ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.
Δίνεται το σήμα

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \big(u[n+3] - u[n-10]\big) \tag{1}$$

Να προσδιορίσετε τα όρια A, B (ως συναρτήσεις του n), ώστε

$$h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A \le k \le B, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{2}$$

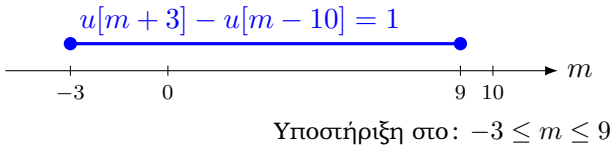
Λύση:
Ουσιαστικά μας ζητείται να βρούμε πότε το $h[n-k]$ είναι μη μηδενικό. Έχουμε

$$u[n+3] = \begin{cases} 1, & n \ge 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{3}$$

και

$$-u[n-10] = \begin{cases} -1, & n \ge 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{4}$$

Εμείς θέλουμε το σήμα $u[n+3] - u[n-10]$. Δείτε το Σχήμα 1.



Υποστήριξη στο: $-3 \le m \le 9$

Σχήμα 1: *Το διάστημα υποστήριξης του παραθύρου στο $h[m]$. Στο $h[n-k]$ θέτουμε $m = n-k$.*

Η διαφορά των βηματικών συναρτήσεων επιλέγει τις ακέραιες χρονικές θέσεις

$$u[n+3] - u[n-10] = \begin{cases} 1, & -3 \le n \le 9, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{5}$$

Αντικαθιστούμε το n με $n-k$. Το $h[n-k]$ είναι μη μηδενικό ακριβώς όταν

$$-3 \le n - k \le 9 \tag{6}$$

Λύνοντας ως προς k (προσοχή στην αλλαγή φοράς όταν πολλαπλασιάζουμε με -1):

$$-3 - n \le -k \le 9 - n \iff n - 9 \le k \le n + 3 \tag{7}$$

Άρα $A = n - 9, \quad B = n + 3$. Τα δύο άκρα *συμπεριλαμβάνονται*.

Άσκηση 2.
Τρία αιτιατά ΓΧΑ συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1[n], h_2[n], h_2[n]$ συνδέονται σε σειρά. Δίνονται

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2], \tag{8}$$

και η συνολική κρουστική απόκριση

$$\begin{aligned} h[n] &= h_1[n] * h_2[n] * h_2[n] && (9)\\ &= \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 4\delta[n-5] + \delta[n-6] && (10)\end{aligned}$$

Να προσδιορίσετε το $h_1[n]$.

Λύση:
Επειδή $h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$, η σύνδεση δύο τέτοιων συστημάτων δίνει

$$g[n] = h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \tag{11}$$

Συνεπώς

$$h[n] = h_1[n] * g[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2] \tag{12}$$

Τώρα μπορούμε απλά να βάλουμε τις τιμές που μας δίνονται για το $h[n]$.

$$\begin{aligned} 1 &= h_1[0] + 2h_1[0-1] + h_1[0-2] \\ &= h_1[0] + 2\cdot 0 + 0 && (13)\\ h_1[0] &= 1 && (14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= h_1[1] + 2h_1[0] + h_1[-1] \\ h_1[1] &= 3 && (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &= h_1[2] + 2h_1[1] + h_1[0] \\ h_1[2] &= 3 && (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 &= h_1[3] + 2h_1[2] + h_1[1] \\ h_1[3] &= 2 && (17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 &= h_1[4] + 2h_1[3] + h_1[2] \\ h_1[4] &= 1 && (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= h_1[5] + 2h_1[4] + h_1[3] \\ h_1[5] &= 0 && (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= h_1[6] + 2h_1[5] + h_1[4] \\ h_1[6] &= 0 && (20)\end{aligned}$$

και όλες οι υπόλοιπες τιμές του $h_1[n]$ θα είναι μηδέν. Άρα πράγματι

$$\begin{aligned} h[n] &= h_1[n] * h_2[n] * h_2[n] && (21)\\ &= \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 4\delta[n-5] + \delta[n-6] && (22)\end{aligned}$$

Άσκηση 3.
Να εξετάσετε αν καθένα από τα παρακάτω συστήματα είναι (α) γραμμικό, (β) ευσταθές κατά BIBO, (γ) αιτιατό, (δ) χρονικά αμετάβλητο, (ε) δυναμικό (έχει μνήμη):

(i) $y[n] = x[4n+1]$

(ii) $y[n] = (n+1)x[n]$

Λύση:

(i) $y[n] = x[4n+1]$

- Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ έχουμε έξοδο

$$y'[n] = T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ax_1[4n+1] + bx_2[4n+1] = ay_1[n] + by_2[n] \tag{23}$$

  Άρα είναι γραμμικό.
- Είναι ευσταθές, αφού $|x[n]| \leq M$ για κάθε n συνεπάγεται $|y[n]| = |x[4n+1]| \leq M$.
- Δεν είναι αιτιατό: π.χ. για $n = 0$ απαιτείται το μελλοντικό $x[1]$.
- Δεν είναι χρονικά αμετάβλητο: για καθυστέρηση εισόδου κατά n_0,

$$y'[n] = T\{x[n-n_0]\} = x[4n+1-n_0] \tag{24}$$

  ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά n_0,

$$y[n-n_0] = x[4(n-n_0)+1] = x[4n-4n_0+1] \neq y'[n] \tag{25}$$

- Έχει μνήμη, αφού η έξοδος δεν εξαρτάται αποκλειστικά από το $x[n]$.

(ii) $y[n] = (n+1)x[n]$

- Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ έχουμε έξοδο

$$y'[n] = T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a(n+1)x_1[n] + b(n+1)x_2[n] = ay_1[n] + by_2[n] \tag{26}$$

  Άρα είναι γραμμικό.
- Ασταθές: η φραγμένη είσοδος $x[n] = 1$ δίνει τη μη φραγμένη έξοδο $y[n] = n+1$.
- Δεν είναι χρονικά αμετάβλητο: για μετατόπιση εισόδου $n_0 \neq 0$,

$$y'[n] = T\{x[n-n_0]\}[n] = (n+1)x[n-n_0] \tag{27}$$

  ενώ για μετατόπιση εξόδου n_0, έχουμε

$$y[n-n_0] = (n-n_0+1)x[n-n_0] \tag{28}$$

- Είναι αιτιατό και χωρίς μνήμη, αφού χρησιμοποιεί μόνο το τρέχον δείγμα $x[n]$.

Άσκηση 4.
Να υπολογίσετε τη συνέλιξη των σημάτων

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2], \qquad y[n] = u[n+2]. \tag{29}$$

Λύση:
Θέτουμε $w[n] = (x * y)[n]$. Από τον ορισμό,

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u[k-2]u[n-k+2]. \tag{30}$$

Η πρώτη βηματική του γινομένου είναι μη μηδενική όταν $k \geq 2$, ενώ η δεύτερη όταν $k \leq n+2$, δηλ.

$$u[k-2] = 1,\ k \geq 2 \tag{31}$$

και

$$u[n-k+2] = 1,\ n-k+2 \geq 0 \Longrightarrow k \leq n+2 \tag{32}$$

Άρα

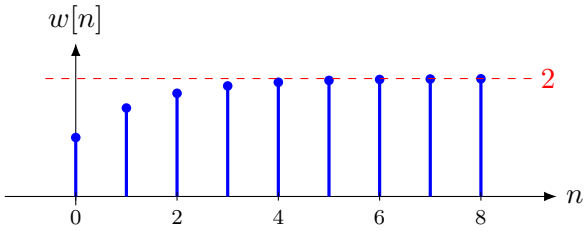
$$u[k-2]u[n-k+2] = 1,\ \ 2 \leq k \leq n+2 \tag{33}$$

Τότε

$$w[n] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{r} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\big(1-(1/2)^{n+1}\big) \tag{34}$$

με τη δεύτερη σχέση να προκύπτει θέτοντας $r = k-2$ και αλλάζοντας τα άκρα του αθροίσματος. Συνεπώς

$$(x*y)[n] = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u[n] \tag{35}$$



Σχήμα 2: *Δείγματα της συνέλιξης* $w[n]$.

Άσκηση 5.
Δίνεται η εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = -2x[n], \qquad y[-1] = 2, \tag{36}$$

με είσοδο

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]. \tag{37}$$

Να προσδιορίσετε:

i. την απόκριση μηδενικής εισόδου,

ii. την κρουστική απόκριση,

iii. την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

Λύση:

i. Θέτουμε $x[n] = 0$, οπότε $y_{zi}[n] - \frac{1}{4}y_{zi}[n-1] = 0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\gamma - \frac{1}{4} \tag{38}$$

και έχει ρίζα $\gamma = \frac{1}{4}$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\left(\frac{1}{4}\right)^n,\ n \geq 0 \tag{39}$$

Ξεκινώντας από $y[-1] = 2$,

$$y_{zi}[-1] = 2 = c\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 2 \Longleftrightarrow c = \frac{1}{2} \tag{40}$$

κι άρα

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0 \tag{41}$$

ii. Για τον ορισμό της $h[n]$ θεωρούμε *μηδενικές αρχικές συνθήκες* και είσοδο $x[n] = \delta[n]$, η οποία γεννά την ψευδο-αρχική συνθήκη $h[0] = 1$, όπως θα δούμε. Θεωρούμε το απλό σύστημα

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] \tag{42}$$

Η μορφή της κρουστικής απόκρισης του θα είναι

$$h_i[n] = d\left(\frac{1}{4}\right)^n,\ n \geq 0 \tag{43}$$

Από την ψευδο-αρχική συνθήκη, παίρνουμε

$$h_i[0] - \frac{1}{4}h_i[-1] = \delta[0] = 1 \Longleftrightarrow h_i[0] = 1 \tag{44}$$

Εξισώνοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε $d = 1$, κι άρα

$$h_i[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n,\ n \geq 0 \tag{45}$$

Έτσι η κρουστική απόκριση $h[n]$ του δοσμένου συστήματος θα είναι

$$h[n] = -2h_i[n] = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \tag{46}$$

iii. Με μηδενικές αρχικές συνθήκες έχουμε $y_{zs}[n] = h[n] * x[n]$:

$$y_{zs}[n] = -2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}u[n-k]\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}u[k-1] \tag{47}$$

$$= -2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}, \qquad n \geq 1 \tag{48}$$

αφού

$$u[n-k]u[k-1] = 1,\ 1 \leq k \leq n \tag{49}$$

Συνεχίζοντας,

$$y_{zs}[n] = -6\left(\frac{1}{4}\right)^n\sum_{k=1}^{n}4^k\left(\frac{1}{3}\right)^k \tag{50}$$

$$= -6\left(\frac{1}{4}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{3}\right)^k \tag{51}$$

$$= -6\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{3}} \tag{52}$$

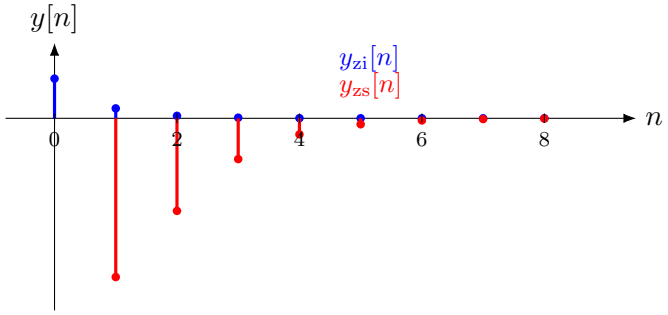
$$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(8 - 8\left(\frac{4}{3}\right)^n\right) \tag{53}$$

$$= 24\left(\frac{1}{4}\right)^n - 24\left(\frac{1}{3}\right)^n \tag{54}$$

$$= 8\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) \tag{55}$$

για $n \geq 1$. Άρα

$$y_{zs}[n] = 8\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) u[n-1] \tag{56}$$



Σχήμα 3: *Απόκριση μηδενικής εισόδου (μπλε) και μηδενικής κατάστασης (κόκκινο).*