ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026-27
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Έκτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Για το παρακάτω σύστημα

$$H(z) = \frac{(1+3z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{1}$$

βρείτε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{min}(z)$ τέτοιο ώστε οι αποκρίσεις πλάτους των δυο συστημάτων να είναι ίσες, δηλ. $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$.

Λύση:
Το σύστημα έχει δυο μηδενικά, στις θέσεις $z = -3$ και $z = \frac{1}{4}$, ενώ έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = \frac{3}{4}$ και $z = \frac{4}{3}$. Το μηδενικό στη θέση $z = -3$ και ο πόλος στη θέση $z = \frac{4}{3}$ θα ανήκουν σε ένα all-pass σύστημα, το οποίο θα έχει επίσης πόλο στη θέση $z = -1/3$ και μηδενικό στη θέση $z = \frac{3}{4}$, και άρα θα είναι

$$H_{ap}(z) = \frac{(1+3z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{2}$$

το οποίο γράφεται ως

$$H_{ap}(z) = -3\frac{3}{4}\frac{(z^{-1}+\frac{1}{3})(z^{-1}-\frac{4}{3})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{3}$$

και αφαιρώντας τη σταθερά, θα έχουμε

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1}+\frac{1}{3})(z^{-1}-\frac{4}{3})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} \tag{4}$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{4}$, έναν πόλο στη θέση $z = \frac{3}{4}$ από το αρχικό σύστημα, ενώ θα έχει και ένα μηδενικό στη θέση $z = -\frac{1}{3}$ και έναν πόλο στη θέση $z = \frac{3}{4}$, που πρέπει να υπάρχουν για να ακυρώνονται οι όροι που εισήχθησαν στο all-pass. Μαζί με τη σταθερά από το all-pass θα έχουμε

$$H_{min}(z) = -\frac{9}{4}\frac{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})^2} \tag{5}$$

$$= \frac{3}{-\frac{4}{3}}\frac{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})^2} \tag{6}$$

$$= \frac{(z^{-1}+3)(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(z^{-1}-\frac{4}{3})(1-\frac{3}{4}z^{-1})} \tag{7}$$

Εναλλακτικά, και χωρίς να ακολουθήσουμε όλο το παραπάνω, απλώς αλλάζουμε στο αρχικό σύστημα τους όρους $1 - az^{-1}$ εκτός μοναδιαίου κύκλου με όρους $z^{-1} - a$ εντός μοναδιαίου κύκλου. Οι όροι αυτοί είναι οι

$$(1+3z^{-1}) \ , \ (1-\frac{4}{3}z^{-1}) \longrightarrow z^{-1}+3 \ , \ z^{-1}-\frac{4}{3} \tag{8}$$

Έτσι, το σύστημα ελάχιστης φάσης θα είναι το

$$H_{min}(z) = \frac{(z^{-1}+3)(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(z^{-1}-\frac{4}{3})(1-\frac{3}{4}z^{-1})} \tag{9}$$

Άσκηση 2.
Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 1.5z^{-1} - z^{-2})(1 + 0.9z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + j0.7z^{-1})(1 - j0.7z^{-1})} \tag{10}$$

(α΄) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που ικανοποιείται από την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

(β΄) Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων μηδενικών και ορίστε την περιοχή σύγκλισης του συστήματος.

(γ΄) Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$.

(δ΄) Εξηγήστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω δηλώσεις:

- Το σύστημα είναι ευσταθές.
- Η κρουστική απόκριση πλησιάζει μια σταθερά για μεγάλες τιμές του n.
- Η απόκριση πλάτους έχει μια κορυφή στη συχνότητα $\omega \approx \pm\pi/4$.
- Το σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

Λύση:

(α΄) Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{(1 - 1.5z^{-1} - z^{-2})(1 + 0.9z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + j0.7z^{-1})(1 - j0.7z^{-1})} \tag{11}$$

$$= \frac{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + j0.7z^{-1})(1 - j0.7z^{-1})} \tag{12}$$

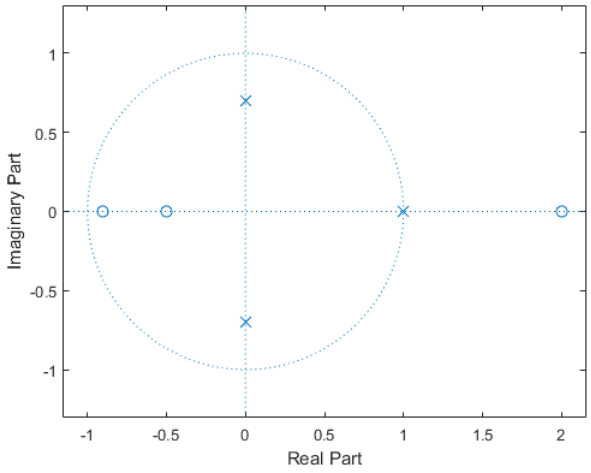
$$= \frac{1 - 0.6z^{-1} - 2.35z^{-2} - 0.9z^{-3}}{1 - z^{-1} + 0.49z^{-2} - 0.49z^{-3}} \tag{13}$$

$$= \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{14}$$

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί και κάνοντας αντίστροφο μετασχ. Z λαμβάνουμε

$$y[n] - y[n-1] + 0.49y[n-2] - 0.49y[n-3] = x[n] - 0.6x[n-1] - 2.35x[n-2] - 0.9x[n-3] \tag{15}$$

(β΄) Υπάρχουν τρεις πόλοι στις θέσεις $z = \pm j0.7$ και $z = 1$, ενώ τρια μηδενικά υπάρχουν στις θέσεις $z = 2$, $z = -1/2$ και $z = -0.9$. Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 1.

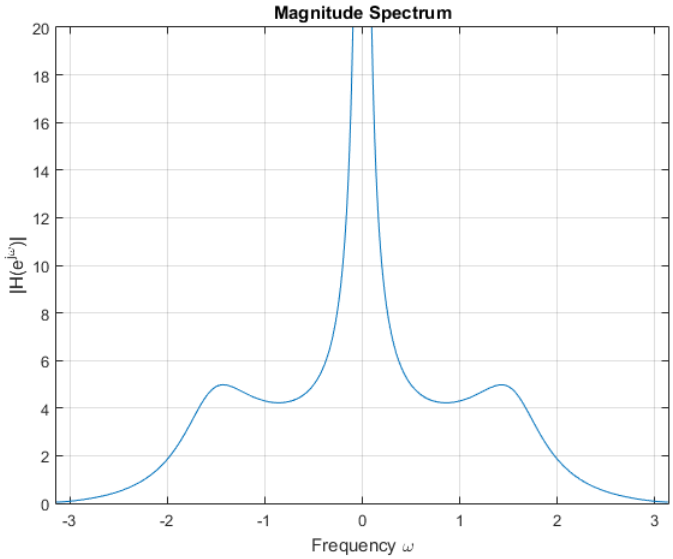


Σχήμα 1: *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Άσκησης 2.*

Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης θα είναι εξωστρεφές, άρα

$$|z| > 1 \tag{16}$$

(γ΄) Η απόκριση πλάτους θα είναι περίπου όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Απόκριση πλάτους Άσκησης 2.*

Η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο στο $z = 1$, άρα η απόκριση πλάτους για $\omega = 0$ θα απειρίζεται. Η συνάρτηση μεταφοράς έχει πολύ κοντά στη θέση $z = -1$ ένα μηδενικό, άρα για $\omega = \pm\pi$ η απόκριση πλάτους θα κατεβαίνει χαμηλά, πολύ κοντά στο μηδέν. Επίσης, η συνάρτηση μεταφοράς έχει δυο πόλους σχετικά κοντά στο μοναδιαίο κύκλο στις συχνότητες $\omega = \pm\pi/2$, άρα πριμένουμε κάποιο τοπικό μέγιστο της απόκρισης πλάτους σε αυτές τις συχνότητες.

(δ΄) Έχουμε:

- Το σύστημα είναι ευσταθές: Λάθος, υπάρχει πόλος στη θέση $z = 1$, άρα είναι ασταθές.
- Η κρουστική απόκριση πλησιάζει μια σταθερά για μεγάλες τιμές του n: Το σύστημα είναι ασταθές με πόλο στο $z = 1$, άρα θα υπάρχει κάποιος όρος $Au[n]$ στην κρουστική απόκριση. Οπότε για μεγάλα n, πράγματι η κρουστική απόκριση θα πλησιάζει τη σταθερή τιμή A - εφ'όσον οι άλλοι (ευσταθείς) όροι που αντιστοιχούν στους υπόλοιπους πόλους θα έχουν "σβήσει" για μεγάλα n.
- Η απόκριση πλάτους έχει μια κορυφή στη συχνότητα $\omega \approx \pm\pi/4$: Λάθος, οι πόλοι βρίσκονται στη συχνότητα $\omega = \pm\pi/2$.
- Το σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα: Λάθος, γιατί στο αντίστροφο σύστημα το μηδενικό στη θέση $z = 2$ θα γίνει πόλος, κι ως εκ τούτου δεν υπάρχει πεδίο σύγκλισης που να δίνει ευσταθές και αιτιατό ταυτόχρονα σύστημα. Άρα το αρχικό σύστημα δεν έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

Άσκηση 3.

Θεωρήστε το αιτιατό σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z ως

$$X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{5}z)}{(1 - \frac{1}{6}z)} \tag{17}$$

Για ποιές τιμές του α, το σήμα $\alpha^n x[n]$ είναι ένα σήμα πραγματικό και ελάχιστης φάσης;

Λύση:
Ο μετασχ. Z μπορεί να γραφεί ως

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z)}{(1-\frac{1}{6}z)} = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-5z^{-1})}{(1-6z^{-1})} \tag{18}$$

Όμως

$$\alpha^n x[n] \longleftrightarrow X(\alpha^{-1}z) = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha z^{-1})(1-\frac{1}{4}\alpha z^{-1})(1-5\alpha z^{-1})}{(1-6\alpha z^{-1})} \tag{19}$$

Ένα σήμα ελάχιστης φάσης έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου του. Άρα πρέπει

$$|\alpha/2| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 2 \tag{20}$$
$$|\alpha/4| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 4 \tag{21}$$
$$|5\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{5} \tag{22}$$
$$|6\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{6} \tag{23}$$

Το σήμα $\alpha^n x[n]$ είναι πραγματικό και ελάχιστης φάσης μόνον αν $|\alpha| < \frac{1}{6}$.

Άσκηση 4.
Γράψε το σύστημα

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{1-0.64z^{-2}}$$

ως γινόμενο δύο συστημάτων:

1. $H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$
2. $H(z) = H_{min}(z)H_{lin}(z)$

όπου τα συστήματα ελάχιστης φάσης $H_{min}(z)$ είναι σε κάθε περίπτωση διαφορετικά, το $H_{ap}(z)$ δηλώνει ένα all-pass σύστημα, και το $H_{lin}(z)$ είναι ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης.

(α΄) Τι τύπου FIR είναι το σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης και ποια η φάση του;

(β΄) Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των συστημάτων.

Λύση:
Αρχικά το σήμα μας μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})} \tag{24}$$

και παρατηρούμε ότι έχει πόλους και μηδενικά στις θέσεις $p_{1,2} = \pm\frac{4}{5}, p_3 = 0$ και $z_1 = \frac{1}{2}, z_{2,3} = \pm 2j$, αντίστοιχα.

1. Ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου. Άρα το σύστημα ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, θα έχει τους πόλους του $H(z)$ - που είναι όλοι εντός του μοναδιαίου

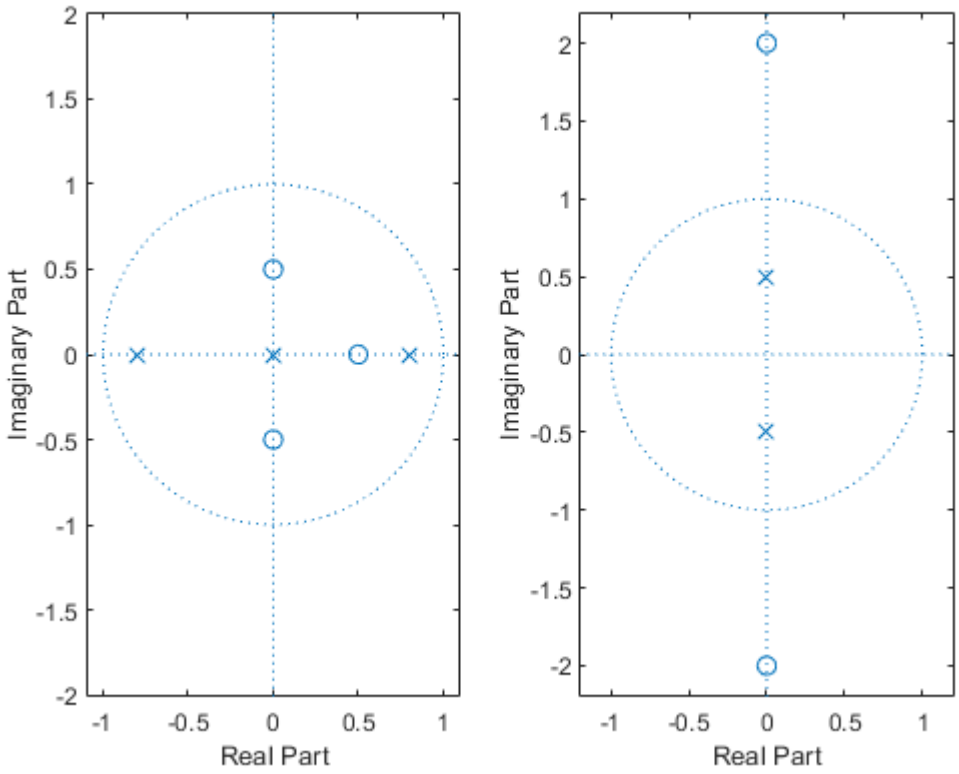
κύκλου - το μηδενικό που είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, και τα αντίστροφα μηδενικά του $H(z)$, καθρεφτίζοντας τα έτσι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}{1-0.64z^{-2}} \tag{25}$$

Τα διαγράμματα πόλων μηδενικών φαίνονται στο Σχήμα 3. Το all-pass σύστημα θα έχει ως μηδενικά τα μηδενικά του $H(z)$ που είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και ως πόλους τα δυο μηδενικά στον κατακόρυφο άξονα του $H_{min}(z)$, ώστε όταν γίνει το γινόμενο $H_{min}(z)H_{ap}(z)$, αυτά να αλληλοακυρωθούν.

$$H_{ap}(z) = \frac{1+4z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} \tag{26}$$

Όμως το $H_{ap}(z)$ δεν είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Για να είναι, πρέπει να γραφεί στη μορφή



Σχήμα 3: *Άσκηση 4 - Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών Ι*

$$H_{ap}(z) = \frac{1+4z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} = 4\frac{\frac{1}{4}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} = 4\frac{(\frac{1}{2}+jz^{-1})(\frac{1}{2}-jz^{-1})}{(1-\frac{1}{2}jz^{-1})(1+\frac{1}{2}jz^{-1})} \tag{27}$$

και ο συντελεστής 4 θα πάει στο $H_{min}(z)$, άρα

$$H_{min}(z) = 4\frac{(1-0.5z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}{1-0.64z^{-2}} = \frac{(1-0.5z^{-1})(4+z^{-2})}{1-0.64z^{-2}} \tag{28}$$

και

$$H_{ap}(z) = \frac{(\frac{1}{2}+jz^{-1})(\frac{1}{2}-jz^{-1})}{(1-\frac{1}{2}jz^{-1})(1+\frac{1}{2}jz^{-1})} \tag{29}$$

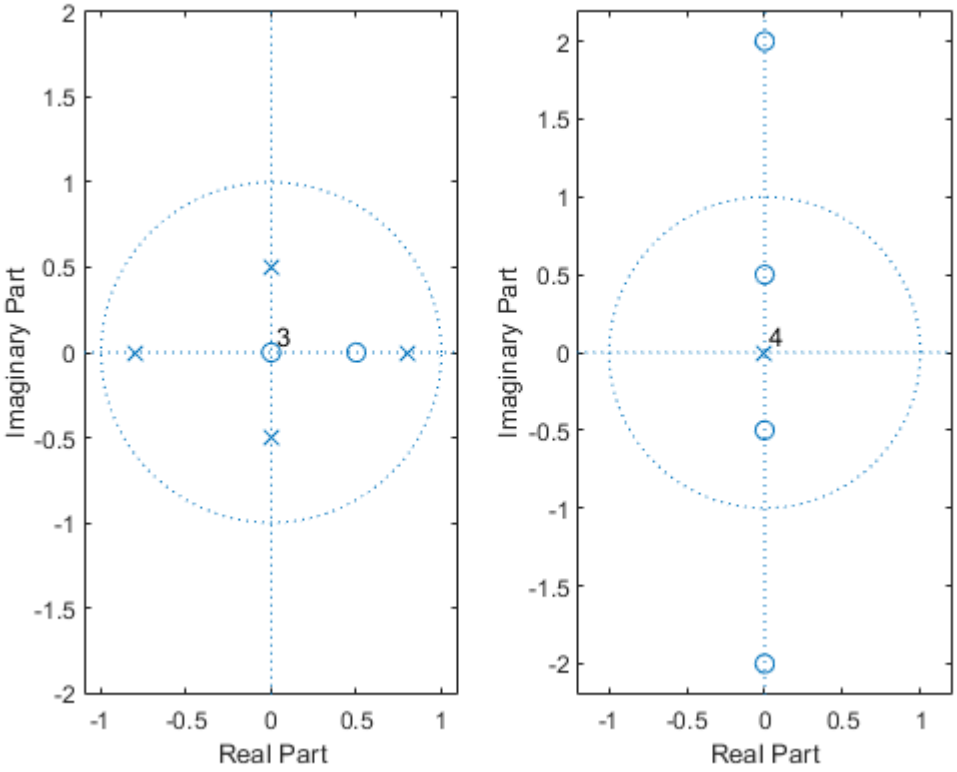
2. Ένα σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης έχει πόλους στο μηδέν ή/και στο άπειρο, ενώ τα μηδενικά μπορούν να είναι οπουδήποτε αλλά σε αμοιβαία ζεύγη $(a, 1/a)$. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{(1 - 0.64z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})} \tag{30}$$

και

$$H_{lin}(z) = (1 + \frac{1}{4}z^{-2})(1 + 4z^{-2}) \tag{31}$$

Το διάγραμμα πόλων μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 4. Το σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης είναι



Σχήμα 4: *Άσκηση 4 - Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών II*

FIR Τύπου I, αφού δεν υπάρχει κάποιο/α μηδενικό/α στις θέσεις $z = \pm 1$. Η φάση είναι της μορφής

$$\phi = -2\omega + \beta \tag{32}$$

με $\beta = 0$ ή π, για $0 \leq \omega \leq \pi$.

Άσκηση 5.
Δείξτε ότι το μη αιτιατό σύστημα

$$h[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \tag{33}$$

έχει καθυστέρηση ομάδας group delay ίση με 1, για κάθε ω, δηλ. δείξτε ότι

$$grd\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega}) = 1 \tag{34}$$

Λύση:
Έχουμε

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n+1]+\delta[n]+4\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3] \leftrightarrow & (35)\\ H(e^{j\omega}) &= e^{j\omega}+1+4e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}+e^{-j3\omega} & (36)\\ &= e^{-j\omega}(e^{j2\omega}+e^{j\omega}+4+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}) & (37)\\ &= e^{-j\omega}(4+2\cos(\omega)+2\cos(2\omega)) & (38)\end{aligned}$$

Έτσι, θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = 4+2\cos(\omega)+2\cos(2\omega) \tag{39}$$

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega \tag{40}$$

αφού ο όρος $4+2\cos(\omega)+2\cos(2\omega)$ είναι θετικός για κάθε ω, κι έτσι η φάση του είναι μηδενική. Άρα

$$grd\{H(e^{j\omega})\} = 1 \tag{41}$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 6.
Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z^{-2}(1-2z^{-1})}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2} \tag{42}$$

(α΄) Είναι το σύστημα all-pass; Εξηγήστε.

(β΄) Θέλουμε να υλοποιήσουμε αυτό το σύστημα ως μια σειρά από τρία συστήματα $H_{min}(z)$, $H_{max}(z)$, $H_d(z)$, που συμβολίζουν ένα σύστημα ελάχιστης φάσης, ένα μέγιστης φάσης, και ένα σύστημα ακέραιας μετατόπισης, αντίστοιχα. Βρείτε τις κρουστικές αποκρίσεις, $h_{min}[n]$, $h_{max}[n]$, $h_d[n]$ των παραπάνω συστημάτων.

Λύση:

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \left|\frac{e^{-j2\omega}(1-2e^{-j\omega})}{2(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}\right| = \left|e^{-j2\omega}\right|\left|\frac{(1-2e^{-j\omega})}{2(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}\right| & (43)\\ &= \frac{|1-2e^{-j\omega}|}{|2-e^{-j\omega}|} = |e^{-j\omega}|\frac{|e^{j\omega}-2|}{|2-e^{-j\omega}|} & (44)\\ &= \frac{|e^{j\omega}-2|}{|2-e^{-j\omega}|} = \frac{|e^{j\omega}-2|}{|e^{-j\omega}-2|} & (45)\end{aligned}$$

που είναι συζυγείς παραστάσεις και άρα έχουν το ίδιο μέτρο.

(β΄) Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{z-2}{2z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)} \tag{46}$$

Επειδή το σύστημα έχει πόλους στις θέσεις $p_1 = 0$ (δύο), $p_2 = \frac{1}{2}$ και μηδενικά στις θέσεις $z_1 = 2$ και $z_2 = \infty$ (δυο), το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει μόνο τον πόλο εντός του μοναδιαίου κύκλου ($p_2 = \frac{1}{2}$), το σύστημα

μέγιστης φάσης θα έχει το μηδενικό εκτός του μοναδιαίου κύκλου ($z_1 = 2$), και οι πόλοι στο μηδέν και τα μηδενικά στο άπειρο θα μοντελοποιηθούν από το σύστημα καθυστέρησης. Οπότε θα κάνουμε τη διάσπαση ως

$$H(z) = H_{min}(z)H_{max}(z)H_d(z) = \Big(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{z-2}{z}\Big)\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\Big) \tag{47}$$

$$\tag{48}$$

με

$$H_{min}(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \longleftrightarrow h_{min}[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \tag{49}$$

$$H_{max}(z) = \frac{z-2}{z} = 1-2z^{-1} \longleftrightarrow h_{max}[n] = \delta[n]-2\delta[n-1] \tag{50}$$

$$H_d(z) = \frac{1}{2}z^{-2} \longleftrightarrow h_d[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] \tag{51}$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 7.
Σας δίνονται τα παρακάτω τρία στοιχεία για ένα σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z $X(z)$:

1. Το $x[n]$ είναι πραγματικό και ελαχίστης φάσης.
2. Το $x[n]$ είναι μηδέν έξω από το διάστημα $0 \leq n \leq 4$
3. Το $X(z)$ έχει ένα μηδενικό στο $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ και ένα μηδενικό στο $z = \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}$
   Με βάση τα παραπάνω, απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

   (α') Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $X(z)$ και βρείτε το πεδίο σύγκλισης.

   (β') Αν $y[n] * x[n] = \delta[n]$ και το $y[n]$ είναι δεξιόπλευρο, σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών για το $Y(z)$ και βρείτε την περιοχή σύγκλισής του.

Λύση:
Αφού το σήμα είναι πραγματικό, τότε τα μηδενικά θα είναι σε συζυγείς θέσεις. Επίσης, αφού είναι πεπερασμένης διάρκειας από 0 ως 4, ημαίνει ότι έχει μόνο 4 μηδενικά (και πόλους). Άρα η μορφή του θα είναι

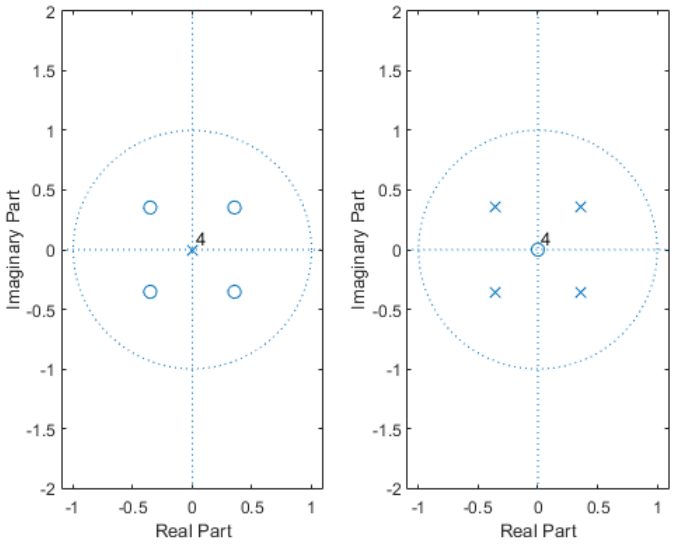
$$X(z) = \Big(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}z^{-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{2}e^{j3\pi/4}z^{-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{2}e^{-j3\pi/4}z^{-1}\Big) \tag{52}$$

(α') Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 5, αριστερά. Το πεδίο σύγκλισης είναι το ROC_x: $|z| > 0$.

(β') Έχουμε

$$y[n] * x[n] = \delta[n] \leftrightarrow Y(z)X(z) = 1 \rightarrow Y(z) = \frac{1}{X(z)}$$

και άρα τα μηδενικά του $X(z)$ είναι πόλοι του $Y(z)$ και οι πόλοι του $X(z)$ γίνονται μηδενικά του $Y(z)$. Άρα το διάγραμμα πόλων μηδενικών δίνεται στο Σχήμα 5 δεξιά, και το πεδίο σύγκλισης είναι το $|z| > \frac{1}{2}$, αφού γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι είναι δεξιόπλευρο.



Σχήμα 5: *Διαγράμματα Πόλων Μηδενικών Άσκησης 7.*