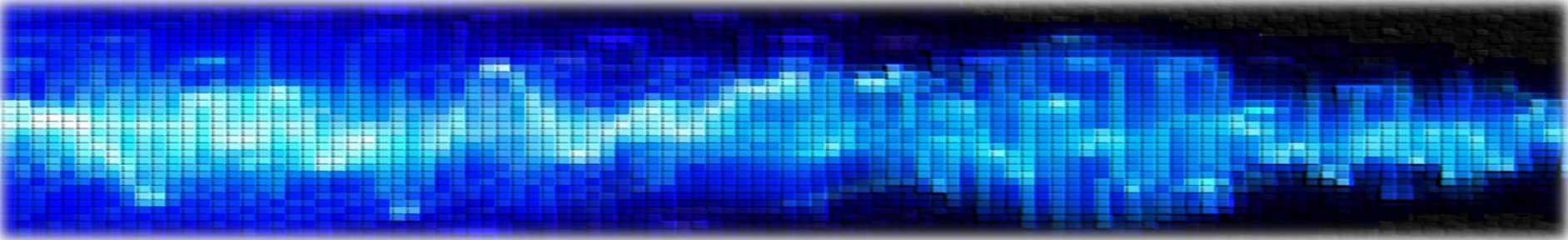


Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 14^Η

- 
- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης (cont'd)
 - Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Συστήματα με όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου
- Εναλλακτικά, συστήματα αιτιατά και ευσταθή, και με αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο σύστημα
- Γιατί τα συστήματα αυτά ονομάζονται ελάχιστης φάσης?
- Η επιλογή του ονόματος προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους
- Ας τη δούμε, μαζί με άλλες δυο σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων αυτών

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\angle H_{ap}(e^{j\omega}) \leq 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\angle H(e^{j\omega}) \leq \angle H_{min}(e^{j\omega})$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **απόκριση φάσης με τις μεγαλύτερες τιμές** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους
- Εναλλακτικά, αν ορίσουμε την συνάρτηση «καθυστέρηση φάσης» ως την αρνητική της απόκρισης φάσης

$$\theta(\omega) = -\angle H(e^{j\omega})$$

τότε το αιτιατό και ευσταθές σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την καθυστέρηση φάσης με τις μικρότερες τιμές από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους

- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης φάσης», αλλά έχει επικρατήσει απλά το «ελάχιστης φάσης»

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**

- Έχουμε δείξει ότι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

- Κατά συνέπεια

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]$$

- Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] > 0 \quad \forall \quad \omega \in [0, \pi]$$

- Έτσι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] > \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})]$$

- Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την **καθυστέρηση ομάδας με τις μικρότερες τιμές, δηλ. την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας** από κάθε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους
- Ένα πιο σωστό όνομα για τα συστήματα αυτά θα ήταν «ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας», αλλά δε χρησιμοποιείται αυτός ο όρος

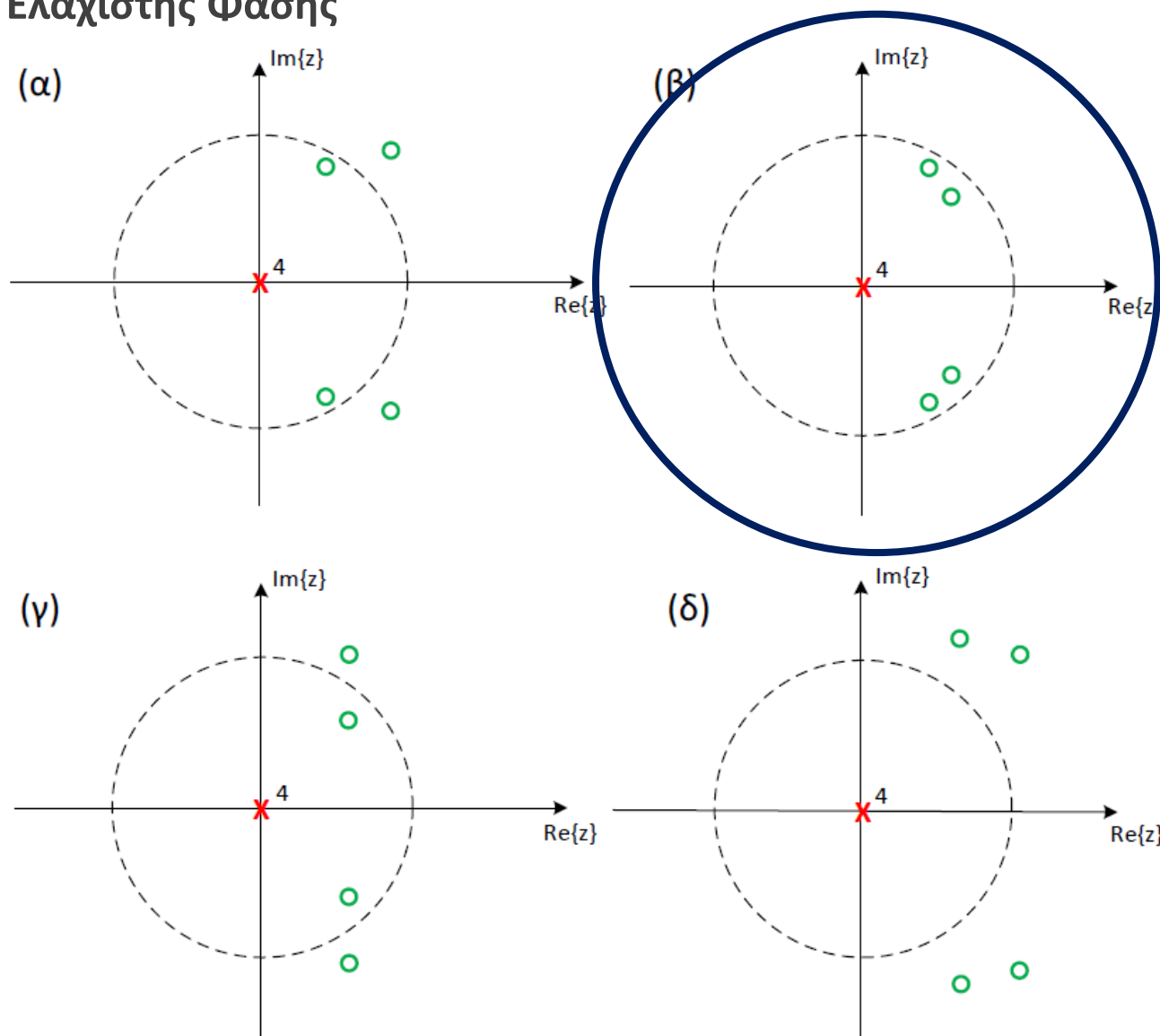
• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Μπορεί ναδειχθεί ότι η κρουστική απόκριση $h_{min}[n]$ ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και οι κρουστικές αποκρίσεις $h[n]$ άλλων συστημάτων με την ίδια απόκριση πλάτους ικανοποιούν τη σχέση **μερικής ενέργειας**

$$E(n) \leq E_{min}(n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2$$

- Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στα συστήματα ελάχιστης φάσης, η **ενέργεια του συστήματος είναι περισσότερο συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της κρουστικής απόκρισης**
- Όλα τα άλλα συστήματα έχουν την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων διαφορετικά κατανομημένη και πιο «διάσπαρτη»
- Προσέξτε, η ιδιότητα μιλά για την κατανομή της ενέργειας στα πρώτα δείγματα
 - Όχι για τη συνολική ενέργεια, η οποία είναι ίδια σε όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους!
 - Λόγω φυσικά του θεωρήματος Parseval
- Ας δούμε ένα παράδειγμα.

- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης



- Ποιο σύστημα από τα τέσσερα είναι ελάχιστης φάσης? ☺

• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

$$\sum_{k=0}^n |h[k]|^2$$

- Αν υπολογίσουμε τις κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με τα προηγούμενα διαγράμματα πόλων-μηδενικών, τότε παρατηρούμε την παρακάτω εικόνα για την ενέργεια των πρώτων δειγμάτων αυτών των κρουστικών αποκρίσεων

Μερική ενέργεια συστημάτων

	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n = 0$	1.00	0.41	0.65	0.27
$n = 1$	5.12	3.32	3.95	2.49
$n = 2$	11.21	9.76	10.39	8.58
$n = 3$	13.44	13.05	13.30	12.71
$n = 4$	13.71	13.71	13.71	13.71

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- Ξέρουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να προκαλέσει σημαντική διαταραχή στη χρονική δομή ενός σήματος που δέχεται στην είσοδό του αν η απόκριση φάσης του δεν είναι σταθερή ή γραμμική
- Συστήματα **γραμμικής** φάσης είναι πολύ επιθυμητά και χρήσιμα στην πράξη
 - Καθυστερούν όλες τις συνιστώσες εισόδου το ίδιο στην έξοδο
 - Δε διαταράσσουν τη χρονική δομή του σήματος εισόδου
- Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση αν $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j(a\omega+\beta)}$, $a, \beta \in \mathbb{R}$
- Θα μας απασχολήσουν μόνο **FIR αιτιατά συστήματα γραμμικής φάσης**
 - ...τα οποία είναι υποχρεωτικά ευσταθή, ως FIR 😊
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι τέτοια συστήματα ικανοποιούν κάποιες συμμετρίες στην κρουστική τους απόκριση
- Υπάρχουν 4 **κατηγορίες** ΓΧΑ FIR συστημάτων γραμμικής φάσης
 - ...ανάλογα με το είδος της συμμετρίας της κρουστικής τους απόκρισης
- Κατηγορίες : «Τύποι»: I, II, III, IV

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου I έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ άρτιο}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$

- Απόκριση Συχνότητας

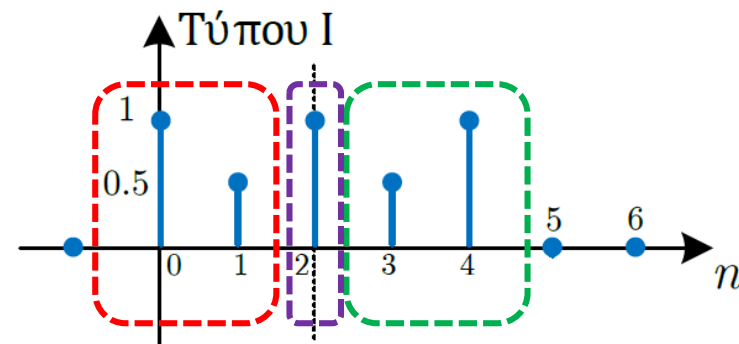
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M h[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n] e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^M h[n] e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$n := M - k$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n] e^{-j\omega n} + \sum_{k=0}^{(M-2)/2} h[M - k] e^{-j\omega(M-k)} + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$h[M - k] = h[k]$$



$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n] e^{-j\omega n} + \sum_{k=0}^{(M-2)/2} h[k] e^{-j\omega(M-k)} + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

 $k := n$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n] e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n] e^{-j\omega(M-n)} + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

Κοινός
παράγοντας
το $e^{-\frac{j\omega M}{2}}$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n] e^{j\omega(\frac{M}{2}-n)} + \sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n] e^{-j\omega(\frac{M}{2}-n)} + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$

Euler

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} 2h[n] \cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right) + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$

 $m := \frac{M}{2} - n$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}} \left(\sum_{m=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-m\right] \cos(\omega m) + h\left[\frac{M}{2}\right] \right)$$

Η αλλαγή στα άκρα του
αθροίσματος προκύπτει από την
τελευταία αλλαγή μεταβλητής

 $m := \frac{M}{2} - n$

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι

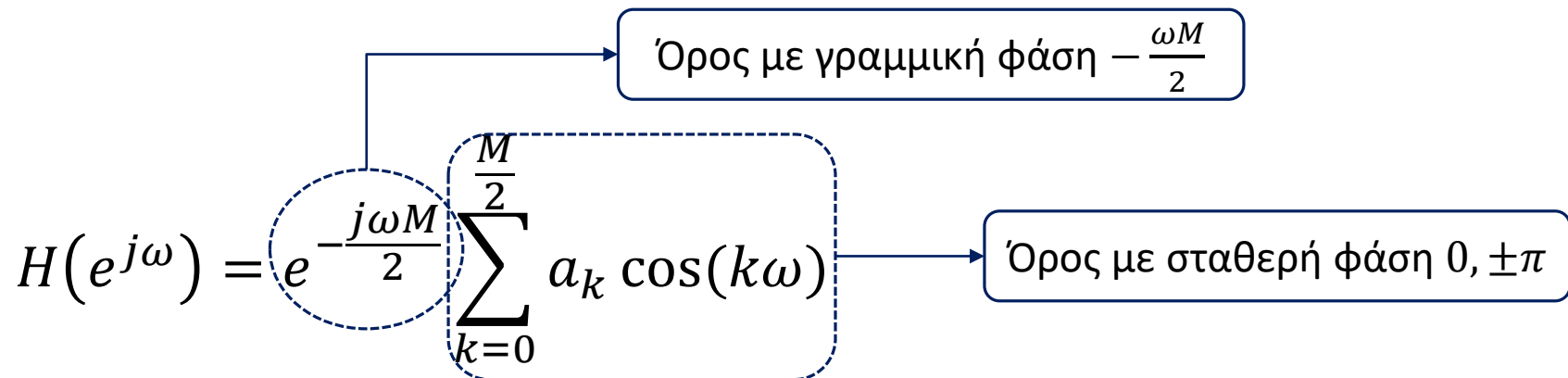
- Οπότε συνολικά

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

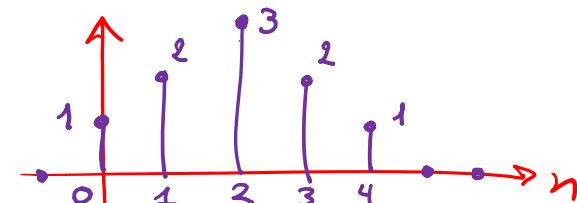
$$a_k = 2h \left[\frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

$$a_0 = h \left[\frac{M}{2} \right]$$



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

• Παράδειγμα:



○ Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$$

Είναι

$$h[n] = h[0] \delta[n] + h[1] \delta[n-1] + h[2] \delta[n-2] + h[3] \delta[n-3] + h[4] \delta[n-4]$$

$$= 1 \cdot \delta[n] + 2 \delta[n-1] + 3 \delta[n-2] + 2 \delta[n-3] + 1 \cdot \delta[n-4]$$

$$H(e^{j\omega}) = \underline{1} + \underline{2e^{-j\omega}} + 3e^{-j2\omega} + \underline{2e^{-j3\omega}} + \underline{1 \cdot e^{-j4\omega}}$$

$$= \underline{(1 + e^{-j4\omega})} + 2 \underline{(e^{-j\omega} + e^{-j3\omega})} + 3e^{-j2\omega}$$

$$= e^{-j2\omega} \left[\underbrace{e^{j2\omega}}_{=h[0]} + \underbrace{e^{-j2\omega}}_{=h[1]} + 2 \left(\underbrace{e^{j\omega}}_{=h[2]} + \underbrace{e^{-j\omega}}_{=h[3]} \right) + 3 \right] \in \mathbb{R}$$

$$= e^{-j2\omega} (2 \cos(2\omega) + 4 \cos(\omega) + 3) = e^{-j2\omega} A(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} h[0] &= h[4] \\ h[1] &= h[3] \end{aligned}$$

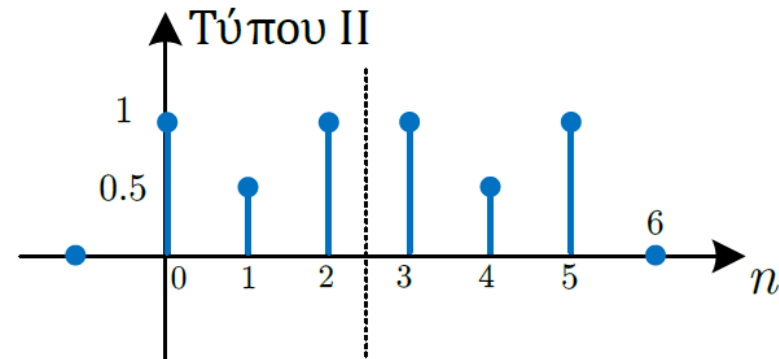
Συμμετρία!

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου II

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου II έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ περιττό}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας
 - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου III έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ άρτιο}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$

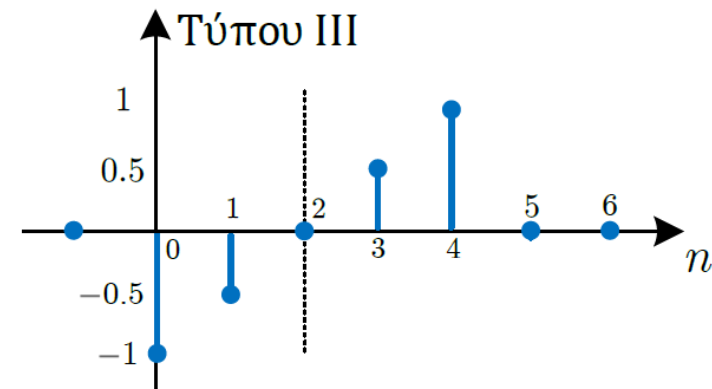
- Απόκριση Συχνότητας

- Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \mathbf{M \text{ περιττό}}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$

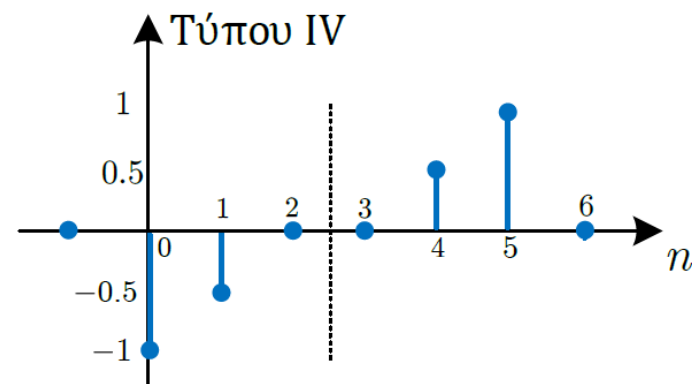
- Απόκριση Συχνότητας

- Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική $h[n]$ – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$$

Τύπου II – συμμετρική $h[n]$ – περιττό M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

Τύπου III – αντισυμμετρική $h[n]$ – άρτιο M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

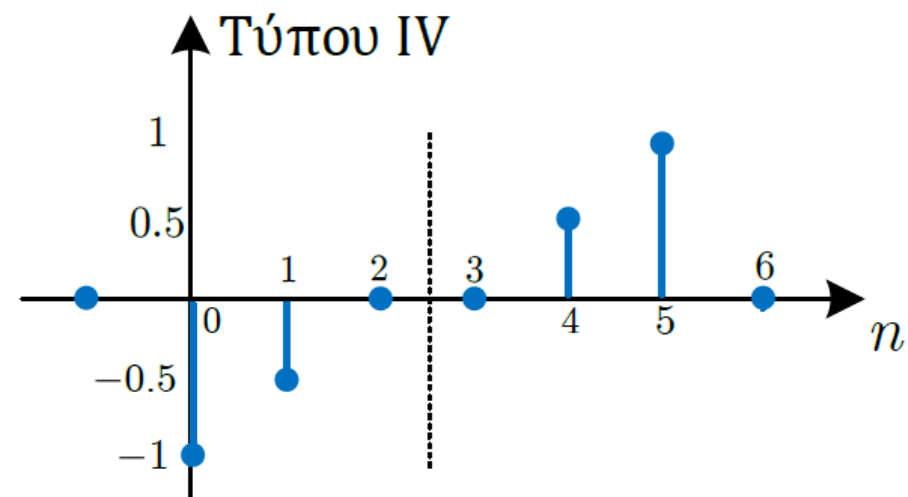
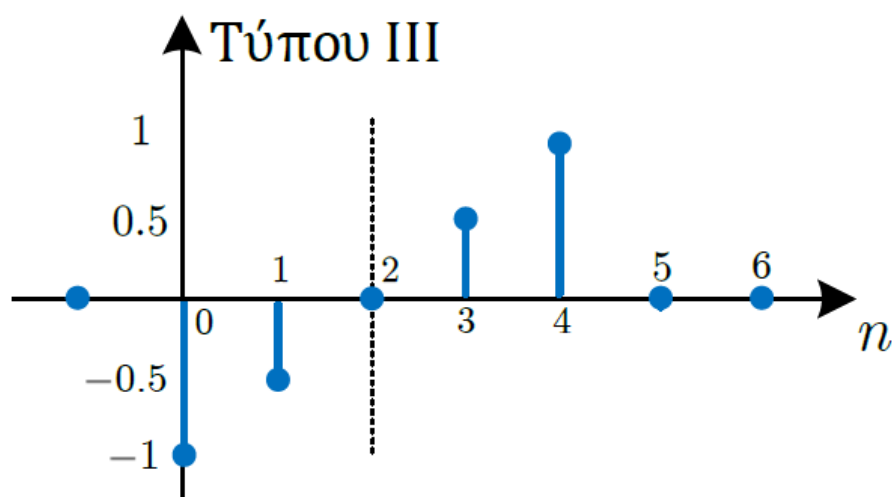
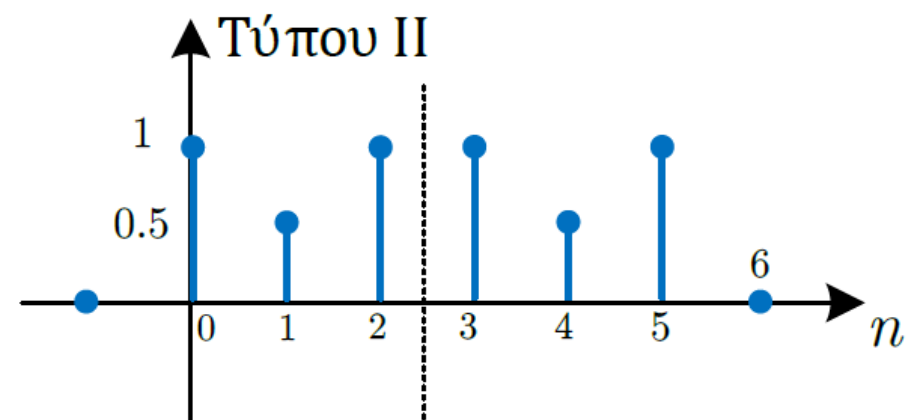
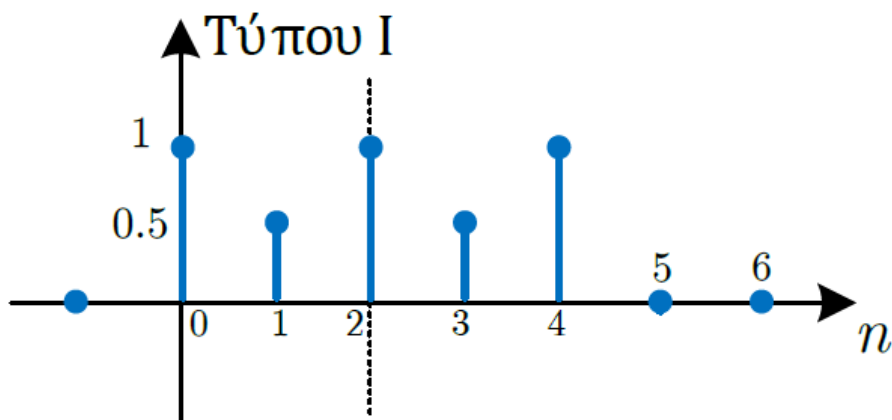
Τύπου IV – αντισυμμετρική $h[n]$ – περιττό M

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}$$

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

- Συνολικά, η απόκριση συχνότητας των συστημάτων που είδαμε γράφεται

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} \sum p_k S(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} A(e^{j\omega})$$

- Το $A(e^{j\omega})$ είναι πραγματική συνάρτηση του ω και ονομάζεται «ψευδοπλάτος»
 - Ως πραγματική συνάρτηση, η φάση της θα είναι 0 ή $\pm\pi$

- Για $0 \leq \omega \leq \pi$, η απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ γράφεται

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\frac{\omega M}{2}, & \text{τύπου I, II,} & A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \pi, & \text{τύπου I, II,} & A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \frac{\pi}{2}, & \text{τύπου III, IV,} & A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\frac{\omega M}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi, & \text{τύπου III, IV,} & A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Οι προηγούμενες σχέσεις δε μας δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση για τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικής φάσης στο χώρο της συχνότητας

- Θα πρέπει να περάσουμε στο χώρο του Z για να λάβουμε αυτήν την πληροφορία

- Προφανώς, για αιτιατά ΓΧΑ συστήματα γραμμικής φάσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο $z = 0$

- Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου I, II: $h[n] = h[M - n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$

- Τύπου III, IV: $h[n] = -h[M - n] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε ότι:

☐ Αν $z = z_0$ ένα μηδενικό του συστήματος $H(z)$, τότε υποχρεωτικά και το $z = \frac{1}{z_0}$ είναι μηδενικό του συστήματος

☐ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0}\right)$ λέγεται αμοιβαίο

☐ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0^*}\right)$ λέγεται συζυγές αμοιβαίο (όπως ξέρετε)

- Αν θέλουμε λοιπόν να σχεδιάσουμε ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση $z = z_0$, πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλουμε κι ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$!!!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

- Το $H(z)$ μπορεί να έχει μηδενικά:

- συζυγή και αμοιβαία (ταυτόχρονα), επάνω στο μοναδιαίο κύκλο: $z_k = e^{\pm j\theta_k}$

- αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα: $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$

- αμοιβαία, αλλού: $z_k = r_k e^{j\theta_k}, r_k \neq 1$ και $z_k = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$

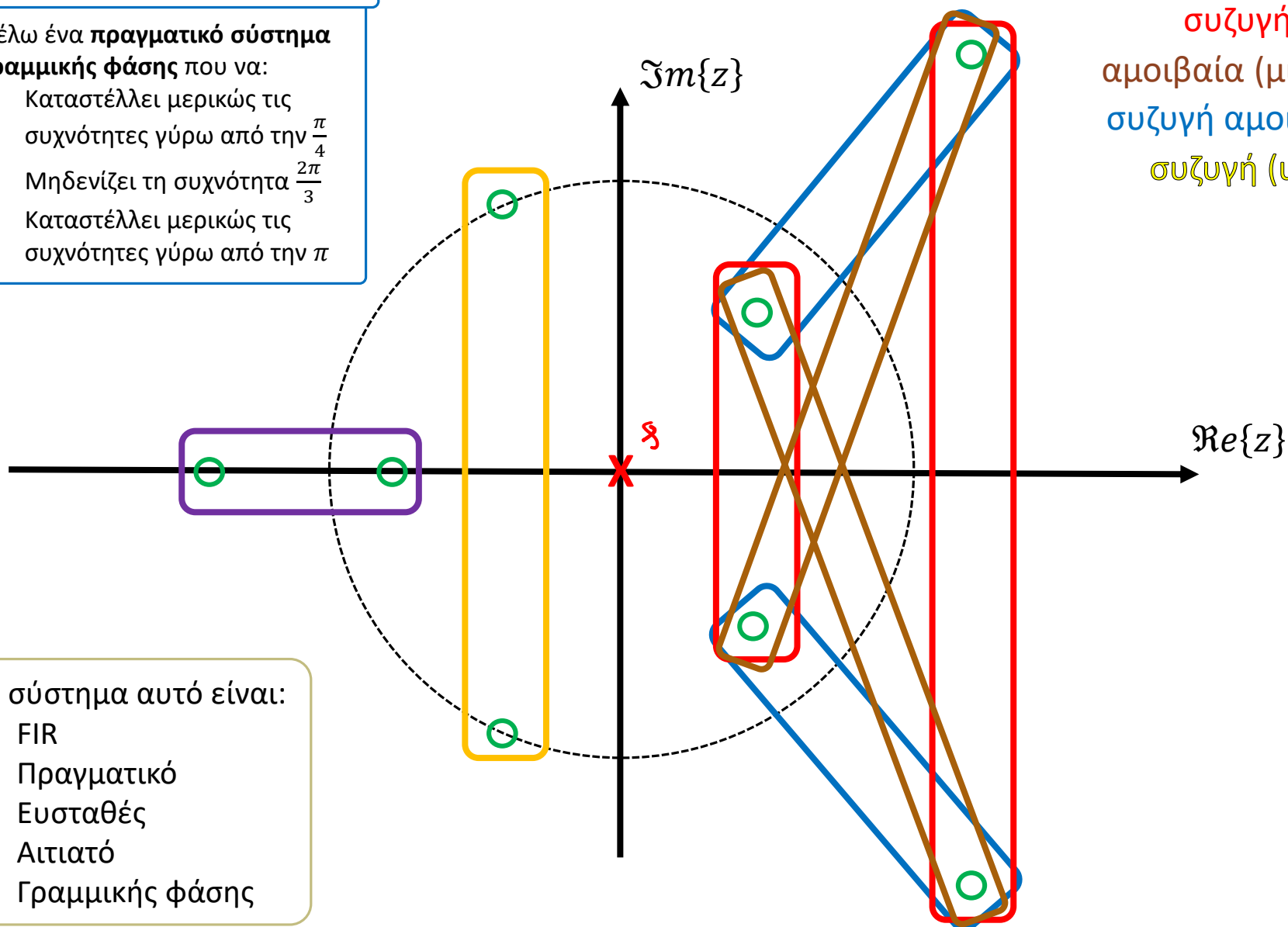
- Αν επιπλέον το $H(z)$ αντιστοιχεί σε πραγματικό σύστημα ($h[n] \in \mathbb{R}$), τότε το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών (αφού κάθε μιγαδικό μηδενικό θα «φέρει» μαζί και το συζυγές του, εκτός από το αμοιβαίο του)

$$\left(z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k} \right)$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του z

Θέλω ένα **πραγματικό σύστημα γραμμικής φάσης** που να:

- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την $\frac{\pi}{4}$
- Μηδενίζει τη συχνότητα $\frac{2\pi}{3}$
- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την π



αμοιβαία (πραγμ.)
 συζυγή
 αμοιβαία (μιγαδ.)
 συζυγή αμοιβαία
 συζυγή (uc)

Το σύστημα αυτό είναι:

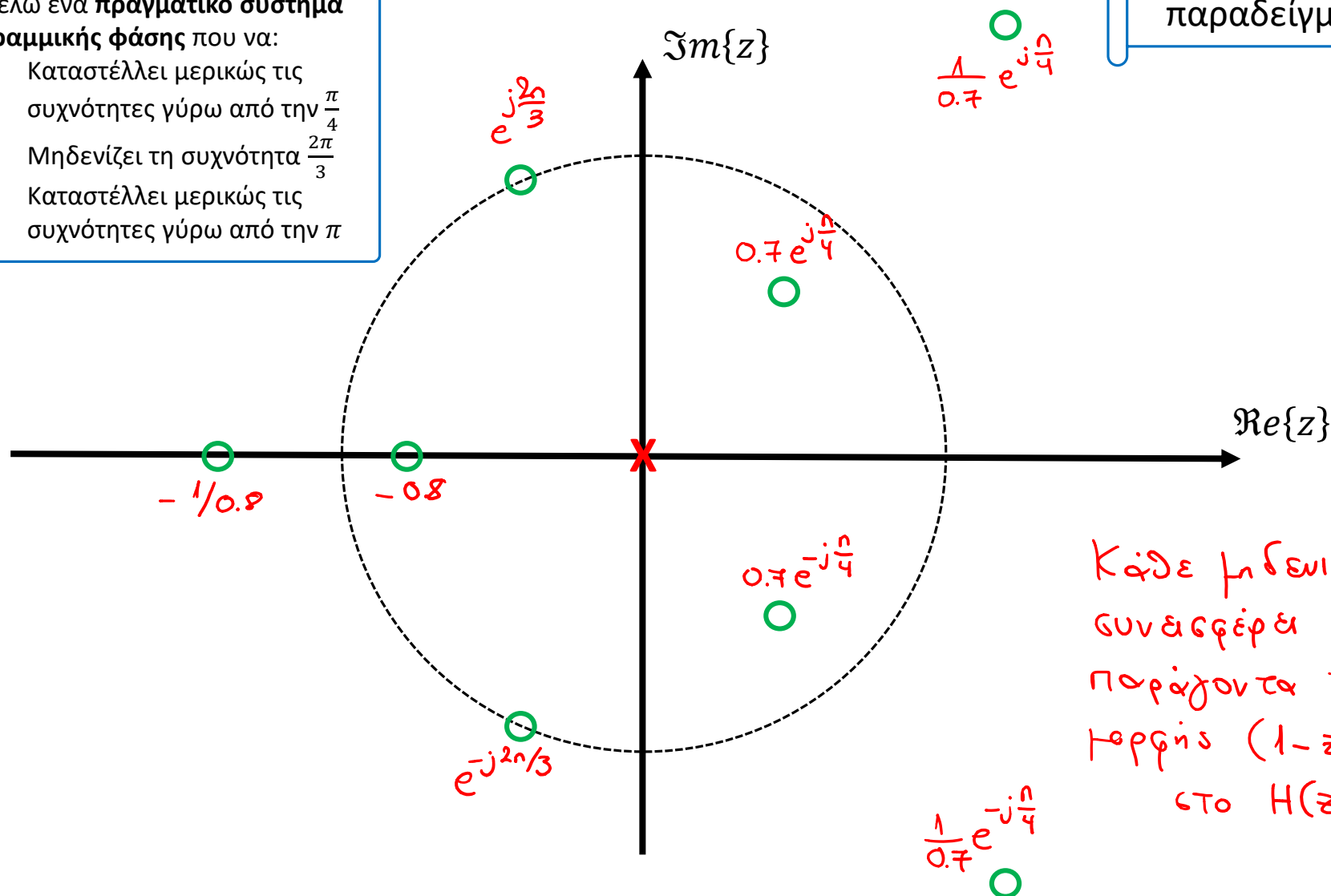
- FIR
- Πραγματικό
- Ευσταθές
- Αιτιατό
- Γραμμικής φάσης

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Θέλω ένα πραγματικό σύστημα γραμμικής φάσης που να:

- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την $\frac{\pi}{4}$
- Μηδενίζει τη συχνότητα $\frac{2\pi}{3}$
- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την π

Επέκταση του παραδείγματος



Κάθε μηδενικό z_0
συνεισφέρει έναν
παράγοντα της
μορφής $(1 - z_0 z^{-1})$
στο $H(z)$!

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Μπορείτε να γράψατε :

Επέκταση του
παραδείγματος

$$\begin{aligned}
 H(z) &= (1 + 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{0.8}z^{-1}) \cdot \\
 &\quad (1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1}) \cdot \\
 &\quad (1 - 0.7e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.7e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}) \cdot \\
 &\quad (1 - \frac{1}{0.7}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - \frac{1}{0.7}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}) \\
 &= (1 + 2.05z^{-1} + z^{-2}) \cdot \\
 &\quad (1 + z^{-1} + z^{-2}) \cdot \\
 &\quad (1 - 0.9899z^{-1} + 0.49z^{-2}) \cdot \\
 &\quad (1 - 2.0203z^{-1} + 2.0408z^{-2})
 \end{aligned}$$

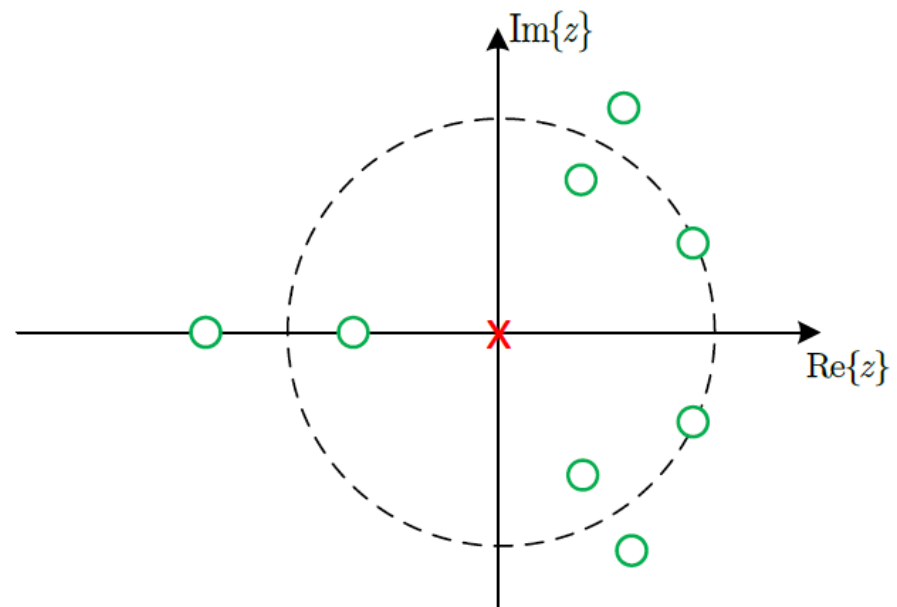
= ... =

$$\begin{aligned}
 &= 1 + 0.0397z^{-1} - 0.6004z^{-2} + 1.667z^{-3} + 1.987z^{-4} + 1.667z^{-5} - 0.6004z^{-6} + \\
 &\quad + 0.0397z^{-7} + z^{-8}
 \end{aligned}$$

$M=8$,
Τύπος I



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$
- Τύπου Ι : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$: ταυτότητα
- Τύπου Ι : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

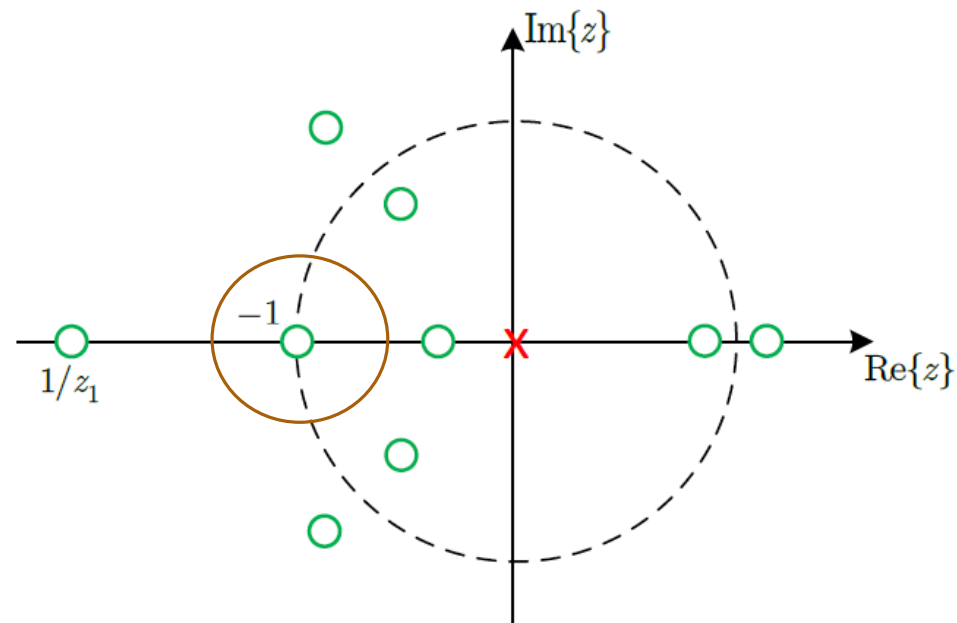
• Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$

• Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = 1$: ταυτότητα

• Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{II}(e^{j\pi}) = 0$!



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

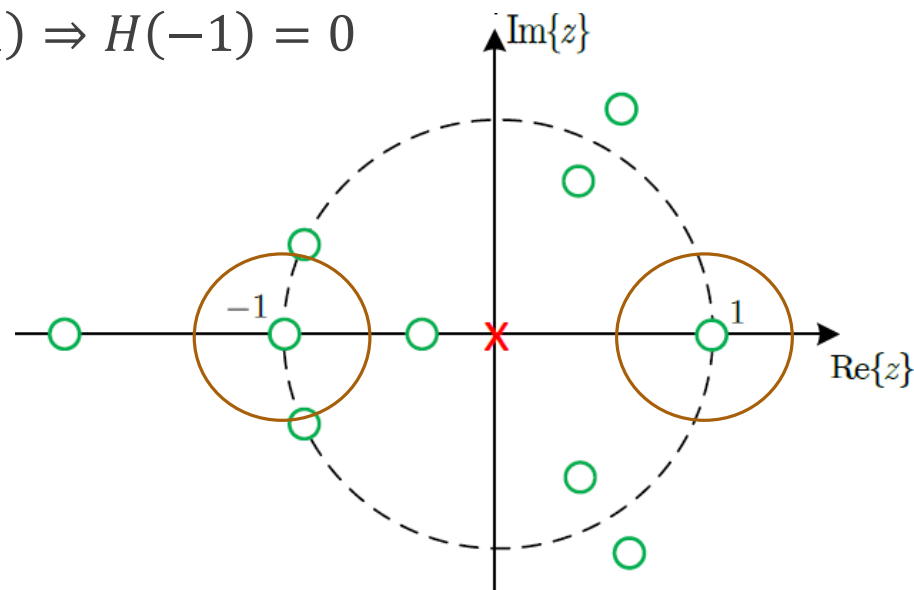
$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{III}(e^{j0}) = 0$!

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{III}(e^{j\pi}) = 0$!



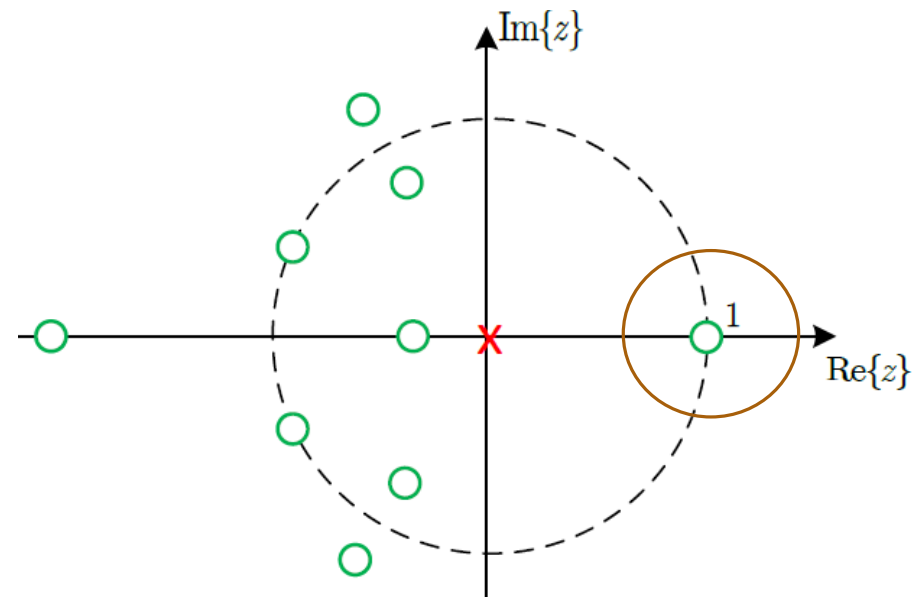
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

□ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{IV}(e^{j0}) = 0$!

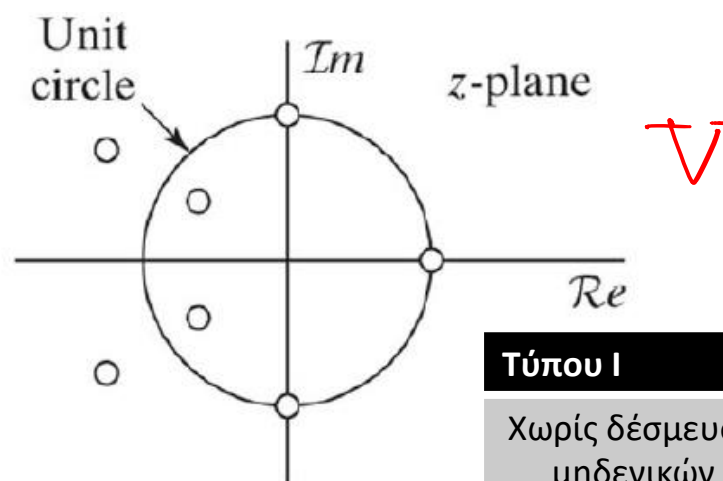
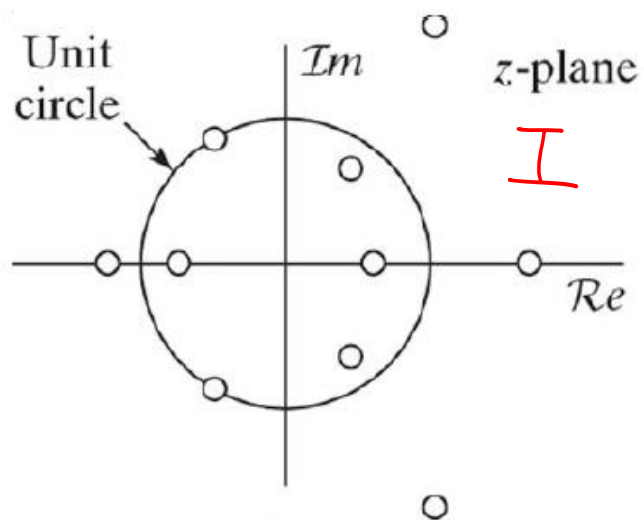
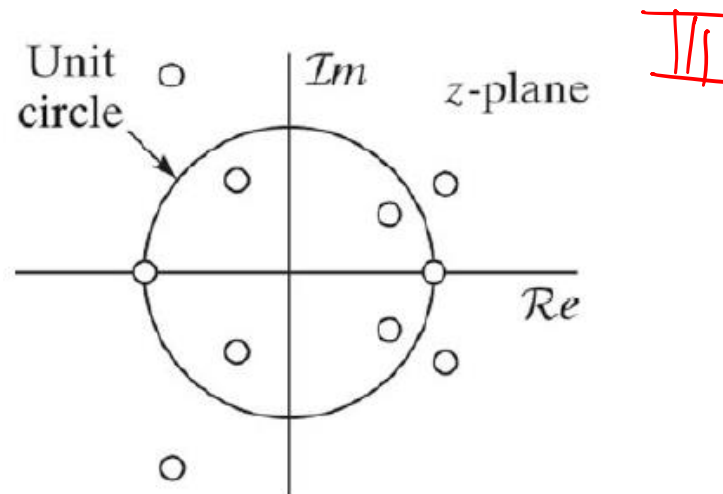
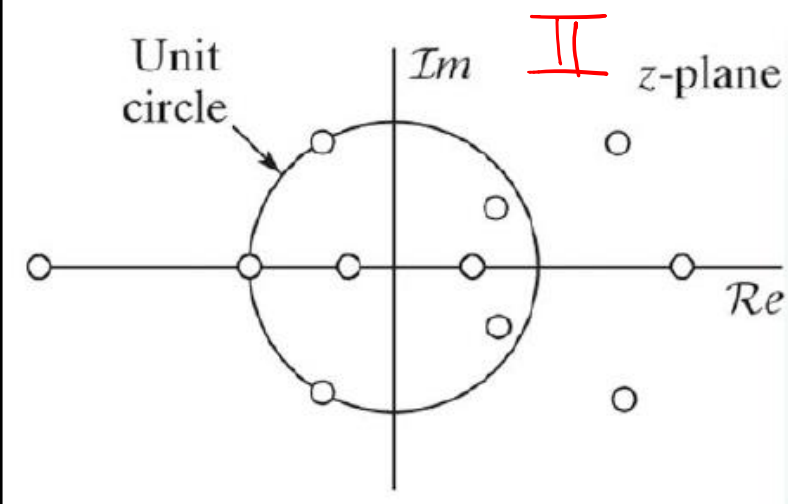
- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



• Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική $h[n]$ – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική $h[n]$ – περιττό M
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III – αντισυμμετρική $h[n]$ – άρτιο M	Τύπου IV – αντισυμμετρική $h[n]$ – περιττό M
$H_{III}(e^{j0}) = 0, H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

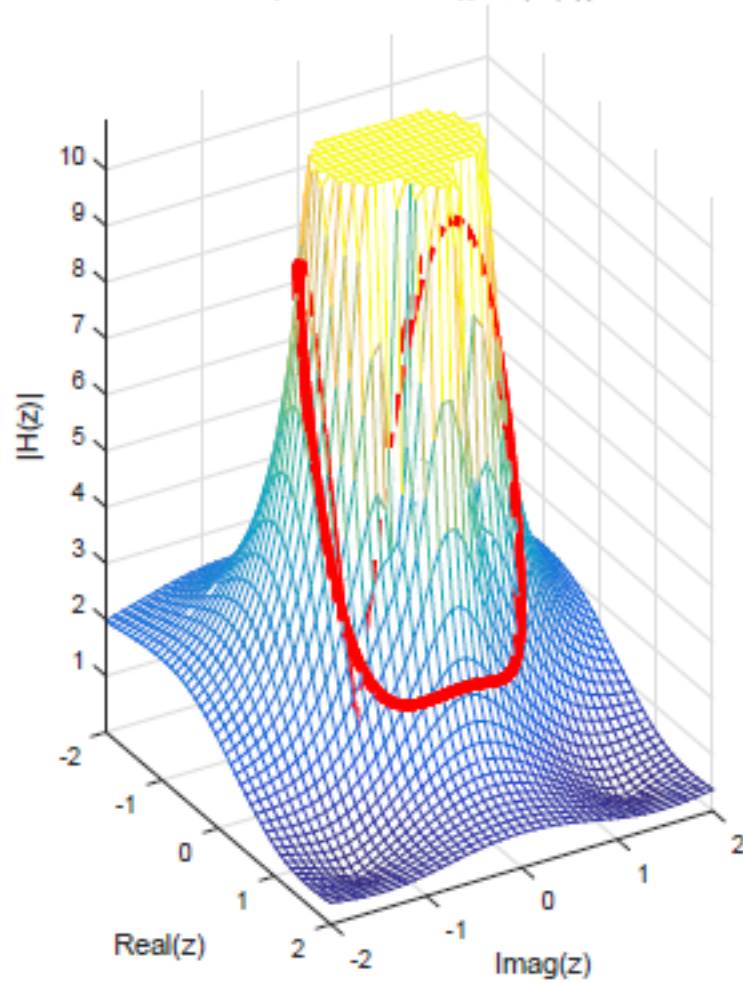
• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z



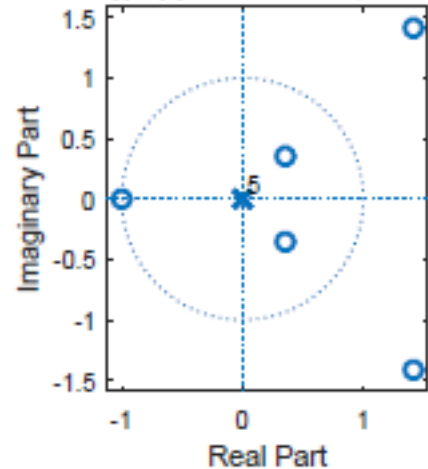
Τύπου I	Τύπου II
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III	Τύπου IV
$H_{III}(e^{j0}) = 0,$ $H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

- Αναγνωρίζετε τους τύπους των συστημάτων γραμμικής φάσης;

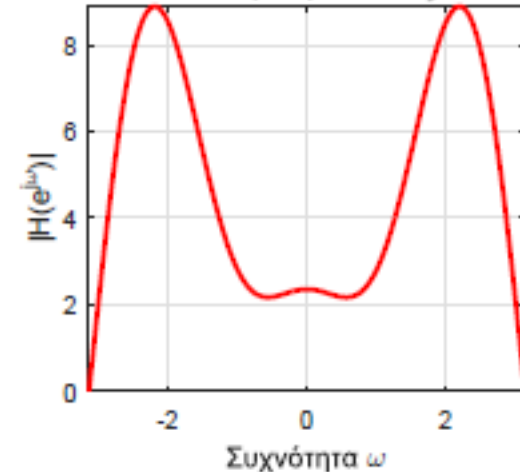
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Μέτρο του Μετασχ. Z , $|H(z)|$ 

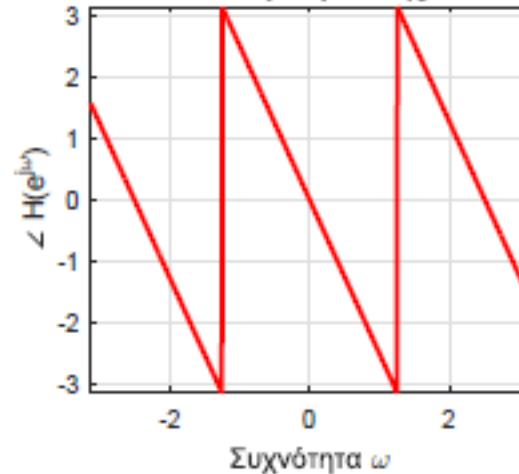
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



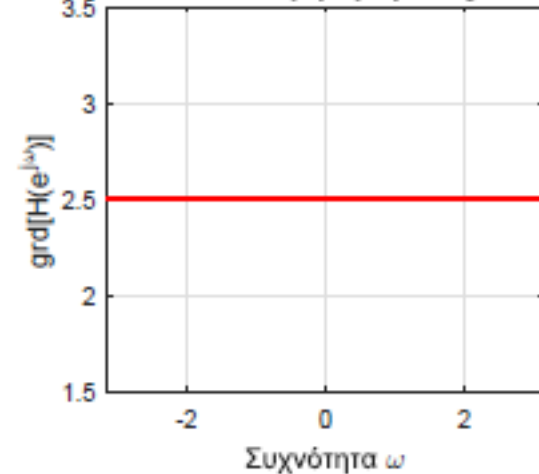
Απόκριση Πλάτους



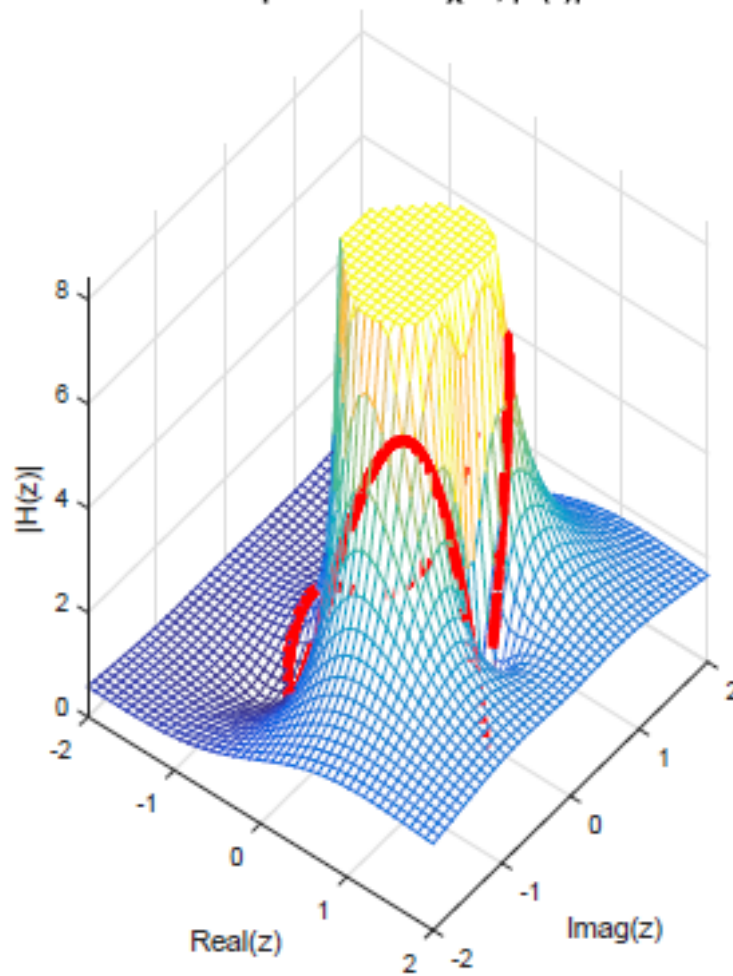
Απόκριση Φάσης



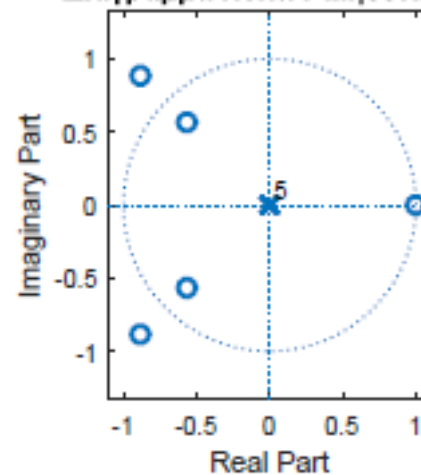
Καθυστέρηση Ομάδας



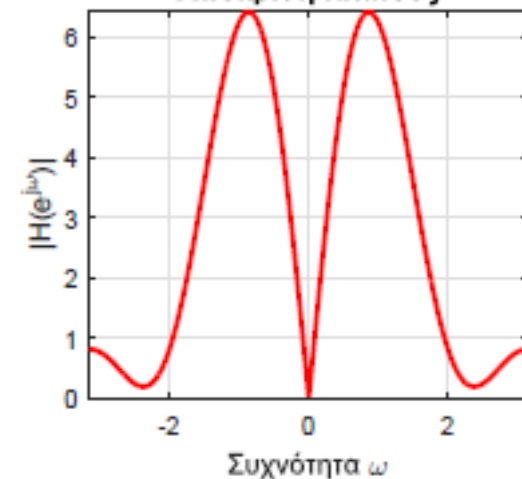
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Μέτρο του Μετασχ. Z , $|H(z)|$ 

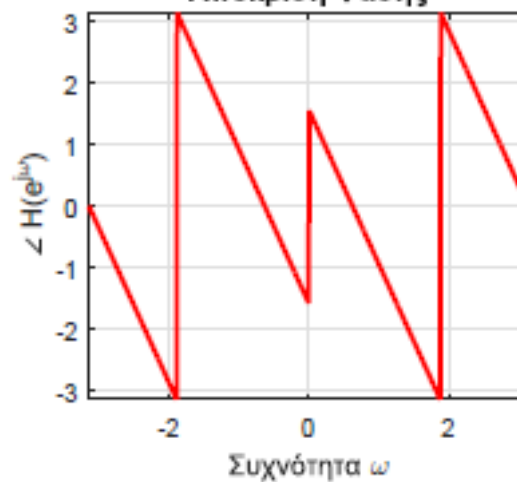
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



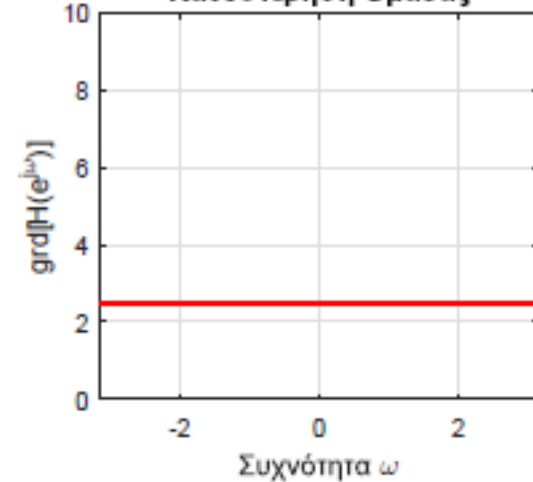
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



Καθυστέρηση Ομάδας



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Ένα πραγματικό FIR σύστημα γραμμικής φάσης μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως:

- ενός όρου ελάχιστης φάσης

$$H_{min}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \quad , \quad |c_k| < 1$$

- ενός όρου μέγιστης φάσης

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

- ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H_{uc}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_o}{2}} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z)H_{uc}(z)H_{max}(z)$$

με

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1})z^{-M_i}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

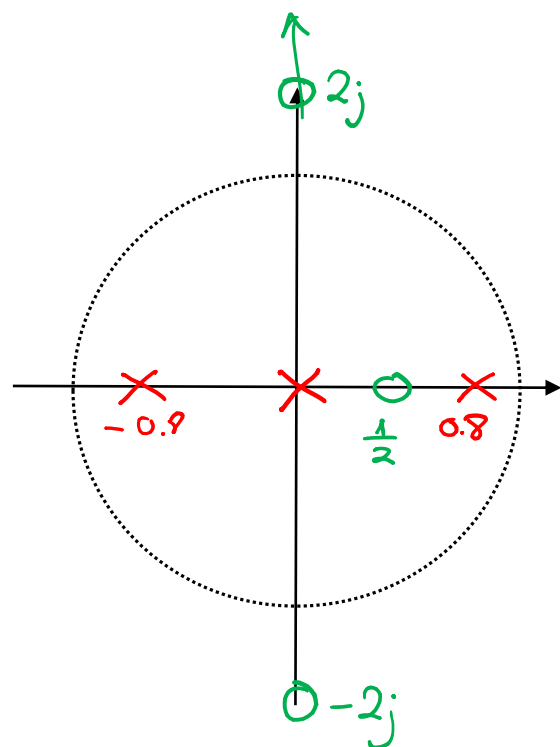
• Παράδειγμα:

○ Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})},$$

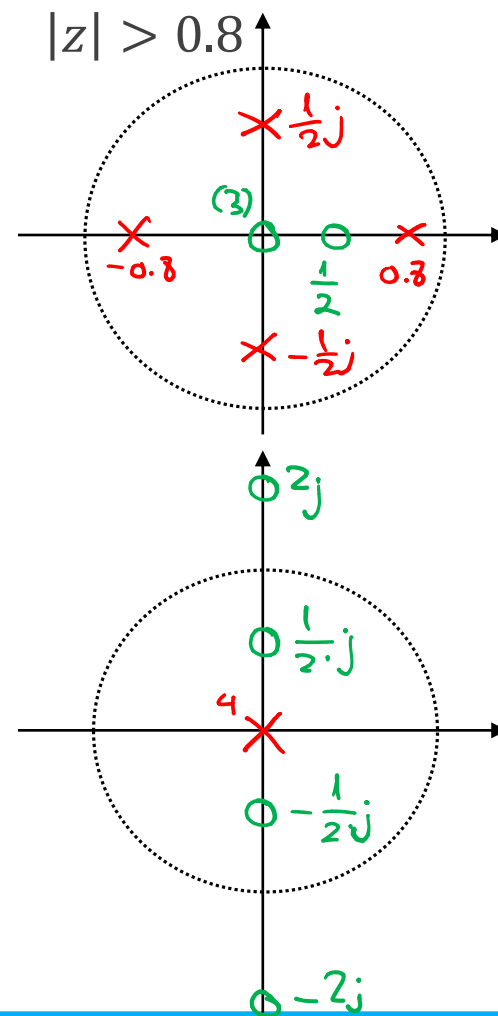
Γράψτε το σε μορφή $H(z) = H_{min}(z)H_{linear}(z)$

$$\frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z + 2j)(z - 2j)}{z(z - 0.8)(z + 0.8)}.$$



$H_{min}(z)$

$H_{linear}(z)$



- Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

- Παράδειγμα:

Είναι $H_{\min}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2} \bar{z}^{-1})}{(1 - 0.8 \bar{z}^{-1})(1 + 0.8 \bar{z}^{-1})(1 - \frac{1}{2}j \bar{z}^{-1})(1 + \frac{1}{2}j \bar{z}^{-1})}$

$$= \frac{z^3(z - \frac{1}{2})}{(z - 0.8)(z + 0.8)(z - \frac{1}{2}j)(z + \frac{1}{2}j)}, \quad |z| > 0.8$$

και

$$H_{\text{linear}}(z) = (1 - 2j \bar{z}^{-1})(1 + 2j \bar{z}^{-1})(1 - \frac{1}{2}j \bar{z}^{-1})(1 + \frac{1}{2}j \bar{z}^{-1})$$

$$= \frac{(z - 2j)(z + 2j)(z - \frac{1}{2}j)(z + \frac{1}{2}j)}{z^4}, \quad |z| > 0$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

