

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15^Η

- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

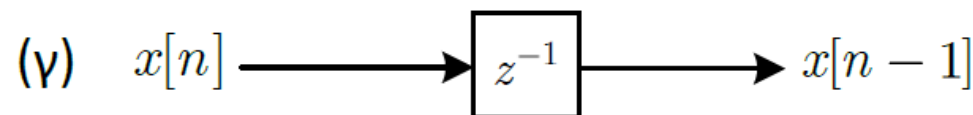
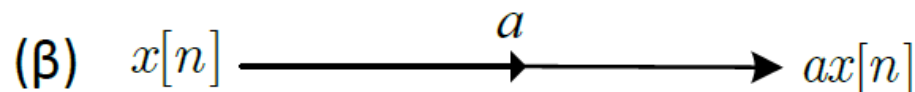
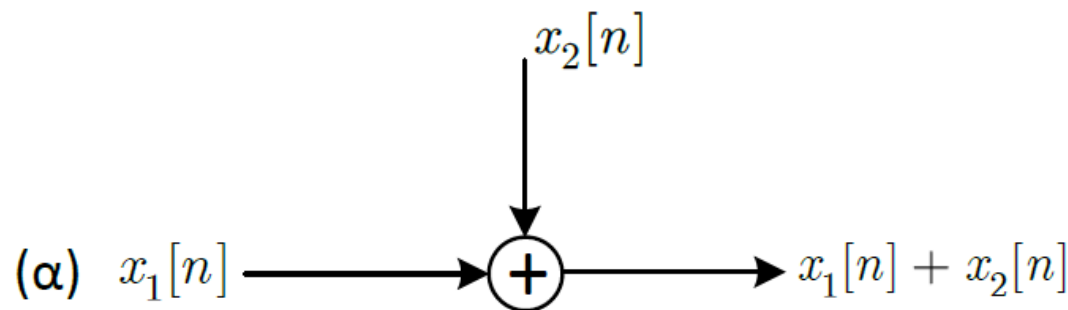
- Για να υλοποιήσουμε ένα σύστημα πρέπει να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ή την εξίσωση διαφορών σε μια δομή που πραγματοποιείται από την υπάρχουσα τεχνολογία

- Βασικοί δομικοί λίθοι:

- ☐ Πρόσθεση

- ☐ Πολλαπλασιασμός

- ☐ Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)



- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Έστω η εξίσωση διαφορών $y[n] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] = b_0x[n]$

- Έχουμε πολλές επιλογές για την υλοποίησή της

- Κόστος:

- ☐ Πλήθος πράξεων

- ☐ Πλήθος θέσεων μνήμης

- ☐ Ευρωστία σε πεπερασμένη αριθμητική ακρίβεια

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

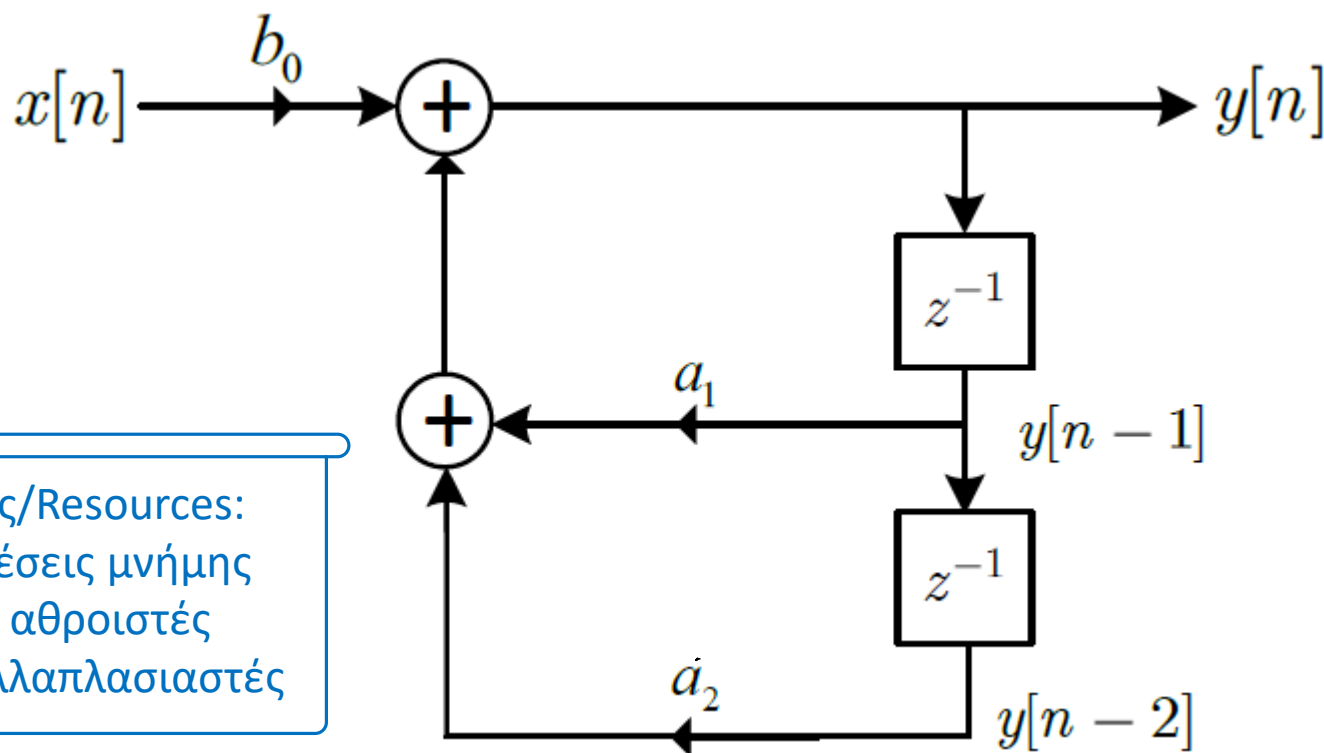
$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1z^{-1} + a_2z^{-2})}$$

- Με βάση την εξίσωση διαφορών, μπορούμε κατασκευάσουμε μια δομή που την υλοποιεί

• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$



Κόστος/Resources:

- 2 θέσεις μνήμης
- 2 αθροιστές
- 3 πολλαπλασιαστές

- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου
- Για μεγαλύτερης τάξης εξίσωσης διαφορών

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

- Ξαναγράφουμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

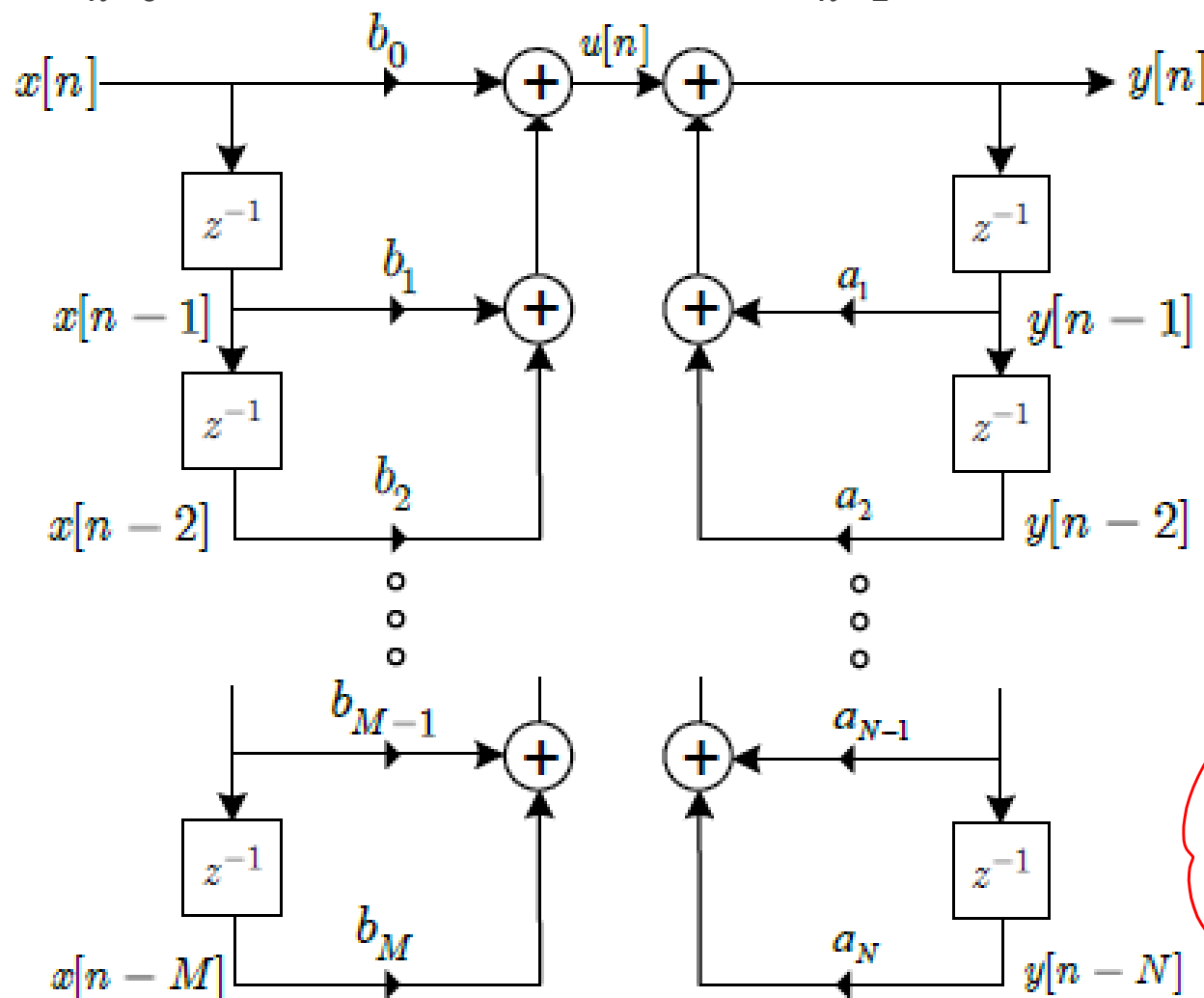
- Δυο υπο-εξισώσεις:

$$u[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + u[n]$$

- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

$$u[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + u[n]$$



$M+N$
 δείξεις
 τύπων

• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

- Η προηγούμενη υλοποίηση υλοποιεί πρώτα το FIR τμήμα του φίλτρου (αριθμητή) και στη συνέχεια το IIR κομμάτι (παρονομαστή)

- Η υλοποίηση μπορεί να γραφεί ως

$$u[n] = \sum_k b_k x[n-k] \quad \left| \quad H(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right| \quad y[n] - \sum_k a_k y[n-k] = u[n]$$

δηλ. ως δυο υποσυστήματα σε σειρά

- Μπορούμε όμως να γράψουμε και ότι

$$H(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad \left| \quad \begin{aligned} &w[n] - \sum_k a_k w[n-k] = x[n] \\ &y[n] = \sum_k b_k w[n-k] \end{aligned} \right|$$

που είναι ισοδύναμη υλοποίηση ως υλοποίηση

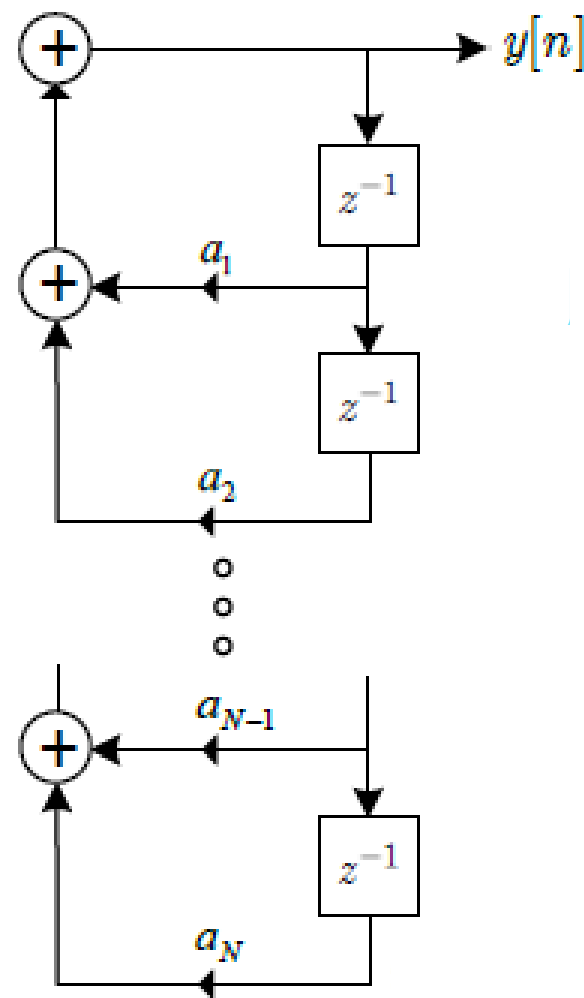
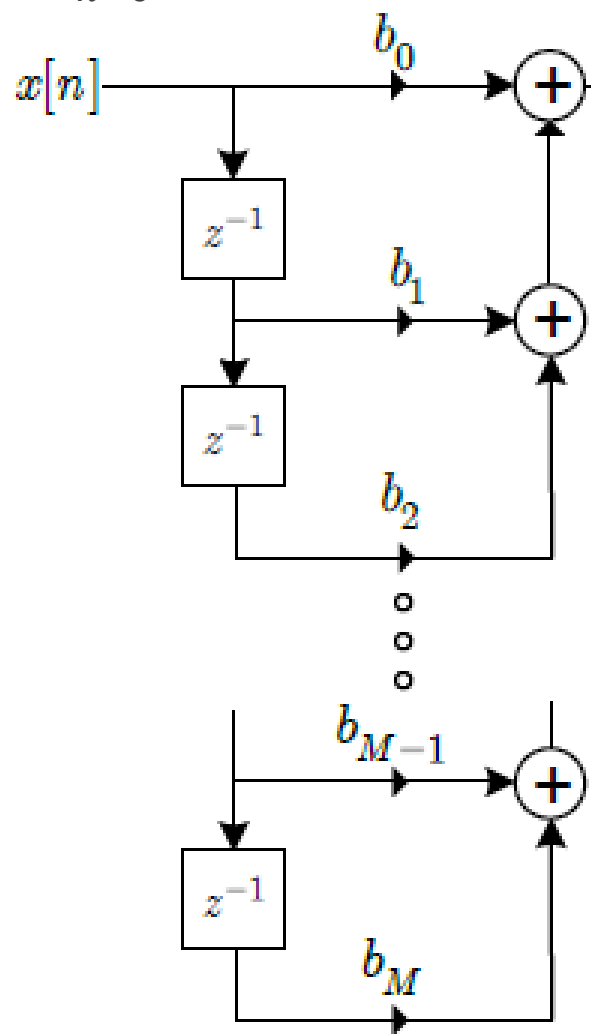
- Οδηγεί όμως σε διαφορετικές εξισώσεις διαφορών για κάθε υποσύστημα

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k] \quad , \quad w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

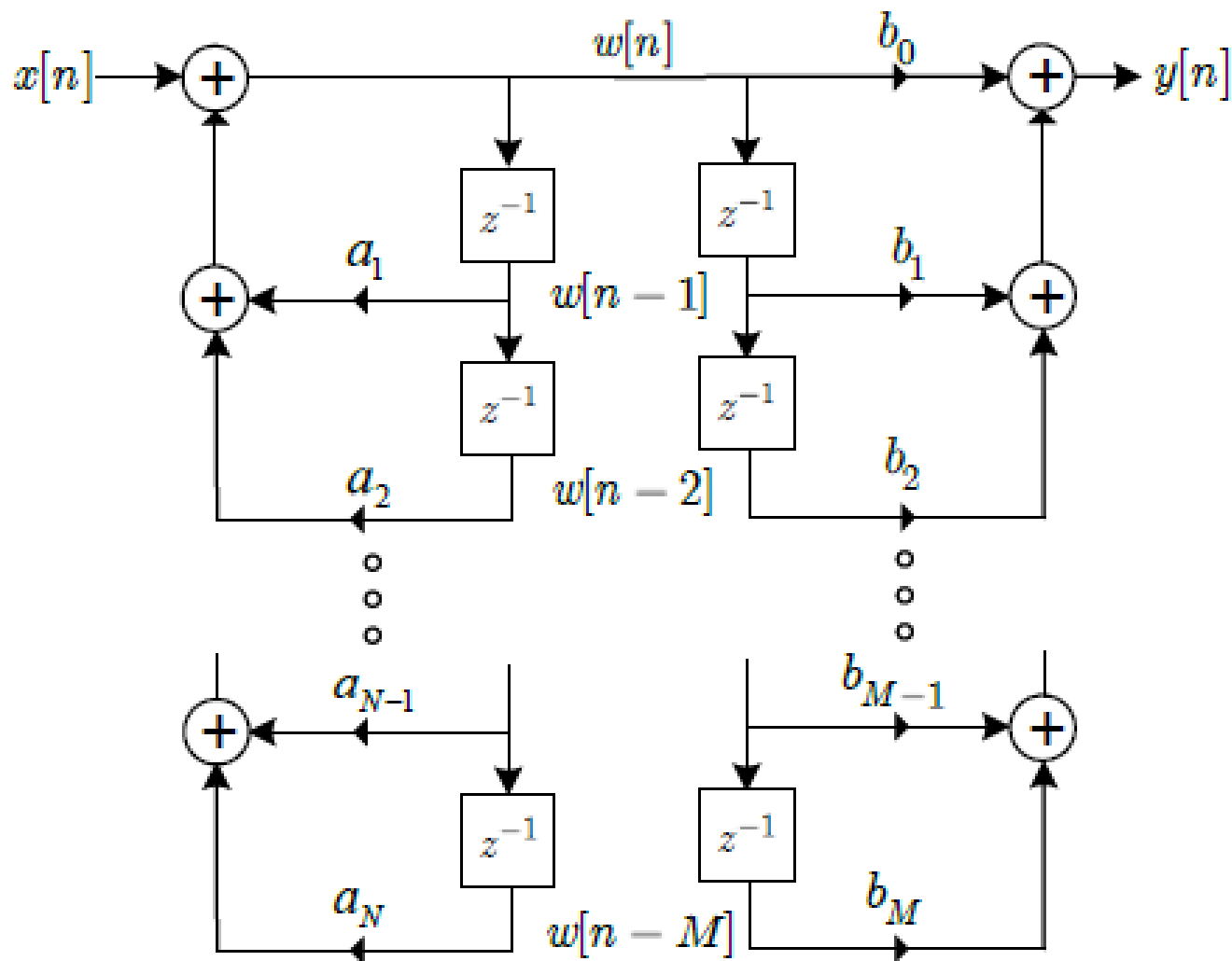
$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k] \quad ,$$

$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$

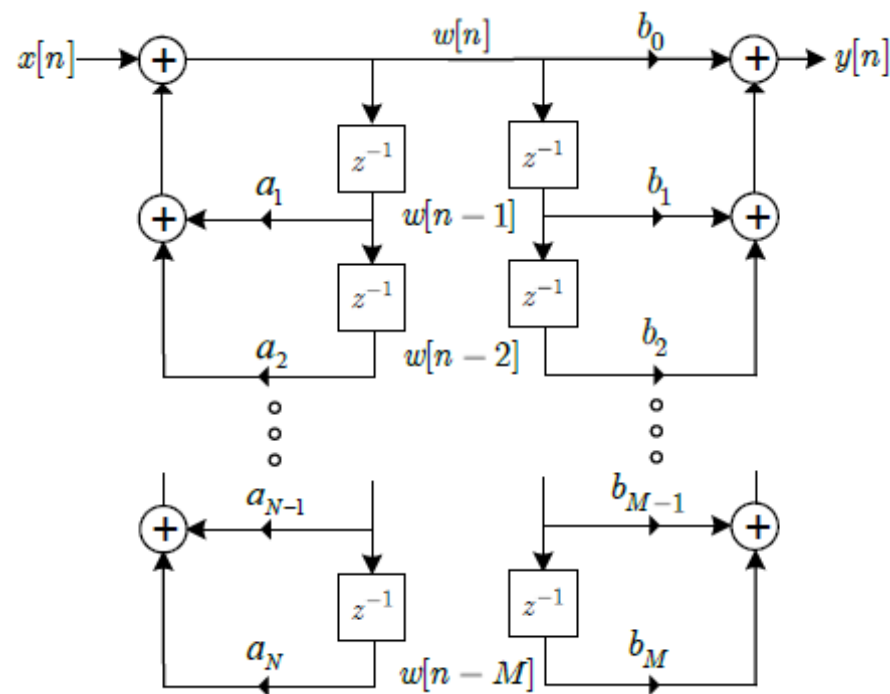
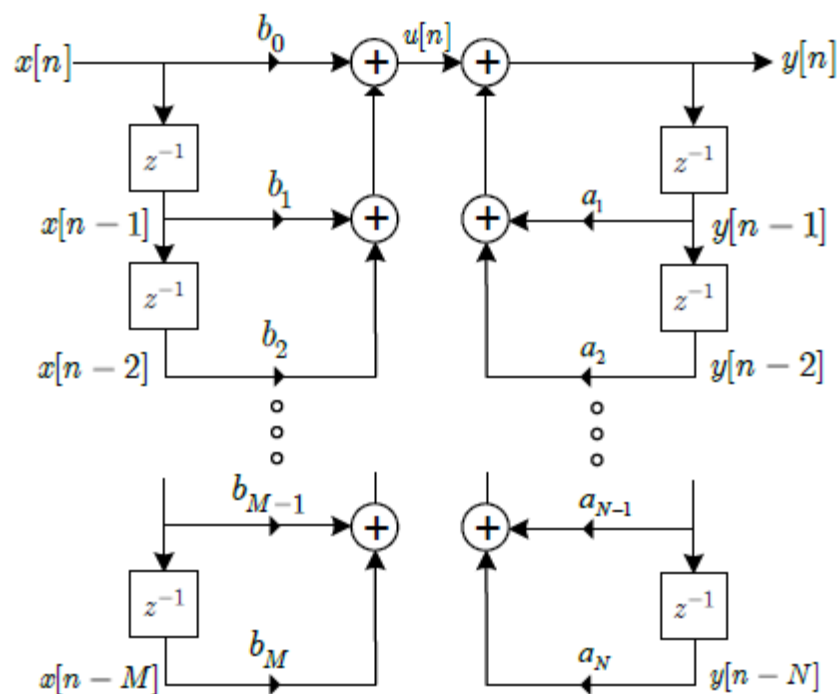


- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k] \quad , \quad w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n]$$



• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου



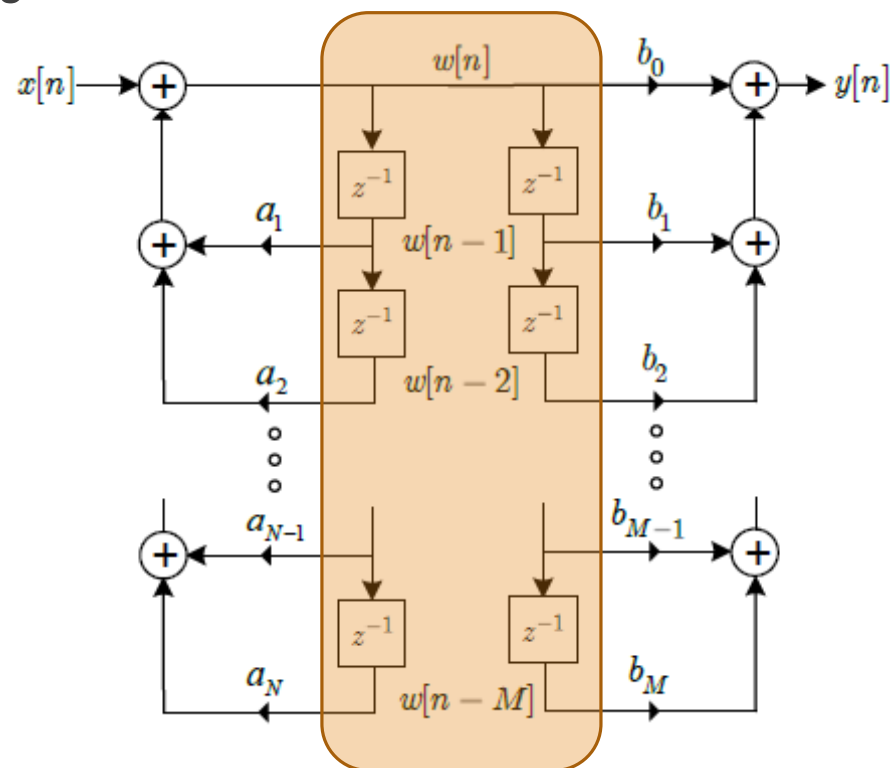
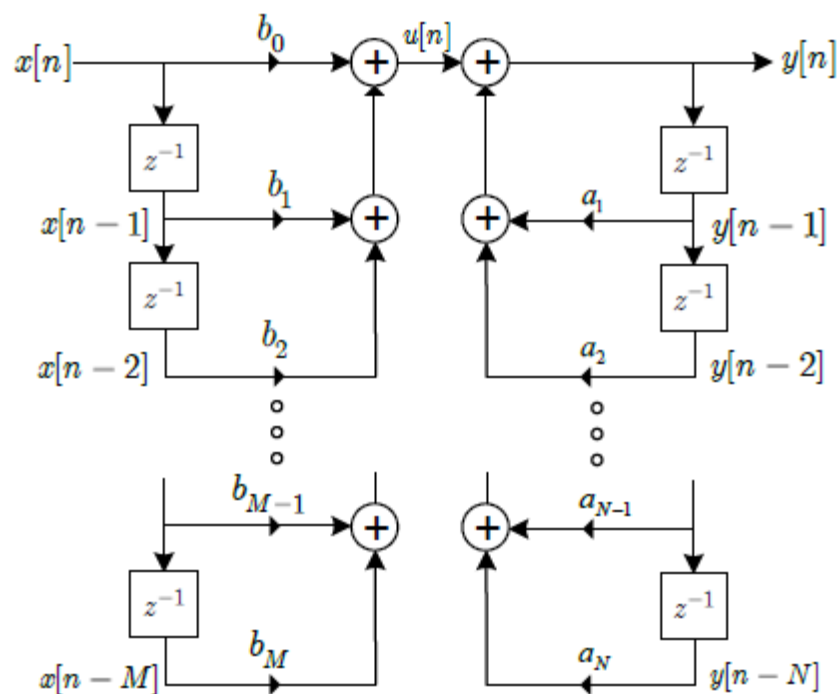
• Βασικές διαφορές των δυο υλοποιήσεων

- ☐ Στην πρώτη, υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά και μετά οι πόλοι
- ☐ Στη δεύτερη, υλοποιούνται πρώτα οι πόλοι και μετά τα μηδενικά

• Θεωρητικά, οι δυο υλοποιήσεις είναι ισοδύναμες

- ☐ Πρακτικά, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές! (λόγω υλοποίησης σε πεπερασμένη ακρίβεια)

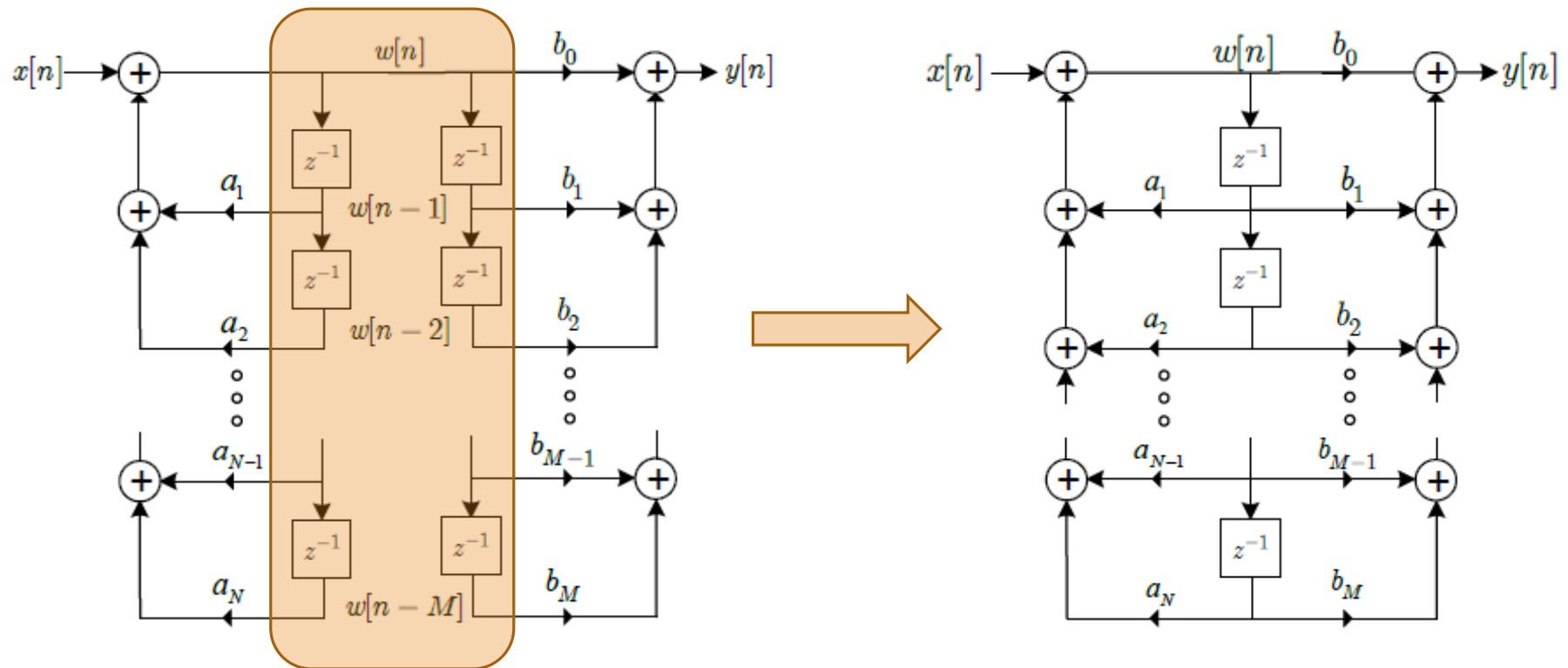
• Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου



• Παρατήρηση:

- Οι μεταβλητές $w[n - k]$ αποθηκεύονται δυο φορές στη δεύτερη υλοποίηση!
- Μπορούμε να «γλιτώσουμε» θέσεις μνήμης!
- Μπορούμε να μοιράσουμε τις ίδιες θέσεις μνήμης και στους δυο κλάδους
- Αν $M = N$ (όπως στο σχήμα), τότε γλιτώνουμε M θέσεις μνήμης
- Αν $M \neq N$, τότε γλιτώνουμε $\min(M, N)$ θέσεις μνήμης

- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου



- Η νέα υλοποίηση, που χρησιμοποιεί τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων καθυστέρησης (μνήμης) αναφέρεται ως **κανονική μορφή** (canonical form) ή **Direct Form II**
- Η μη κανονική μορφή στο αριστερό σχήμα ονομάζεται **Direct Form I**

- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

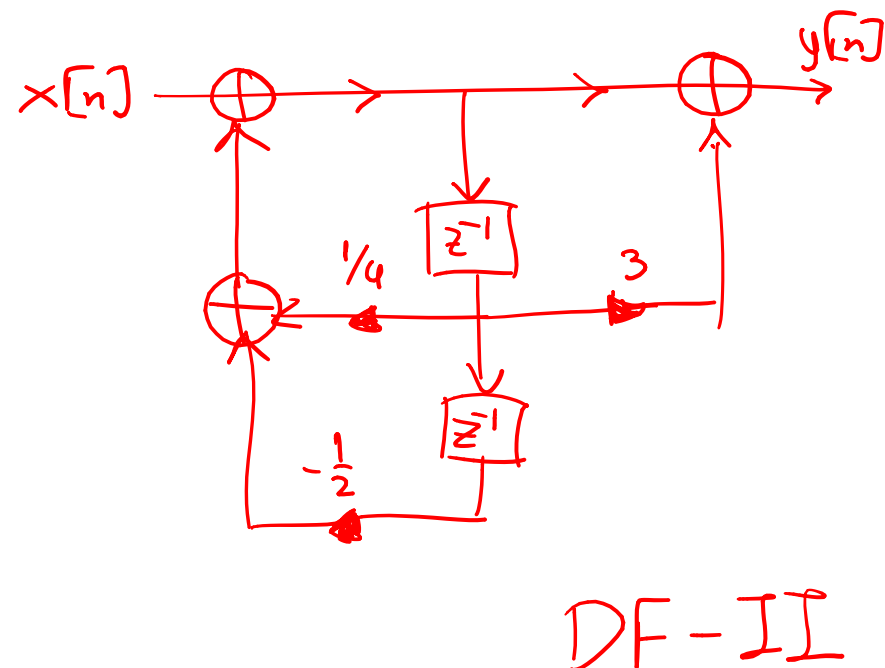
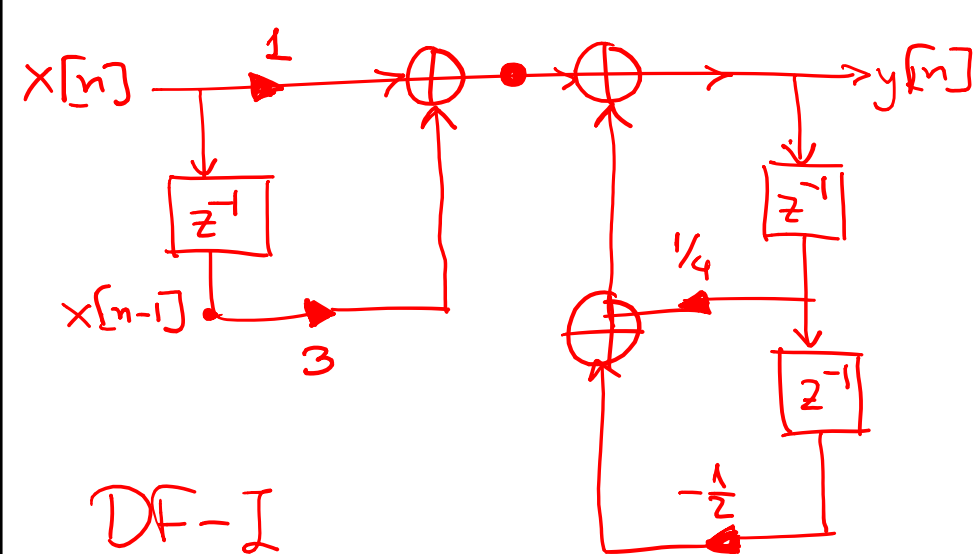
- Παράδειγμα:

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] + x[n] + 3x[n-1]$$

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \left(\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



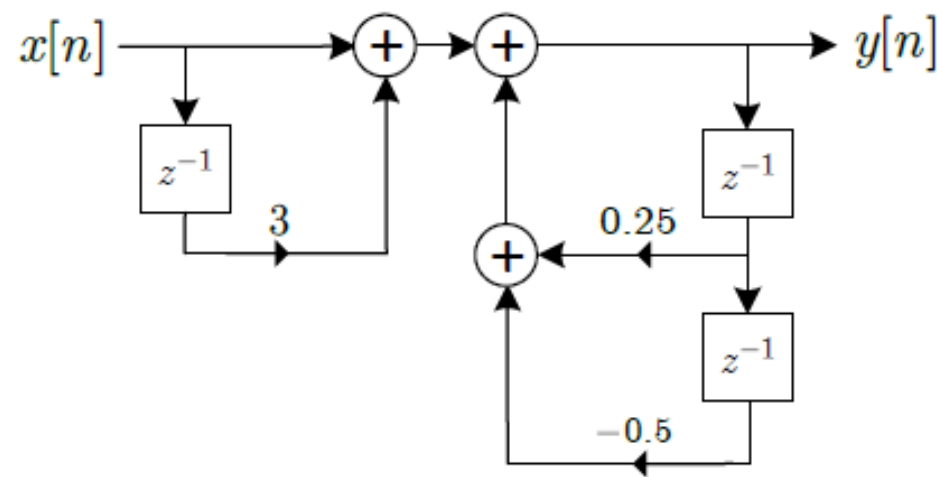
- Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

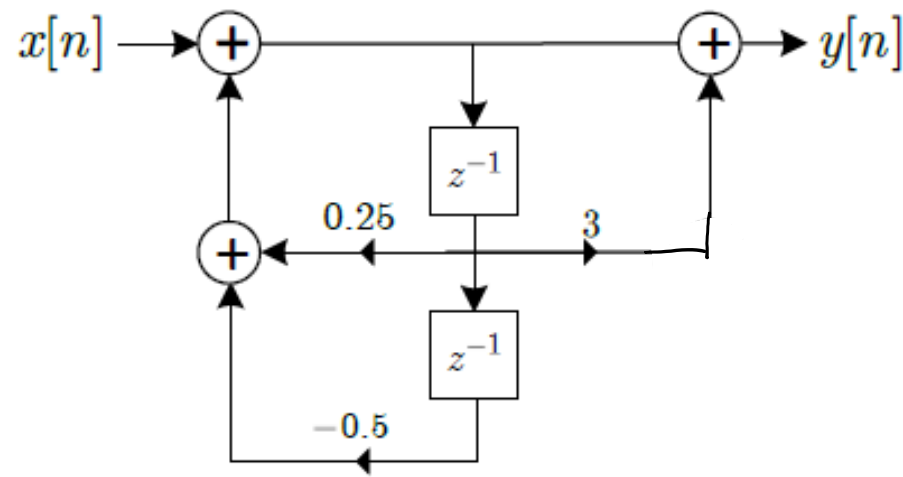
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II



(α)

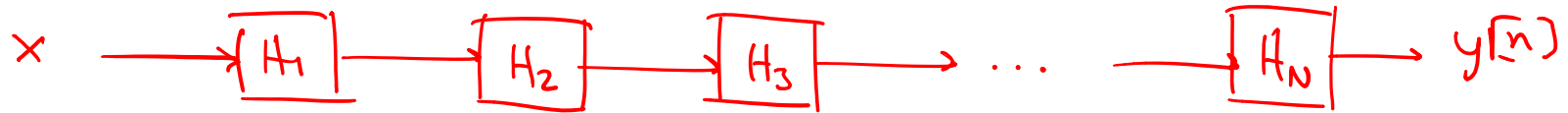


(β)

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Γνωρίζουμε ότι τα συστήματα χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες: FIR, IIR
- Ας δούμε πόσο διαφέρουν οι υλοποιήσεις ανάλογα με την κατηγορία
- Ξεκινάμε με τα IIR
- Θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις ενός IIR συστήματος
- Πώς επιλέγουμε την κατάλληλη;
 - ✓ **Πλήθος πολλαπλασιασμών → χρονοβόρα πράξη**
 - ✓ **Πλήθος καθυστερήσεων → κόστος σε μνήμη**
 - ✓ Εμβαδό, απλότητα, και αρθρωτή υλοποίηση → σημασία σε VLSI υλοποιήσεις
 - ✓ Καταμερισμός αλγορίθμου, επικοινωνία επεξεργαστών → πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον
 - ✓ Ευρωστία σε πεπερασμένη ακρίβεια → προτίμηση από πιο οικονομικές υλοποιήσεις

- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Μορφή σε σειρά (cascade form)



- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - e_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

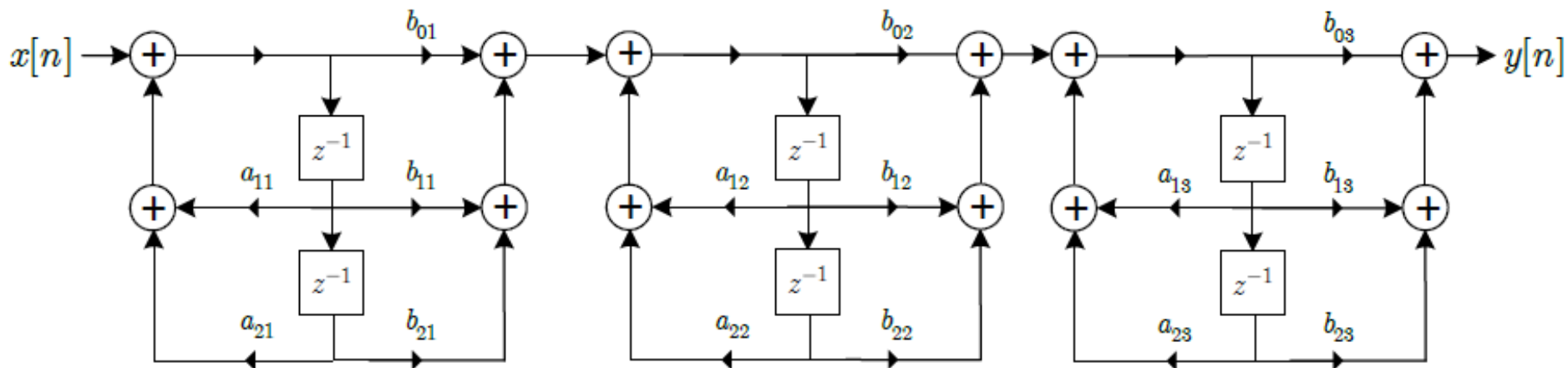
$$\mu\epsilon N = N_1 + 2N_2, \quad M = M_1 + 2M_2$$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

$$\mu\epsilon N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$$

- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Μορφή σε σειρά (cascade form)
- Παράδειγμα 6^{ης} τάξης



- Οργανωμένο σε υποσυστήματα δευτέρας τάξης Direct Form II

$$H(z) = \prod_{k=1}^3 \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

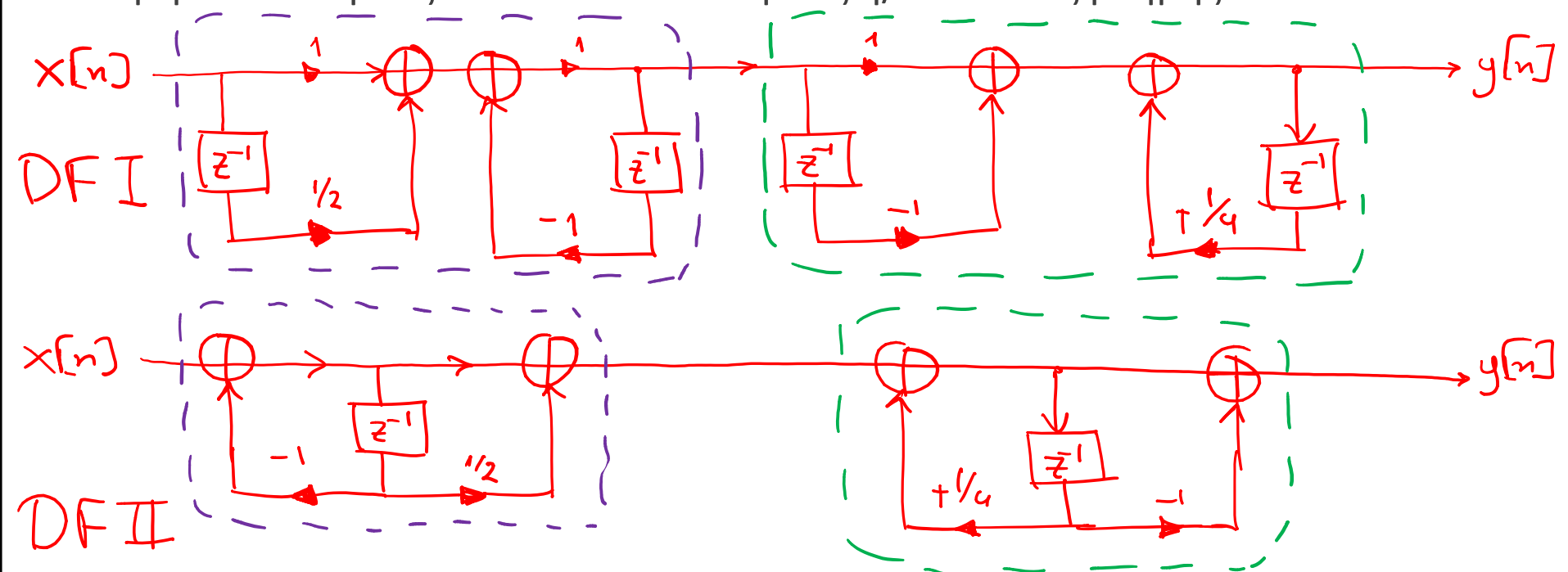
- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}{\left(1 + z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων και αναφέρετε το κέρδος σε πολλαπλασιασμούς ή/και θέσεις μνήμης



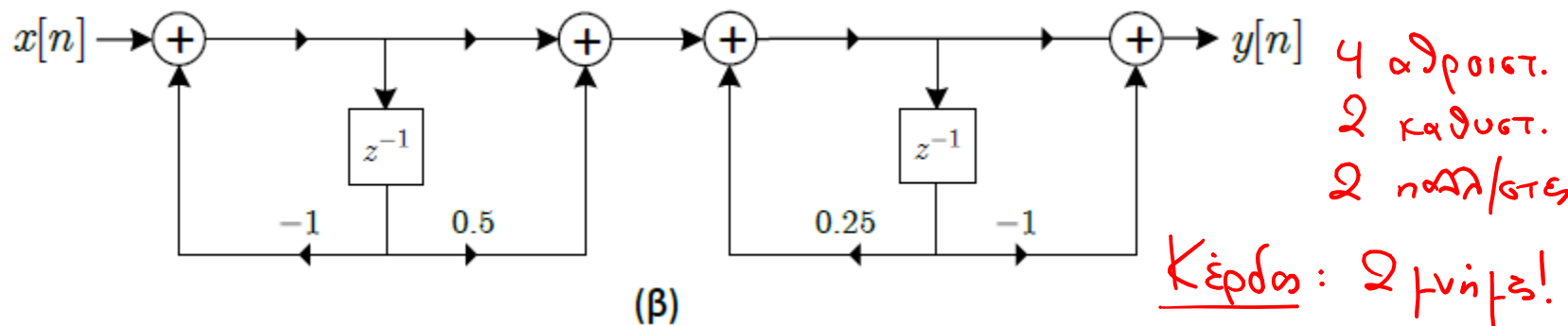
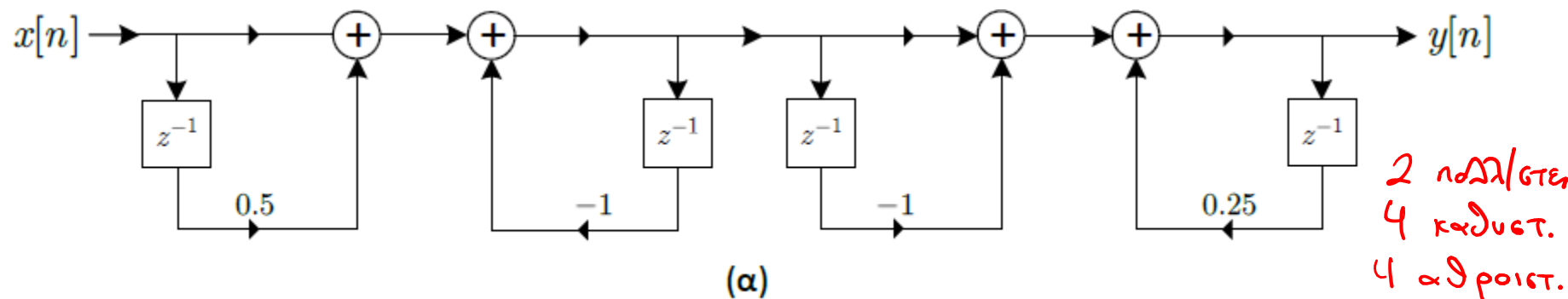
- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις σε σειρά με χρήση Direct Form I, II υποσυστημάτων



- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
 - Προκύπτει από το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα
- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

$$\text{με } N = N_1 + 2N_2$$

- Εναλλακτικά

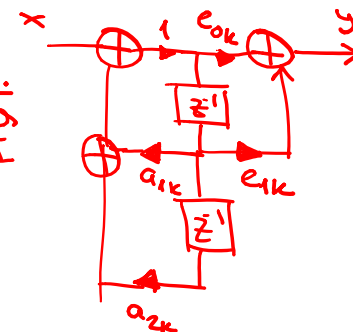
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

$\overbrace{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}^{H_k(z)}$

$\underbrace{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}_{\text{δευτεροβάθμια}}$

$\frac{n.x.}{\text{DFII}}$

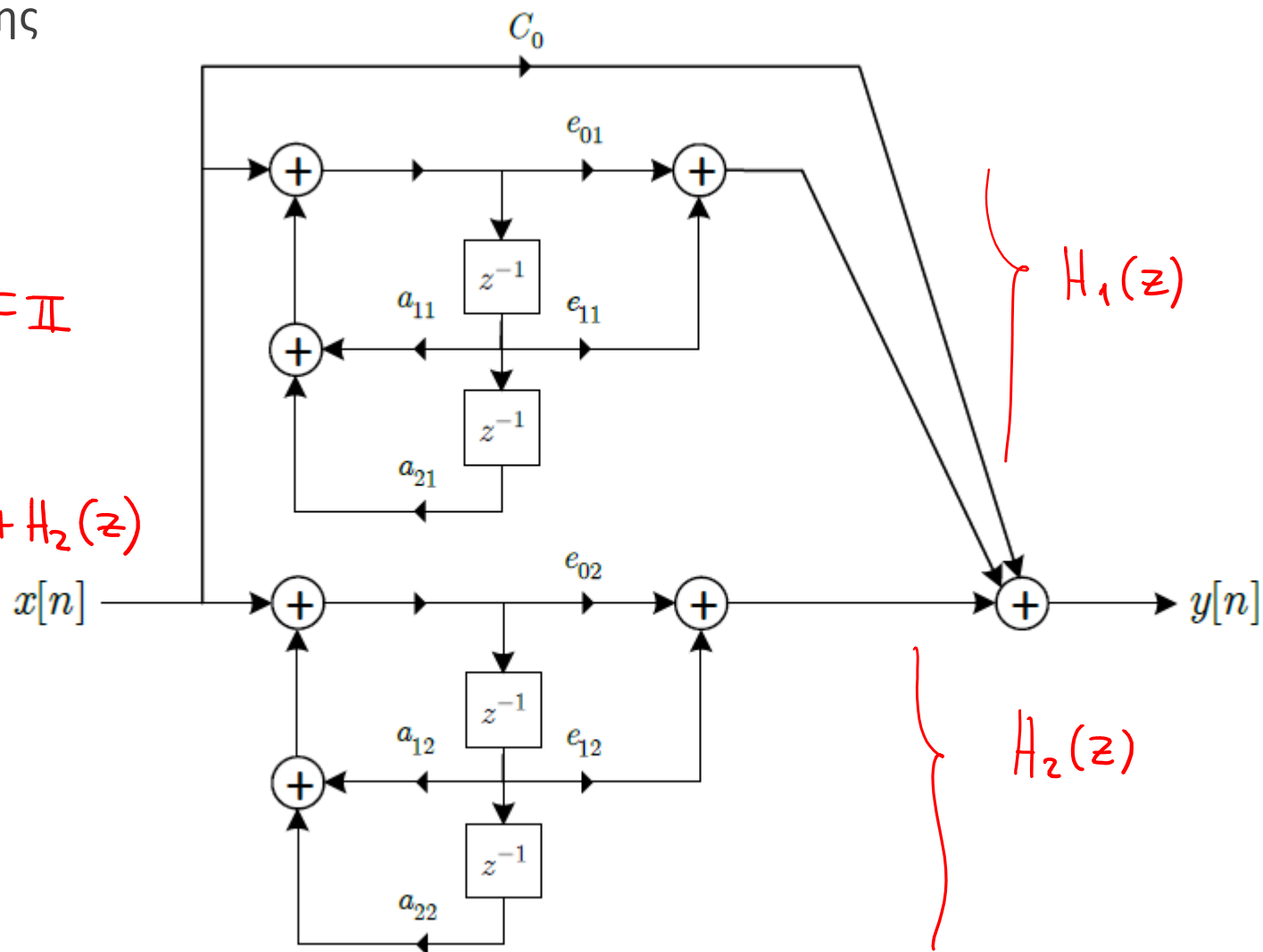
$$\text{με } N_s = \left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil$$



- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου
- Παράλληλη Μορφή (parallel form)
- Παράδειγμα 4^{ης} τάξης

Οργάνωση σε
υποσυστήματα DF II
δευτέρου βαθμού

$$H(z) = C_0 + H_1(z) + H_2(z)$$



- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

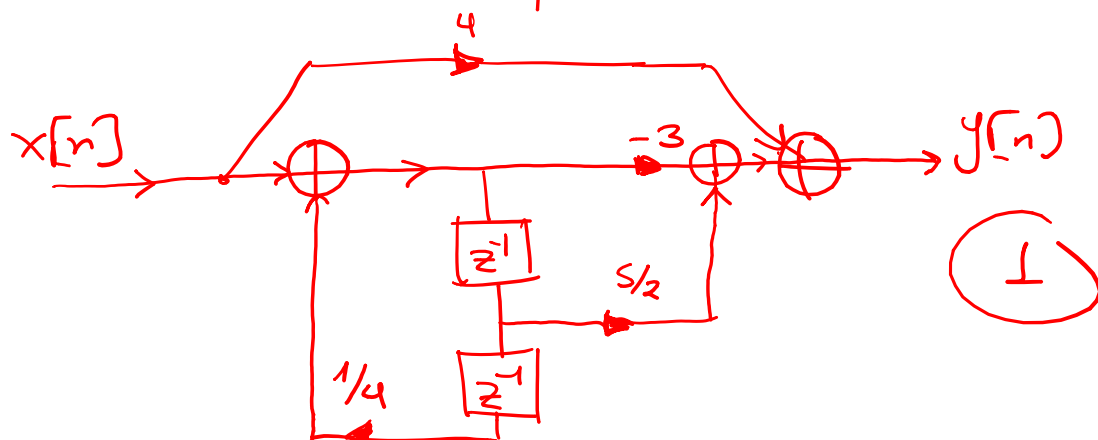
$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}} \quad \rightsquigarrow 2^{\text{ος}} \beta. \quad \text{A.S.K}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης

$$\begin{array}{r|l} -z^{-2} + \frac{5}{2}z^{-1} + 1 & -\frac{1}{4}z^{-2} + 1 \\ -(-z^{-2} + 0z^{-1} + 4) & 4 \\ \hline 0z^{-2} + \frac{5}{2}z^{-1} - 3 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow H(z) = 4 + \frac{-3 + \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (1)$$

$$= 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2)$$



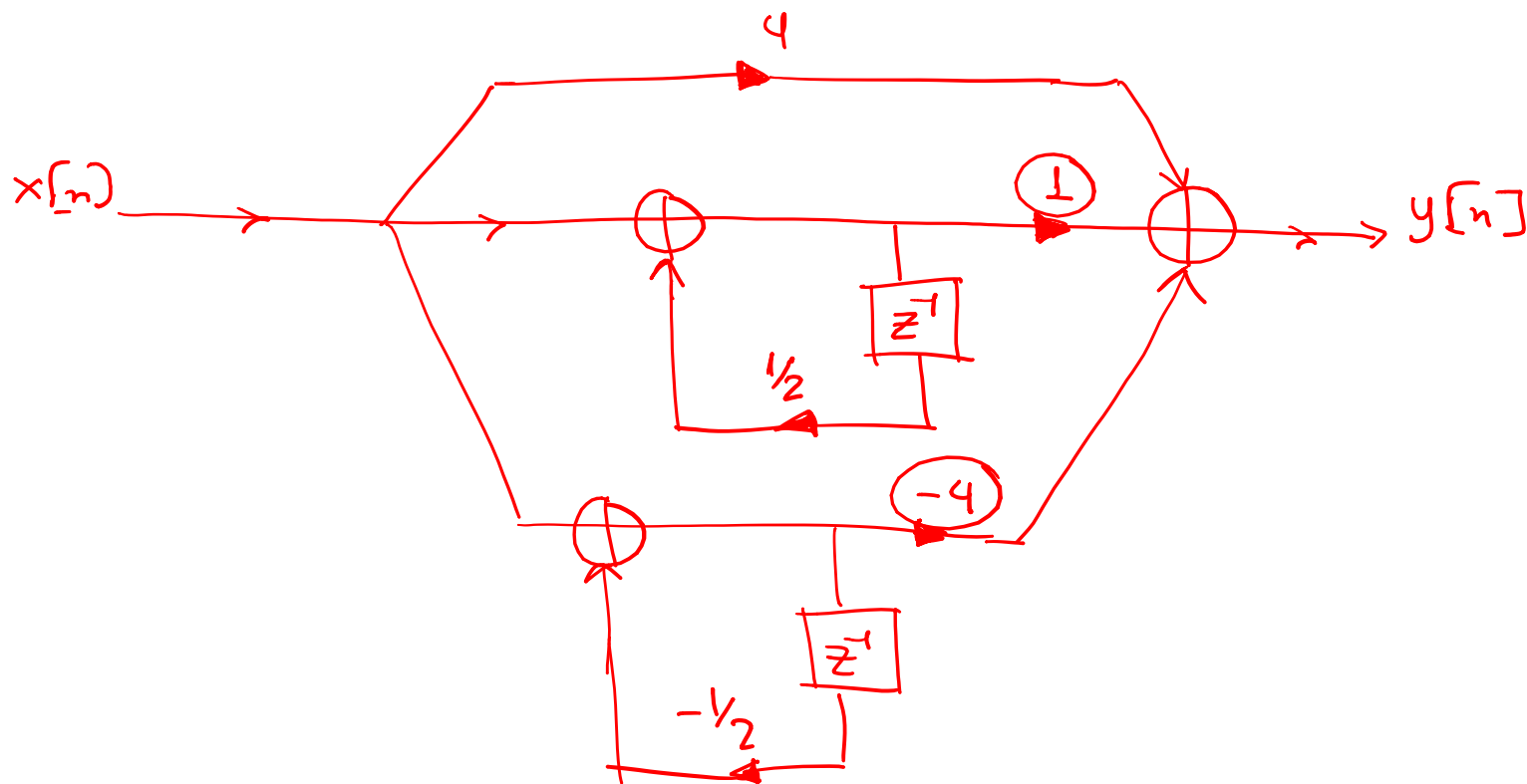
Υλοποίηση με
δευτεροβάθμιο
υποσύστημα

- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Υλοποίηση της (2):



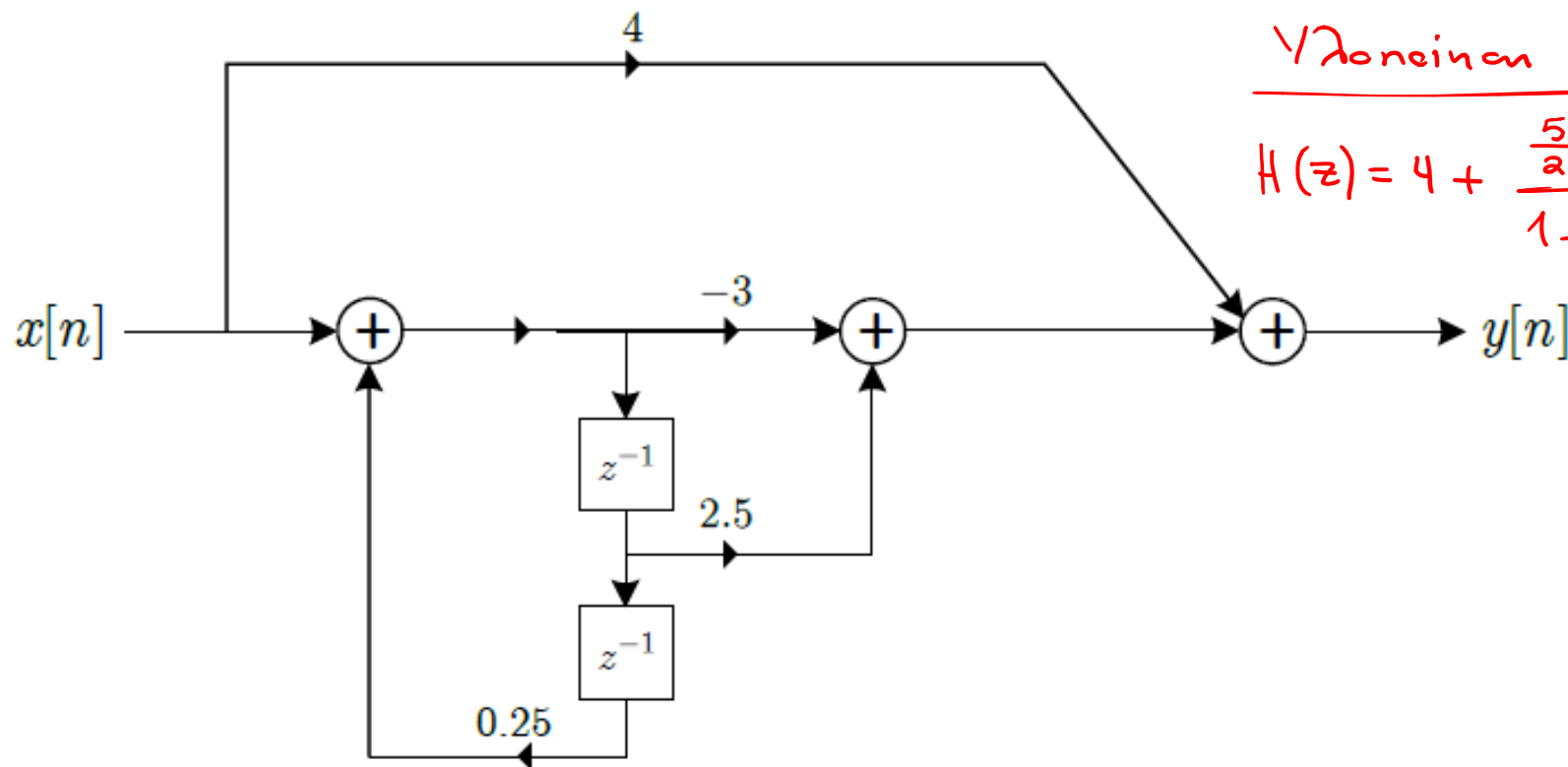
- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης



Υλοποίηση της (1)

$$H(z) = 4 + \frac{\frac{5}{2}z^{-1} - 3}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

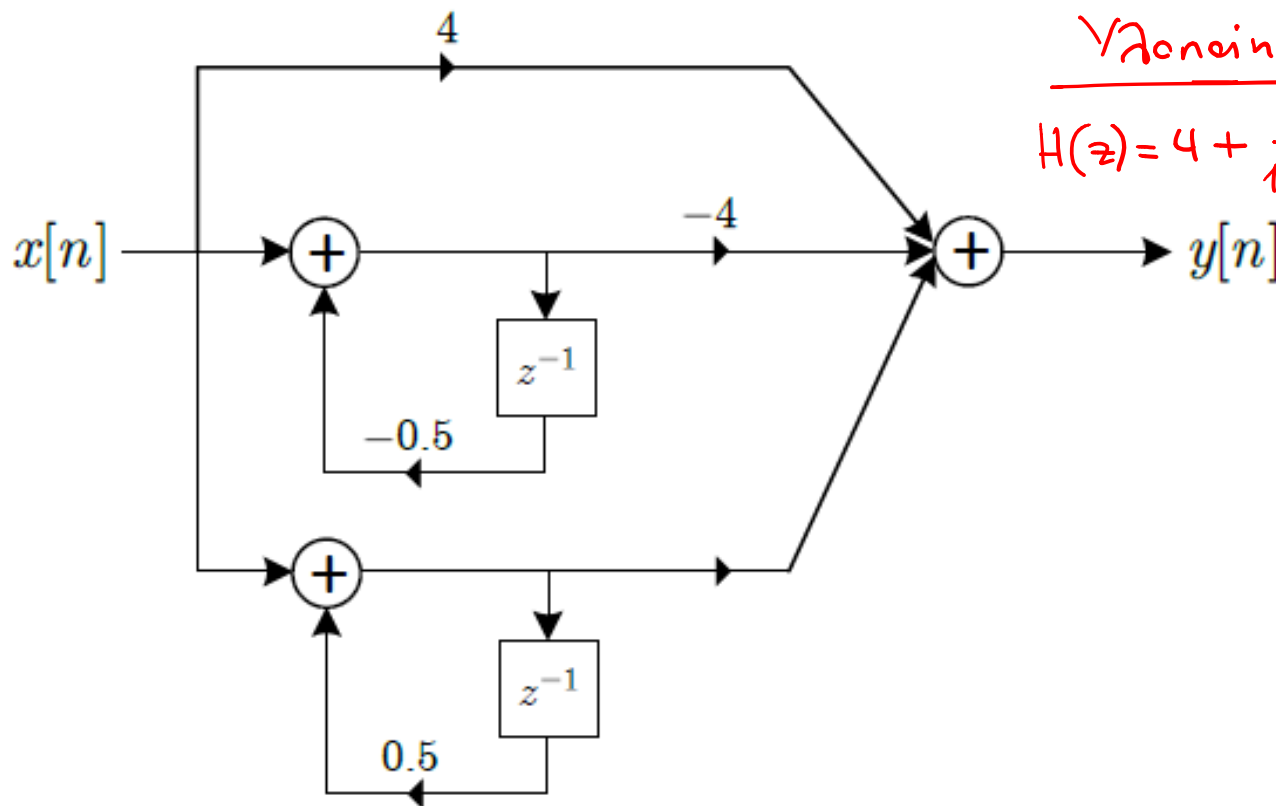
- Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 2.5z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}}$$

Σχεδιάστε την υλοποίηση σε παράλληλη μορφή με υποσυστήματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης



Υλοποίηση τω (2)

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

