ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/11/2026

Ημερομηνία Παράδοσης: γραπτά ως τις 19/11/2026, 11:00:00
ή ηλεκτρονικά στο sisamaki@csd.uoc.gr ως την ίδια ώρα

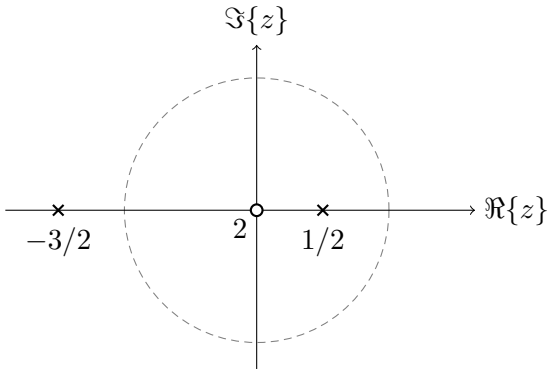
Άσκηση 1.
Έστω ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z

$$X(z) = \frac{z+1}{z-2}, \qquad |z| < 2 \tag{1}$$

Βρείτε τα δείγματα $x[0]$ και $x[-1]$ **χωρίς** να βρείτε ολόκληρη την ακολουθία $x[n]$. Αιτιολογήστε πώς το πεδίο σύγκλισης καθορίζει ποιες δυνάμεις του z εμφανίζονται στην ανάπτυξη γύρω από το $z = 0$.

Απ.: $x[0] = -1/2$, $x[-1] = -3/4$

Άσκηση 2.
Στο Σχήμα 1 φαίνονται όλοι οι πόλοι και τα μηδενικά μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς. Το μηδενικό στο $z = 0$ είναι διπλό και οι πόλοι είναι απλοί. Η σταθερά κέρδους επιλέγεται ώστε η *ρητή έκφραση* του $H(z)$ να παίρνει την τιμή 1 στο $z = 1$.



Σχήμα 1. Διάγραμμα πόλων και μηδενικών της Άσκησης 2.

(α′) Προσδιορίστε τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$.

(β′) Βρείτε όλα τα δυνατά πεδία σύγκλισης και την αντίστοιχη κρουστική απόκριση για καθένα από αυτά.

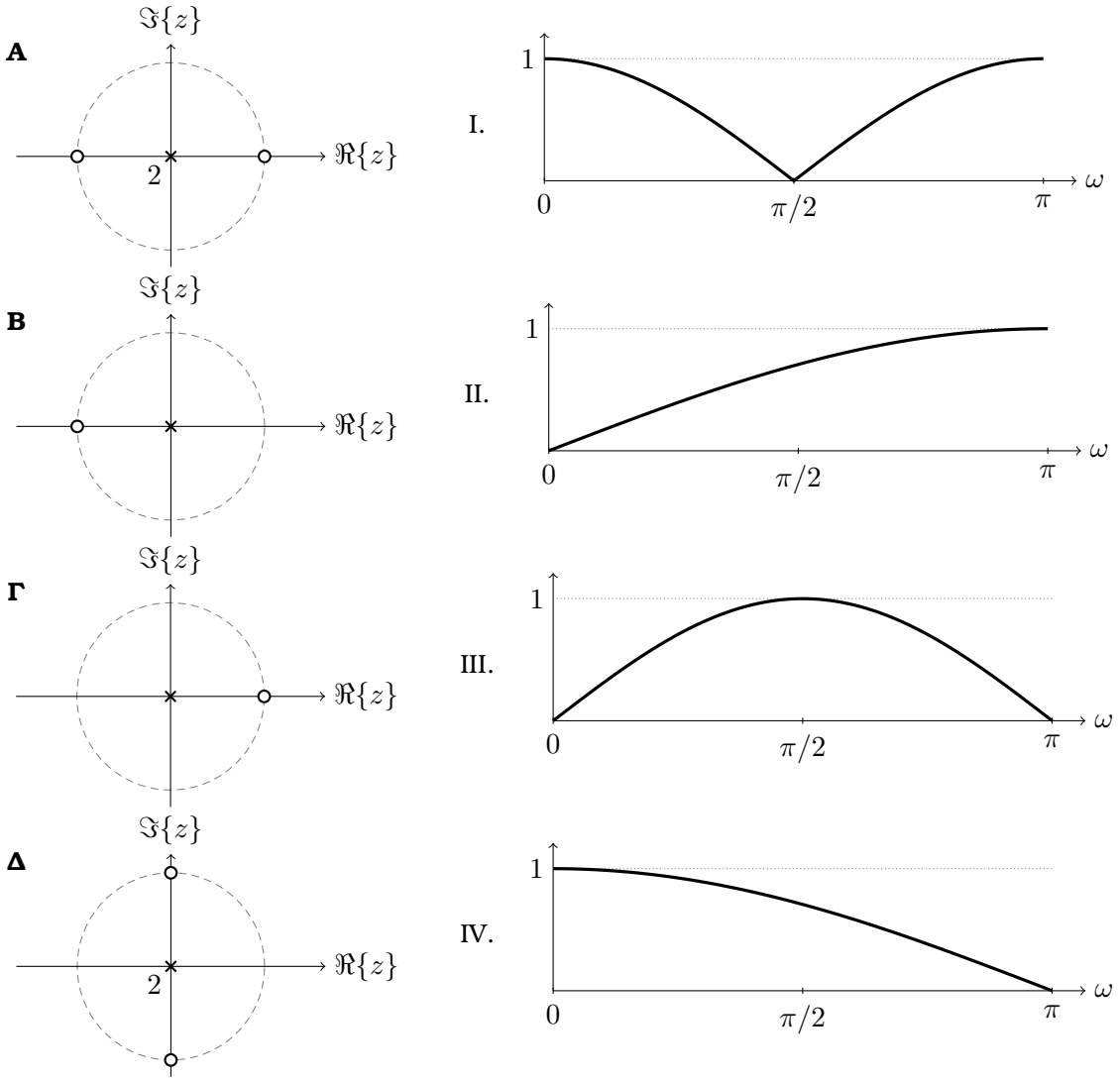
(γ′) Χαρακτηρίστε κάθε περίπτωση ως προς την αιτιατότητα και την ευστάθεια. Σε ποια περίπτωση το $H(1) = 1$ αντιστοιχεί πράγματι σε κέρδος στη μηδενική συχνότητα;

Απ. (γ): Ευσταθής είναι μόνο η περίπτωση $1/2 < |z| < 3/2$.

Άσκηση 3.

Αντιστοιχίστε τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών Α–Δ στις αποκρίσεις πλάτους Ι–Ι″. Όλα τα συστήματα είναι αιτιατά και ευσταθή, και κάθε καμπύλη έχει κανονικοποιηθεί ώστε η μέγιστη τιμή της να είναι 1. Ο αριθμός δίπλα στον πόλο που συμβολίζεται με "X" (στα Α, Δ) δηλώνει την πολλαπλότητα του πόλου. Αιτιολογήστε την αντιστοίχιση από τις θέσεις των μηδενικών σε σχέση με τον μοναδιαίο κύκλο. ΔΕΝ πρέπει να υπολογίσετε αναλυτικά την απόκριση πλάτους.

Πόλοι και μηδενικά **Κανονικοποιημένο πλάτος**



Άσκηση 4.

Δίνεται η ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{2}$$

χωρίς πεδίο σύγκλισης. Στα ακόλουθα ερωτήματα θεωρήστε ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ. Όπου χρειάζεται, χρησιμοποιήστε το παραπάνω $H(z)$ ως παράδειγμα.

(α′) Αρκεί η ρητή έκφραση του $H(z)$ ή το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για να αποφανθείτε για αιτιατότητα και ευστάθεια; Δώστε δύο διαφορετικά πεδία σύγκλισης που οδηγούν σε διαφορετικά συμπεράσματα.

(β′) Τι θα ελέγχατε αν γνωρίζατε μόνο την κρουστική απόκριση $h[n]$; Τι θα ελέγχατε αν γνωρίζατε το $H(z)$ μαζί με το πεδίο σύγκλισης;

(γ΄) Αρκεί η εξίσωση διαφορών αν δεν έχει οριστεί πώς επιλέγεται η λύση της; Τι επιπλέον πληροφορία δίνει η υπόθεση αιτιατής υλοποίησης με μηδενική αρχική κατάσταση;

Άσκηση 5.
Τρία αιτιατά ΓΧΑ συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Για το πρώτο και το τρίτο γνωρίζουμε τις κρουστικές αποκρίσεις

$$h_1[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] \tag{3}$$

$$h_3[n] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1] \tag{4}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερου είναι της μορφής

$$H_2(z) = Az^{-1}\frac{1+az^{-1}}{1+bz^{-1}} \tag{5}$$

(α΄) Βρείτε τους πραγματικούς συντελεστές A, a, b ώστε η συνολική διάταξη να υλοποιεί καθυστέρηση ενός δείγματος, δηλαδή

$$(h_1 * h_2 * h_3)[n] = \delta[n-1] \tag{6}$$

(β΄) Δηλώστε το πεδίο σύγκλισης του $H_2(z)$ και ελέγξτε την ευστάθεια του δεύτερου συστήματος.

Απ. (α): $A = 2$, $a = -2/3$, $b = -1/4$.

Άσκηση 6.
Δύο αιτιατά ΓΧΑ συστήματα συνδέονται σε σειρά. Γνωρίζετε τη θεωρία της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ – όμως υπάρχει και η βηματική απόκριση (η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδο εμφανίζεται η βηματική συνάρτηση $u[n]$). Η συνολική συνάρτηση μεταφοράς και η βηματική απόκριση του *δεύτερου* συστήματος είναι, αντίστοιχα,

$$H(z) = z^{-1}(1+z^{-1}) \tag{7}$$

$$s_2[n] = \left[3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n] \tag{8}$$

(α΄) Από τη βηματική απόκριση βρείτε τα $h_2[n]$ και $H_2(z)$.

(β΄) Προσδιορίστε τα $H_1(z)$ και $h_1[n]$. Δηλώστε τα πεδία σύγκλισης των δύο υποσυστημάτων.

(γ΄) Εξηγήστε γιατί η συνολική κρουστική απόκριση έχει πεπερασμένη διάρκεια, παρότι το $h_2[n]$ έχει άπειρη διάρκεια. Ποιος πόλος ακυρώνεται και από ποιο μηδενικό;

Απ. (β): $h_1[n] = \delta[n-1] - \frac{1}{3}\delta[n-2]$