

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 19^Η

- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων





• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Είδαμε λοιπόν ότι υπάρχει μεγάλη γκάμα φίλτρων που υλοποιούνται ως IIR φίλτρα διακριτού χρόνου
 - Βασιζόμαστε ιδιαίτερα στις γνώσεις μας από το συνεχή χρόνο
- Αντιθέτως, για τα FIR φίλτρα βασιζόμαστε σχεδόν αποκλειστικά στο διακριτό χρόνο!
- Αυτό σημαίνει ότι στη σχεδίαση FIR φίλτρων προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την κατάλληλη απόκριση σε συχνότητα κατευθείαν στο διακριτό χρόνο
- Η πιο απλή μέθοδος σχεδίασης ονομάζεται η **μέθοδος του παραθύρου**



- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**
- Η πιο απλή μέθοδος σχεδίασης ονομάζεται η **μέθοδος του παραθύρου**
- Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις γνωστές σχέσεις μετ. Fourier

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \leftrightarrow h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

για μια ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$

- Τα ιδανικά φίλτρα $h_d[n]$ ξέρετε ότι έχουν άπειρης διάρκειας κρουστική απόκριση και είναι και μη αιτιατά!
- Μπορούμε να πάρουμε μια καλή προσέγγισή τους «κόβοντας» σε μικρότερο τμήμα την ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Το νέο σύστημα θα έχει κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- Δηλ. έχουμε κρατήσει $M + 1$ δείγματα από την ιδανική κρουστική απόκριση
- Το παραπάνω μπορεί να ιδωθεί ως ο πολλαπλασιασμός της ιδανικής κρουστικής απόκρισης με ένα τετραγωνικό παλμό («παράθυρο») διάρκειας $M + 1$, δηλ.

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

με

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το M μπορεί να είναι μικρό ή μεγάλο!

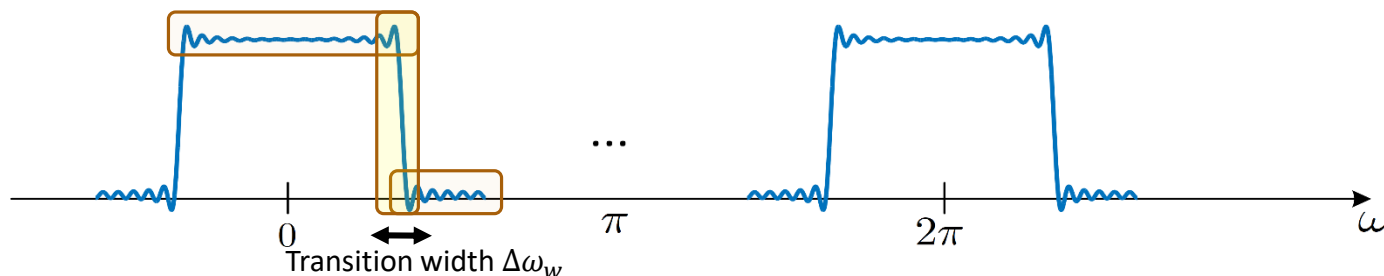
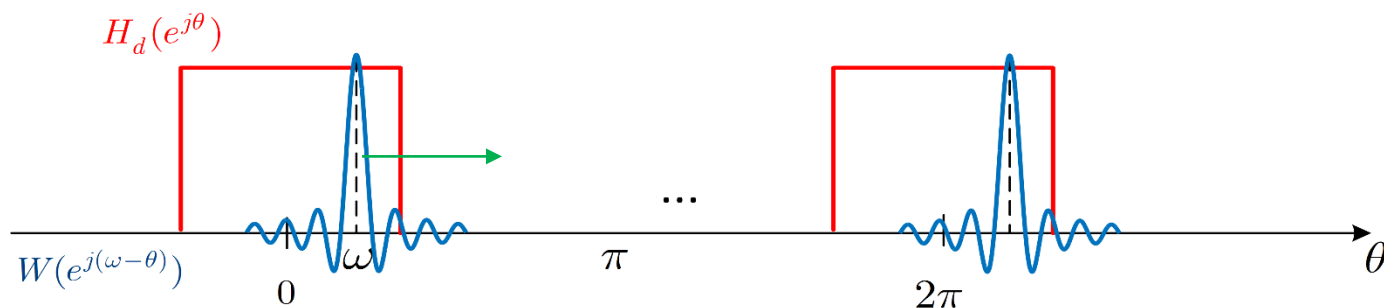
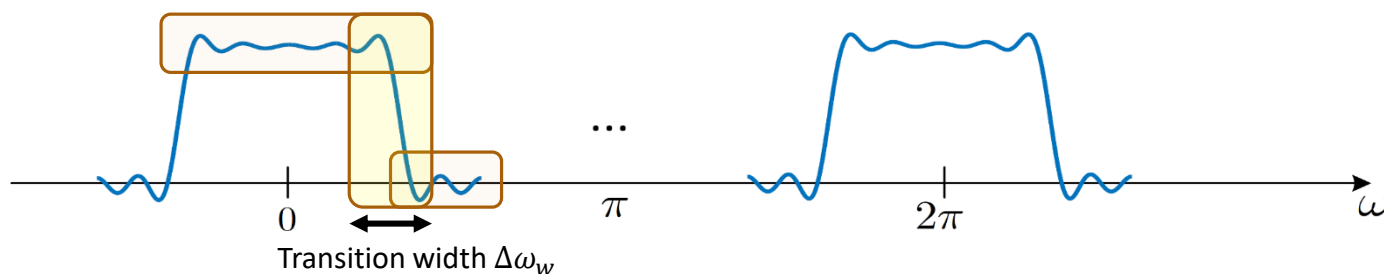
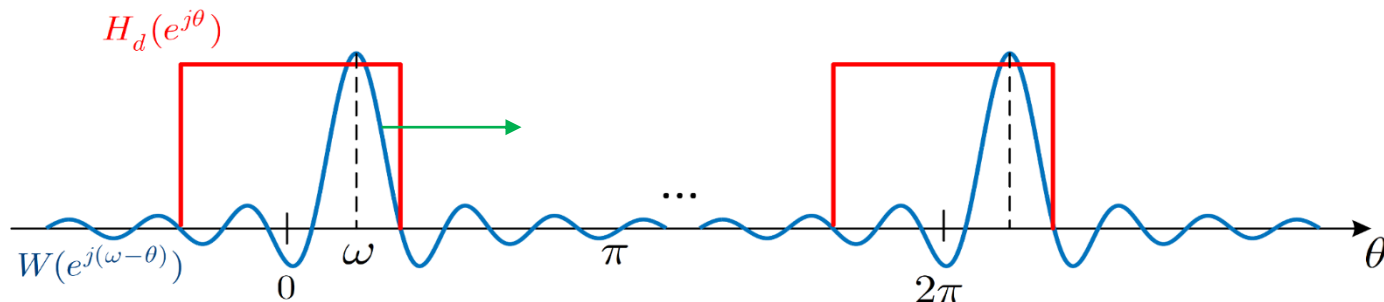
- Στο χώρο του Fourier το γινόμενο γίνεται συνέλιξη:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier $H_d(e^{j\omega})$ του ιδανικού φίλτρου $h_d[n]$ **συνελίσσεται ☺ στη συχνότητα** (περιοδικά) με το μετασχ. Fourier $W(e^{j\omega})$ του παραθύρου $w[n]$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



Ένα μικρό σε διάρκεια τετραγωνικό παράθυρο στο χρόνο θα έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα (μπλε καμπύλη)

Ένα μεγαλύτερο σε διάρκεια τετραγωνικό παράθυρο στο χρόνο θα έχει μετασχ. Fourier όπως στο Σχήμα (μπλε καμπύλη)



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Ιδανικά, αν

$$w[n] = 1, \forall n$$

τότε ο μετ. Fourier του θα ήταν

$$W(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$$

δηλ.

$$h_d[n]w[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) * H_d(e^{j\omega}) = \delta(\omega) * H_d(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})$$

- Θα θέλαμε λοιπόν το επιλεχθέν παράθυρο $w[n]$ **να είναι μεγάλο** ώστε το φίλτρο μας να πλησιάζει όσο γίνεται το ιδανικό
- Σε αυτήν την περίπτωση, ο μετασχ. Fourier του θα πλησιάζει όλο και πιο πολύ στη συνάρτηση Δέλτα, $2\pi\delta(\omega)$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Όμως θέλουμε ένα παράθυρο **όσο το δυνατόν μικρότερο σε διάρκεια στο χρόνο** για να μην έχουμε πολλές πράξεις κατά την υλοποίηση...
- ... και ταυτόχρονα να έχει **όσο γίνεται στενότερο φάσμα (που αντιστοιχεί, όπως είπαμε, σε μεγάλης διάρκειας παράθυρο)**, δηλ. να έχει συγκεντρωμένο όλο το φασματικό περιεχόμενο γύρω από έναν μικρό αριθμό συχνοτήτων
- Γιατί αυτό? Όστε η συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας να αναπαράγει όσο γίνεται πιστότερα την επιθυμητή/ιδανική απόκριση συχνότητας, καθώς ο μετασχ. Fourier του παραθύρου θα πλησιάζει πολύ τη μορφή της συνάρτησης Δέλτα – δείτε την εξίσωση στην προηγούμενη διαφάνεια:

$$h_d[n]w[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) * H_d(e^{j\omega}) = \delta(\omega) * H_d(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})$$

- Όπως καταλαβαίνετε, αυτές είναι **αντικρουόμενες** προδιαγραφές! ☺



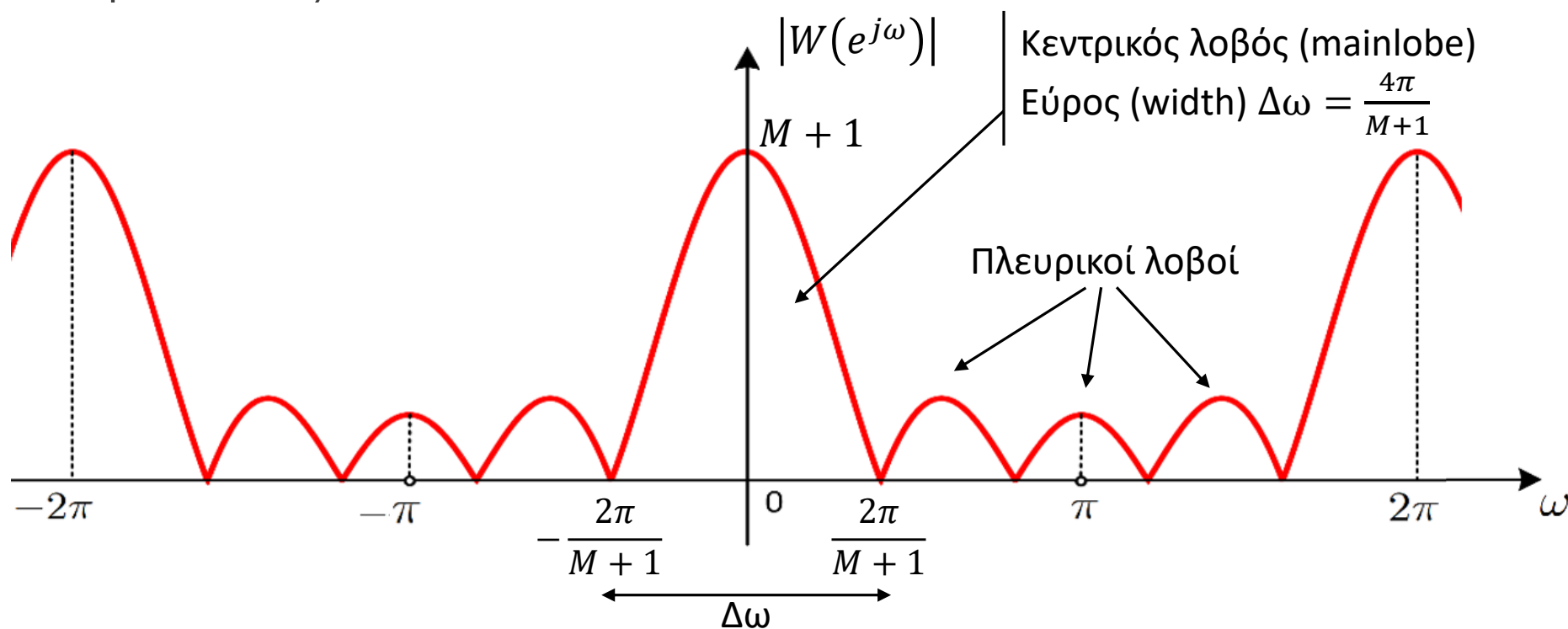
• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

• Ας δούμε λίγο το αιτιατό τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας $M + 1$ δειγμάτων

• Γνωρίζουμε ότι

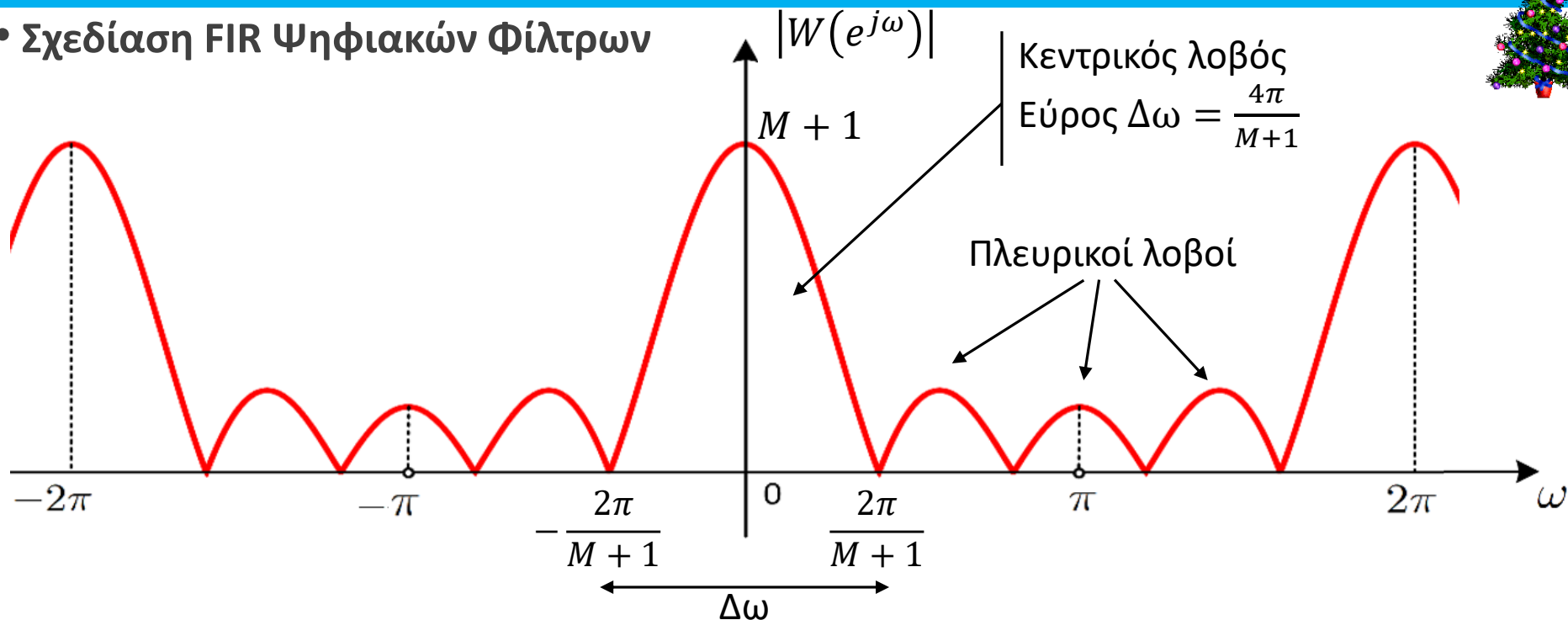
$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \leftrightarrow W(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

• Φάσμα πλάτους





• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



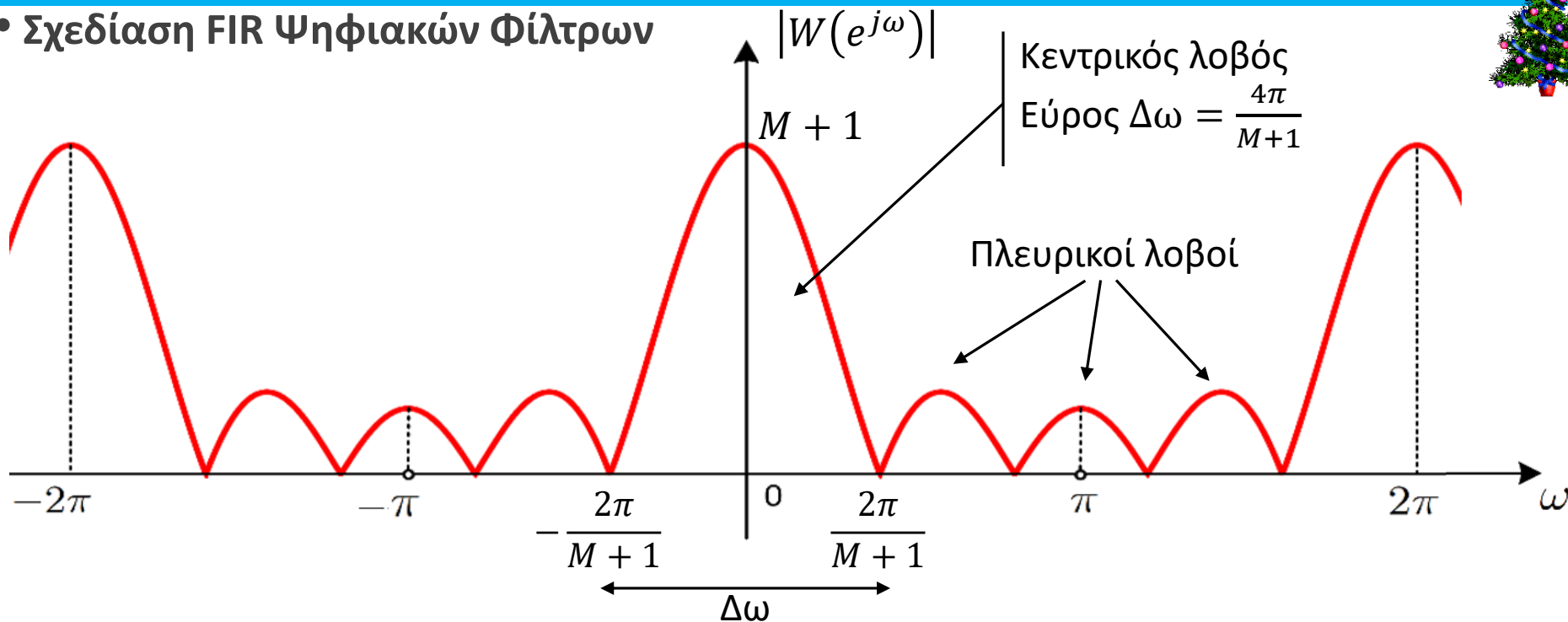
- Όταν το M αυξάνει, το «ύψος» του κεντρικού λοβού μεγαλώνει και το εύρος του μικραίνει

$$M \approx \frac{2\pi c}{\Delta\omega}, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Οι πλευρικοί λοβοί έχουν «ύψος» που δεν εξαρτάται ουσιαστικά από το M αλλά από το **σχήμα** του παραθύρου
- Όμως το εμβαδό κάτω από τους λοβούς παραμένει σταθερό με την αύξηση του M !
- Η συνέλιξη $H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$ θα παράγει ισχυρές ταλαντώσεις κάθε φορά που οι πλευρικοί λοβοί περνούν από την ασυνέχεια του $H_d(e^{j\omega})$!



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



- Αν όμως χρησιμοποιήσουμε κάποιο παράθυρο που δεν είναι τόσο «απότομο» στα άκρα του όπως το τετραγωνικό, τότε μπορούμε να μειώσουμε αυτά τα φαινόμενα
 - Οι ασυνέχειες του τετραγωνικού παραθύρου χρειάζονται υψηλές συχνότητες για να «συντεθούν»
- Τέτοια παράθυρα «σβήνουν» σταδιακά προς το μηδέν στα άκρα τους στο χρόνο (περιορίζουν την ασυνέχεια)
- Κόστος? «Φαρδύτερος» κεντρικός λοβός $\leftrightarrow$ «μακρύτερη» μετάβαση γύρω από την ασυνέχεια του ιδανικού φίλτρου
- Κέρδος? Χαμηλότεροι πλευρικοί λοβοί $\leftrightarrow$ μικρότερες ταλαντώσεις γύρω απ' την ασυνέχεια
- Ας δούμε μερικά τέτοια γνωστά παράθυρα...



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Τετραγωνικό

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Τριγωνικό (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M}, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

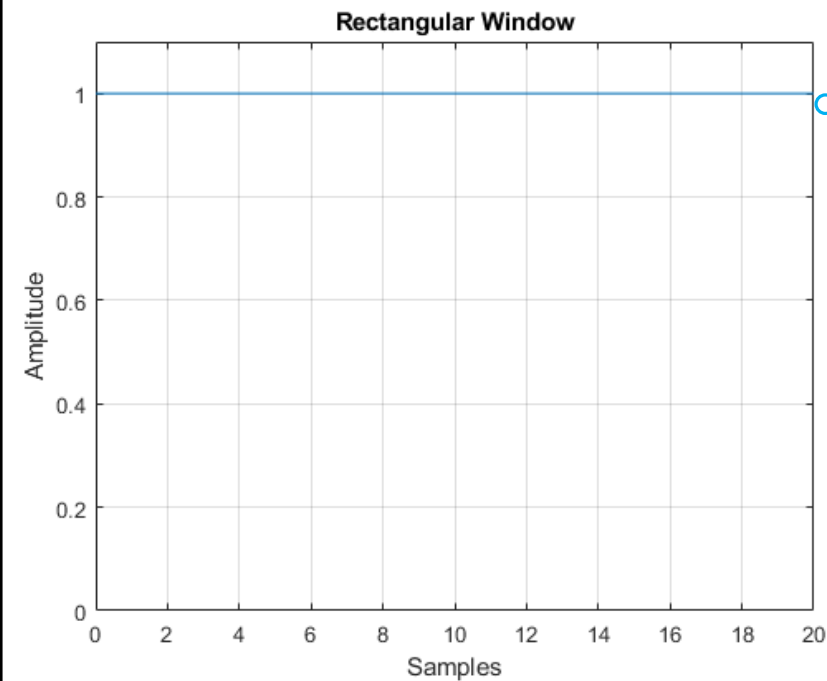
- Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

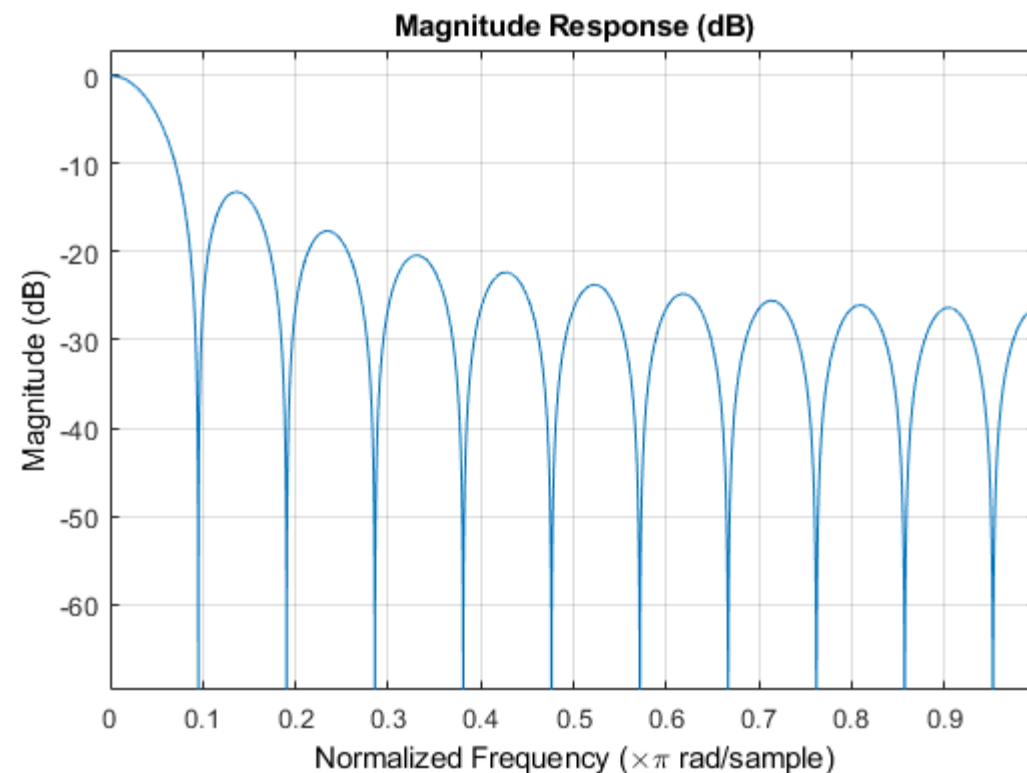


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Τετραγωνικό παράθυρο

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



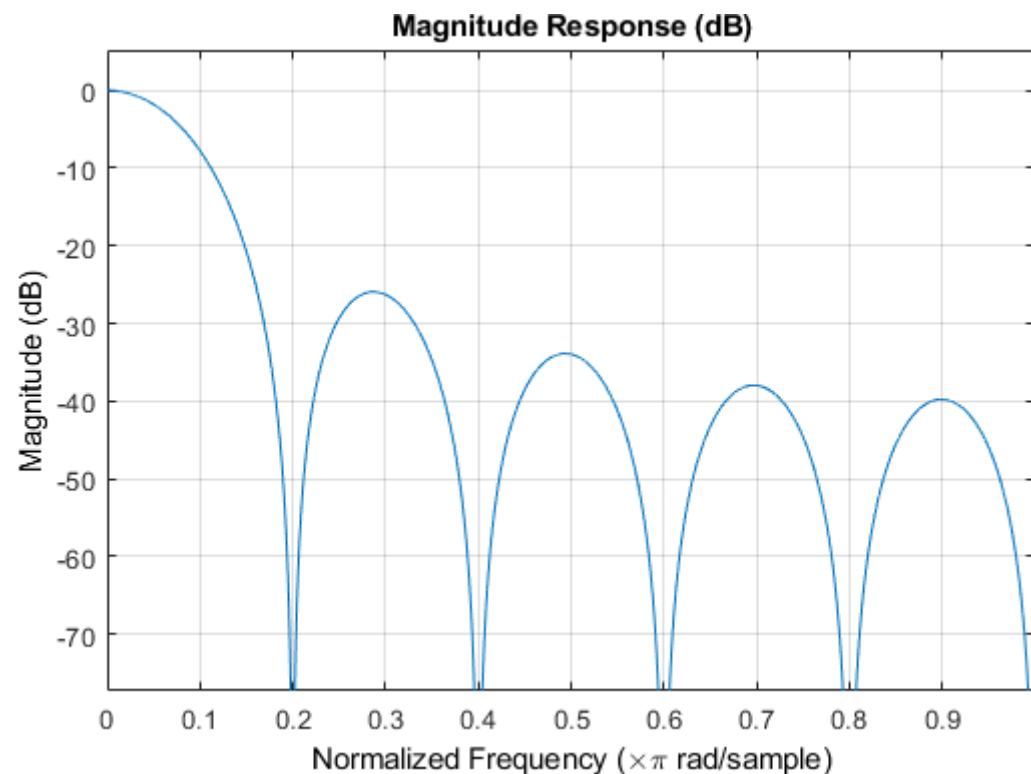
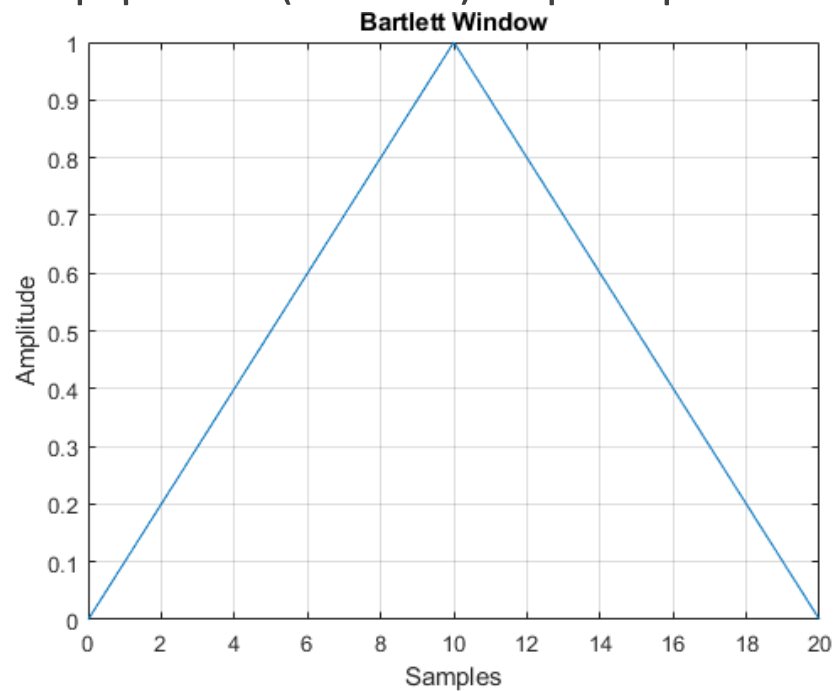
Σχεδιασμένο – όπως και τα
επόμενα – ως συνεχής
γραμμή για οπτικοποίηση
(κανονικά είναι σε
δείγματα)





- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Τριγωνικό (Bartlett) παράθυρο

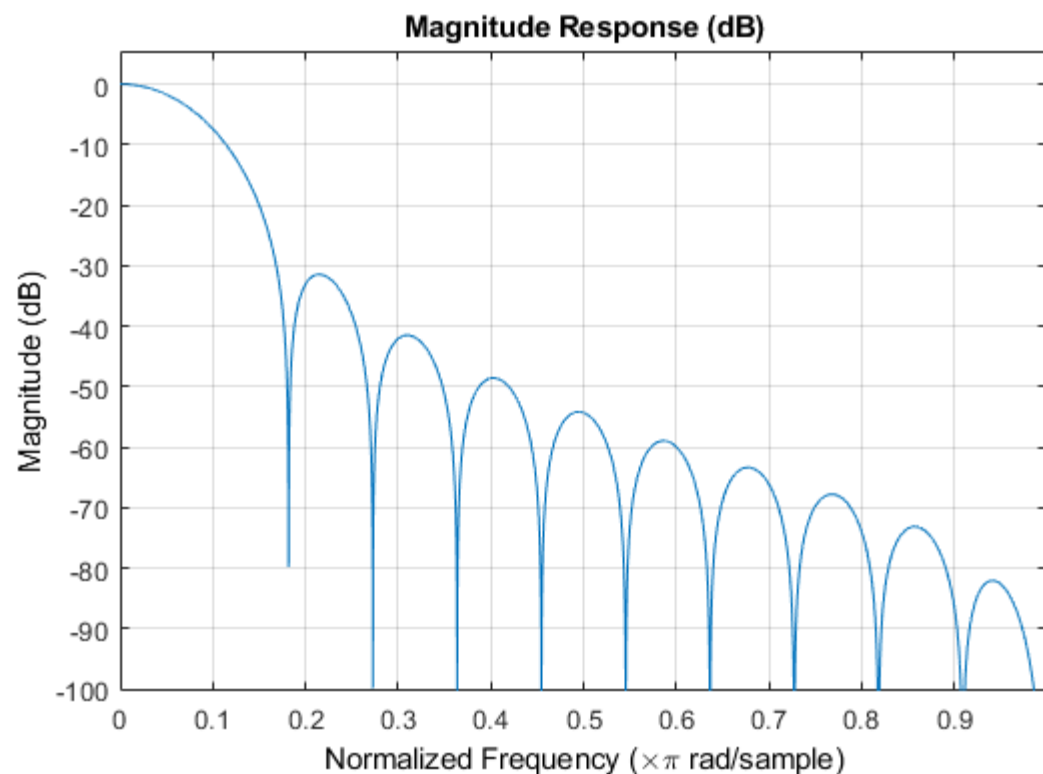
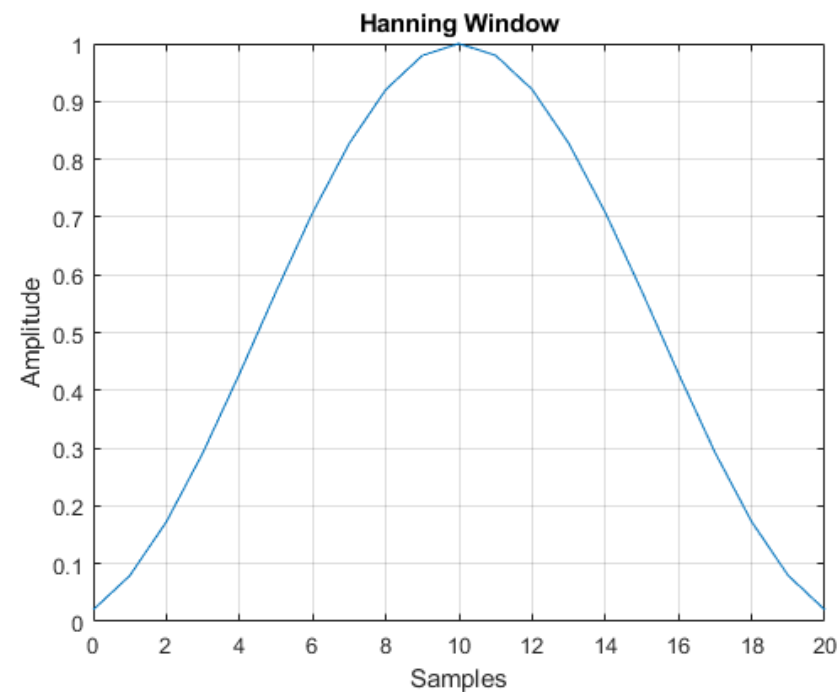
$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \frac{2n}{M}, & \text{αλλού} \end{cases}$$





- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Hanning

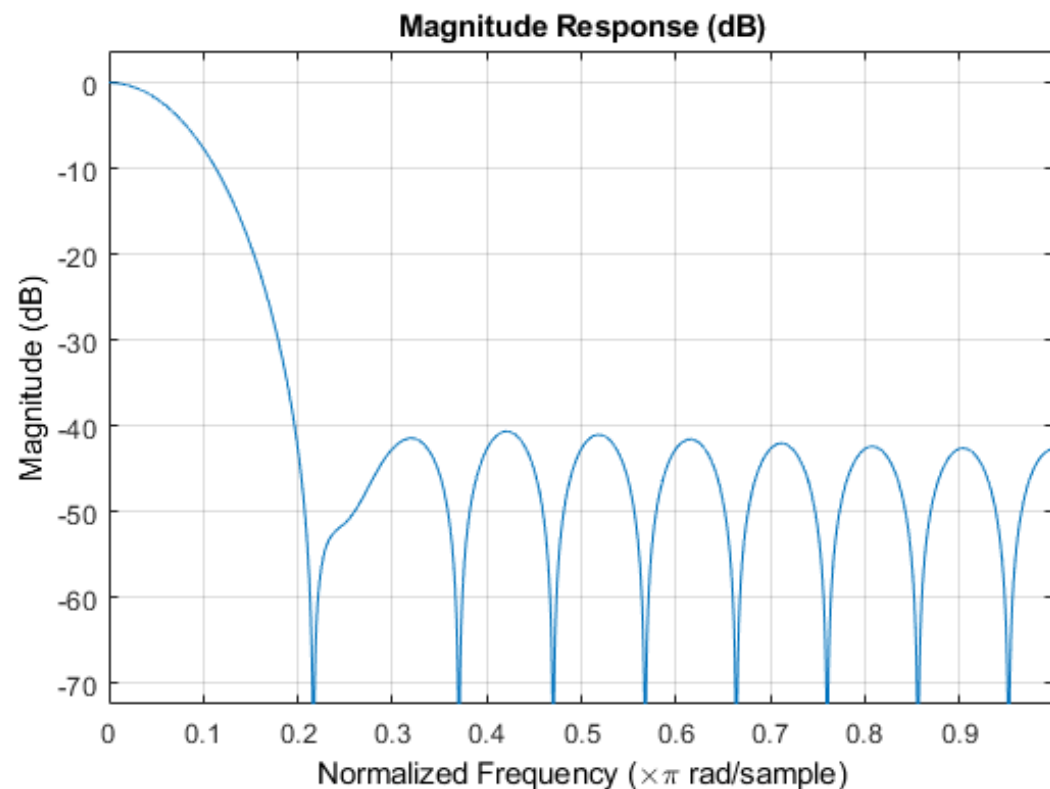
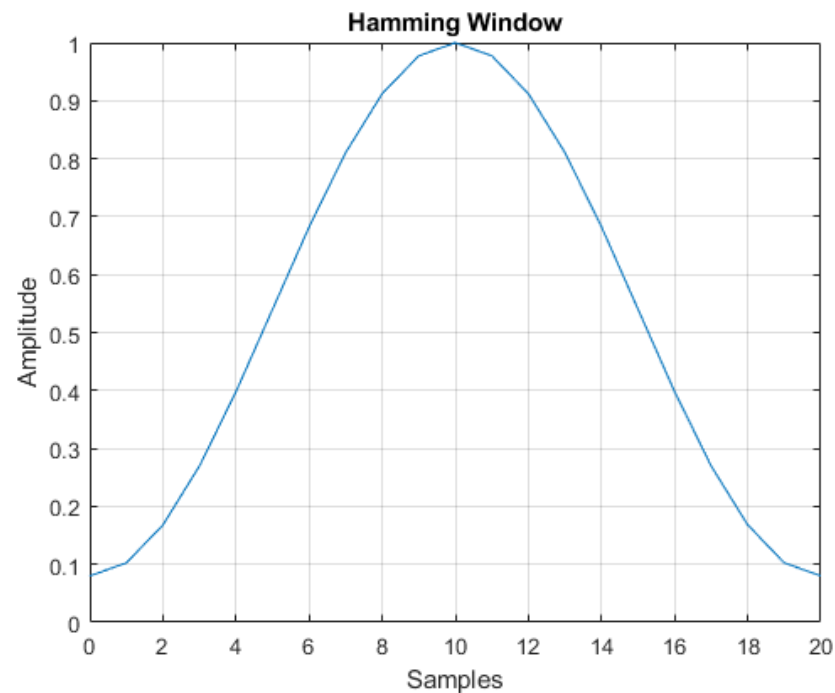
$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$





- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Παράθυρο Hamming

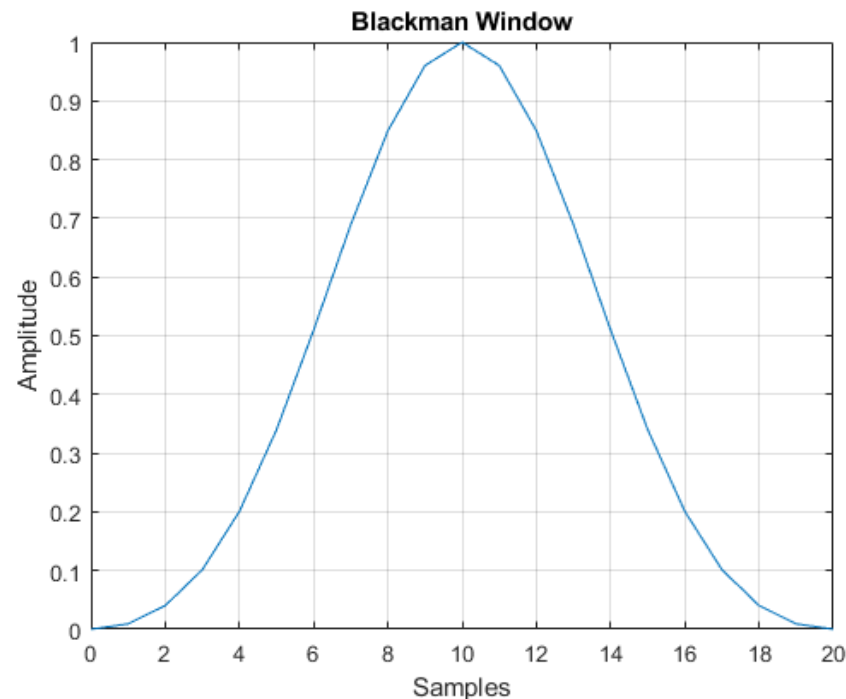
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



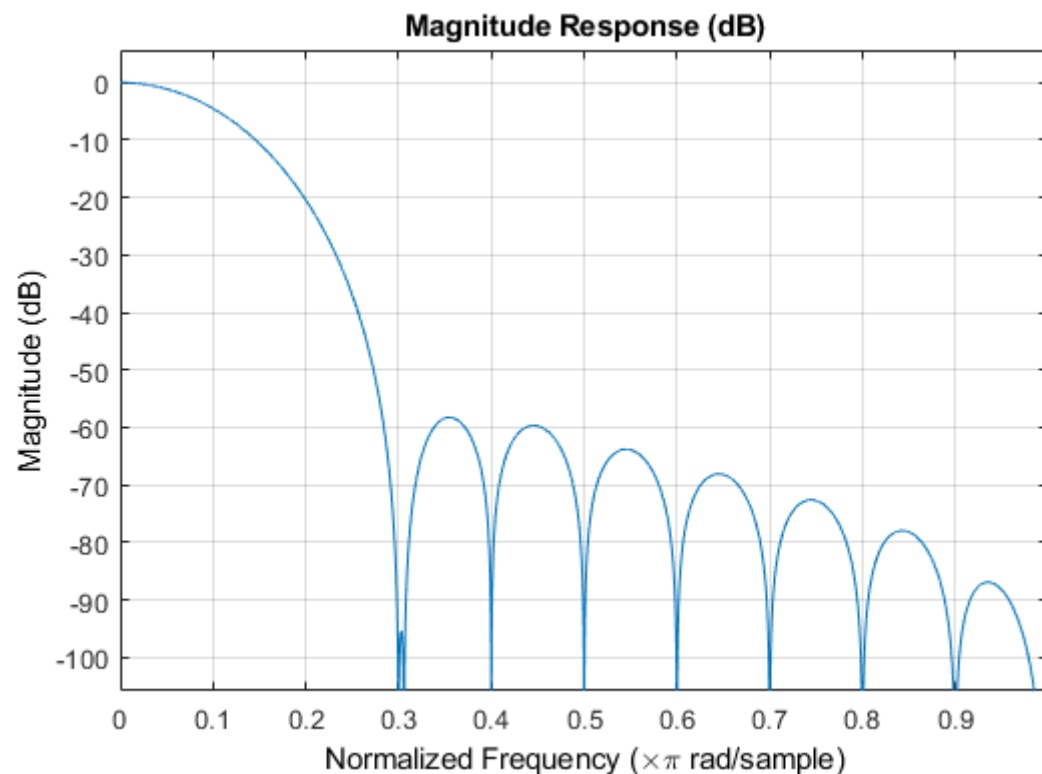


• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

• Παράθυρο Blackman



$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$





- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων
- Ιδιότητες Παραθύρων

Τύπος Παραθύρου	Σχετικό πλάτος πλευρικών λοβών	Εύρος κεντρικού λοβού (προσέγγιση)
Τετραγωνικό	-13 dB	$\frac{4\pi}{M+1}$
Τριγωνικό (Bartlett)	-25 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{M}$
Blackman	-57 dB	$\frac{12\pi}{M}$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

• Μιλήσαμε πολύ για τα συστήματα γραμμικής φάσης

• Όλα τα προηγούμενα παράθυρα ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση

• Όλα ικανοποιούν άρτια συμμετρία:

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \leftrightarrow W(e^{j\omega}) = \boxed{A_{\text{even}}(e^{j\omega})} e^{-\frac{j\omega M}{2}} \in \mathbb{R}$$

• Έστω ότι η επιθυμητή κρουστική απόκριση είναι γραμμικής φάσης τύπου I ή II (π.χ.), δηλ.

$$h_d[M-n] = h_d[n] \in \mathbb{R}$$

• Στο χώρο του Fourier

$$H_d(e^{j\omega}) = \boxed{H_{\text{even}}(e^{j\omega})} e^{-\frac{j\omega M}{2}} \in \mathbb{R}$$

• Αν το παράθυρο είναι συμμετρικό (αντίστοιχα για αντισυμμετρικό), τότε

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{even}}(e^{j\theta}) A_{\text{even}}(e^{j(\omega-\theta)}) e^{-\frac{j\theta M}{2}} e^{-\frac{j(\omega-\theta)M}{2}} d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \boxed{H_{\text{even}}(e^{j\theta}) A_{\text{even}}(e^{j(\omega-\theta)})} d\theta \right) e^{-\frac{j\omega M}{2}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Έχετε καταλάβει ότι υπάρχει ένα **trade-off** μεταξύ εύρους κεντρικού λοβού και πλάτους πλευρικών λοβών

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} dt = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} \right]^2$$

- Το trade-off αυτό μπορεί να ποσοτικοποιηθεί αναζητώντας το παράθυρο που είναι “**βέλτιστα**” **συγκεντρωμένο** γύρω από τη συχνότητα $\omega = 0$
- Ο Kaiser βρήκε μια σχεδόν βέλτιστη λύση που υλοποιείται από μια γνωστή και εύκολη στην υλοποίηση συνάρτηση
 - Την τροποποιημένη **συνάρτηση Bessel** $I_0(x)$, μηδενικής τάξης και 1^{ου} είδους

- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M}{2}}{\frac{M}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

με $I_0(\cdot)$ την περίφημη συνάρτηση Bessel που αναφέρθηκε



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράθυρο Kaiser:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{M}{2}}{\frac{M}{2}} \right]^2} \right)}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

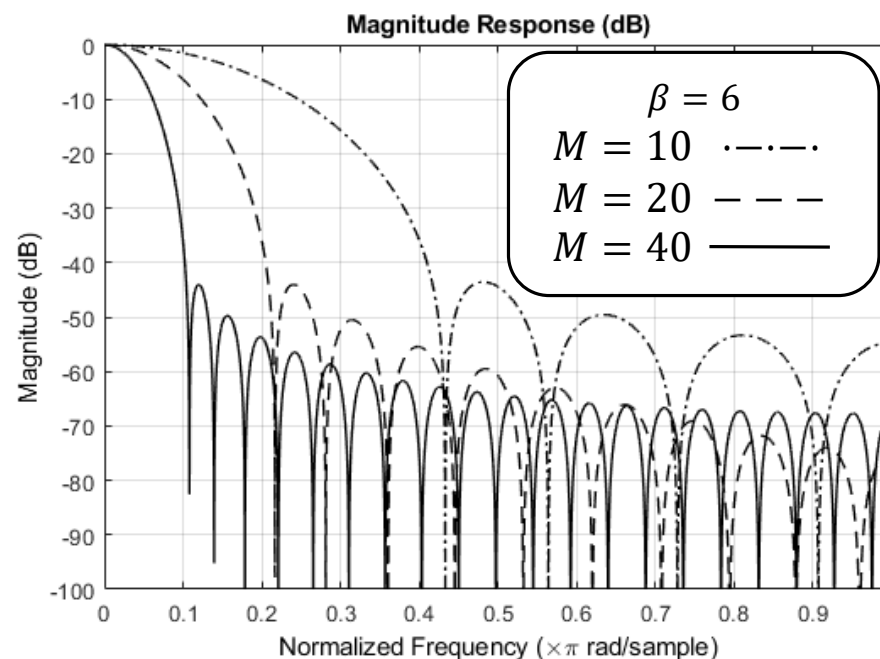
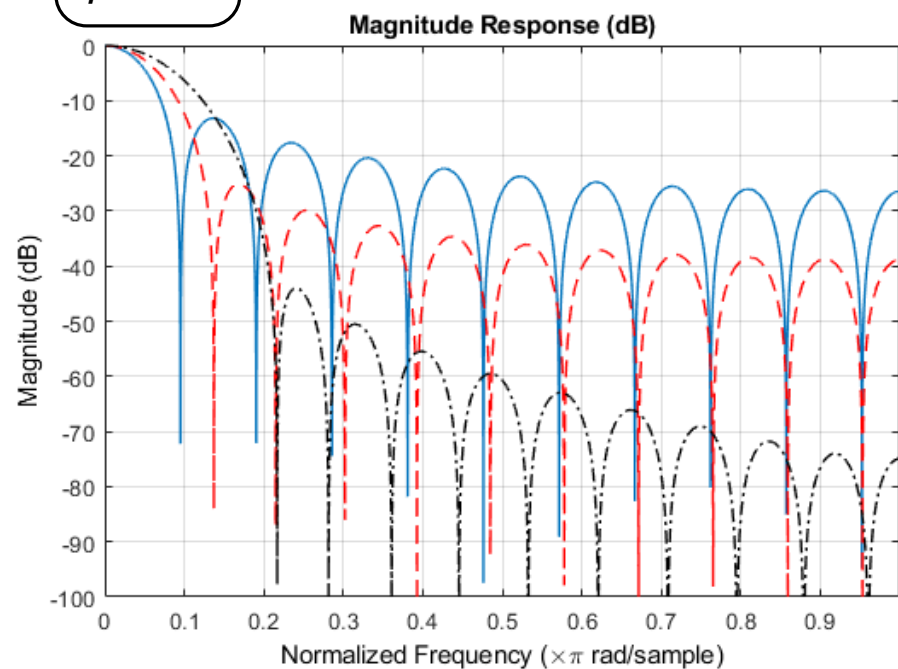
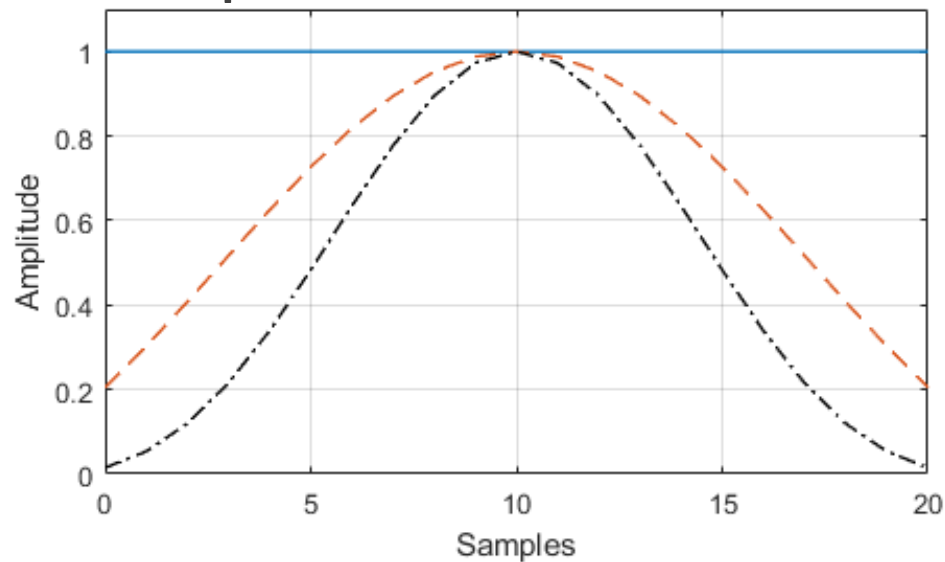
- **Δυο** παράμετροι: **διάρκεια σήματος** παραθύρου $M + 1$, **παράμετρος σχήματος** β

- «Παίζοντας» με τις τιμές των παραμέτρων μπορούμε να ελέγχουμε το εύρος του λοβού και το πλάτος των πλευρικών λοβών

- Ας δούμε μερικές τιμές του παραθύρου



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

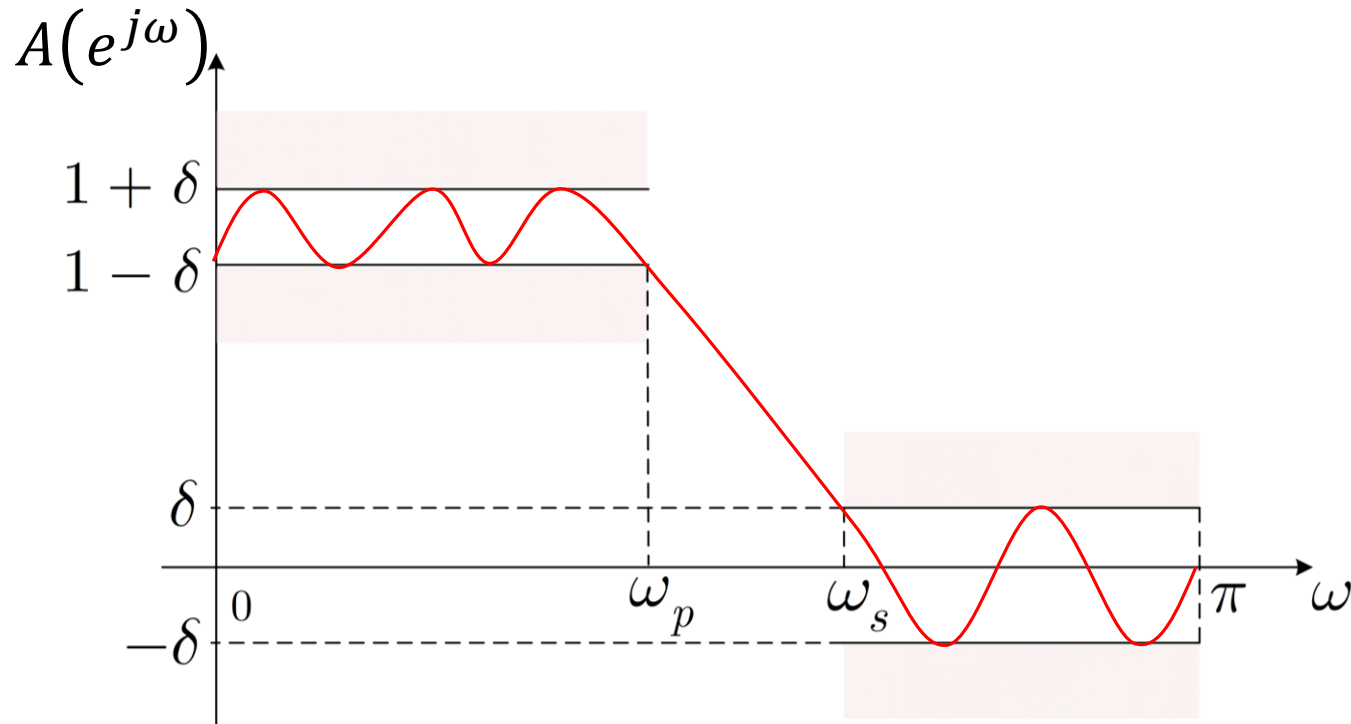




• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

• Ο Kaiser έκανε εκτενή πειράματα και κατέληξε σε κλειστούς τύπους που επιτρέπουν στο σχεδιαστή να προβλέψει τις τιμές των M, β που απαιτούνται για συγκεκριμένες προδιαγραφές ενός φίλτρου επιλογής συχνοτήτων

• Έστω δ η προδιαγραφή του παρακάτω χαμηλοπερατού φίλτρου (δεδομένη)

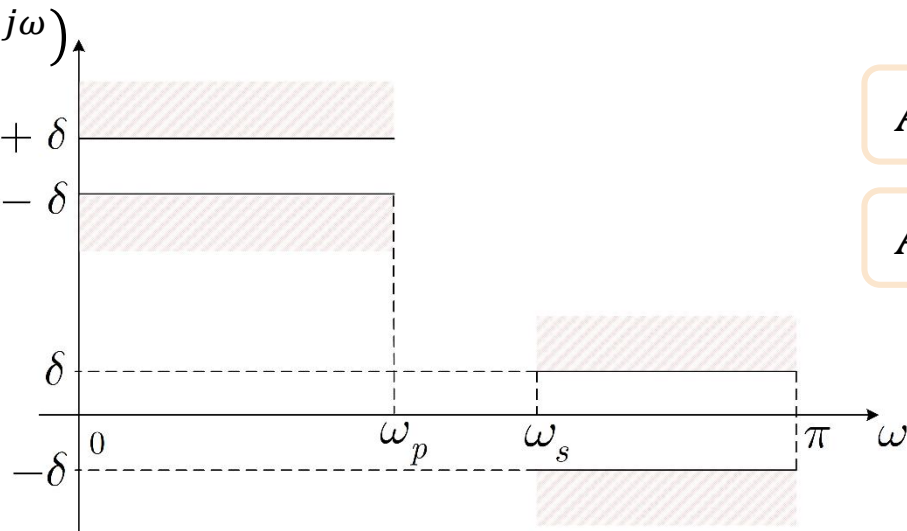


• Τότε η ω_p ορίζεται ως η μέγιστη συχνότητα που ικανοποιεί: $A(e^{j\omega}) \geq 1 - \delta$

• Τότε η ω_s ορίζεται ως η μικρότερη συχνότητα που ικανοποιεί: $A(e^{j\omega}) \leq \delta$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



$$A(e^{j\omega}) \geq 1 - \delta$$

$$A(e^{j\omega}) \leq \delta$$

- Το εύρος ζώνης μετάβασης είναι $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$
- Αν $A = -20 \log_{10} \delta$, τότε ο Kaiser βρήκε την τιμή του β για δεδομένες τιμές του A

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

- Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega}$$



- **Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων**

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα σχεδίασης lowpass φίλτρου γραμμικής φάσης με συχνότητα αποκοπής $\frac{\pi}{2}$ με παράθυρο Kaiser

- **Βήμα 1:** Ορίζουμε τις προδιαγραφές

$$\omega_p = 0.4\pi, \quad \omega_s = 0.6\pi, \quad \delta = 0.001$$

- **Βήμα 2:** Βρίσκουμε τη συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \frac{(\omega_p + \omega_s)}{2} = 0.5\pi$

- **Βήμα 3:** $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$, $A = -20 \log_{10} \delta = 60$

- **Βήμα 4:** $\beta = 0.1102(A - 8.7) = 5.653$

- **Βήμα 5:** Η τιμή του M πρέπει να είναι τότε

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega} = 36.21 \rightarrow M = 37$$



• Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

- **Βήμα 6:** Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου μας, πολλαπλασιάζοντας το παράθυρο με την κρουστική απόκριση ενός ιδανικού φίλτρου γραμμικής φάσης
- Μπορείτε να δείξετε ότι το ιδανικό φίλτρο γραμμικής φάσης της μορφής

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-\frac{j\omega M}{2}}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

έχει κρουστική απόκριση

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\left(\omega_c\left(n - \frac{M}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)}, \quad -\infty < n < +\infty$$

Παράθυρο
Kaiser

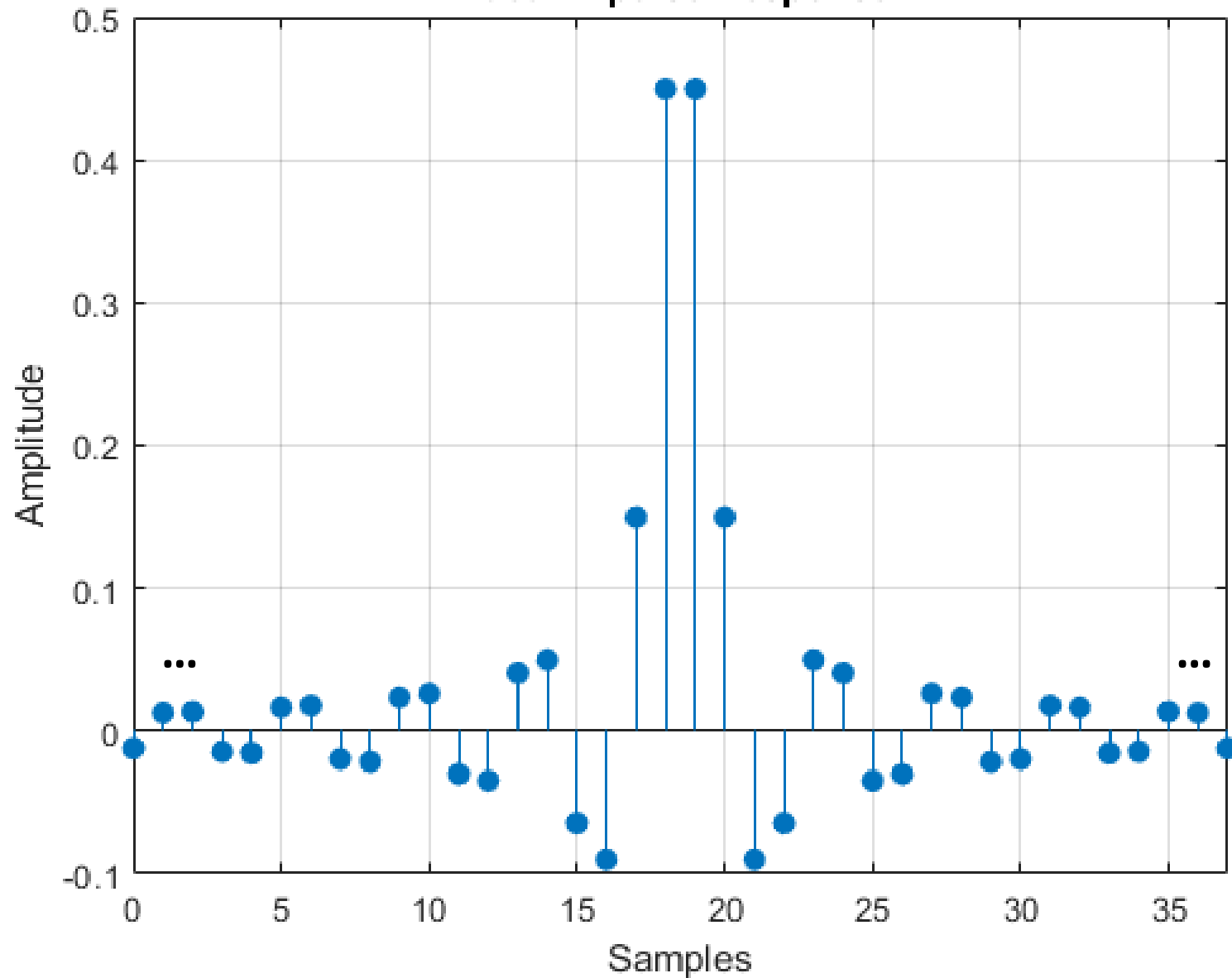
• Άρα

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin\left(0.5\pi\left(n - \frac{37}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{37}{2}\right)} \cdot \frac{I_0\left(5.653 \sqrt{1 - \left[\frac{n - \frac{37}{2}}{\frac{37}{2}}\right]^2}\right)}{I_0(5.653)}, & 0 \leq n \leq 37 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

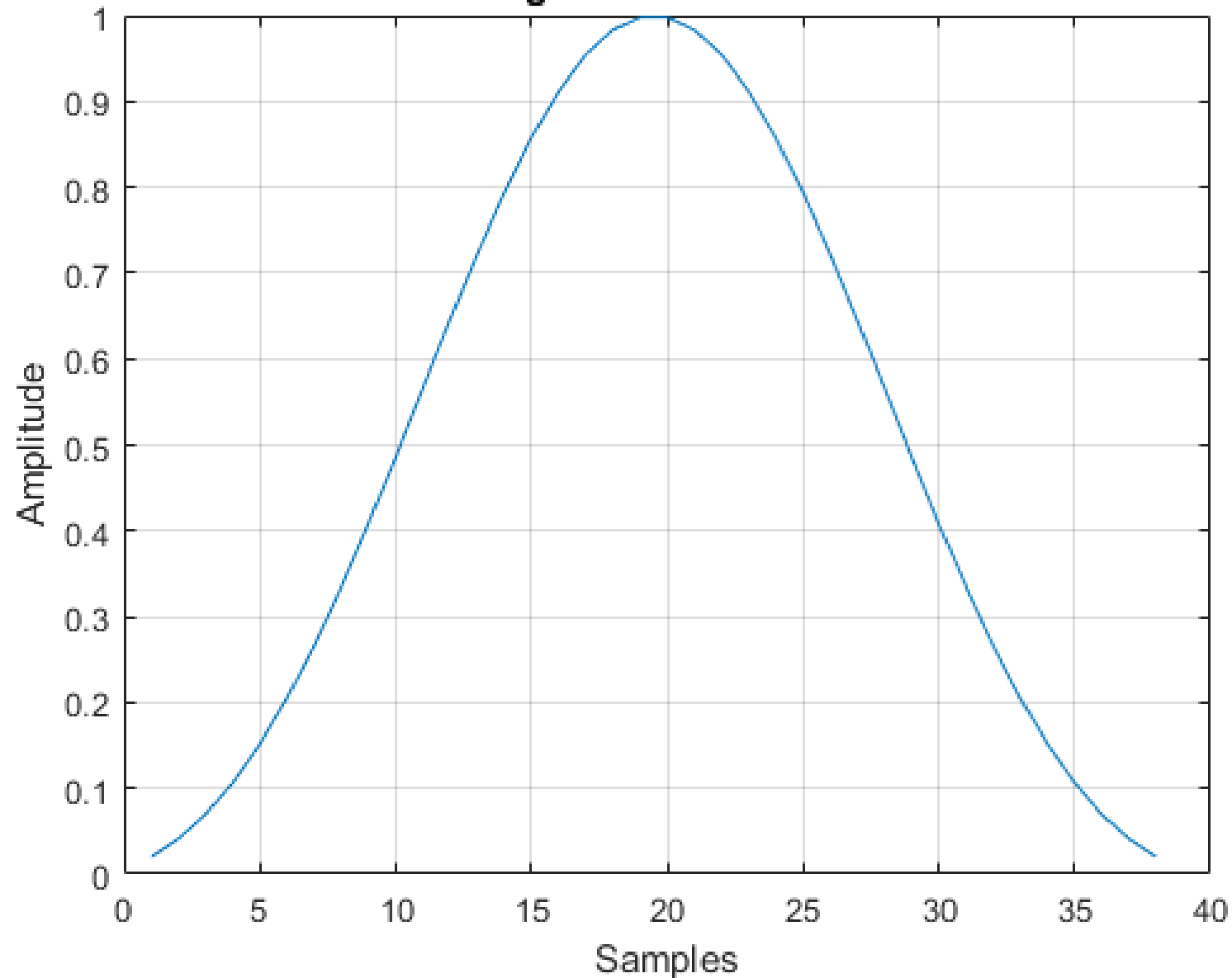
Ideal Impulse Response





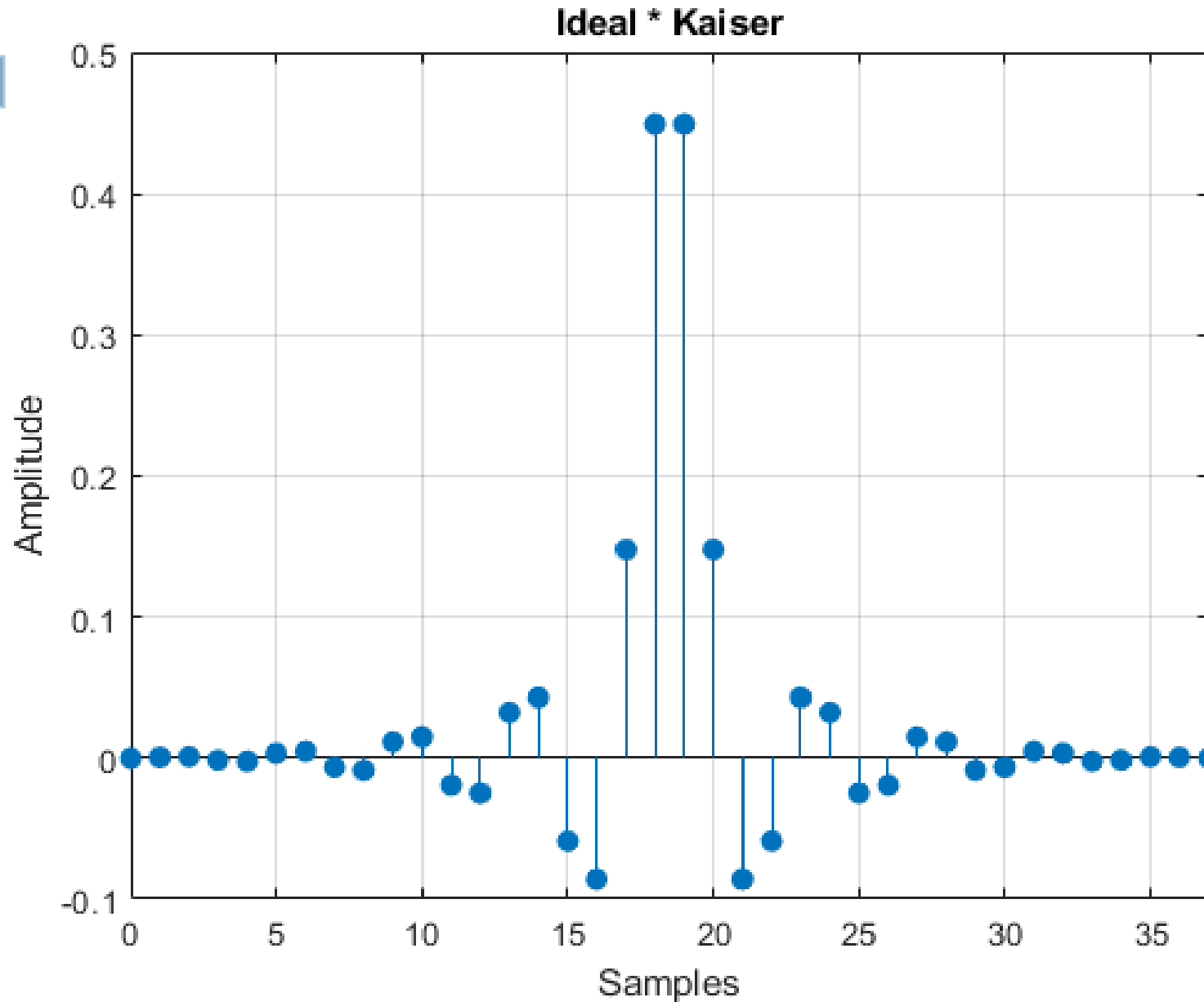
- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

Designed Kaiser Window



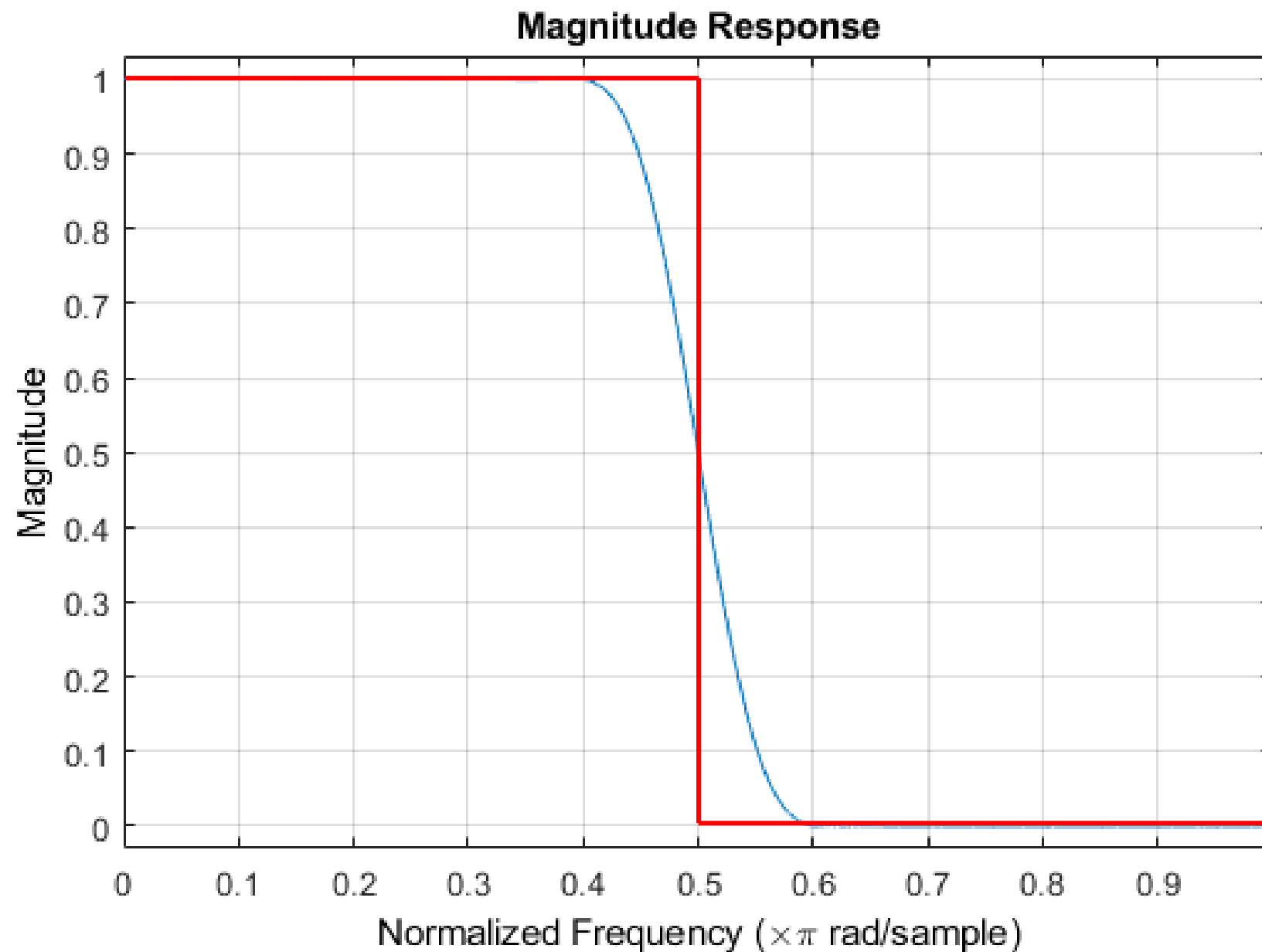


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



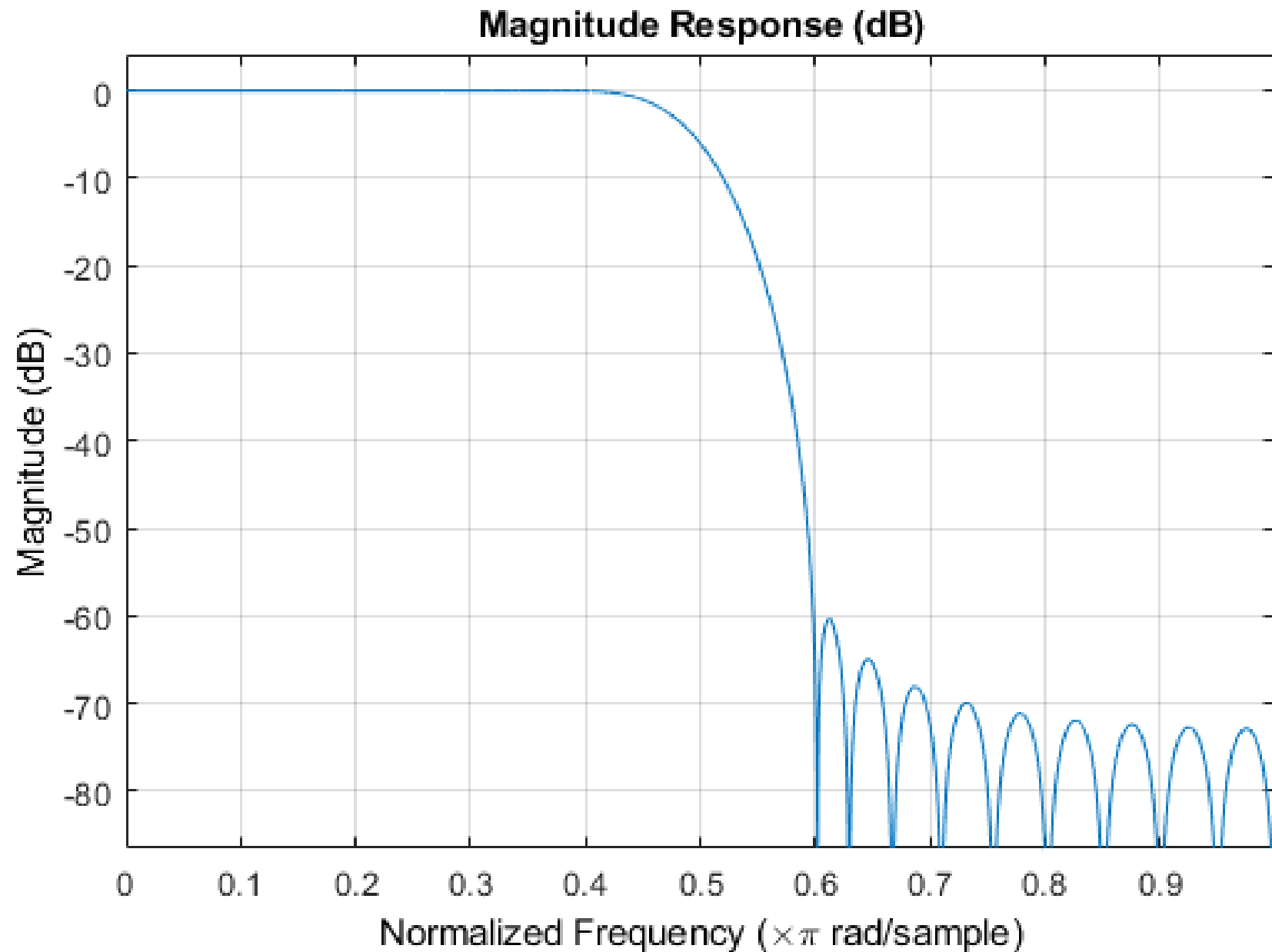


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



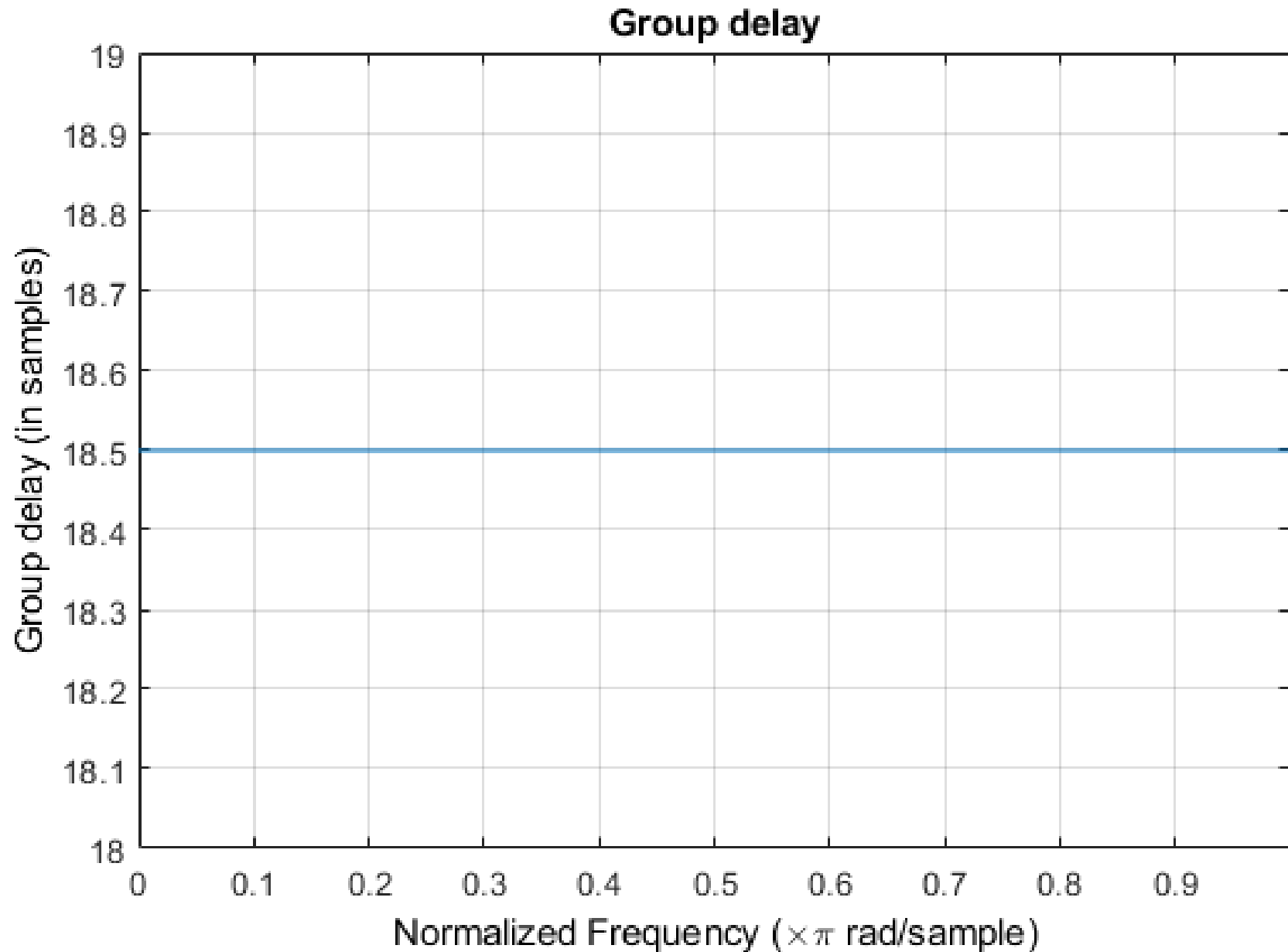


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



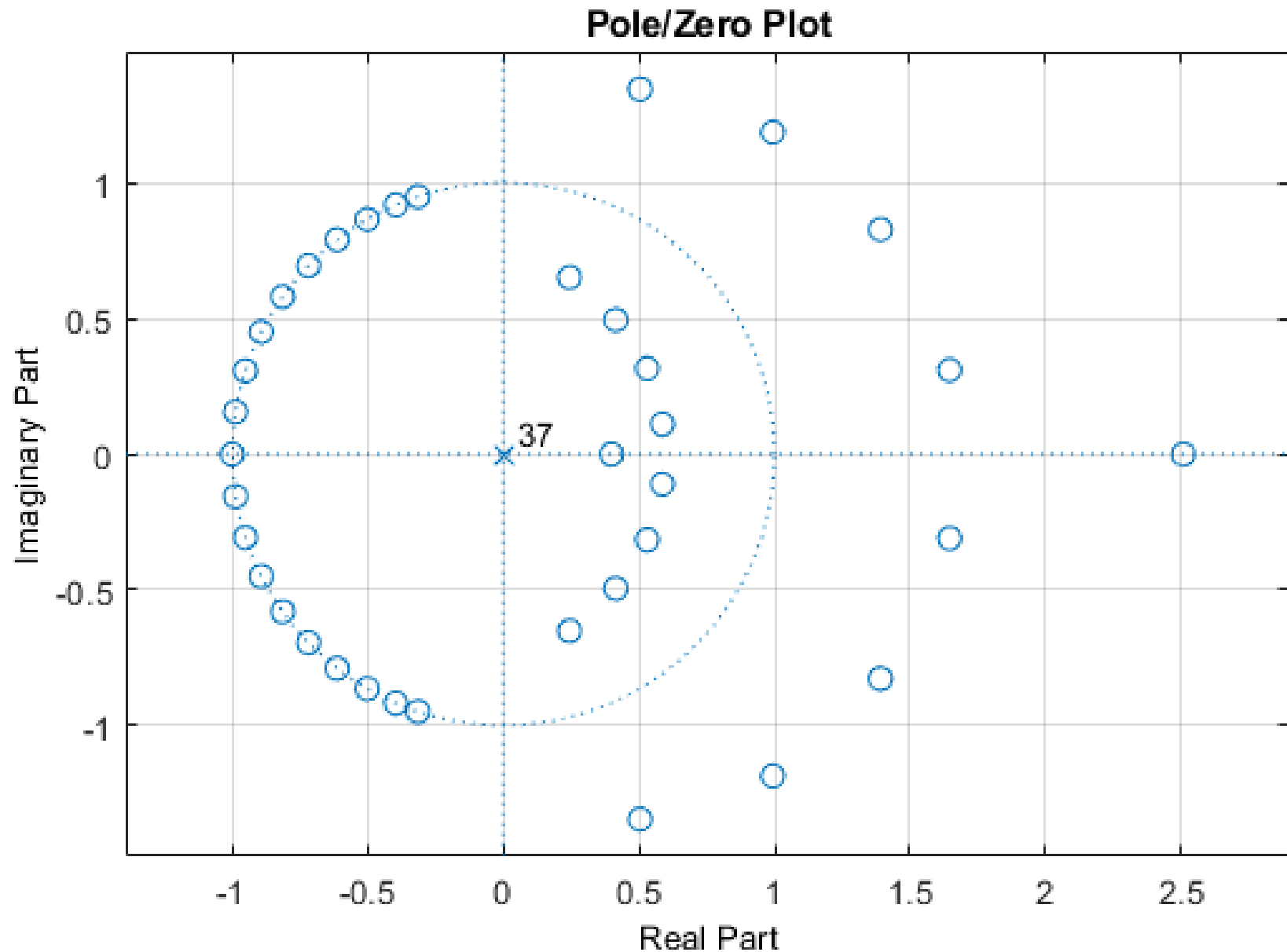


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων



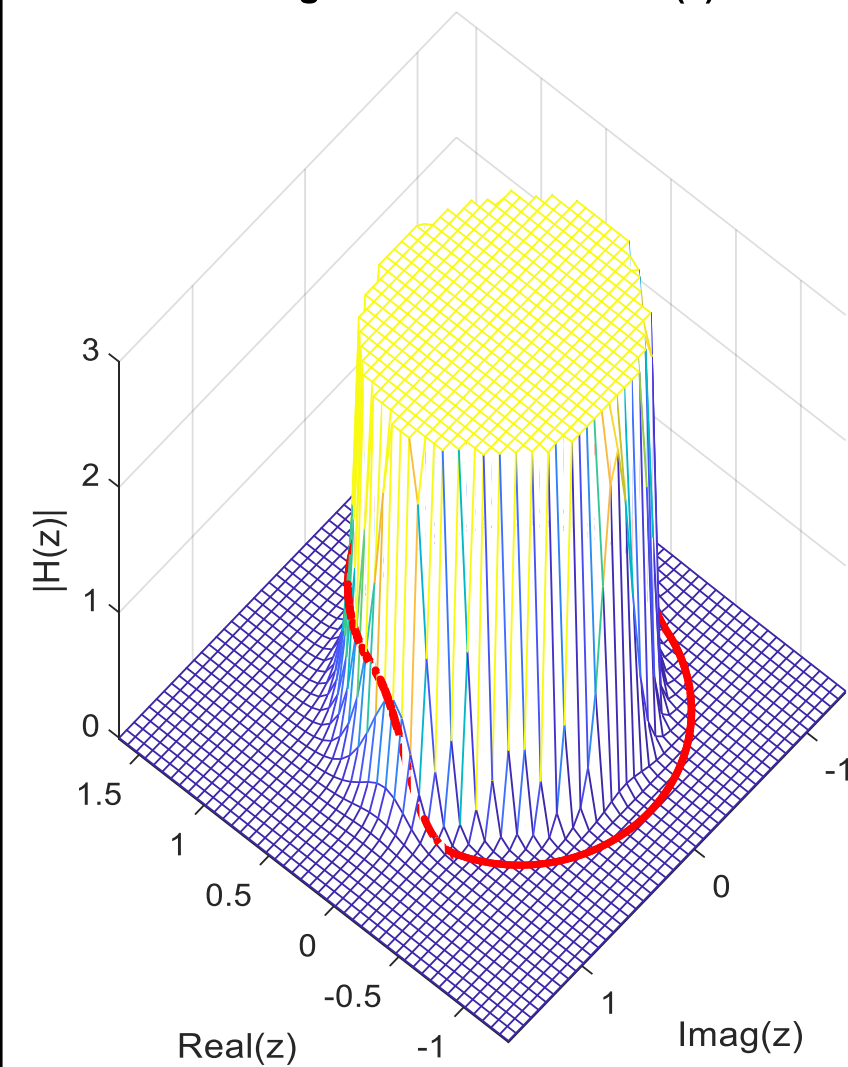
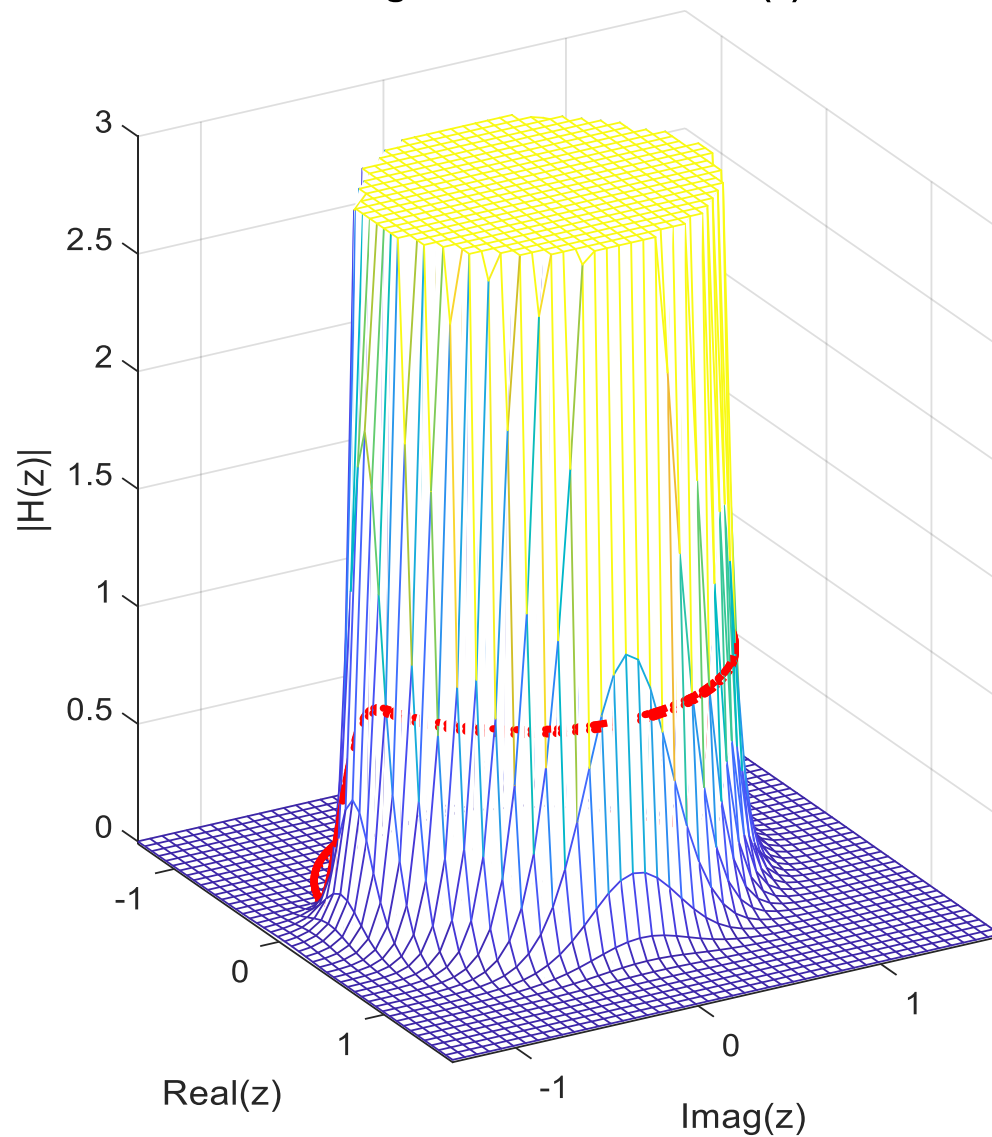


- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

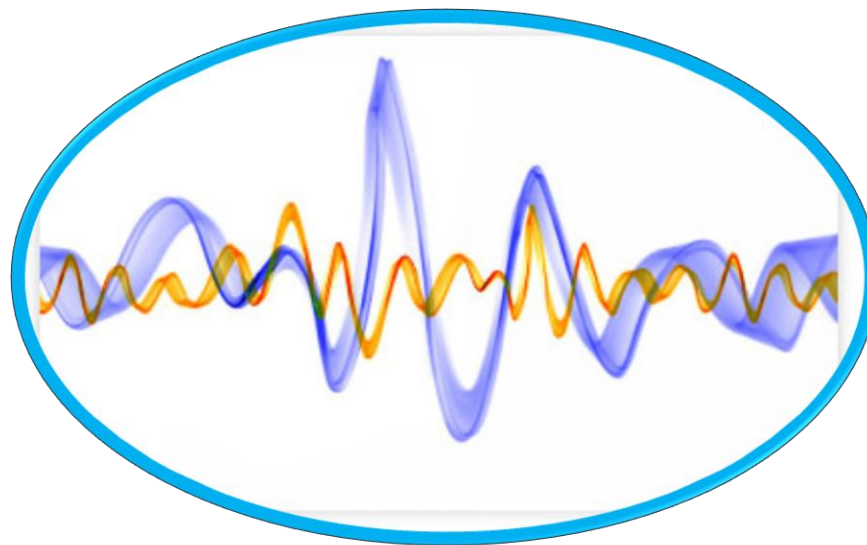




- Σχεδίαση FIR Ψηφιακών Φίλτρων

Magnitude of function $H(z)$ Magnitude of function $H(z)$ 

ΛΗΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ





Happy New Year

2026