ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τρίτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Χρησιμοποιώντας *μόνο* γνωστά ζεύγη και ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} \longleftrightarrow \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos\omega} \tag{1}$$

Λύση:
Βήμα 1: Γνωστό ζεύγος. Για $|a| < 1$ ισχύει

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \tag{2}$$

Με $a = 1/4$ θέτουμε $g[n] = (1/4)^n u[n]$, οπότε

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \tag{3}$$

Βήμα 2: Αναστροφή χρόνου. Από την ιδιότητα $g[-n] \longleftrightarrow G(e^{-j\omega})$ παίρνουμε

$$g[-n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\omega}} \tag{4}$$

Βήμα 3: Διόρθωση της διπλής καταμέτρησης στο μηδέν. Το άθροισμα $g[n] + g[-n]$ έχει τιμή 2 στο $n = 0$, ενώ το ζητούμενο σήμα έχει τιμή 1. Επομένως

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} = g[n] + g[-n] - \delta[n]. \tag{5}$$

Με την ιδιότητα της γραμμικότητας και το ζεύγος $\delta[n] \longleftrightarrow 1$,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\omega}} - 1 \tag{6}$$

$$= \frac{1 - (\frac{1}{4})^2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{j\omega})} \tag{7}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\cos\omega} \tag{8}$$

$$= \frac{15/16}{17/16 - \frac{1}{2}\cos\omega} \tag{9}$$

Άσκηση 2.
Σε ένα ΓΧΑ σύστημα δίνονται η είσοδος και η κρουστική απόκριση

$$x[n] = -3^n u[-n-1], \qquad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \tag{10}$$

Να βρεθεί η έξοδος $y[n]$, χρησιμοποιώντας *μόνο* ιδιότητες και γνωστά ζεύγη του μετασχηματισμού Fourier (χωρίς άμεση συνέλιξη).

Λύση:

Βήμα 1: Μετασχηματισμοί. Από τα γνωστά ζεύγη

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a|<1, \qquad -a^n u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a|>1 \tag{11}$$

προκύπτει

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-3e^{-j\omega}}, \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{12}$$

Βήμα 2: Πολλαπλασιασμός στο πεδίο της συχνότητας. Επειδή το σύστημα είναι ΓΧΑ,

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-3e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} \tag{13}$$

Ο αριθμητής είναι σταθερό πολυώνυμο, ο παρονομαστής δευτεροβάθμιο, άρα μπορούμε να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα. Για $q = e^{-j\omega}$ κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$Z(q) = \frac{1}{(1-3q)(1-\frac{1}{2}q)} = \frac{A}{1-3q} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}q} \tag{14}$$

Έχουμε

$$A = Z(q)(1-3q)\Big|_{q=1/3} = \frac{6}{5} \tag{15}$$

$$B = Z(q)(1-q/2)\Big|_{q=2} = -\frac{1}{5} \tag{16}$$

οπότε $A = 6/5$, $B = -1/5$. Άρα

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{6/5}{1-3e^{-j\omega}} - \frac{1/5}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{17}$$

Βήμα 3: Αντίστροφος μετασχηματισμός από τον πίνακα ζευγών. Εφαρμόζοντας το αριστερόπλευρο και το δεξιόπλευρο ζεύγος αντίστοιχα (από το Βήμα 1),

$$y[n] = -\frac{6}{5}\,3^n u[-n-1] - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{18}$$

Άσκηση 3.

Η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$x[n] = 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{2}\right), \tag{19}$$

ενώ η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)}{\pi(n-2)}, \qquad h[2] = \frac{1}{2} \quad \text{(με συνέχεια)}. \tag{20}$$

Να βρεθεί η έξοδος $y[n]$.

Λύση:
Βήμα 1: Αναγνώριση ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου. Χρησιμοποιούμε το ζεύγος

$$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \longleftrightarrow H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{21}$$

Εδώ $\omega_c = \pi/2$ και $h[n] = h_0[n-2]$. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j2\omega}, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{22}$$

Οι τιμές στις συχνότητες αποκοπής δεν επηρεάζουν το ζητούμενο.

Βήμα 2: Ιδιοσυνάρτηση των ΓΧΑ συστημάτων. Για είσοδο $e^{j\omega_0 n}$ η έξοδος είναι $H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$. Επομένως τα ημίτονα και συνημίτονα διατηρούν τη συχνότητά τους και μεταβάλλονται κατά το πλάτος $|H(e^{j\omega_0})|$ και τη φάση $\sphericalangle H(e^{j\omega_0})$, και από τη θεωρία ξέρουμε ότι

$$x[n] = \sum_k A_k \cos(\omega_k n + \phi_k) \longrightarrow y[n] = \sum_k A_k |H(e^{j\omega_k})| \cos(\omega_k n + \phi_k + \sphericalangle H(e^{j\omega_k})) \tag{23}$$

Και οι δύο συχνότητες $\omega_1 = \pi/6$ και $\omega_2 = \pi/4$ βρίσκονται στη ζώνη διέλευσης. Άρα το πλάτος τους μένει αναλλοίωτο, ενώ οι μεταβολές φάσης είναι $-2\omega_1 = -\pi/3$ και $-2\omega_2 = -\pi/2$ αντίστοιχα. Έτσι,

$$y[n] = 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{24}$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} - \frac{5\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \tag{25}$$

Άσκηση 4.
Ένας μετατοπιστής φάσης κατά 90° περιγράφεται από το ΓΧΑ φίλτρο

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ +j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \tag{26}$$

Να δείξετε ότι η κρουστική του απόκριση ισούται με

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}, & n \text{ περιττός}, \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \tag{27}$$

Λύση:
Βήμα 1: Αντίστροφος DTFT. Από τον ορισμό

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{j\omega n}\, d\omega - \frac{j}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{j\omega n}\, d\omega \tag{28}$$

Ολοκληρώνοντας,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi n} \left[(1 - e^{-j\pi n}) - (e^{j\pi n} - 1)\right] \tag{29}$$

$$= \frac{2 - e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}}{2\pi n} = \frac{1 - \cos(\pi n)}{\pi n} \tag{30}$$

Επειδή n είναι ακέραιος, $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Άρα

$$h[n] = \begin{cases} 2/(\pi n), & n \text{ περιττός}, \\ 0, & n \neq 0 \text{ άρτιος} \end{cases} \tag{31}$$

Βήμα 2: Ξεχωριστός έλεγχος για $n = 0$. Στο μηδέν η προηγούμενη έκφραση έχει τη μορφή $0/0$. Απευθείας:

$$h[0] = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} j\, d\omega + \int_{0}^{\pi} (-j)\, d\omega\right) = 0 \tag{32}$$

Συνεπώς,

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}, & n \text{ περιττός}, \\ 0, & n \text{ άρτιος (συμπεριλαμβανομένου του } 0). \end{cases} \tag{33}$$