ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026-27
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1. Δίνεται η ακολουθία

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{1}$$

και ορίζεται επίσης

$$g[n] = x[n] - x[n-1] \tag{2}$$

(α΄) Να βρεθούν το $g[n]$ και ο μετασχηματισμός Z του.

(β΄) Αν

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k] \tag{3}$$

να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του $x[n]$ ως συνάρτηση του $Y(z)$.

Λύση:

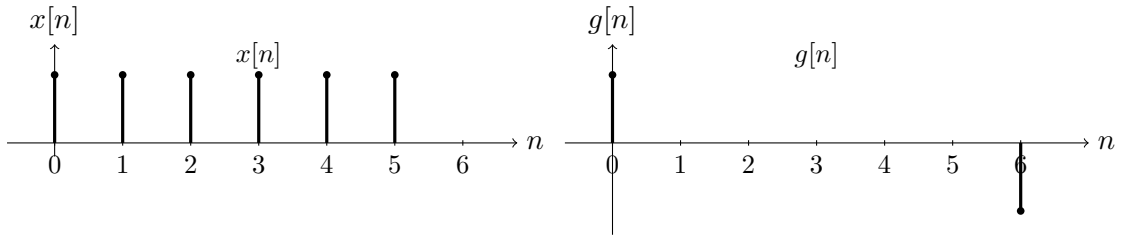
(α΄) Η δοσμένη ακολουθία γράφεται ισοδύναμα ως

$$x[n] = u[n] - u[n-6] \tag{4}$$

Άρα

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] - x[n-1] && (5)\\ &= \big(u[n] - u[n-6]\big) - \big(u[n-1] - u[n-7]\big) && (6)\\ &= \big(u[n] - u[n-1]\big) - \big(u[n-6] - u[n-7]\big) && (7)\\ &= \delta[n] - \delta[n-6] && (8) \end{aligned}$$

Επομένως το σήμα έχει ένα θετικό δείγμα στο $n = 0$ και ένα αρνητικό στο $n = 6$.



Σχήμα 1: Το ορθογώνιο σήμα $x[n]$ και η διαφορά πρώτης τάξης $g[n]$.

Ο μετασχηματισμός Z προκύπτει άμεσα από το γνωστό ζεύγος $\delta[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}$:

$$G(z) = 1 - z^{-6} = \frac{z^6 - 1}{z^6} \tag{9}$$

Επειδή το $g[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και δεξιόπλευρο, η περιοχή σύγκλισης είναι ROC: $z \neq 0$.

(β΄) Από τον ορισμό

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k] \tag{10}$$

και από τον ορισμό της συνέλιξης του $y[n]$ με το $u[n]$ έχουμε

$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]u[n-k] \tag{11}$$

Οπότε βλέπουμε ότι

$$x[n] = y[n] * u[n] \tag{12}$$

Πράγματι,

$$(y * u)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k] \tag{13}$$

Άρα, στο πεδίο-z,

$$X(z) = Y(z)U(z) \tag{14}$$

Για τη βηματική συνάρτηση ισχύει

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1 \tag{15}$$

Επομένως

$$X(z) = \frac{Y(z)}{1-z^{-1}} \tag{16}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι, κατ' αρχήν, η τομή της περιοχής σύγκλισης του $Y(z)$ με το $|z| > 1$, με την τυπική επιφύλαξη για τυχόν απαλείψεις πόλων–μηδενικών.

Άσκηση 2. Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+3z^{-1})} \tag{17}$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση για κάθε δυνατή περιοχή σύγκλισης (ROC), να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων–μηδενικών και να σχολιαστούν η ευστάθεια και η αιτιότητα.

Λύση:

Πόλοι και μηδενικά. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με z^3 έχουμε

$$H(z) = \frac{z^3+z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3)} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3)} \tag{18}$$

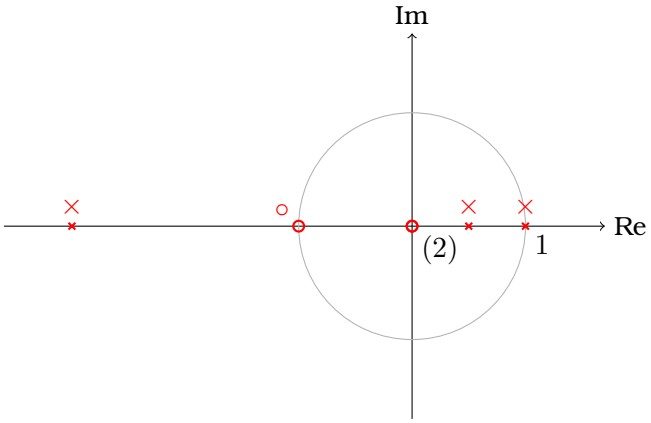
Τα μηδενικά προκύπτουν από τον αριθμητή:

$$z^2(z+1) = 0 \iff z = -1 \text{ ή } z = 0 \text{ (διπλό)} \tag{19}$$

Οι πόλοι προκύπτουν από τους παράγοντες του παρονομαστή:

$$z = 1, \qquad z = \frac{1}{2}, \qquad z = -3. \tag{20}$$

Άρα το διάγραμμα πόλων–μηδενικών είναι το ακόλουθο.



Σχήμα 2: Διάγραμμα πόλων–μηδενικών για το $H(z)$.

Ανάπτυξη σε απλά κλάσματα. Γράφουμε

$$H(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{1 + 3z^{-1}}. \tag{21}$$

Από τις σχέσεις

$$A = H(z)(1 - z^{-1})\Big|_{z^{-1}=1} \tag{22}$$

$$B = H(z)(1 - (1/2)z^{-1})\Big|_{z^{-1}=2} \tag{23}$$

$$C = H(z)(1 + 3z^{-1})\Big|_{z^{-1}=-1/3} \tag{24}$$

βρίσκουμε

$$A = 1, \qquad B = -\frac{3}{7}, \qquad C = \frac{3}{7} \tag{25}$$

Άρα

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{3/7}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3/7}{1 + 3z^{-1}} \tag{26}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τα βασικά ζεύγη:

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \overset{|z|>|a|}{\longleftrightarrow} a^n u[n] \tag{27}$$

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \overset{|z|<|a|}{\longleftrightarrow} -a^n u[-n-1] \tag{28}$$

Οι τρεις ακτίνες των πόλων είναι $1/2, 1, 3$, άρα υπάρχουν τέσσερις δυνατές περιοχές σύγκλισης.

- **Περίπτωση 1:** $|z| > 3$. Όλοι οι όροι είναι δεξιόπλευροι, άρα

$$h_1[n] = u[n] - \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7}(-3)^n u[n] \tag{29}$$

  Το σύστημα είναι *αιτιατό*, αλλά όχι ευσταθές, επειδή ο όρος $(-3)^n u[n]$ δεν είναι απολύτως αθροίσιμος.

- **Περίπτωση 2:** $1 < |z| < 3$. Οι δύο πρώτοι όροι είναι δεξιόπλευροι και ο τρίτος αριστερόπλευρος:

$$h_2[n] = u[n] - \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1] \tag{30}$$

  Το σύστημα είναι *δύο όψεων* (ούτε αιτιατό ούτε ανταιτιατό) και όχι ευσταθές.

- **Περίπτωση 3:** $\frac{1}{2} < |z| < 1$**.** Ο πρώτος και ο τρίτος όρος είναι αριστερόπλευροι, ενώ ο δεύτερος δεξιόπλευρος:

$$h_3[n] = -u[-n-1] - \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1] \tag{31}$$

  Και εδώ έχουμε ακολουθία δύο όψεων. Το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

- **Περίπτωση 4:** $|z| < \frac{1}{2}$**.** Όλοι οι όροι είναι αριστερόπλευροι:

$$h_4[n] = -u[-n-1] + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1] \tag{32}$$

  Το σύστημα είναι *ανταιτιατό* και όχι ευσταθές.

Συνοψίζοντας:

- **Αιτιότητα:** Το σύστημα είναι αιτιατό μόνο για την περιοχή σύγκλισης $|z| > 3$.
- **Ανταιτιότητα:** Το σύστημα είναι ανταιτιατό μόνο για την περιοχή σύγκλισης $|z| < 1/2$.
- **Ευστάθεια:** Για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές, η ΡΟΣ πρέπει να περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο. Εδώ όμως υπάρχει πόλος στο $z = 1$, δηλαδή πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, άρα

$$\text{κανένα ROC δεν μπορεί να περιέχει ολόκληρο τον μοναδιαίο κύκλο.} \tag{33}$$

  Συνεπώς το σύστημα **δεν είναι ευσταθές για καμία υλοποίηση**.

Άσκηση 3. Έξι διαφορετικά *αιτιατά* ($|z| > max_k|z_k|$) ΓΧΑ συστήματα έχουν τα παρακάτω διαγράμματα πόλων–μηδενικών του Σχήματος 3. Ποια από αυτά τα συστήματα:

(α΄) είναι FIR;

(β΄) είναι IIR;

(γ΄) είναι ελάχιστης φάσης (minimum phase);

(δ΄) είναι συστήματα γενικευμένης γραμμικής φάσης;

(ε΄) έχουν σταθερή απόκριση πλάτους;

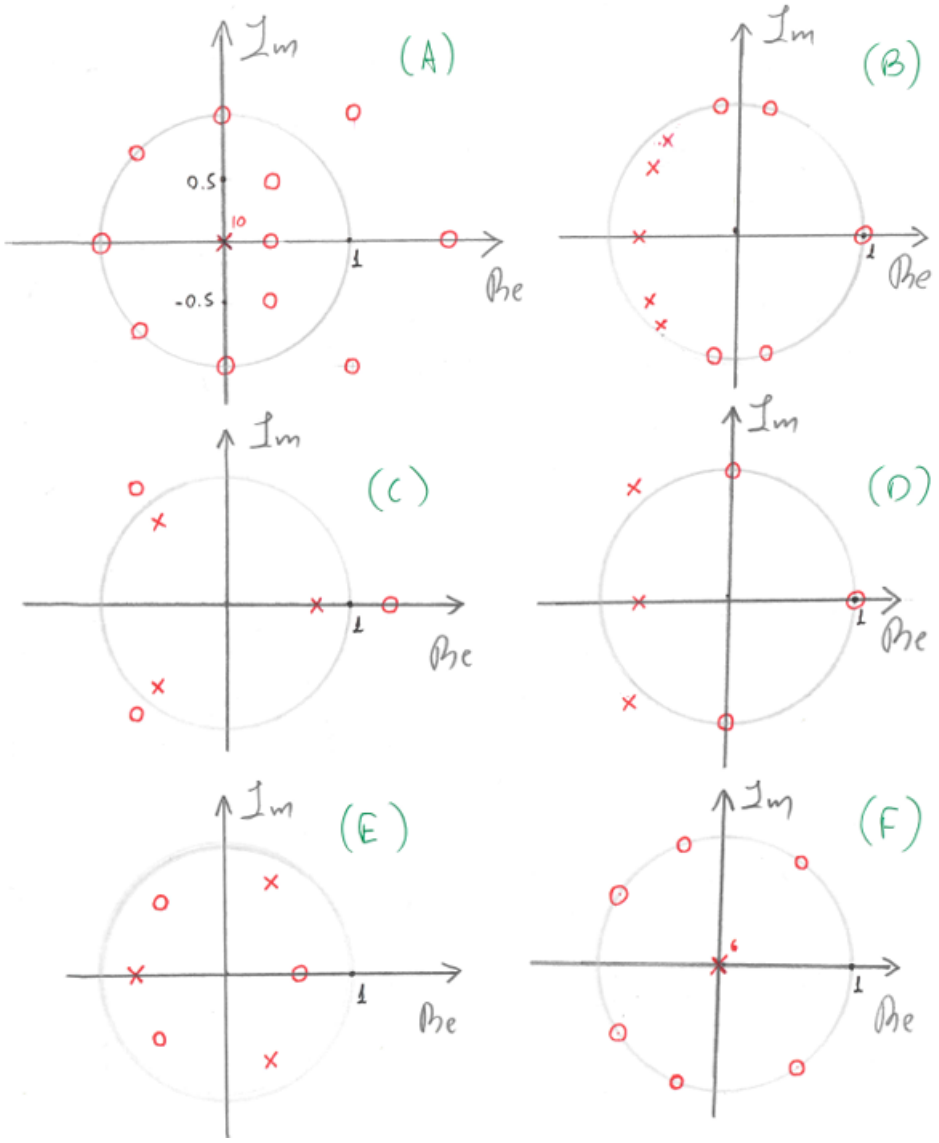
(ϛ΄) έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα;

(ζ) έχουν το μικρότερο σε διάρκεια $h[n]$;

(η΄) έχουν φασματική απόκριση με χαμηλοπερατή συμπεριφορά;

(θ΄) έχουν ελάχιστη ομαδική καθυστέρηση (group delay);

Λύση:



Σχήμα 3: Διαγράμματα πόλων–μηδενικών.

(α΄) Τα αιτιατά FIR συστήματα έχουν μόνο πόλους στο μηδέν (λόγω καθυστερήσεων). Αυτό συμβαίνει στα (A) και (F).

(β΄) Τα αιτιατά IIR συστήματα έχουν πόλους σε θέσεις διαφορετικές του μηδενός. Αυτό συμβαίνει στα (B), (C), (D), (E).

(γ΄) Ελάχιστης φάσης είναι τα ευσταθή αιτιατά συστήματα με όλα τα μηδενικά αυστηρά μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Από το σχήμα αυτό ισχύει μόνο για το (E).

(δ΄) Γενικευμένη γραμμική φάση εμφανίζεται στα πραγματικά FIR με συμμετρία/αντισυμμετρία στην κρουστική απόκριση, που στο πεδίο-z μεταφράζεται σε συζυγή και αμοιβαία ζεύγη μηδενικών. Αυτό παρατηρείται στα (A) και (F).

(ε΄) Το (C) είναι τυπικό ολοπερατό (all-pass) σύστημα: τα μηδενικά του είναι τα αμοιβαία–συζυγή των πόλων. Άρα έχει σταθερή απόκριση πλάτους.

(ς΄) Ένα σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο αν και μόνο αν είναι minimum phase. Άρα αυτό ισχύει μόνο για το (Ε).

(ζ) Το μικρότερο σε διάρκεια $h[n]$ (δηλ. το μικρότερο πεπερασμένης διάρκειας $h[n]$) αναμένεται να είναι το FIR με τη μικρότερη τάξη, δηλαδή στο (F), που έχει εμφανώς λιγότερα μηδενικά από το (Α).

(η΄) Χαμηλοπερατή συμπεριφορά υποδεικνύεται όταν υπάρχουν μηδενικά κοντά στο $z = -1$ (δηλαδή καταστολή γύρω από τη συχνότητα $\omega = \pi$). Από τα σχήματα, χαμηλοπερατή συμπεριφορά παρουσιάζουν τα (Α) και (F).

(θ΄) Με τη συνήθη σημασία του όρου, το minimum phase σύστημα είναι και εκείνο με *ελάχιστη ομαδική καθυστέρηση* μεταξύ όλων των συστημάτων με ίδιο μέτρο απόκρισης. Άρα η απάντηση είναι το (Ε).

Άσκηση 4. Δίνεται πραγματικό ΓΧΑ σύστημα γραμμικής φάσης, με καθυστέρηση ομάδας

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H(e^{j\omega}) \tag{34}$$

Το μέτρο της απόκρισης στο $\omega = \pi/2$ είναι 2 και η καθυστέρηση ομάδας στο $\omega = \pi/2$ είναι επίσης 2. Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος είναι

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{35}$$

Λύση: Για ένα πραγματικό σύστημα γραμμικής φάσης, η απόκριση συχνότητας μπορεί τοπικά να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j\omega n_0} \tag{36}$$

όπου $A(\omega)$ είναι πραγματική και n_0 η σταθερή καθυστέρηση ομάδας. Αφού στη συχνότητα ενδιαφέροντος δίνεται

$$\tau\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \tag{37}$$

συμπεραίνουμε ότι η ημιτονοειδής συνιστώσα με $\omega_0 = \pi/2$ υφίσταται καθυστέρηση 2 δειγμάτων. Επιπλέον,

$$\left|H\left(e^{j\pi/2}\right)\right| = 2 \tag{38}$$

άρα το πλάτος της εξόδου θα είναι διπλάσιο από εκείνο της εισόδου. Επειδή η είσοδος είναι ένα συνημίτονο συχνότητας $\omega_0 = \pi/2$, η έξοδος γράφεται

$$y[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right) \tag{39}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi n}{2} - \pi\right) \tag{40}$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{41}$$

Άρα

$$y[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right) = -2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{42}$$

Άσκηση 5. Έστω S_1 ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 0 \tag{43}$$

και κρουστική απόκριση $h_1[n]$.

(α΄) Είναι το S_1 αιτιατό; Εξηγήστε.

(β΄) Έστω $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$. Βρείτε ένα $h_2[n]$ τέτοιο ώστε το $g[n]$ να έχει τουλάχιστον εννιά μη μηδενικά δείγματα, και το $g[n]$ να μπορεί να θεωρηθεί ως η κρουστική απόκριση ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος με αυστηρά γραμμική φάση: $G(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})|e^{-j\omega n_0}$ για έναν ακέραιαο n_0.

(γ΄) Έστω $q[n] = h_1[n] * h_3[n]$. Βρείτε ένα $h_3[n]$ τέτοιο ώστε

$$q[n] = \delta[n], \quad 0 \leq n \leq 19 \tag{44}$$

Λύση:

(α΄) Ναι, είναι αιτιατό. Από την περιοχή σύγκλισης, $|z| > 0$, καταλαβαίνουμε ότι δεν υπάρχει πόλος στο ∞, άρα το σύστημα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης και είναι αιτιατό. Εναλλακτικά, μπορούμε να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα και να έχουμε

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}, \quad |z| > 0 \tag{45}$$

Ξεκάθαρα, αντιστοιχεί σε μια κρουστική απόκριση της μορφής

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] \tag{46}$$

που είναι αιτιατή.

(β΄) Η κρουστική απόκριση $h_1[n]$ είναι ένας αιτιατός τετραγωνικός παλμός διάρκειας 5 δειγμάτων. Αν κάνουμε συνέλιξη της $h_1[n]$ με έναν άλλο αιτιατό τετραγωνικό παλμό διάρκειας N, θα πάρουμε έναν τριγωνικό παλμό με διάρκεια $N + 5 - 1 = N + 4$. Ο τριγωνικός παλμός είναι συμμετρικός γύρω απ΄ την κορυφή του, και άρα έχει γραμμική φάση. Αν θέλουμε να έχει ο τριγωνικός παλμός $g[n]$ τουλάχιστον 9 μη μηδενικά δείγματα, επιλέγουμε $N = 5$, ή αλλιώς $h_2[n] = h_1[n]$.

(γ΄) Αφού το αποτέλεσμα της συνέλιξης θα είναι στο $[0, 19]$, δηλ. το μήκος του $g[n]$ είναι 20 δείγματα, και το μήκος του $h_1[n]$ είναι $N = 5$ (δηλ. $[0, 4]$), το μήκος του $h_3[n]$ θα είναι $L = 16$, δηλ. στο $[0, 15]$, έτσι ώστε το αποτέλεσμα της συνέλιξης να είναι στο $[0, 15 + 5] = [0, 20]$, από την ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης. Αυτό που μας ζητείται μοιάζει αρκετά με το αντίστροφο σύστημα. Αν θεωρήσουμε ότι $h_3[n]$ είναι το αντίστροφο σύστημα του $h_1[n]$ τότε

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-5}} = (1 - z^{-1}) \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-5})^n = (1 - z^{-1})(1 + z^{-5} + z^{-10} + z^{-15} + ...) \tag{47}$$

$$= 1 - z^{-1} + z^{-5} - z^{-6} + z^{-10} - z^{-11} + z^{-15} - ... \tag{48}$$

Αυτή η επιπλοκή για το $h_3[n]$ θα μας δώσει αποτέλεσμα $h_1[n] * h_3[n] = \delta[n]$ για κάθε n. Όμως εμείς θέλουμε $q[n] = \delta[n]$ για $0 \leq n \leq 19$. Άρα απλά μπορούμε να κρατήσουμε το $h_3[n]$ ως το 19ο δείγμα. Άρα τελικά

$$h_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-5] - \delta[n-6] + \delta[n-10] - \delta[n-11] + \delta[n-15] \tag{49}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 6.

Ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n]$ και έξοδο $y[n]$ έχει φάσμα πλάτους και καθυστέρηση ομάδας όπως στο Σχήμα 4. Το σήμα εισόδου φαίνεται επίσης στο Σχήμα 4, στην πρώτη γραφική παράσταση, είναι ένα άθροισμα από τρία συνημίτονα. Συγκεκριμένα στο Σχήμα 4 βλέπετε:

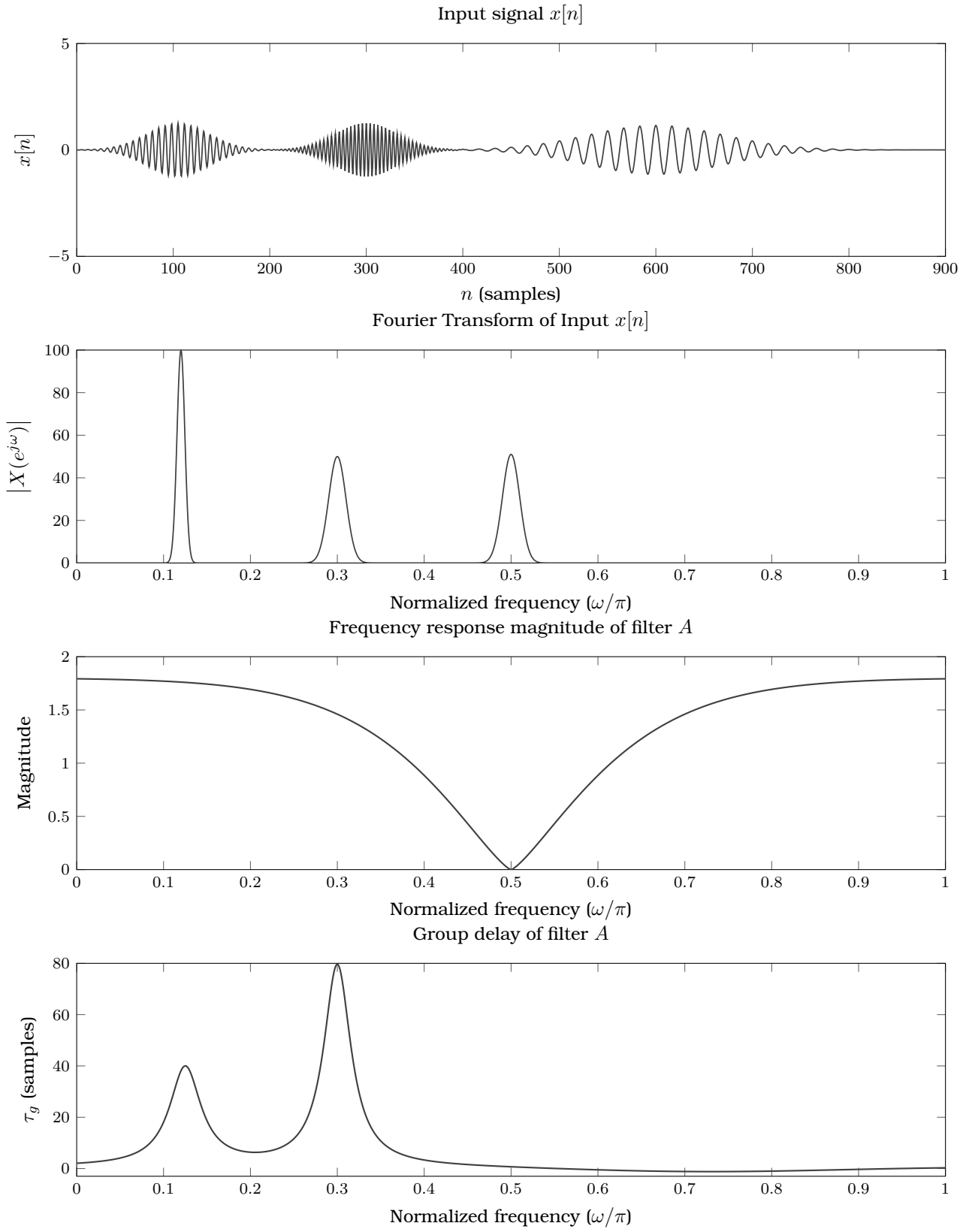
- το σήμα είσόδου, $x[n]$
- το $|X(e^{j\omega})|$, το φάσμα πλάτους του μετασχ. Fourier του $x[n]$
- την απόκριση πλάτους του συστήματος, $H(e^{j\omega})$
- την καθυστέρηση ομάδας του συστήματος, $grd\{H(e^{j\omega})\}$

Στο Σχήμα 5, σας δίνονται τέσσερα πιθανά σήματα εξόδου, $y_i[n], \quad i = 1, 2, 3, 4$. Βρείτε ποιό από αυτά είναι η έξοδος του συστήματος για το δεδομένο $x[n]$ που φαίνεται στην πρώτη γραφική παράσταση στο Σχήμα 4. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.

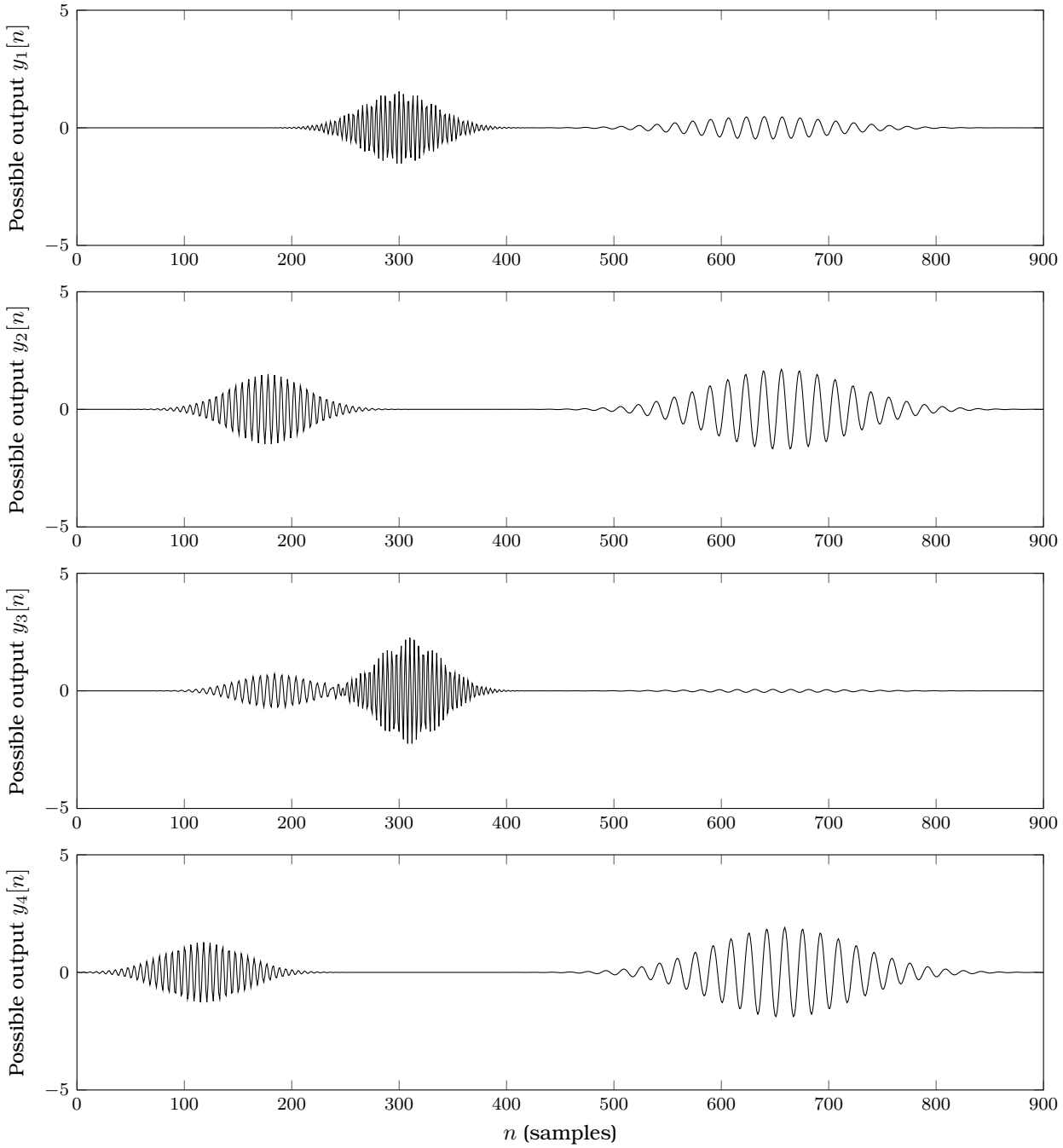
Λύση:
Από το φάσμα πλάτους του φίλτρου, παρατηρούμε ότι το φίλτρο μηδενίζει το πλάτος της συχνότητας 0.5π. Βλέπουμε στο φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου, ότι ένα από τα τρία ημίτονα έχει ακριβώς τη συχνότητα αυτή. Άρα το ένα απ' τα τρία ημίτονα (το πιο υψίσυχνο, το μεσαίο στη γραφική παράσταση του $x[n]$) δε θα περάσει στην έξοδο. Οπότε στην έξοδο θα έχουμε δυο ημίτονα, τα δύο πιο χαμηλόσυχνα, με μεγαλύτερο πλάτος απ' ό,τι είχαν στην είσοδο. Αυτό μας λέει η πληροφορία των πλατών.

Ας εξετάσουμε την πληροφορία που παίρνουμε από τη φάση, μελετώντας το group delay. Βλέπουμε ότι τα δύο ημίτονα που περνούν στην έξοδο, το χαμηλόσυχνο και το μεσαίας συχνότητας, θα καθυστερήσουν κατά 40 και κατά 80 δείγματα, αντίστοιχα. Άρα το πρώτο ημίτονο (το μεσαίας συχνότητας) στη γραφική παράσταση του $x[n]$ θα καθυστερήσει περίπου 80 δείγματα, άρα θα ξεκινήσει στην έξοδο κοντά στο 100ο δείγμα, το δεύτερο ημίτονο σχεδόν εκμηδενίζεται λόγω της ανάλυσης που κάναμε πριν στο φάσμα πλάτους, ενώ το τρίτο ημίτονο (το πιο χαμηλόσυχνο) θα καθυστερήσει περίπου 40 δείγματα, άρα θα ξεκινάει στην έξοδο κοντά στο 500ο δείγμα.

Αυτές τις απαιτήσεις τις ικανοποιεί η έξοδος $y_2[n]$.



Σχήμα 4: *Είσοδος και χαρακτηριστικά συστήματος.*



Σχήμα 5: *Πιθανά σήματα εξόδου.*