ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων – Λύσεις

Άσκηση 1.
Για το πρώτο σήμα, είναι πιθανόν σήμα ενέργειας γιατί ισούται με μηδέν για $n < 0$ και φθίνει στο μηδέν όσο $n \to +\infty$. Η ενέργεια υπολογίζεται ως

$$E_{x_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^{n} = \frac{1}{1-9/16} = \frac{16}{7} \tag{1}$$

Επειδή η ενέργεια είναι πεπερασμένη και θετική, το $x_1[n]$ είναι σήμα ενέργειας. Το δεύτερο σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $N_0 = 6$, άρα είναι σήμα ισχύος. Η μέση ισχύς περιοδικού σήματος ισούται με τον μέσο όρο του τετραγώνου του σε μία περίοδο:

$$P_{x_2} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} 4\cos^2\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} \left[2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{3}$$

Οι τιμές του συνημιτόνου σε μία περίοδο είναι $0, -\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 0, -\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2$ και έχουν μηδενικό άθροισμα. Επομένως,

$$P_{x_2} = \frac{2}{6} \sum_{n=0}^{5} 1 = 2 \tag{4}$$

Το τρίτο σήμα είναι μη μηδενικό μόνο για $n = 0, \ldots, 7$, με τιμές εναλλάξ 1 και -1. Είναι πεπερασμένης διάρκειας, άρα είναι σήμα ενέργειας. Άρα

$$E_{x_3} = \sum_{n=0}^{7} |(-1)^n|^2 = 8 \tag{5}$$

(α′) Αν $z[n] = A\,x[n-n_0]$, η αλλαγή μεταβλητής $k = n - n_0$ δίνει

$$E_z = |A|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n-n_0]|^2 = |A|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = |A|^2 E_x \tag{6}$$

Αντίστοιχα, εφόσον η μέση ισχύς υπάρχει και είναι πεπερασμένη,

$$P_z = |A|^2 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N-n_0}^{N-n_0} |x[k]|^2 = |A|^2 P_x \tag{7}$$

Η σταθερή χρονική μετατόπιση αλλάζει μόνο έναν σταθερό αριθμό όρων στα άκρα του αθροίσματος και δεν αλλάζει το όριο.

(β′) Εδώ $A = -3$ και $n_0 = 5$, οπότε

$$E_y = 9E_{x_1} = \frac{144}{7} \tag{8}$$

Το $y[n]$ παραμένει σήμα ενέργειας.

Άσκηση 2.

i. **Γραμμικότητα:** Το σύστημα δεν είναι γραμμικό γιατί δεν είναι ομογενές. Για είσοδο

$$x_1[n] = cx[n] \tag{9}$$

η έξοδος είναι

$$y_1[n] = |x_1[n]| = |cx[n]| = |c||x[n]| \neq cy[n] \tag{10}$$

Ευστάθεια: Αν $|x[n]| \leq M$ για όλα τα n, τότε $|y[n]| = |x[n]| \leq M$. Επομένως είναι ευσταθές.

Αιτιατότητα: Η έξοδος στο n εξαρτάται μόνο από την είσοδο στον ίδιο χρονικό δείκτη n. Άρα το σύστημα είναι αιτιατό.

Χρονική αμεταβλητότητα: Για μετατοπισμένη είσοδο $x_d[n] = x[n - n_0]$,

$$y'[n] = T\{x_d[n]\} = |x[n - n_0]| = y[n - n_0] \tag{11}$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

ii. **Γραμμικότητα:** Ελέγχουμε για ομογένεια και αθροιστικότητα ταυτόχρονα, δηλ. αν η είσοδος είναι $ax_1[n] + bx_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} y'[n] &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} && (12)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} \big(ax_1[k] + bx_2[k]\big) && (13)\\ &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} && (14)\\ &= ay_1[n] + by_2[n] && (15) \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Ευστάθεια: Επιλέγουμε τη φραγμένη είσοδο $x[n] = u[n]$. Τότε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+1)u[n], \tag{16}$$

η οποία δεν είναι φραγμένη. Άρα το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Αιτιατότητα: Η έξοδος στο n χρησιμοποιεί μόνο δείγματα $x[k]$ με $k \leq n$. Επομένως το σύστημα είναι αιτιατό.

Χρονική αμεταβλητότητα: Για είσοδο $x[n - n_0]$, και με την αλλαγή μεταβλητής $\ell = k - n_0$,

$$y'[n] = T\{x[n - n_0]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k - n_0] = \sum_{\ell=-\infty}^{n-n_0} x[\ell] = y[n - n_0] \tag{17}$$

Άρα είναι χρονικά αμετάβλητο.

iii. **Γραμμικότητα:** Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$, η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y'[n] &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} && (18)\\ &= a\big(x_1[n+1] - x_1[n-1]\big) && (19)\\ &\quad + b\big(x_2[n+1] - x_2[n-1]\big) && (20) \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Ευστάθεια: Αν $|x[n]| \leq M$, από την τριγωνική ανισότητα,

$$|y[n]| \leq |x[n+1]| + |x[n-1]| \leq 2M. \tag{21}$$

Επομένως είναι ευσταθές.

Αιτιατότητα: Δεν είναι αιτιατό, διότι χρησιμοποιεί το μελλοντικό δείγμα $x[n+1]$.

Χρονική αμεταβλητότητα: Για καθυστερημένη είσοδο $x_d[n] = x[n-n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y'[n] = T\{x_d[n]\} = x[n+1-n_0] - x[n-1-n_0] = y[n-n_0] \tag{22}$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Άσκηση 3.

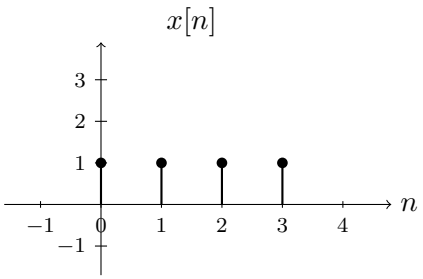
(α΄) Το πρώτο σήμα, $x[n]$, έχει τέσσερα μοναδιαία δείγματα:

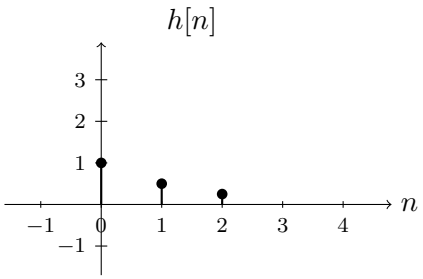
$$x[0] = x[1] = x[2] = x[3] = 1 \tag{23}$$

Το δεύτερο έχει τρία μη μηδενικά δείγματα:

$$h[0] = 1, \qquad h[1] = \frac{1}{2}, \qquad h[2] = \frac{1}{4} \tag{24}$$

Συνεπώς τα διαστήματα στήριξης είναι $[0,3]$ και $[0,2]$, αντίστοιχα. Τα δυο σήματα φαίνονται παρακάτω.





(β΄) Από την ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης, θα πρέπει το αποτέλεσμα να είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[0+0, 3+2] = [0,5]$, άρα η έξοδος θα έχει 6 μη μηδενικά δείγματα.

(γ΄) Τα σήματα γράφονται ως

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \tag{25}$$

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] \tag{26}$$

Από την ιδιότητα

$$\delta[n-n_1] * \delta[n-n_2] = \delta[n-n_1-n_2] \tag{27}$$

παίρνουμε

$$y[n] = x[n] * h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] + \frac{7}{4}\delta[n-2] + \frac{7}{4}\delta[n-3] + \frac{3}{4}\delta[n-4] + \frac{1}{4}\delta[n-5] \tag{28}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Για μηδενική είσοδο λύνουμε την ομογενή εξίσωση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι της μορφής

$$r^2 - \frac{3}{4}r + \frac{1}{8} = 0 \Longleftrightarrow \left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r - \frac{1}{4}\right) = 0 \tag{29}$$

Οι δύο διακριτές ρίζες δίνουν τη γενική ομογενή λύση

$$y_{zi}[n] = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n, \qquad n \geq 0 \tag{30}$$

Πρώτα υπολογίζουμε τα δύο αρχικά δείγματα της απόκρισης μηδενικής εισόδου, με χρήση της εξίσωσης διαφορών και των δοσμένων αρχικών τιμών:

$$y_{zi}[0] = \frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] = \frac{3}{4}, \tag{31}$$

$$y_{zi}[1] = \frac{3}{4}y_{zi}[0] - \frac{1}{8}y[-1] = \frac{9}{16} - \frac{1}{8} = \frac{7}{16} \tag{32}$$

Επομένως,

$$C_1 + C_2 = \frac{3}{4} \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{7}{16} \tag{34}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη σχέση με 4 και αφαιρώντας την πρώτη, βρίσκουμε $C_1 = 1$, και στη συνέχεια $C_2 = -1/4$. Άρα

$$y_{zi}[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] u[n] \tag{35}$$

(β΄) Για την κρουστική απόκριση θέτουμε $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες $h[-1] = h[-2] = 0$, καθώς και την ψευδο-αρχική συνθήκη $h[0] = 1$. Στο $n = 0$ και στο $n = 1$, η εξίσωση δίνει

$$h[0] = 1 \tag{36}$$

$$h[1] = \frac{3}{4}h[0] = \frac{3}{4} \tag{37}$$

Για $n \geq 2$ η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η απόκριση έχει τη μορφή

$$h[n] = D_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + D_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n, \qquad n \geq 0 \tag{38}$$

Από τα δύο πρώτα δείγματα προκύπτει

$$D_1 + D_2 = 1 \tag{39}$$

$$\frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{4}D_2 = \frac{3}{4} \tag{40}$$

Η λύση είναι $D_1 = 2$, $D_2 = -1$, επομένως

$$h[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n] \tag{41}$$

(γ΄) Η απόκριση μηδενικής κατάστασης για τη βηματική είσοδο είναι

$$y_{zs}[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[k], \qquad n \geq 0 \tag{42}$$

αφού

$$u[n-k] = 1, \;\; k \leq n \tag{43}$$

Άρα

$$y_{zs}[n] = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k \tag{44}$$

$$= 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] \tag{45}$$

$$= \frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \tag{46}$$

Συνεπώς,

$$y_{zs}[n] = \left[\frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n] \tag{47}$$

(δ΄) Η συνολική απόκριση είναι το άθροισμα της απόκρισης μηδενικής εισόδου και της απόκρισης μηδενικής κατάστασης:

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left[\frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n], \qquad n \geq 0 \tag{48}$$

Για την επαλήθευση στα δύο πρώτα δείγματα βρίσκουμε

$$y[0] = \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{12} = \frac{7}{4}, \tag{49}$$

$$y[1] = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{35}{16} \tag{50}$$

Στο $n = 0$, χρησιμοποιούμε τις δοσμένες αρχικές συνθήκες:

$$y[0] - \frac{3}{4}y[-1] + \frac{1}{8}y[-2] = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 0 = 1 = x[0] \tag{51}$$

Στο $n = 1$,

$$y[1] - \frac{3}{4}y[0] + \frac{1}{8}y[-1] = \frac{35}{16} - \frac{21}{16} + \frac{2}{16} = 1 = x[1] \tag{52}$$

(ε΄) Για $n \geq 0$, παρατηρούμε ότι ισχύει $2(1/2)^n - (1/4)^n > 0$, άρα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} < \infty \tag{53}$$

Η απόλυτη αθροισιμότητα της κρουστικής απόκρισης αποδεικνύει την ευστάθεια του συστήματος.