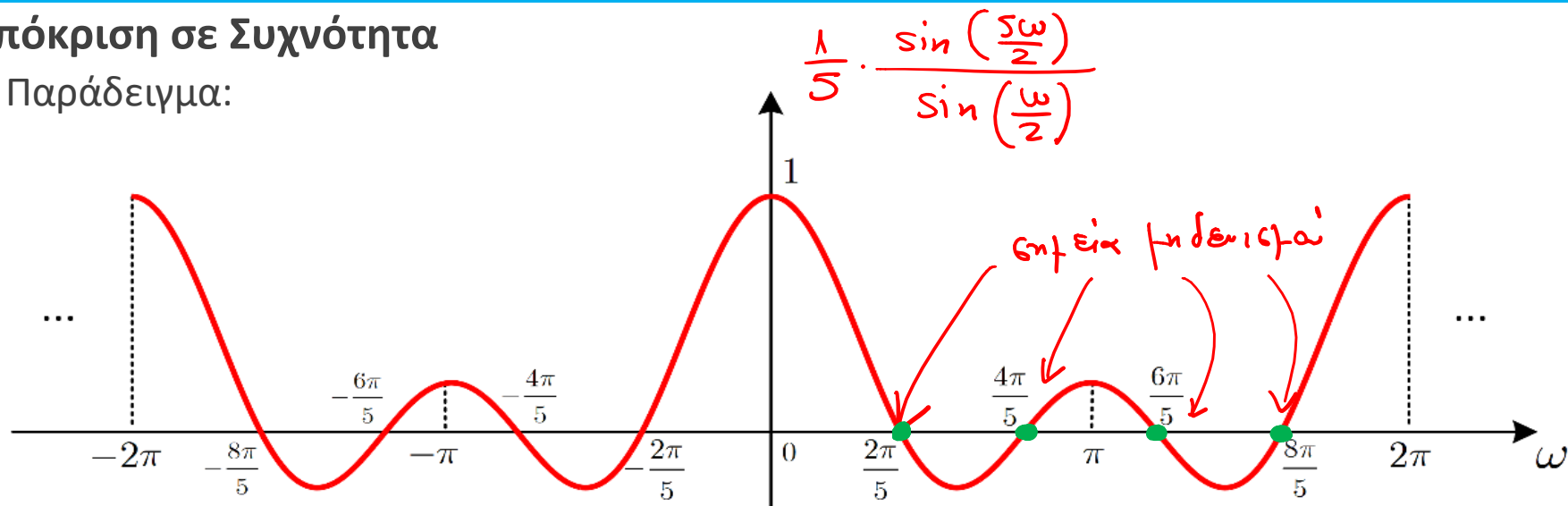
Πώς φαίνεται?

Είναι μια συνάρτηση του ω , πάντα θετική, με σημεία μηδενισμού τις συχνότητες $\omega_k = \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$ (εκτός από τα ω_k που είναι ακριβώς πολλαπλάσια του 2π , όπου εκεί η συνάρτηση παίρνει την τιμή 1).

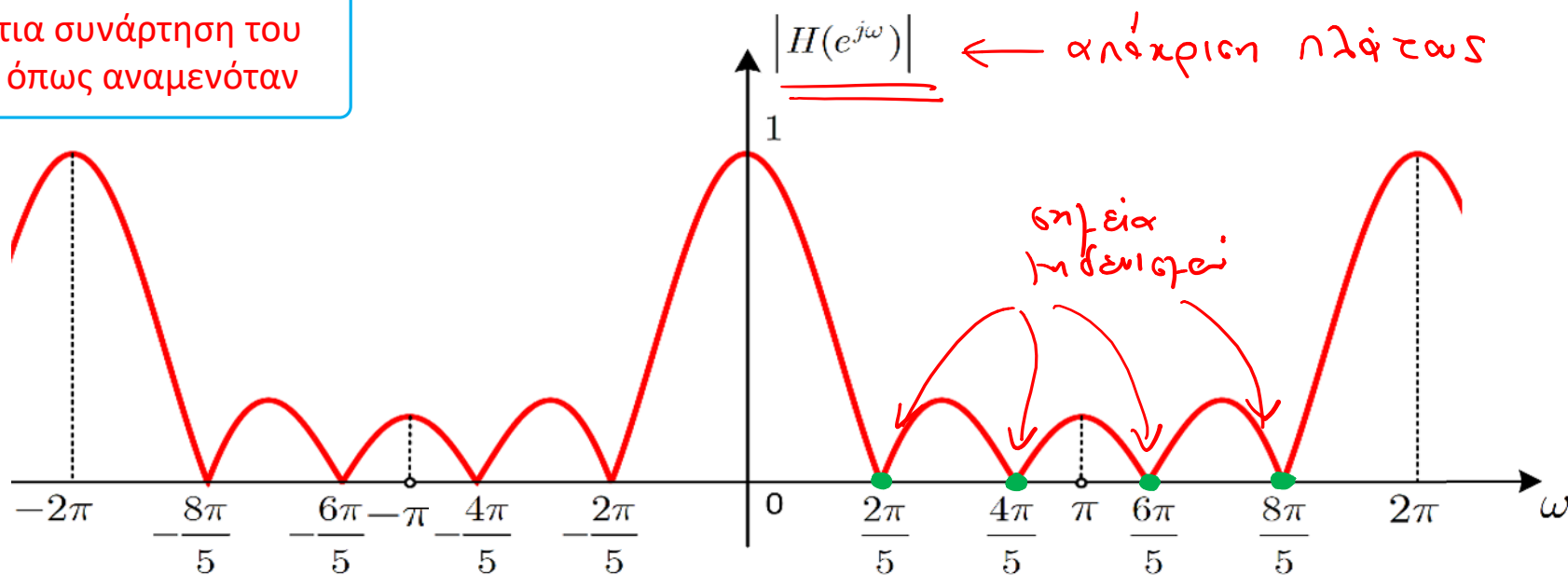
Ας Implemente από την Python να τη σχεδιάσει για μας.

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:



Άρτια συνάρτηση του ω , όπως αναμενόταν



• Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

Hint: αν $z_1 z_2$, $\angle z_1 z_2 = ?$
 $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \Rightarrow \angle z_1 z_2 = \phi_1 + \phi_2$

Απόκριση φάσης:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{M_2 + 1}{2} \omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad : \text{συχνότητα, απόκριση}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \angle H(e^{j\omega}) = \phi_H(e^{j\omega}) &= \angle \frac{1}{M_2 + 1} + \angle e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} + \angle \frac{\sin\left(\frac{M_2 + 1}{2} \omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \\ &= \underbrace{\emptyset}_{\phi_1} + \underbrace{\left(-\frac{\omega M_2}{2}\right)}_{\phi_2} + \underbrace{?}_{\phi_3} \end{aligned}$$

Πρέπει να βρούμε τη φάση του

$$\frac{\sin\left(\frac{M_2 + 1}{2} \omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad !$$

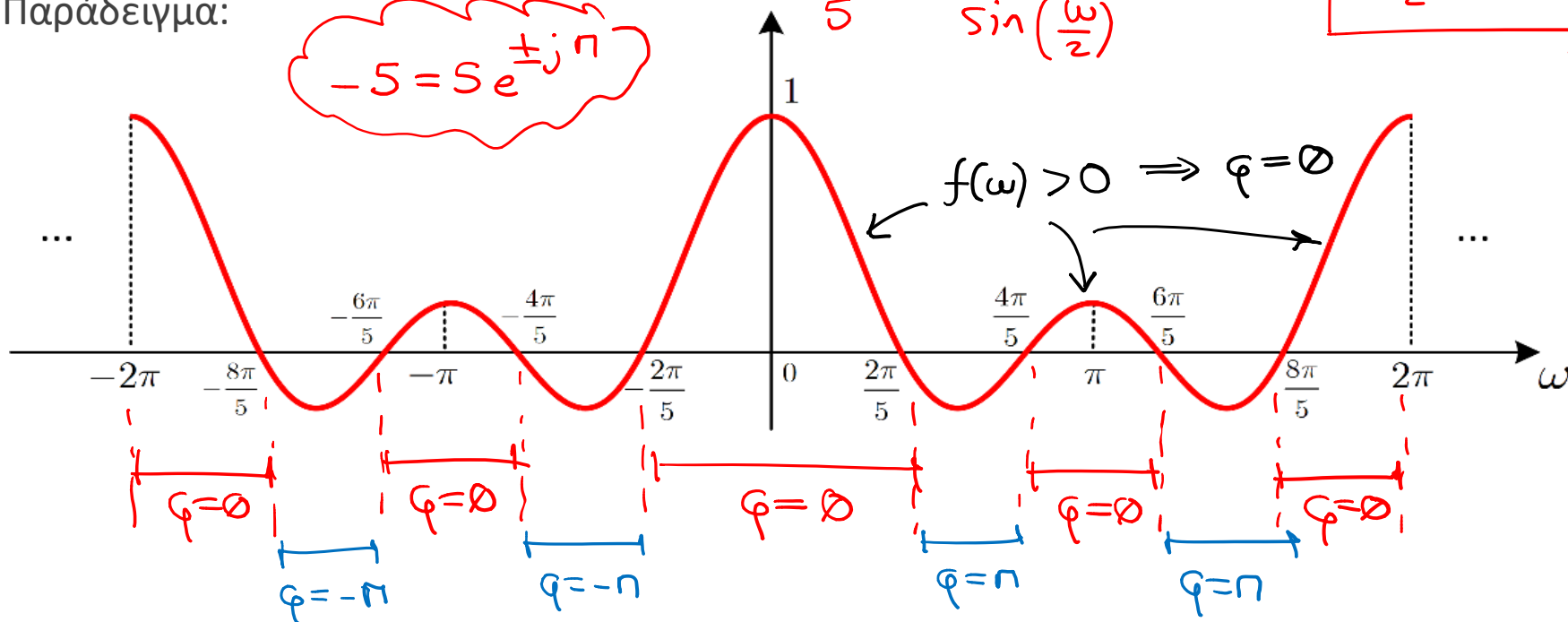
Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = f(\omega)$$

$$M_2 = 4$$

$$-5 = 5e^{\pm j\pi}$$



$$\varphi_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| < \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} < |\omega| < \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5} < |\omega| < 2\pi \\ \pi, & \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -\pi, & -\frac{4\pi}{5} < \omega < -\frac{2\pi}{5}, -\frac{8\pi}{5} < \omega < -\frac{6\pi}{5} \end{cases}$$

Σύμβαση: αν $\omega > 0$ και $f(\omega) < 0$, τότε $\varphi = \pi$, εναλλάξως $\varphi = -\pi$.

- Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:

Συνολικά, (στο $[-2\pi, 2\pi]$):

$$\begin{aligned}
 r_H(e^{j\omega}) &= r_1(e^{j\omega}) + r_2(e^{j\omega}) + r_3(e^{j\omega}) \\
 &= 0 - 2\omega + \begin{cases} 0, \dots \\ \pi, \dots \\ -\pi, \dots \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -2\omega, \dots \\ \pi - 2\omega, \dots \\ -\pi - 2\omega, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

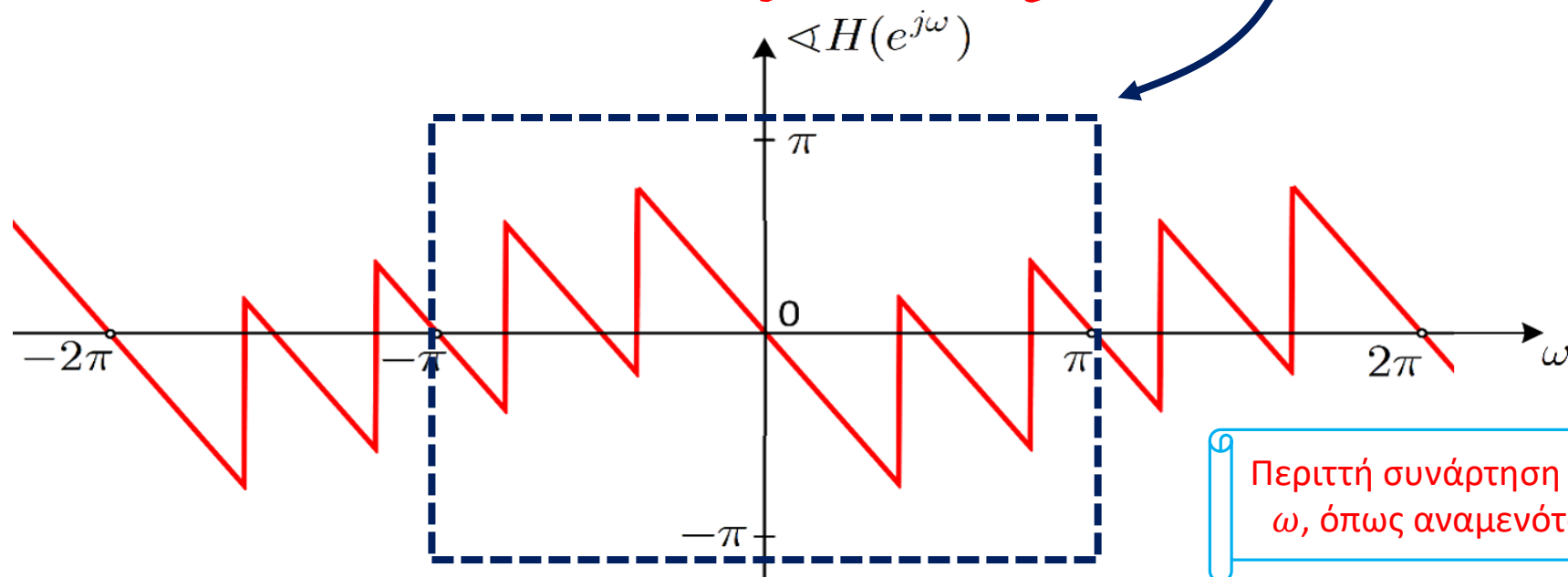
$M_2 = 4$

• Απόκριση σε Συχνότητα

• Παράδειγμα:

Μας πρέπει να γράψουμε τη φάση στο $(-\pi, \pi]$, οπότε θα είναι:

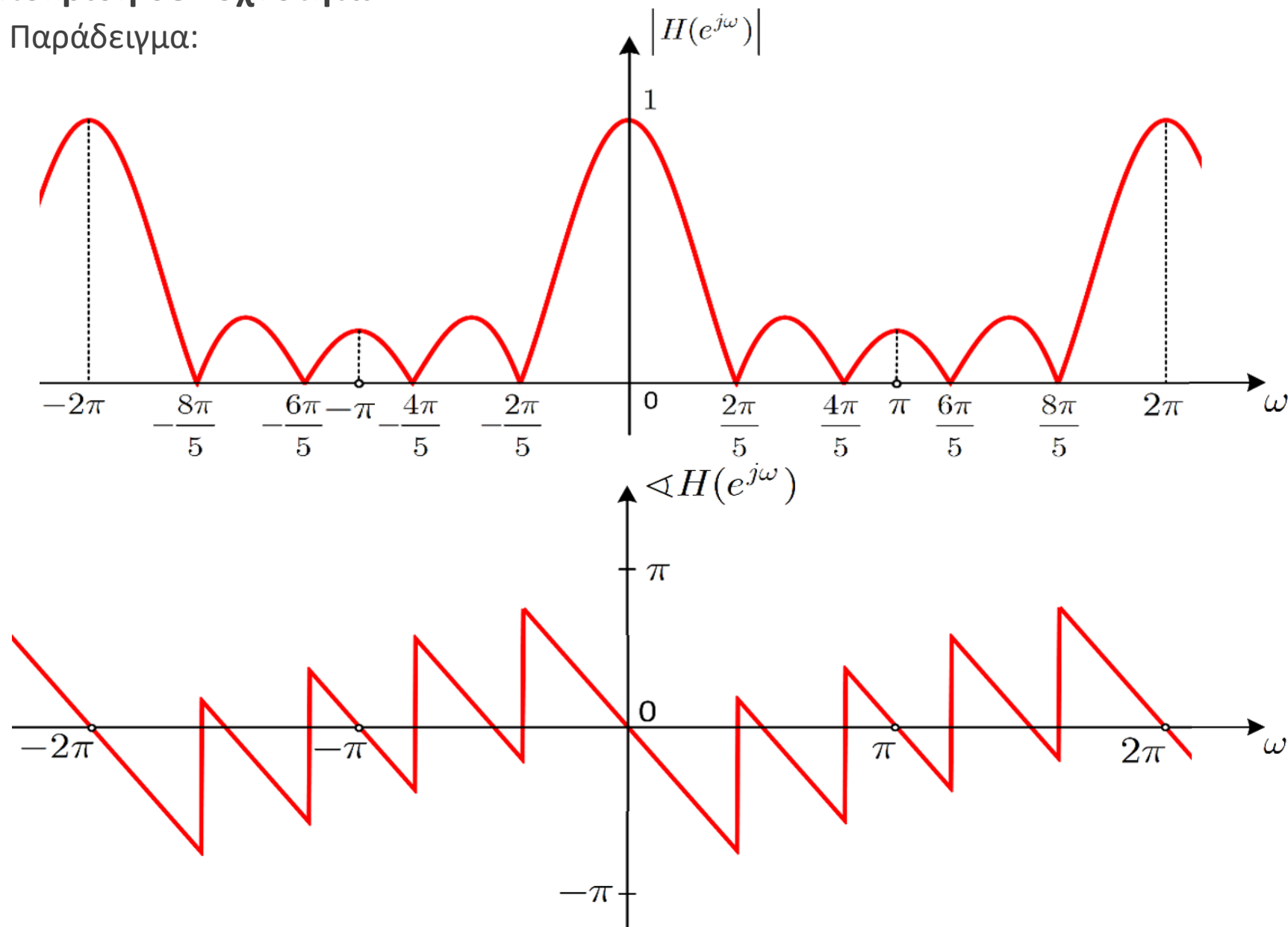
$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & |\omega| < \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} < |\omega| < \pi \\ \pi - 2\omega, & \frac{2\pi}{5} < |\omega| < \frac{4\pi}{5} \\ -\pi - 2\omega, & -\frac{4\pi}{5} < \omega < -\frac{2\pi}{5} \end{cases}$$



Περίττη συνάρτηση του ω , όπως αναμενόταν

- Απόκριση σε Συχνότητα

- Παράδειγμα:



• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής

$$e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < +\infty$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα

- Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) **δεν** υπάρχουν στην πραγματικότητα
- Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη
- Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα
- Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
 - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$
- Το σήμα αυτό θα είναι το

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

- Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= H(e^{j\omega n}) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

- Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$\begin{aligned}y[n] &= H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n]\end{aligned}$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης
- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης
- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
 - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;
- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό...

- Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

$$|y_t[n]| = \left| \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| |e^{j\omega(n-k)}| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε

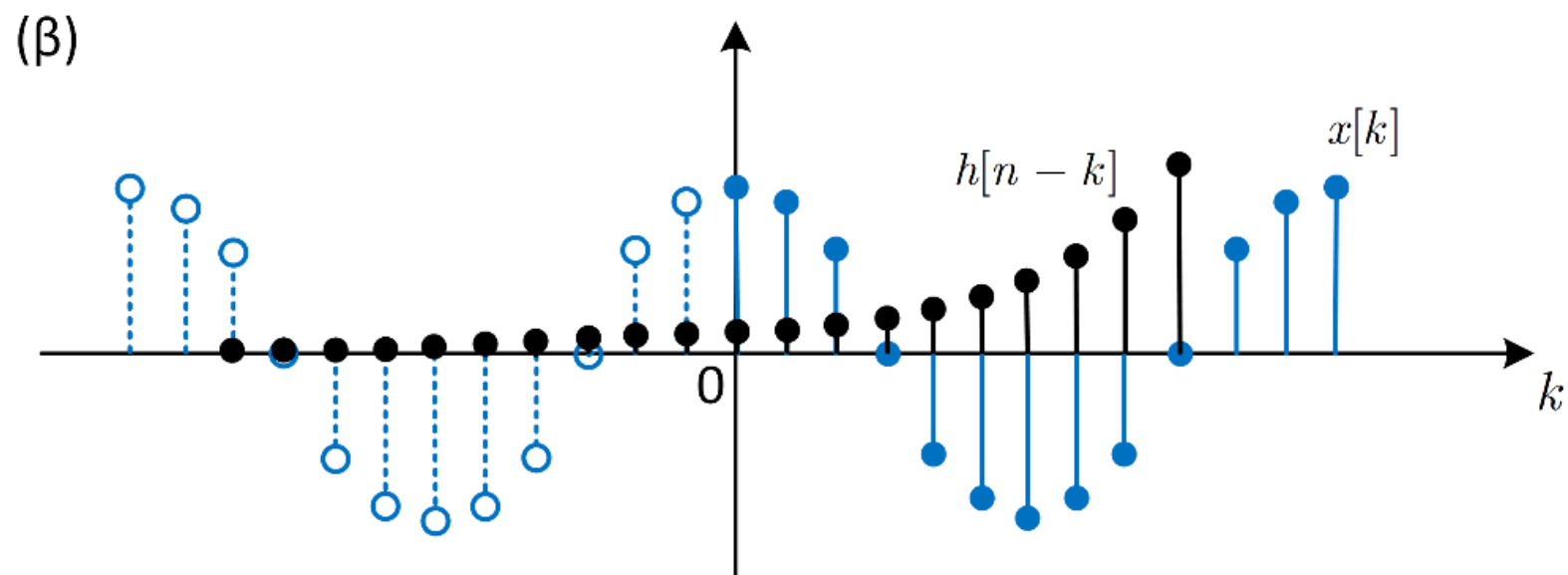
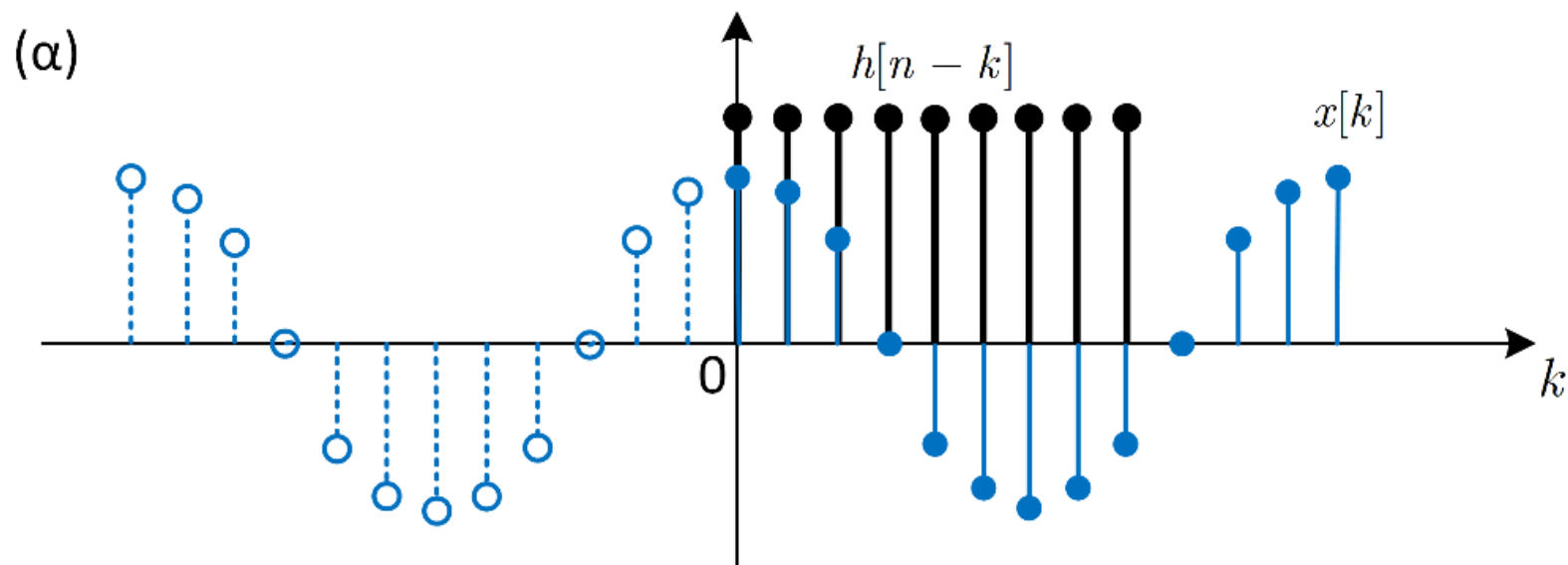
$$h[n] \neq 0, \quad 0 \leq n \leq M$$

τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \rightarrow +\infty$

- Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι **ευσταθές**, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

- Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα



• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Ας υλοποιήσουμε στην Python το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

δηλ. για το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

με $M_1 = 0, M_2 = 4$.

- Αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση μας ότι η έξοδος θα είναι μηδενική, γιατί η συχνότητα $2\pi/5$ «πέφτει» πάνω σε μηδενισμό της απόκρισης πλάτους!
 - Άρα η έξοδος θα πολλαπλασιάσει το πλάτος της ($A = 1$) με τον αριθμό μηδέν!
- Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και λίγο αργότερα την απόκριση σταθερής κατάστασης (που ισούται με το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης-ιδιοτιμής που έχουμε μάθει), αφού το ημίτονο ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

- Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Impulse response h[n]
M1 = 0
M2 = 4
h = 1/(M1 + M2 + 1) * np.ones((M2+1))
h = np.hstack((h, np.zeros((20))))
nh = np.arange(0, 25)

# Input signal
omega0 = 2*np.pi/5
nx = np.arange(0, 100)
x = np.cos(omega0 * nx)

# Convolution
y = np.convolve(x, h, mode='full')
ny = np.arange(0, 124)

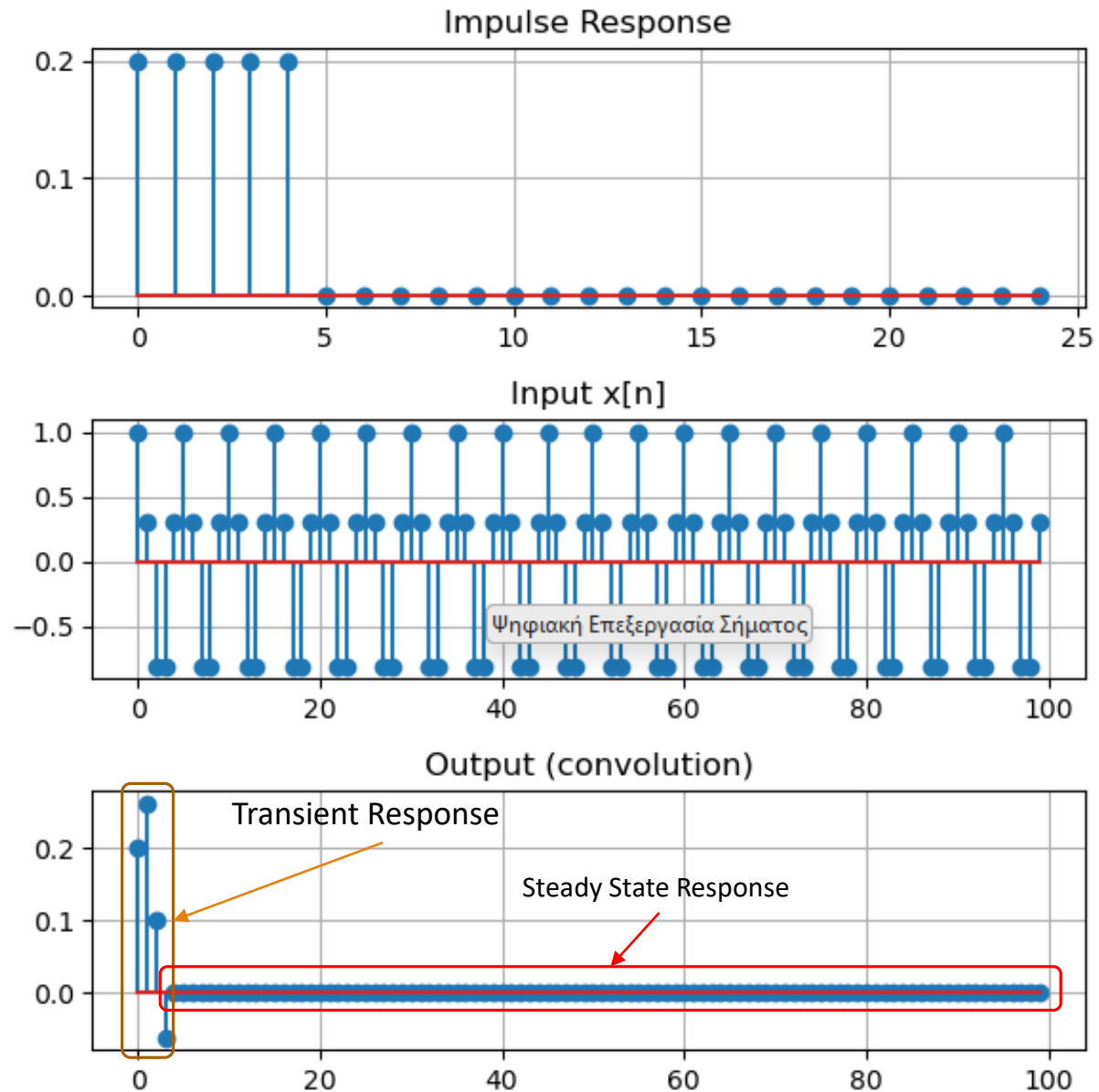
# Plots
# Create a figure with 3 subplots in 3 rows
fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(6, 6))

# First subplot
axs[0].stem(nh, h)
axs[0].set_title('Impulse Response')
axs[0].grid()

# Second subplot
axs[1].stem(nx, x)
axs[1].set_title('Input x[n]')
axs[1].grid()

# Third subplot
axs[2].stem(ny[0:100], y[0:100])
axs[2].set_title('Output (convolution)')
axs[2].grid()

# Adjust layout for better spacing
plt.tight_layout()
```



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

