ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1. Δίνεται η κρουστική απόκριση

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 2\delta[n-2] - \delta[n-3]. \tag{1}$$

(α΄) Να προσδιορίσετε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$. Σας δίνεται ότι $\sin(3x) = \sin(x)(1 + 2\cos 2x)$.

(β΄) Να βρείτε και να σχεδιάσετε ποιοτικά την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$.

(γ΄) Να βρείτε και να σχεδιάσετε ποιοτικά την απόκριση φάσης $\arg H(e^{j\omega})$.

Λύση:

(α΄) Από τη γραμμικότητα και το ζεύγος $\delta[n-m] \longleftrightarrow e^{-j\omega m}$,

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} - 2e^{-j2\omega} - e^{-j3\omega} \tag{2}$$

Επειδή $h[3-n] = -h[n]$, η κρουστική απόκριση είναι *αντισυμμετρική* ως προς το $n = 3/2$. Παραγοντοποιούμε γύρω από το κέντρο συμμετρίας:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega/2}\left(e^{j3\omega/2} + 2e^{j\omega/2} - 2e^{-j\omega/2} - e^{-j3\omega/2}\right) \tag{3}$$

$$= 2je^{-j3\omega/2}\left[\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] \tag{4}$$

$$= 2je^{-j3\omega/2}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)(3 + 2\cos\omega) \tag{5}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ταυτότητα

$$\sin(3x) = \sin(x)(1 + 2\cos 2x) \tag{6}$$

(β΄) Εφόσον $3 + 2\cos\omega \geq 1 > 0$,

$$|H(e^{j\omega})| = \left|2je^{-j3\omega/2}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)(3 + 2\cos\omega)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|(3 + 2\cos\omega) \tag{7}$$

αφού $|j| = 1$ και $|e^{j\theta}| = 1$, $\forall\theta$.

Στο $(-\pi, \pi]$ η απόκριση πλάτους μηδενίζεται μόνο στο $\omega = 0$. Επιπλέον, $|H(e^{j\pi})| = 2$. Για να προσδιορίσουμε ποιοτικά την κορυφή, θέτουμε $s = \sin(\omega/2)$ για $0 \leq \omega \leq \pi$. Τότε

$$3 + 2\cos(\omega) = 5 - 4\sin^2(\omega/2) \tag{8}$$

λόγω της ταυτότητας

$$\cos(\omega) = 1 - 2\sin^2(\omega/2) \tag{9}$$

Ξαναγράφουμε την απόκριση πλάτους ως

$$|H(s)| = 2s(5 - 4s^2) \tag{10}$$

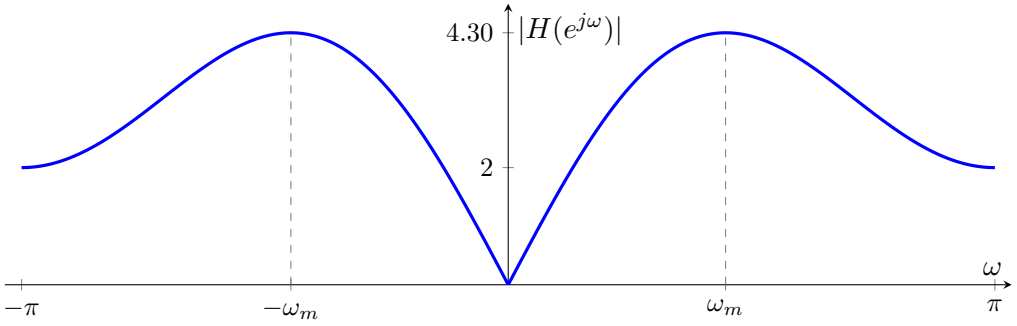
και η παράγωγός της θα είναι

$$\frac{d|H(s)|}{ds} = 10 - 24s^2 \tag{11}$$

Το μέγιστο εμφανίζεται στο $s = \sqrt{5/12}$, δηλαδή

$$\omega_m = 2\arcsin\sqrt{\frac{5}{12}} \simeq 1.403, \qquad |H(e^{j\omega_m})| = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} \simeq 4.303 \tag{12}$$

Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Απόκριση πλάτους του φίλτρου: άρτια συνάρτηση της συχνότητας.*

(γ') Η απόκριση φάσης $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ προκύπτει από την παραγοντοποιημένη απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = 2je^{-j3\omega/2}\sin\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\,(3 + 2\cos\omega) \tag{13}$$

ως

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \sphericalangle 2 + \sphericalangle j + \sphericalangle e^{-j3\omega/2} + \sphericalangle \sin(\omega/2) + \sphericalangle(3 + 2\cos(\omega)) \tag{14}$$

Στο $0 < \omega < \pi$,

- $\sin(\omega/2) > 0$, άρα η φάση του όρου αυτού θα είναι μηδέν.
- Επίσης, $2 > 0$, άρα κι αυτός ο όρος έχει μηδενική φάση.
- Ο όρος j γράφεται ως $e^{j\pi/2}$, άρα έχει φάση $\pi/2$.
- Ο όρος $e^{-j3\omega/2}$ έχει φάση $-3\omega/2$.
- Τέλος, ο όρος $(3 + 2\cos(\omega)) > 0$, άρα έχει φάση μηδέν.

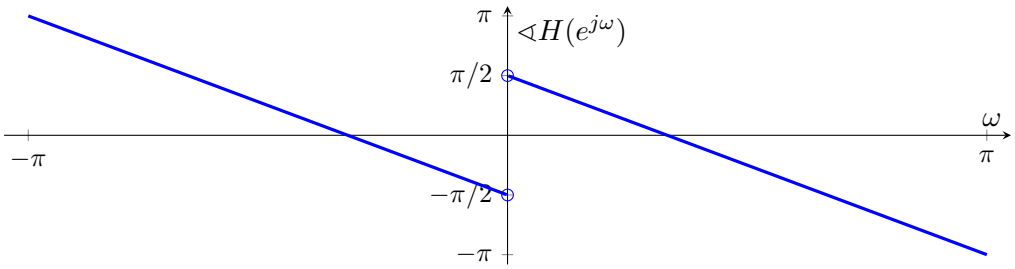
Στο $-\pi < \omega < 0$,

- $\sin(\omega/2) < 0$, άρα η φάση του όρου αυτού θα είναι $-\pi$.
- Επίσης, $2 > 0$, άρα κι αυτός ο όρος έχει μηδενική φάση.
- Ο όρος j γράφεται ως $e^{j\pi/2}$, άρα έχει φάση $\pi/2$.
- Ο όρος $e^{-j3\omega/2}$ έχει φάση $-3\omega/2$.
- Τέλος, ο όρος $(3 + 2\cos(\omega)) > 0$, άρα έχει φάση μηδέν.

Οπότε, συνολικά

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{3\omega}{2} - \frac{\pi}{2}, & -\pi < \omega < 0, \\ -\frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{2}, & 0 < \omega < \pi \end{cases} \tag{15}$$

Στο $\omega = 0$ η φάση *δεν ορίζεται* ($H(e^{j\omega}) = 0$). Οι γραμμικοί κλάδοι παρακάτω είναι μια έγκυρη *ξετυλιγμένη* (unwrapped) αναπαράσταση της φάσης (οι τιμές επιτρέπεται να διαφέρουν κατά 2π).



Σχήμα 2: *Γραμμική φάση.*

Άσκηση 2. Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] - x[n-10] \tag{16}$$

(α΄) Να βρείτε και να σχεδιάσετε την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης.

(β΄) Να υπολογίσετε την έξοδο για καθεμιά από τις εισόδους

(i) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{10}\right)$

(ii) $x[n] = 10 + 5\cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$

Λύση:

(α΄) Για το ΓΧΑ σύστημα έχουμε $h[n] = \delta[n] - \delta[n-10]$. Επομένως

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j10\omega} \tag{17}$$
$$= e^{-j5\omega}(e^{j5\omega} - e^{-j5\omega}) \tag{18}$$
$$= 2j\, e^{-j5\omega}\sin(5\omega) \tag{19}$$

Άρα

$$|H(e^{j\omega})| = \left|2j\, e^{-j5\omega}\sin(5\omega)\right| = 2|\sin(5\omega)|, \tag{20}$$

γιατί $|j| = 1$ και $|e^{j\theta}| = 1$, $\forall\theta$. Επίσης, στο $0 < \omega < \pi$,

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \sphericalangle 2 + \sphericalangle j + \sphericalangle e^{-j5\omega} + \sphericalangle \sin(5\omega) \tag{21}$$
$$= \frac{\pi}{2} - 5\omega + \begin{cases} 0, & \sin(5\omega) > 0, \\ \pi, & \sin(5\omega) < 0 \end{cases} \tag{22}$$
$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 5\omega, & \sin(5\omega) > 0, \\ \frac{3\pi}{2} - 5\omega, & \sin(5\omega) < 0 \end{cases} \tag{23}$$

Στο $-\pi < \omega < 0$,

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 5\omega, & \sin(5\omega) > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - 5\omega, & \sin(5\omega) < 0 \end{cases} \tag{24}$$

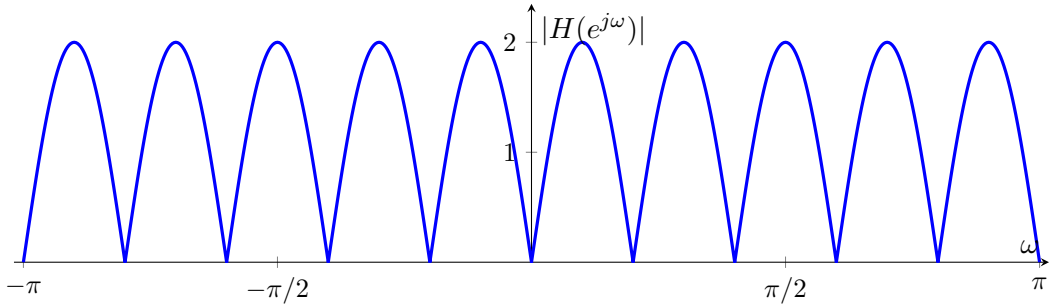
Οι *μηδενισμοί* βρίσκονται στις συχνότητες

$$\omega = k\pi/5, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Εκεί η φάση δεν ορίζεται. Αντίθετα, τα μέγιστα της απόκρισης πλάτους ισούνται με 2 και εμφανίζονται στις συχνότητες

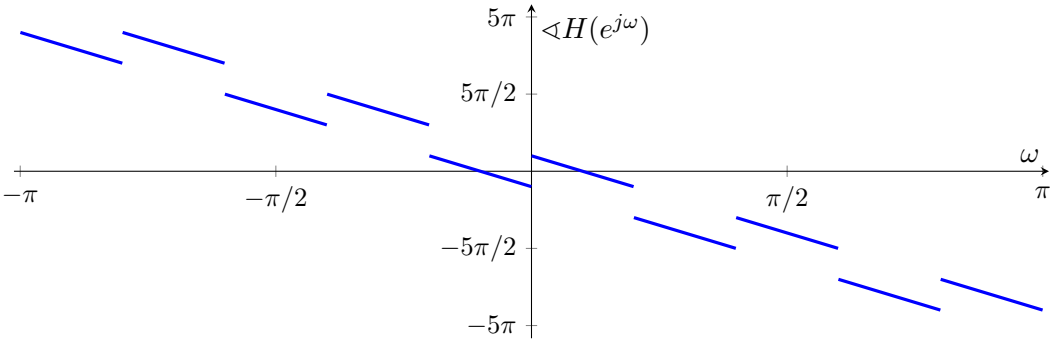
$$\omega = (2k+1)\pi/10$$

Δείτε το Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Περιοδική απόκριση πλάτους τύπου comb: μηδενισμοί ανά* $\pi/5$.

Για τη φάση, σε κάθε διάστημα μεταξύ διαδοχικών μηδενισμών, η κλίση είναι -5, με άλμα κατά π στα μηδενικά του πλάτους. Στο σχήμα δείχνονται οι γραμμικοί κλάδοι της παραπάνω έκφρασης, *χωρίς* αναγωγή στο $(-\pi, \pi]$.



Σχήμα 4: *Μία ξετυλιγμένη αναπαράσταση της φάσης.*

(β′) Για είσοδο $x[n] = \sum_k A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$\sum_k A_k |H(e^{j\omega_k})| \cos(\omega_k n + \theta_k + \sphericalangle H(e^{j\omega_k}))$$

(i) Για το σήμα εισόδου

$$x[n] = \cos\Big(\frac{\pi n}{10}\Big) + 3\sin\Big(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{10}\Big) \tag{25}$$

στη συχνότητα $\omega_1 = \pi/10$,

$$H(e^{j\pi/10}) = 1 - e^{-j\pi} = 2 \tag{26}$$

θετικός αριθμός, με μηδενική φάση, $\sphericalangle H(e^{j\pi/10}) = 0$. Άρα η πρώτη συνιστώσα εξέρχεται ως $2\cos(\pi n/10)$. Στη συχνότητα $\omega_2 = \pi/3$,

$$H(e^{j\pi/3}) = 1 - e^{-j10\pi/3} = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, e^{-j\pi/6} \tag{27}$$

Επομένως το πλάτος πολλαπλασιάζεται επί $\sqrt{3}$ και η φάση μειώνεται κατά $\pi/6$. Δηλ. συνολικά

$$y[n] = 2\cos\Big(\frac{\pi n}{10}\Big) + 3\sqrt{3}\sin\Big(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{15}\Big) \tag{28}$$

(ii) Για το σήμα εισόδου

$$x[n] = 10 + 5\cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \tag{29}$$

η σταθερή συνιστώσα αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = 0$, όπου $H(e^{j0}) = 0$. Για τη δεύτερη συνιστώσα $\omega_0 = 2\pi/5$ έχουμε

$$H(e^{j2\pi/5}) = 1 - e^{-j4\pi} = 0 \tag{30}$$

Άρα και οι δύο συνιστώσες καταστέλλονται πλήρως, συνεπώς

$$y[n] = 0, \quad \text{για κάθε } n \tag{31}$$