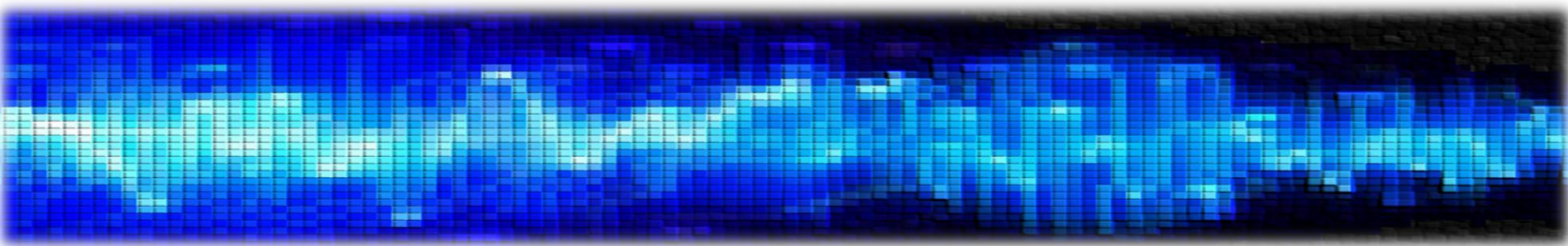


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 18^Η



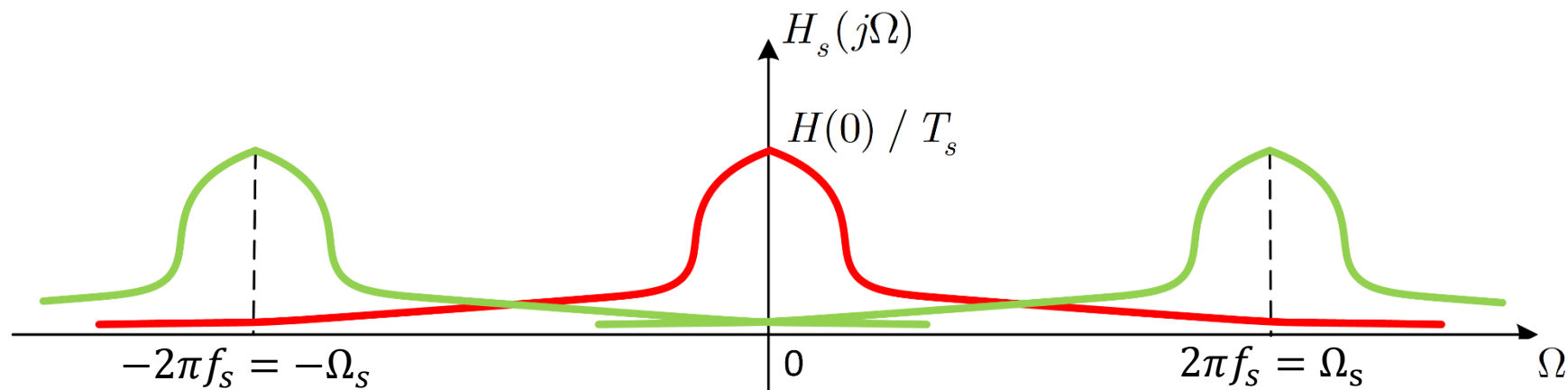
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Έχουμε ήδη δει μια μέθοδο σχεδίασης ψηφιακών-από-αναλογικά φίλτρα
 - Τη Μέθοδο Impulse Invariance
- Ποιο είναι το βασικό πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο?
- Ότι το αναλογικό φίλτρο **δεν** είναι band-limited
 - Δεν «ζει» μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων γύρω από το μηδέν
- Θυμηθείτε την ιδιότητα της κλιμάκωσης στο χρόνο για το μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου
 - «Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, τότε είναι άπειρης διάρκειας στη συχνότητα, και το αντίστροφο»
- Η ιδιότητα αυτή μας λέει ότι ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα στο συνεχή χρόνο (όπως είναι όλα τα σήματα «εκεί έξω» 😊) θα έχει άπειρου πλήθους μη μηδενικές συχνότητες, δηλ. ΔΕ θα είναι band-limited
- Άρα κατά τη δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης, θα υπάρχει πάντα το φαινόμενο του aliasing!
 - Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος ανά $k\Omega_s$ θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!



- Η τεχνική που θα συζητήσουμε στη συνέχεια αποφεύγει το πρόβλημα του aliasing χρησιμοποιώντας έναν αλγεβρικό μετασχηματισμό μεταξύ των μεταβλητών s και z
- Τι ακριβώς κάνει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προσπαθεί να «χωρέσει» τον άξονα $-\infty \leq \Omega \leq +\infty$ στον άξονα $-\pi \leq \omega \leq \pi$!
- Ως εκ τούτου, η αντιστοίχιση των μεταβλητών $\Omega \rightarrow \omega$ **δεν** είναι γραμμική, όπως ήταν στην προηγούμενη μέθοδο του Impulse Invariance
- Άρα η τεχνική αυτή, που ονομάζεται **Bilinear Transformation**, είναι κατάλληλη όταν αυτή η «αναδίπλωση» (warping) του άξονα «αναλογικής» συχνότητας είναι αποδεκτή

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται ως

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

δηλ.

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_c \left[\frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right]$$

- Κι εδώ έχουμε την παράμετρο T_d , όπως και στην προηγούμενη μέθοδο
- Η μέθοδος προέρχεται από τη διακριτοποίηση μιας διαφορικής εξίσωσης μέσω του **κανόνα του τραπεζίου**
- Θυμηθείτε από τις ιδιότητες του μετασχ. Laplace ότι

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

- Ας τη δειγματοληπτήσουμε! ($t = nT_s$)

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

Έχουμε

$$y(nT_s) = \int_{-\infty}^{nT_s} x(\tau) d\tau$$

- Παρατηρήστε ότι

$$y((n-1)T_s) = \int_{-\infty}^{(n-1)T_s} x(\tau) d\tau$$

και άρα

$$y(nT_s) - y((n-1)T_s) = y[n] - y[n-1] = \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} x(\tau) d\tau$$

- Μπορούμε να διακριτοποιήσουμε αυτό το ολοκλήρωμα με τον κανόνα τραπεζίου!

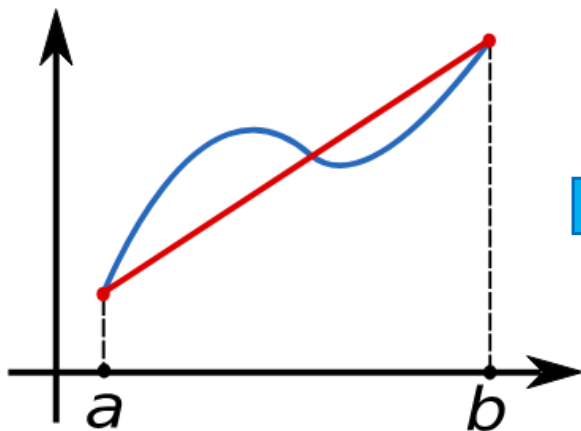
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$y(nT_s) - y((n-1)T_s) = y[n] - y[n-1] = \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} x(\tau) d\tau$$

- Ο κανόνας τραπεζίου αναφέρει ότι

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} x(\tau) d\tau \approx \frac{T_s}{2} (x(nT_s) + x[(n-1)T_s]) = \frac{T_s}{2} (x[n] + x[n-1])$$

- Γιατί??



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b))$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$\frac{T_s}{2} (x[n] + x[n-1]) = y[n] - y[n-1]$$

- Ας φέρουμε την εξίσωση διαφορών (πλέον) στο χώρο του Z

$$\frac{T_s}{2} (X(z) + z^{-1}X(z)) = Y(z) - z^{-1}Y(z)$$

$$\frac{T_s}{2} X(z)(1 + z^{-1}) = Y(z)(1 - z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{T_s}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

- Ας συγκρίνουμε με το αρχικό σύστημα

$$Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s}$$

- Άρα ουσιαστικά

$$\frac{1}{s} \leftrightarrow \frac{T_s}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Rightarrow s \leftrightarrow \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Κάθε σύστημα $H(s)$ με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να κατασκευαστεί με αθροιστές, πολλαπλασιαστές, και **ολοκληρωτές**
- Κάθε ολοκληρωτής μπορεί να προσεγγιστεί με τον τρόπο που είδαμε
- Επιστρέφοντας,

$$s = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

δηλ.

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_c \left[\frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right]$$

- Λύνοντας ως προς z :

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right)s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right)s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma T_d}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sigma T_d}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)^2}}$$

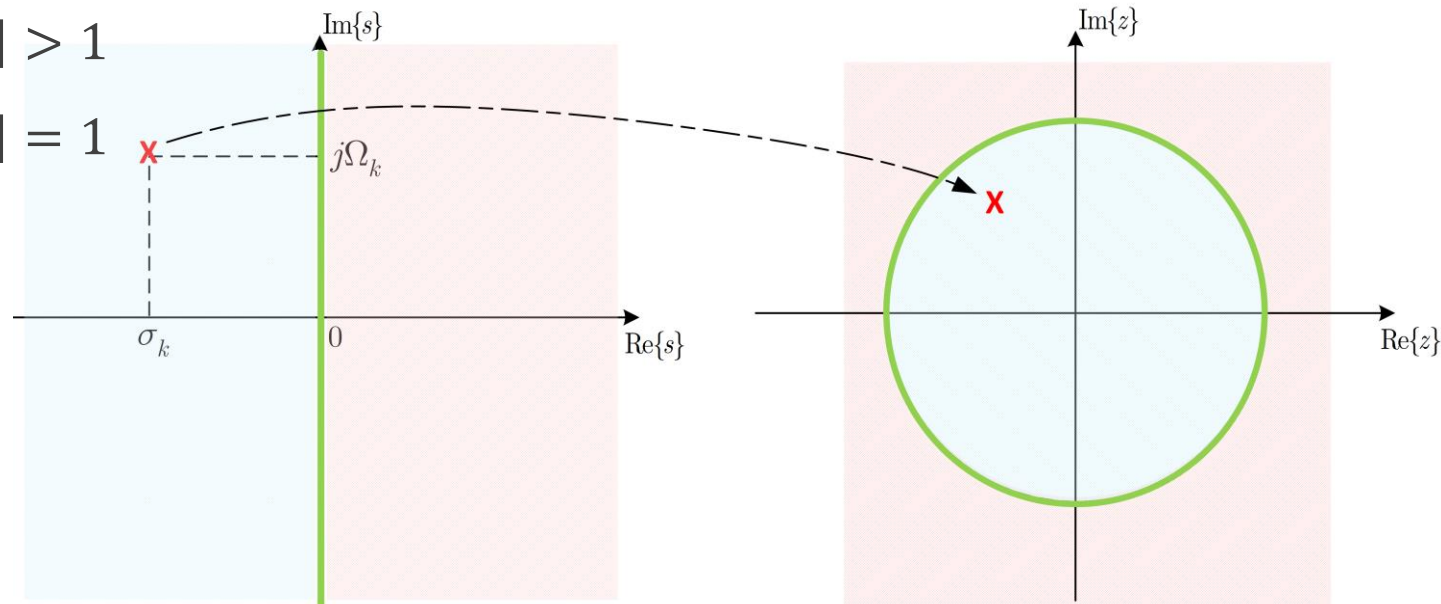
• Παρατηρήστε ότι:

☐ Αν $\sigma < 0$, τότε $|z| < 1$

☐ Αν $\sigma > 0$, τότε $|z| > 1$

☐ Αν $\sigma = 0$, τότε $|z| = 1$

Ίδια «ιδέα» με την αντιστοίχιση της προηγούμενης μεθόδου, Impulse Invariance (όχι σαν αλγεβρική αντιστοίχιση όμως)



- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**

- Ας δούμε πως μπορούμε να συσχετίσουμε τις μεταβλητές Ω , ω

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \Rightarrow \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2j}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- Οπότε

$$\sigma = 0 \quad , \quad \Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

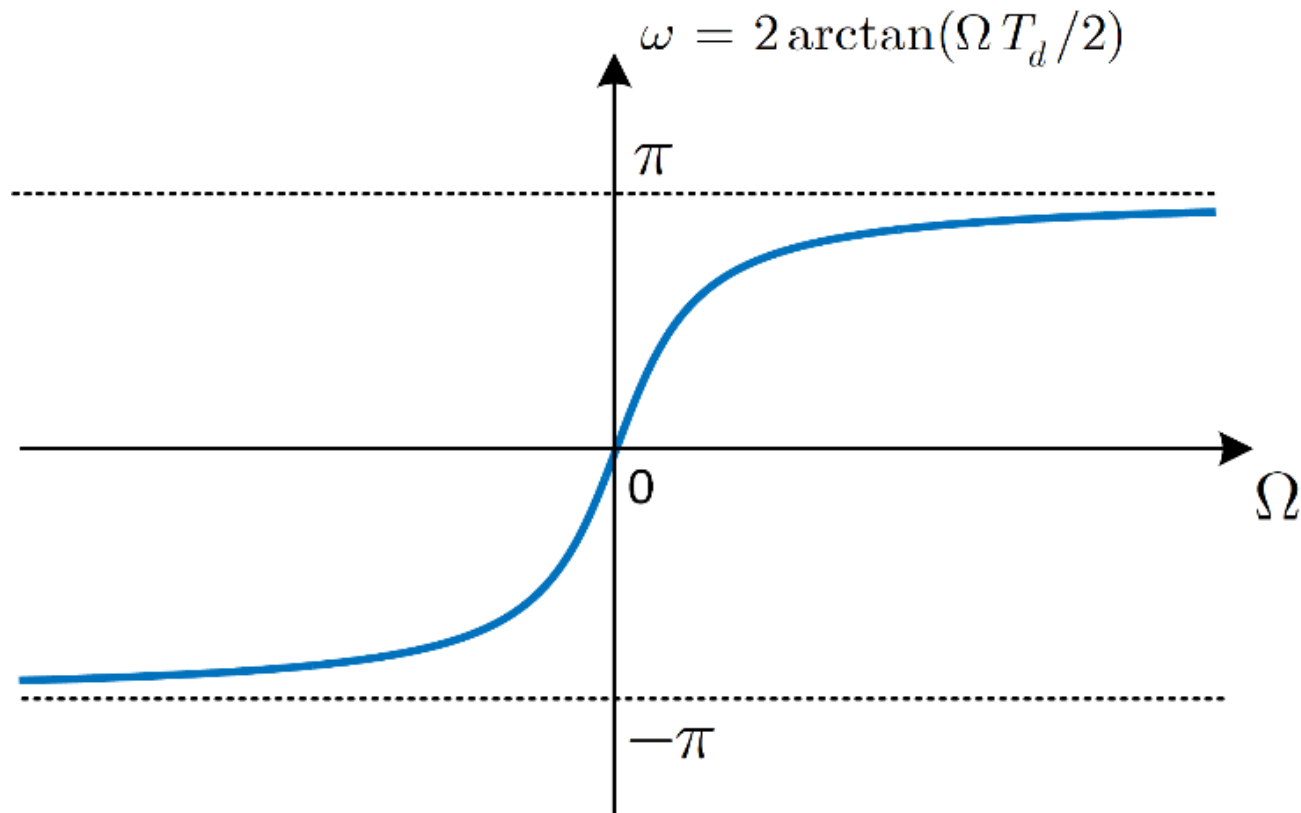
ή

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$

- Πώς μοιάζει αυτή η μη γραμμική αντιστοίχιση των δυο συχνοτήτων?
- Πώς αντιστοιχίζεται η «αναλογική» απόκριση πλάτους στην «ψηφιακή»?

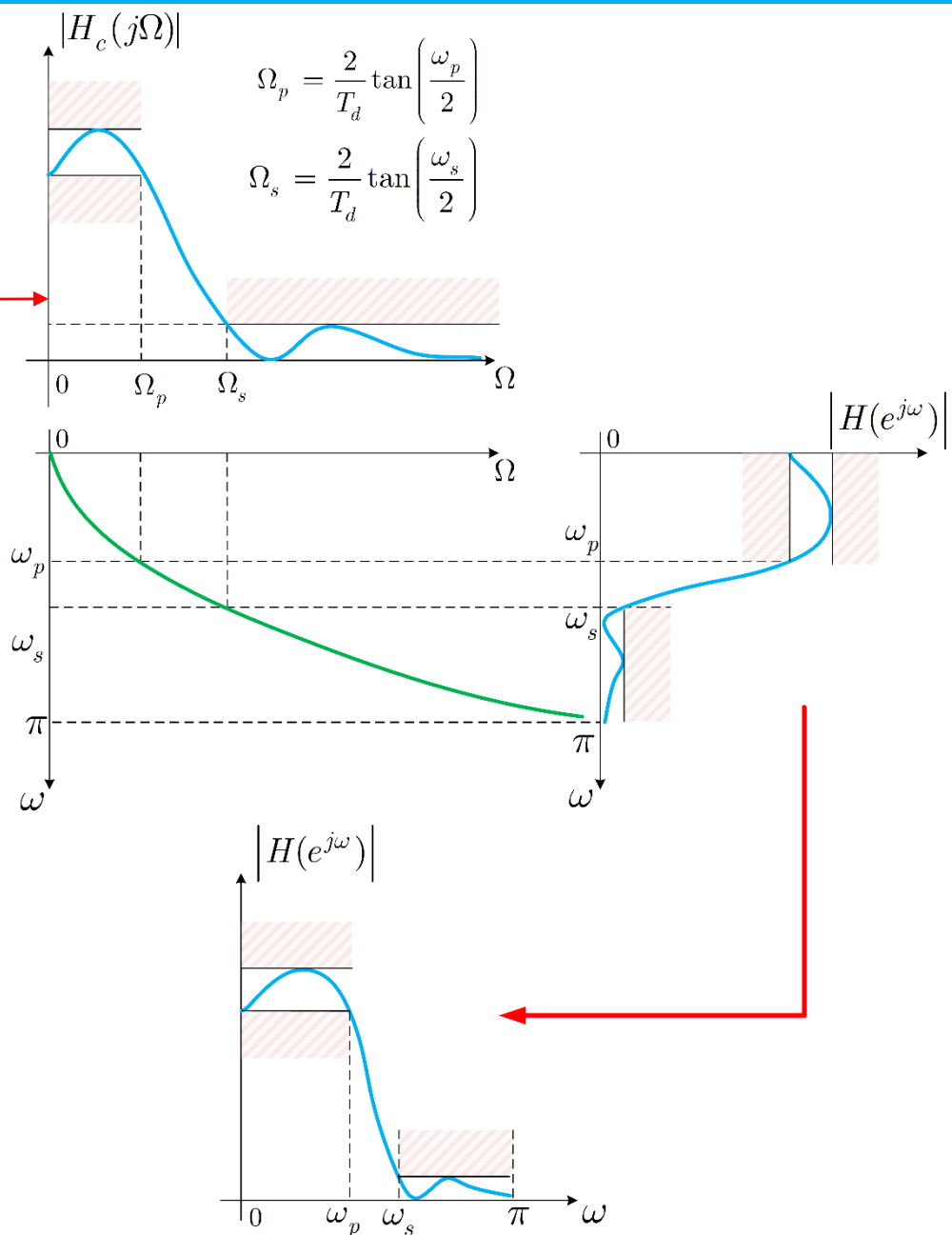
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



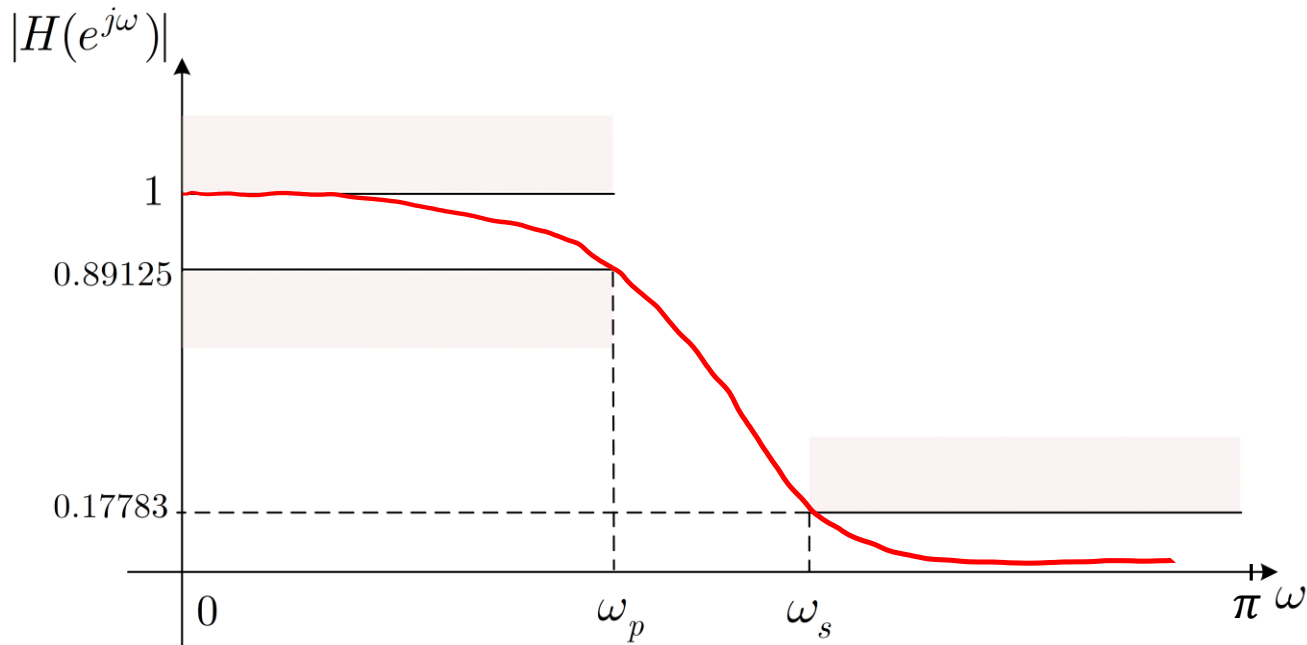
• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

Προδιαγραφές ω_p, ω_s στο
διακριτό χρόνο
μετατρέπονται στο **συνεχή**
χρόνο



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε ένα παράδειγμα σχεδίασης (ίδιο με την προηγ. μέθοδο)



- Ας ζητήσουμε $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$ και ας θεωρήσουμε $T_d = 1$

- Προδιαγραφές:

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(e^{j\omega})| & : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Μετασχηματίζουμε τις προδιαγραφές μας από $\omega \rightarrow \Omega = 2 \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$:

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 : 0 \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$0.17783 \geq |H(j\Omega)| : 2 \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

- Θέλουμε ξανά μια εξίσωση που να δέχεται τις προδιαγραφές μας!
 - Ας επιλέξουμε ξανά το φίλτρο Butterworth

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Εφαρμόζουμε προδιαγραφές:

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $N = 5.305 \rightarrow N = 6, \Omega_c = 0.766$
- Για να βρούμε ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα συνεχούς χρόνου, έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega) \Rightarrow |H(s)|^2 \Big|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

- Οι πόλοι του συστήματος

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.766}\right)^{12}} = \frac{(j0.766)^{12}}{s^{12} + (j0.766)^{12}}$$

δίνονται ως

$$s_k = 0.766e^{j\frac{\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, \dots, 11$$

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους οι οποίοι μας δίνουν ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(s)$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

• Επιλέγω τους πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο

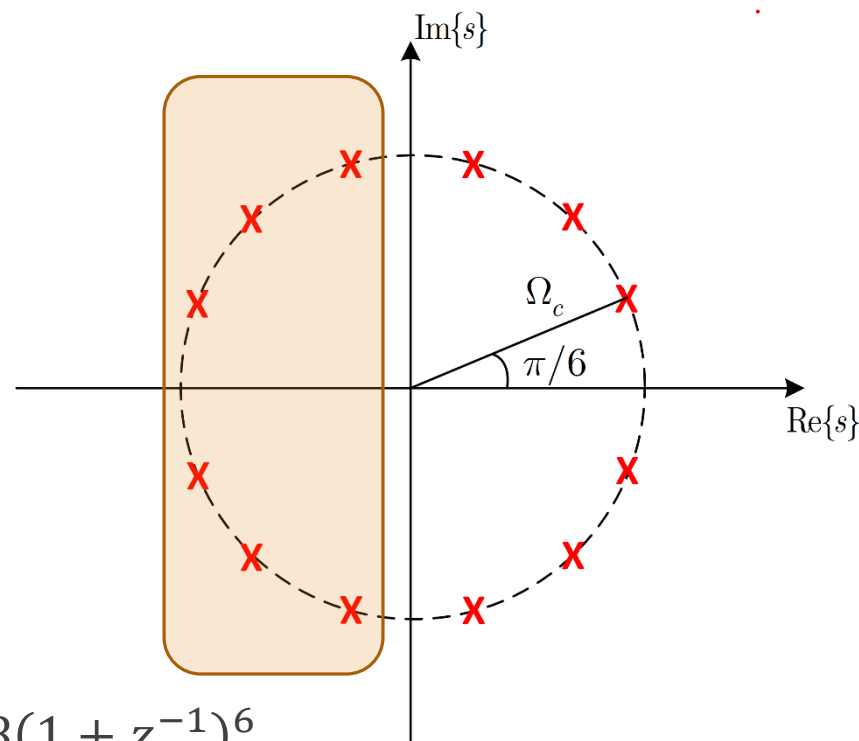
• Τότε το σύστημά μας θα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{0.766^6}{(s^2 + 0.39s + 0.58)(s^2 + 1.08s + 0.58)(s^2 + 1.48s + 0.58)}$$

• Ο Bilinear Transformation δίνει:

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow s = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

• Το σύστημά μας στο χώρο του μετασχ. Z θα είναι:



$$H(z) = \frac{0.000738(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.26z^{-1} + 0.72z^{-2})(1 - 1.01z^{-1} + 0.35z^{-2})(1 - 0.90z^{-1} + 0.21z^{-2})}$$

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Υπάρχουν πολλές εξισώσεις (φίλτρα) στις οποίες μπορούμε να θέσουμε τις προδιαγραφές μας

- Chebyshev (I, II)

- Elliptic

- Butterworth

- Bessel

- Optimum "L"

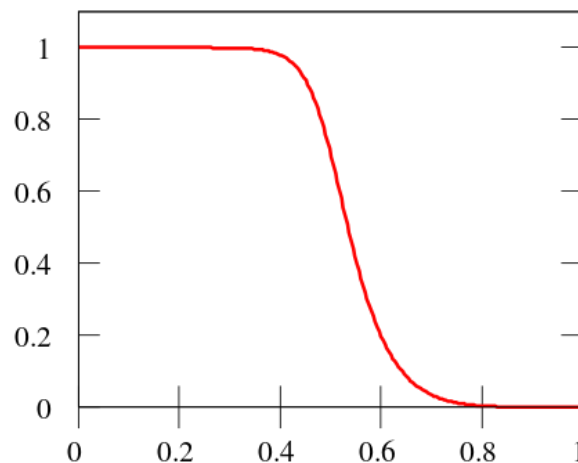
- Gaussian

- Hourglass

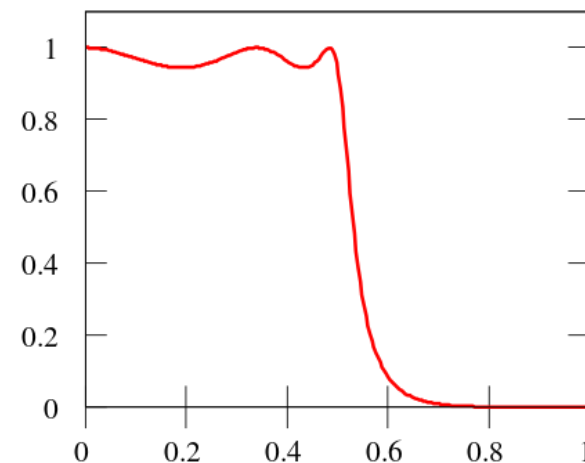
- Raised-cosine

- και πολλά άλλα! 😊

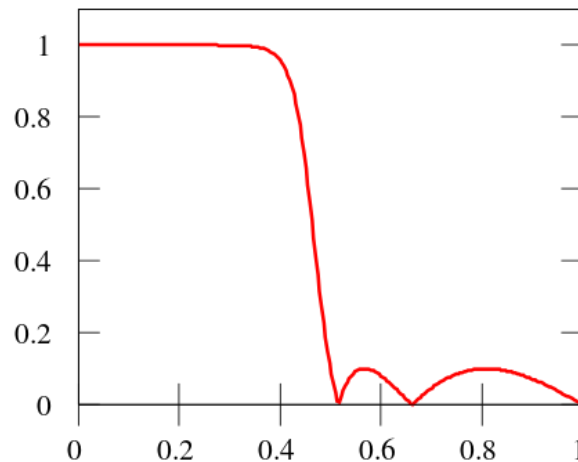
Butterworth



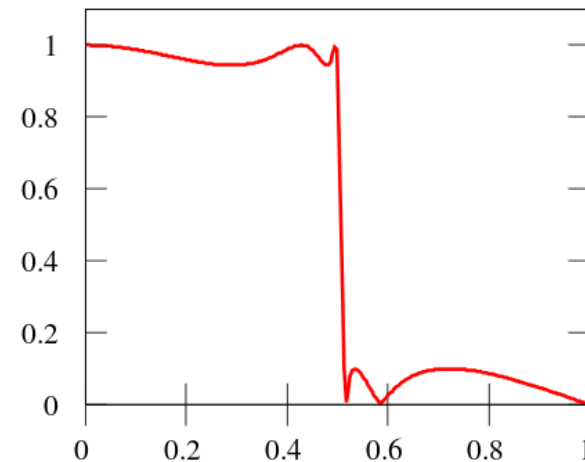
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



Elliptic



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων - Σύνοψη

- Έχουμε δει ήδη δυο μεθόδους κατασκευής ψηφιακών φίλτρων IIR μέσω του πεδίου του συνεχούς χρόνου

- ... και του μετασχ. Laplace

• Μέθοδος Impulse Invariance

- a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ συνεχούς χρόνου
- Γραμμική αντιστοιχία συχνότητας Ω σε ω
- Η διαδικασία αυτή αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο $e^{s_k T_d}$ στο χώρο του μετασχ. Z

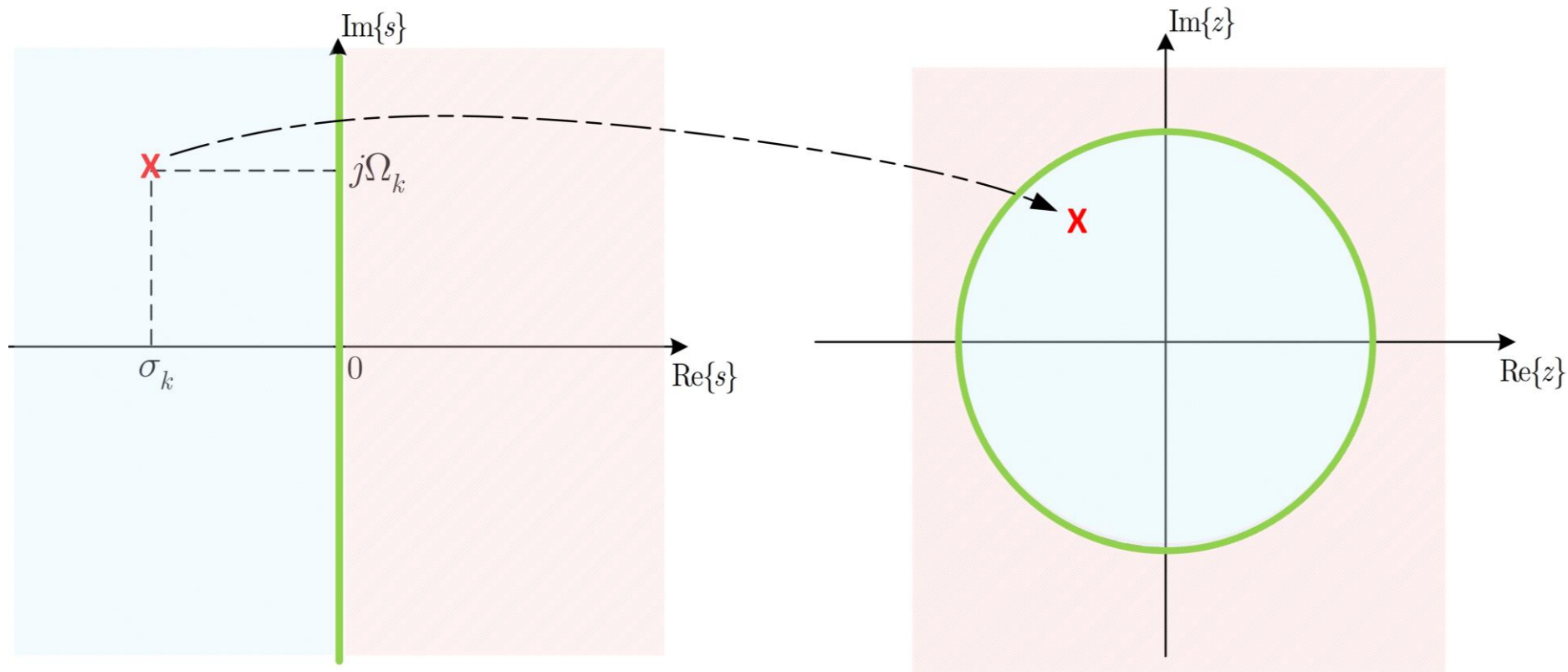
• Μέθοδος Bilinear Transformation

- a.k.a «συμπίεση» του άξονα $0 \leq \Omega \leq +\infty$ στο $0 \leq \omega \leq \pi$!!
- Μη γραμμική αντιστοιχία της αναλογικής με την ψηφιακή συχνότητα

- Η διαδικασία αντιστοιχίζει κάθε πόλο s_k στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο $\frac{1 + \frac{T_d s_k}{2}}{1 - \frac{T_d s_k}{2}}$ στο χώρο του μετασχ. Z

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Σύνοψη

- Και οι δυο μέθοδοι αντιστοιχίζουν πόλους από το μιγαδικό επίπεδο s στο μιγαδικό επίπεδο z



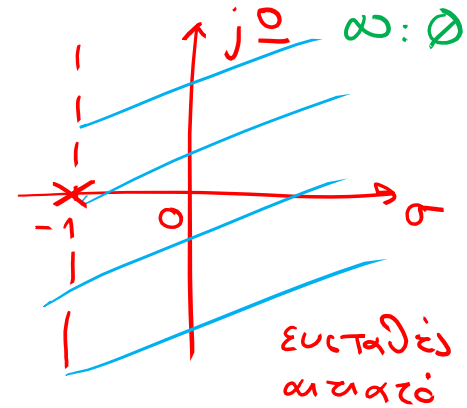
- Μήπως αντιστοιχίζονται με παρόμοιο τρόπο και τα μηδενικά?
- Γενικά, πως εφαρμόζονται οι μέθοδοι για ένα τυχαίο σύστημα στο χώρο του s ?

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα

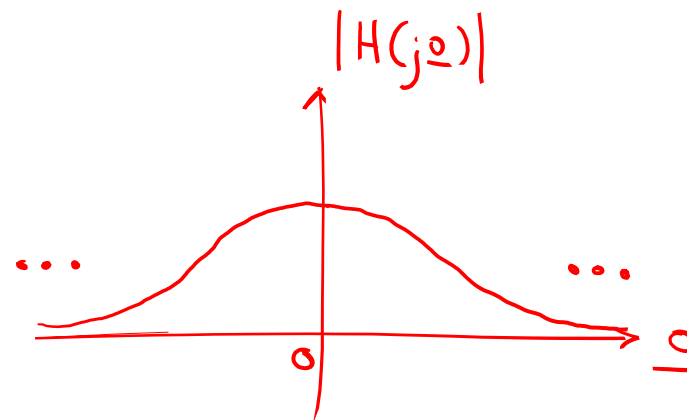
$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \mathcal{R}\{s\} > -1$$



Εφαρμόστε τις μεθόδους που μάθατε για να βρείτε το μετασχ. Z ενός φίλτρου διακριτού χρόνου που το υλοποιεί

Πόλοι: $s+1=0 \Rightarrow \boxed{s=-1}$

Μηδενικά: $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0 \Rightarrow \boxed{s=\infty}$



• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

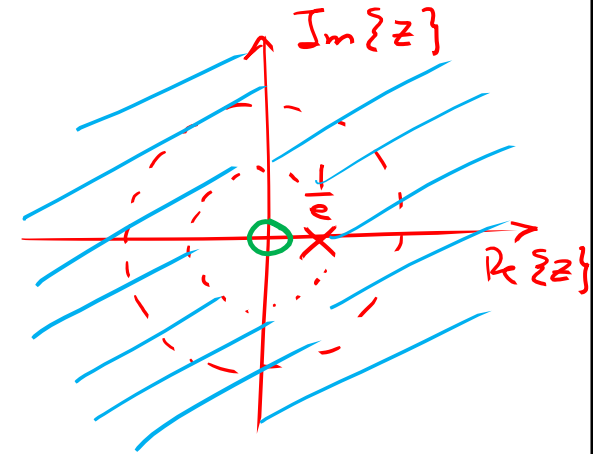
• Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$

1° Μέθοδος

Impulse Invariance

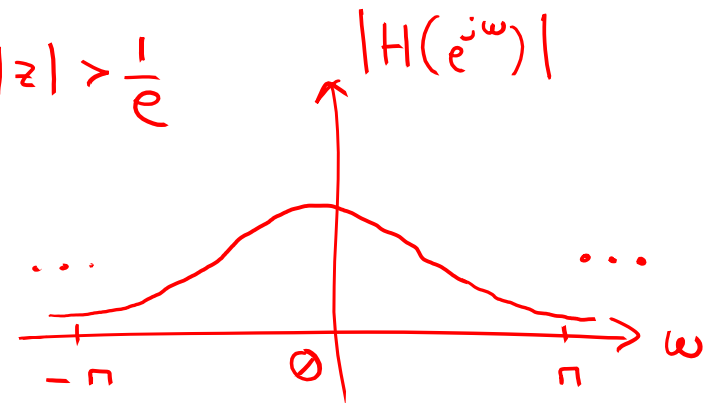
$$\frac{A_k}{s-s_k} \longrightarrow \frac{A_k}{1-e^{s_k} z^{-1}}$$



άρα $H(z) = \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-1}}, |z| > \frac{1}{e}$

Πόλοι: $z-e^{-1}=0 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{e}}$

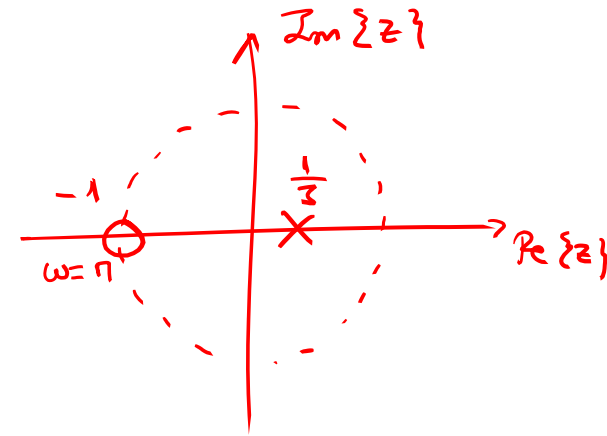
Μηδενικά: $\boxed{z=0}$



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$



2^η Μέθοδος:
Bilinear Transf.

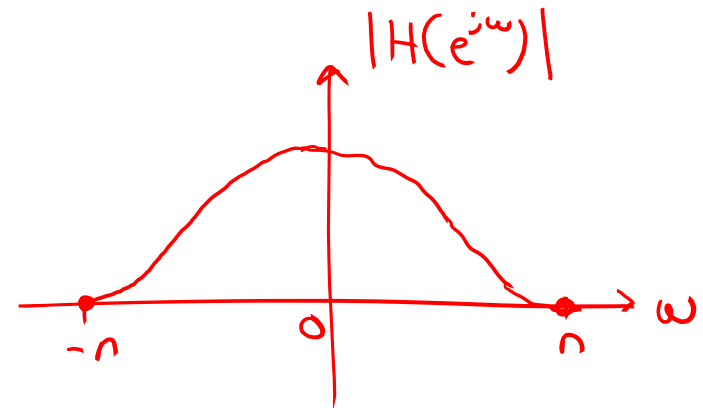
$$s \rightarrow 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

όρα

$$H(z) = \frac{1}{2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}} = \frac{z+1}{3z-1}$$

Πόλοι: $3z-1=0 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{3}}$

Μηδενικά: $z+1=0 \Rightarrow \boxed{z=-1}$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

