

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026-27
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/10/2026

Ημερομηνία Παράδοσης: 3/11/2026, ως τις 11:00 το πρωί,
και ηλεκτρονική παράδοση στο csdp1345@csd.uoc.gr ως την ίδια ώρα.

Άσκηση 1.

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{1}{4}x[n-4] \quad (1)$$

(α) Βρείτε και σχεδιάστε την κρουστική απόκριση $h[n]$.

(β) Εξετάστε αν το σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές. Δικαιολογήστε.

(γ) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας και, χρησιμοποιώντας παραγοντοποίηση και τις σχέσεις του Euler, γράψτε την ως

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j2\omega} \sin \omega (1 + \cos \omega) \quad (2)$$

(δ) Βρείτε τις συχνότητες μηδενισμού στο $[-\pi, \pi]$ και σχεδιάστε **ποιοτικά** την απόκριση πλάτους. Γράψτε μία έκφραση της φάσης στα ανοικτά διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

(ε) Χωρίς να εκτελέσετε συνέλιξη, βρείτε την έξοδο για καθεμία από τις εισόδους $x_1[n] = 1$ και $x_2[n] = (-1)^n$, για όλα τα ακέραια n .

Απ: (β) αιτιατό και ευσταθές, (ε) $y_1[n] = y_2[n] = 0$.

Άσκηση 2.

Δίνεται το σήμα

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \quad (3)$$

Χωρίς να υπολογίσετε ρητά ολόκληρη την έκφραση του $X(e^{j\omega})$, χρησιμοποιήστε τον ορισμό και τις ιδιότητες του DTFT για να βρείτε:

(α) Τα $X(e^{j0})$ και $X(e^{j\pi})$

(β) Τα ολοκληρώματα

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega, \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j2\omega} d\omega \quad (4)$$

(γ) Την ποσότητα

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5)$$

(δ) Αν $v[n] = (-1)^n x[n-2]$, εκφράστε το $V(e^{j\omega})$ συναρτήσει του $X(e^{j\omega})$ και υπολογίστε τα $V(e^{j0})$, $V(e^{j\pi})$.

Απ: (α) 2, 0, (β) $I_0 = 2\pi$, $I_2 = 0$, (γ) $Q = 6$, (δ) $V(e^{j0}) = 0$, $V(e^{j\pi}) = 2$

Άσκηση 3.

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει την αμφίπλευρη κρουστική απόκριση

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}, \quad -\infty < n < +\infty \quad (6)$$

(α) Εξετάστε αν το σύστημα είναι αιτιατό και αν είναι ευσταθές.

(β) Χωρίστε το άθροισμα του DTFT σε όρους με $n \geq 0$ και $n < 0$ και δείξτε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{3}{5 - 4 \cos \omega} \quad (7)$$

Τι συμπεραίνετε για τη φάση του συστήματος;

(γ) Βρείτε την έξοδο όταν η είσοδος είναι

$$x[n] = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad (8)$$

για όλα τα ακέραια n . Χρησιμοποιήστε την απόκριση συχνότητας, χωρίς άμεσο υπολογισμό της συνέλιξης.

(δ) Ποια από τις τρεις συχνотικές συνιστώσες ενισχύεται, ποια διατηρεί το πλάτος της και ποια εξασθενεί;

$$\text{Απ: (α) μη αιτιατό, ευσταθές, (γ) } y[n] = 3 + 2 \cos(\pi n/3) - \frac{3}{5} \sin(\pi n/2)$$

Άσκηση 4.

Θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα αιτιατό ΓΧΑ φίλτρο τριών συντελεστών,

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2], \quad b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

το οποίο αφήνει αναλλοίωτη μια σταθερή είσοδο και μηδενίζει πλήρως κάθε ημιτονοειδή είσοδο συχνότητας $\omega_0 = \pi/3$, ανεξάρτητα από την αρχική της φάση.

(α) Μεταφράστε τις δύο απαιτήσεις σε συνθήκες για την συχνотική απόκριση $H(e^{j\omega})$.

(β) Βρείτε τους συντελεστές b_0, b_1, b_2 .

(γ) Γράψτε τη συχνотική απόκριση $H(e^{j\omega})$ ως γινόμενο ενός εκθετικού παράγοντα και μιας πραγματικής τριγωνομετρικής συνάρτησης.

$$\text{Απ: (β) } b_0 = b_2 = 1, b_1 = -1, \text{ (γ) } H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}(2 \cos \omega - 1)$$

Άσκηση 5.

Δίνεται η συχνотική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = (1 + 2 \cos \omega)(1 - e^{-j\omega})^2 \quad (10)$$

(α) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$, αναπτύσσοντας το $H(e^{j\omega})$ σε μιγαδικά εκθετικά. Είναι το σύστημα αιτιατό;

(β) Βρείτε τη μικρότερη μη αρνητική ακέραια καθυστέρηση d ώστε το σύστημα με κρουστική απόκριση $g[n] = h[n-d]$ να είναι αιτιατό. Γράψτε το $G(e^{j\omega})$ συναρτήσει του $H(e^{j\omega})$.

(γ) Πώς επηρεάζει αυτή η καθυστέρηση τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, στις συχνότητες όπου οι αποκρίσεις αυτές είναι μη μηδενικές;

$$\text{Απ: (β) } d_{\min} = 1$$