ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων – Λύσεις

Άσκηση 1.

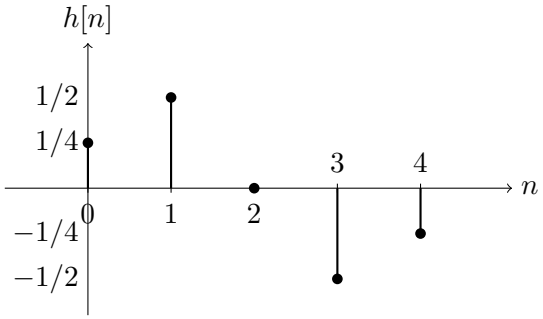
(α΄) Θέτοντας στην είσοδο $x[n] = \delta[n]$, προκύπτει

$$h[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{1}{4}\delta[n-4] \tag{1}$$

Τα μόνα μη μηδενικά δείγματα είναι

$$h[0] = \frac{1}{4}, \quad h[1] = \frac{1}{2}, \quad h[3] = -\frac{1}{2}, \quad h[4] = -\frac{1}{4}. \tag{2}$$

Ισχύει $h[2+k] = -h[2-k]$ για κάθε ακέραιο k, με $h[2] = 0$. Επομένως η κρουστική απόκριση είναι αντισυμμετρική ως προς το $n = 2$.



(β΄) Επειδή $h[n] = 0$ για $n < 0$, το σύστημα είναι αιτιατό. Επιπλέον,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} < \infty. \tag{3}$$

Άρα είναι ευσταθές.

(γ΄) Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης δίνει

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j3\omega} - \frac{1}{4}e^{-j4\omega} \tag{4}$$

$$= e^{-j2\omega}\left[\frac{1}{4}(e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}) + \frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega})\right] \tag{5}$$

$$= je^{-j2\omega}\left[\frac{1}{2}\sin(2\omega) + \sin\omega\right] \tag{6}$$

Με την ταυτότητα $\sin(2\omega) = 2\sin\omega\cos\omega$ καταλήγουμε σε

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j2\omega}\sin\omega(1 + \cos\omega) \tag{7}$$

(δ΄) Οι παράγοντες j και $e^{-j2\omega}$ δεν μηδενίζονται. Στο $[-\pi, \pi]$, οι μηδενισμοί εμφανίζονται στις θέσεις

$$\omega = -\pi, \qquad \omega = 0, \qquad \omega = \pi \tag{8}$$

αφού εκεί μηδενίζονται οι τριγωνομετρικοί όροι. Η απόκριση πλάτους είναι

$$|H(e^{j\omega})| = |\sin(\omega)|(1 + \cos(\omega)) \tag{9}$$

καθώς $1 + \cos\omega \geq 0$, και $|j| = 1$, $|e^{j\theta}| = 1$. Είναι άρτια, μη αρνητική και 2π-περιοδική.
Για $0 < \omega < \pi$, είναι παντού θετική. Έστω $f(\omega) = \sin\omega(1 + \cos\omega)$. Η παράγωγός της είναι

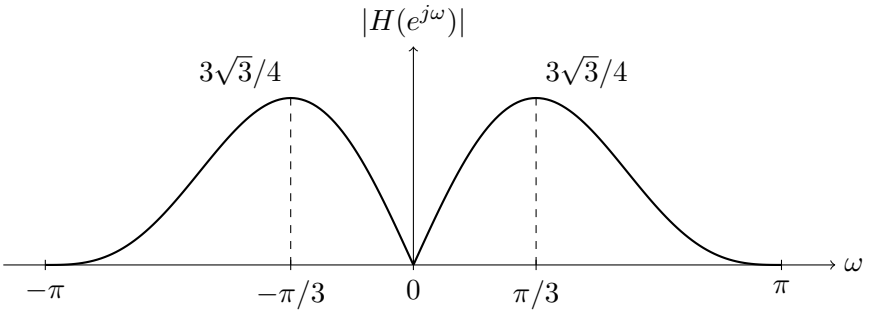
$$f'(\omega) = \cos\omega + \cos(2\omega) = (2\cos\omega - 1)(\cos\omega + 1) \tag{10}$$

και θέτοντας ίση με το μηδέν παίρνουμε

$$\cos\omega = \frac{1}{2} = \cos(\pi/3) \tag{11}$$

$$\cos\omega = -1 = \cos(\pi) \tag{12}$$

Το μέγιστο στο διάστημα $0 < \omega < \pi$ βρίσκεται στο $\omega = \pi/3$ και έχει τιμή $|H(e^{j\pi/3})| = 3\sqrt{3}/4$. Λόγω αρτιότητας υπάρχει μέγιστο και στο $-\pi/3$.



Η απόκριση φάσης θα είναι

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \sphericalangle j + \sphericalangle e^{-j2\omega} + \sphericalangle \sin\omega + \sphericalangle(1 + \cos\omega) \tag{13}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\omega + \sphericalangle \sin\omega + \sphericalangle(1 + \cos\omega) \tag{14}$$

Για $0 < \omega < \pi$, ο πραγματικός παράγοντας $\sin\omega(1 + \cos\omega)$ είναι θετικός, κι έχει φάση μηδέν, ενώ για $-\pi < \omega < 0$ είναι αρνητικός και έχει φάση $-\pi$. Μία έκφραση της φάσης είναι επομένως

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - 2\omega, & -\pi < \omega < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - 2\omega, & 0 < \omega < \pi \end{cases} \tag{15}$$

Στις συχνότητες μηδενισμού της συχνοτικής απόκρισης η φάση δεν ορίζεται.

(ε΄) Για είσοδο $e^{j\omega_0 n}$, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$. Επειδή

$$x_1[n] = e^{j0n} = 1, \qquad x_2[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n \tag{16}$$

και $H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$, βρίσκουμε

$$y_1[n] = 0, \qquad y_2[n] = 0 \tag{17}$$

για όλα τα ακέραια n.

Άσκηση 2.

(α') Στη μηδενική συχνότητα, ο DTFT ισούται με το άθροισμα των δειγμάτων:

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 1 + 2 - 1 = 2 \tag{18}$$

Στη συχνότητα $\omega = \pi$, έχουμε $e^{-j\pi n} = (-1)^n$, επομένως

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](-1)^n = 1 - 2 + 1 = 0 \tag{19}$$

(β') Από τον αντίστροφο DTFT, για κάθε ακέραιο m,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}\,d\omega \Longleftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}\,d\omega = 2\pi x[m] \tag{20}$$

Συνεπώς, με $x[0] = 1$ και $x[2] = 0$,

$$I_0 = 2\pi x[0] = 2\pi \tag{21}$$
$$I_2 = 2\pi x[2] = 0 \tag{22}$$

(γ') Από το θεώρημα του Parseval,

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6 \tag{23}$$

(δ') Αρχικά θέτουμε $z[n] = x[n-2]$. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης,

$$Z(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) \tag{24}$$

Στη συνέχεια, επειδή $v[n] = e^{j\pi n}z[n]$, η ιδιότητα της διαμόρφωσης (συχνοτικής μετατόπισης) μετατοπίζει το φάσμα κατά π:

$$V(e^{j\omega}) = Z(e^{j(\omega-\pi)}) \tag{25}$$
$$= e^{-j2(\omega-\pi)}X(e^{j(\omega-\pi)}) \tag{26}$$
$$= e^{-j2\omega}X(e^{j(\omega-\pi)}) \tag{27}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το $e^{j2\pi} = 1$. Αξιοποιώντας και την 2π-περιοδικότητα του μετασχηματισμού, λαμβάνουμε

$$V(e^{j0}) = X(e^{-j\pi}) = X(e^{j\pi}) = 0 \tag{28}$$
$$V(e^{j\pi}) = e^{-j2\pi}X(e^{j0}) = 2 \tag{29}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Το σύστημα δεν είναι αιτιατό, διότι η κρουστική απόκριση είναι μη μηδενική για αρνητικές χρονικές στιγμές. Για παράδειγμα, $h[-1] = 1/2 \neq 0$. Ωστόσο,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 2\frac{1/2}{1-1/2} = 3 < \infty \tag{30}$$

Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

(β΄) Χωρίζουμε το άθροισμα στις δύο περιοχές, χωρίς να μετρήσουμε δύο φορές το δείγμα στο $n = 0$:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\omega n} \tag{31}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^m \tag{32}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} \tag{33}$$

με χρήση της γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{N_1}}{1-a},\ |a| < 1 \tag{34}$$

Οι γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν για κάθε πραγματικό ω. Με κοινό παρονομαστή,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)} \tag{35}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1-\cos\omega+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5-4\cos\omega} \tag{36}$$

Εφόσον $-1 \leq \cos\omega \leq 1$, ο παρονομαστής ανήκει στο $[1, 9]$. Έτσι $H(e^{j\omega}) > 0$ για κάθε ω, οπότε η φάση του συστήματος είναι μηδενική.

(γ΄) Για πραγματικό ΓΧΑ σύστημα, ξέρουμε ότι

$$A_0 + A\cos(\omega_0 n + \theta) \ \longrightarrow\ A_0 H(e^{j0}) + A|H(e^{j\omega_0})|\cos\big(\omega_0 n + \theta + \sphericalangle H(e^{j\omega_0})\big) \tag{37}$$

Ανάλογα ισχύει για ένα ημίτονο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αρχική φάση θ είναι μηδενική, και οι τρεις απαιτούμενες τιμές είναι

$$H(e^{j0}) = 3, \qquad H(e^{j\pi/3}) = \frac{3}{5-4(1/2)} = 1, \qquad H(e^{j\pi/2}) = \frac{3}{5} \tag{38}$$

όλες θετικές, άρα με φάση μηδέν. Από τη γραμμικότητα προκύπτει

$$y[n] = 3 + 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \frac{3}{5}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{39}$$

(δ΄) Η σταθερή συνιστώσα, στη συχνότητα 0, ενισχύεται κατά παράγοντα 3. Η συνιστώσα στη συχνότητα $\pi/3$ διατηρεί το πλάτος της, αφού το αντίστοιχο κέρδος είναι 1. Η συνιστώσα στη συχνότητα $\pi/2$ εξασθενεί κατά παράγοντα $3/5$. Δεν εισάγεται μεταβολή φάσης σε καμία από τις τρεις συνιστώσες.

Άσκηση 4.

(α΄) Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου είναι

$$H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega} \tag{40}$$

Μια σταθερή είσοδος πρέπει να διατηρεί την τιμή της, άρα

$$H(e^{j0}) = 1 \tag{41}$$

Για να μηδενίζεται κάθε ημιτονοειδής είσοδος στη συχνότητα $\pi/3$, ανεξάρτητα από την αρχική της φάση, πρέπει

$$H(e^{j\pi/3}) = H^*(e^{-j\pi/3}) = 0 \tag{42}$$

λόγω συζυγούς συμμετρίας της συχνοτικής απόκρισης.

(β΄) Η πρώτη συνθήκη δίνει

$$b_0 + b_1 + b_2 = 1 \tag{43}$$

Για τη δεύτερη, χρησιμοποιούμε

$$e^{-j\pi/3} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{44}$$

Εξισώνοντας με μηδέν πραγματικό και φανταστικό μέρος, προκύπτουν

$$b_0 + \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 = 0, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}(b_1 + b_2) = 0 \tag{45}$$

Η δεύτερη σχέση δίνει $b_1 = -b_2$. Αντικατάσταση στην πρώτη δίνει $b_0 = b_2$. Τέλος, η συνθήκη στη μηδενική συχνότητα οδηγεί σε

$$b_2 - b_2 + b_2 = 1 \tag{46}$$

Άρα η μοναδική πραγματική λύση είναι

$$b_0 = 1, \qquad b_1 = -1, \qquad b_2 = 1 \tag{47}$$

(γ΄) Με εξαγωγή του παράγοντα $e^{-j\omega}$,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} && (48)\\ &= e^{-j\omega}\big(e^{j\omega} - 1 + e^{-j\omega}\big) && (49)\\ &= e^{-j\omega}(2\cos\omega - 1) && (50) \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

(α΄) Με τη σχέση $2\cos\omega = e^{j\omega} + e^{-j\omega}$, αναπτύσσουμε το γινόμενο:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= (1 + e^{j\omega} + e^{-j\omega})(1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) && (51)\\ &= \big(1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\big) + \big(e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega}\big)\\ &\quad + \big(e^{-j\omega} - 2e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega}\big) && (52)\\ &= e^{j\omega} - 1 - e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} && (53) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος $\delta[n-k] \longleftrightarrow e^{-j\omega k}$, βρίσκουμε την κρουστική απόκριση ως

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-3] \tag{54}$$

Ειδικότερα, $h[-1] = 1 \neq 0$, άρα το σύστημα δεν είναι αιτιατό.

(β΄) Η αριστερότερη μη μηδενική τιμή του $h[n]$ βρίσκεται στο $n = -1$. Η καθυστέρηση d μεταφέρει τη θέση αυτή στο $n = -1 + d$. Για αιτιατότητα απαιτείται $-1 + d \geq 0$, επομένως

$$d_{\min} = 1 \tag{55}$$

Με αυτή την επιλογή,

$$g[n] = h[n-1] = \delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-3] + \delta[n-4] \tag{56}$$

η οποία μηδενίζεται για κάθε $n < 0$. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης,

$$G(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} H(e^{j\omega}) \tag{57}$$

Πιο γενικά, για οποιαδήποτε ακέραια καθυστέρηση d, $G(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} H(e^{j\omega})$.

(γ΄) Ο παράγοντας $e^{-j\omega d}$ έχει μοναδιαίο μέτρο. Άρα

$$|G(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \tag{58}$$

Στις συχνότητες όπου το $H(e^{j\omega})$ είναι μη μηδενικό,

$$\sphericalangle G(e^{j\omega}) = \sphericalangle H(e^{j\omega}) - \omega d \tag{59}$$

Για την ελάχιστη καθυστέρηση $d = 1$, η επιπλέον φάση είναι $-\omega$. Οι συχνότητες μηδενισμού και η απόκριση πλάτους δεν αλλάζουν. Στις συχνότητες μηδενισμού η φάση παραμένει μη ορισμένη.