

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 10^Η

- Μετασχηματισμός Z

Τι περιέχει το ΗΥ370?



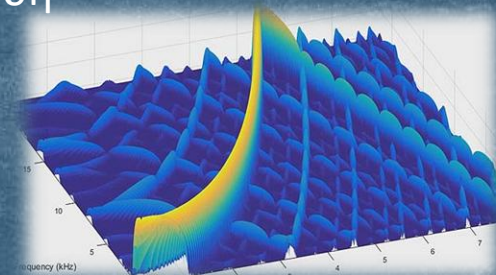
1^ο Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier



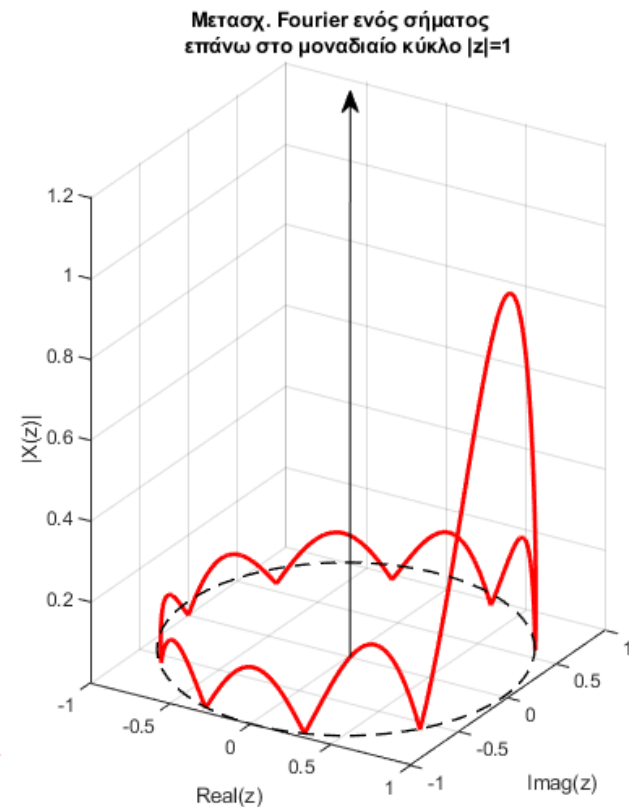
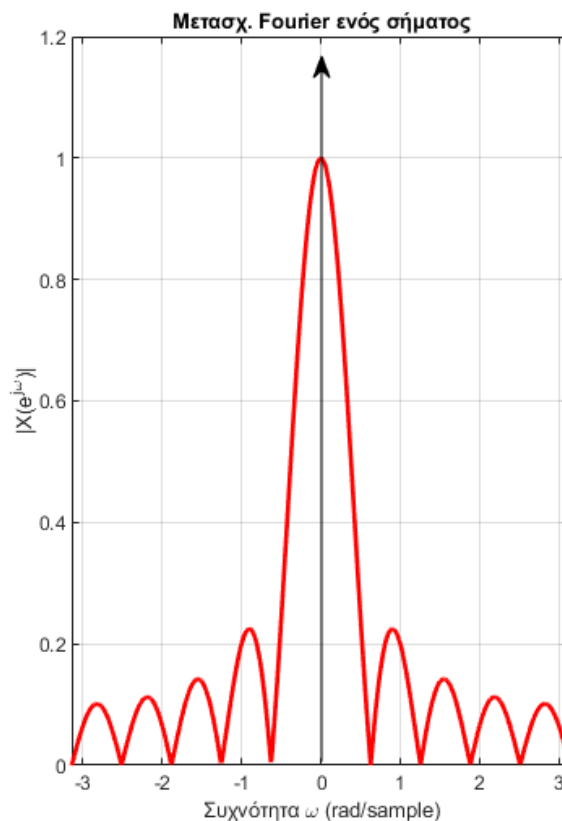
2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας
- Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:
 1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 2. Υπάρχουν συστήματα (a.k.a κρουστικές αποκρίσεις) που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
 3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα
- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνотικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!
- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό?
- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

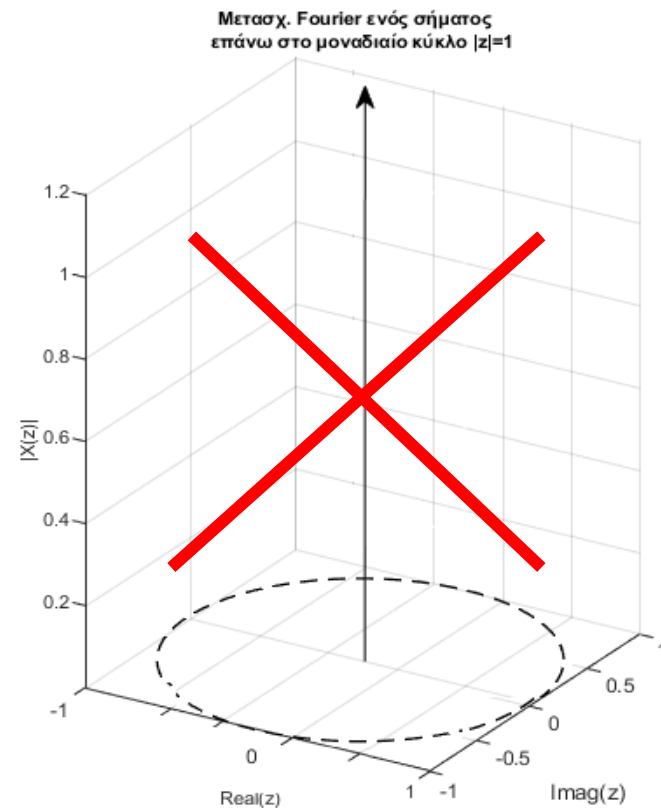
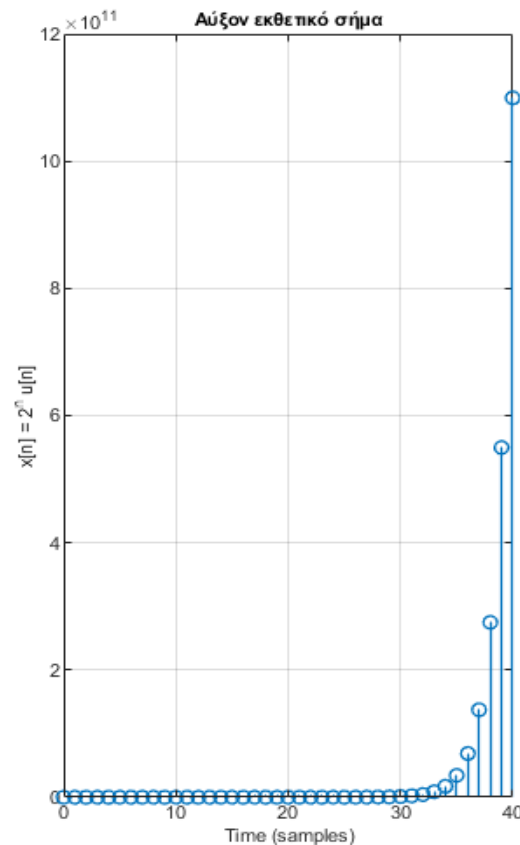
- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους $e^{-j\omega n}$
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον μοναδιαίο κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου
- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα
- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
 - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?



- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους
- Διαφορετικού πλάτους ίσως?



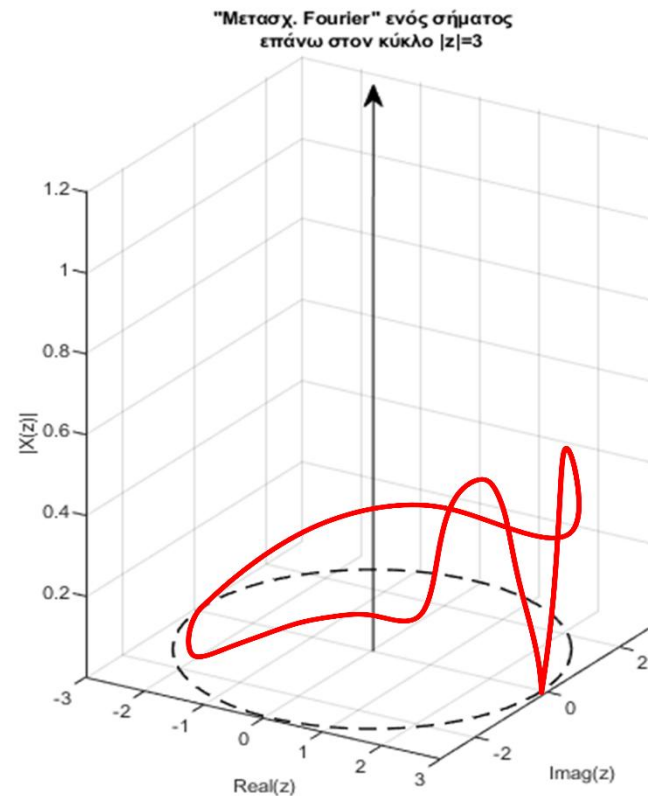
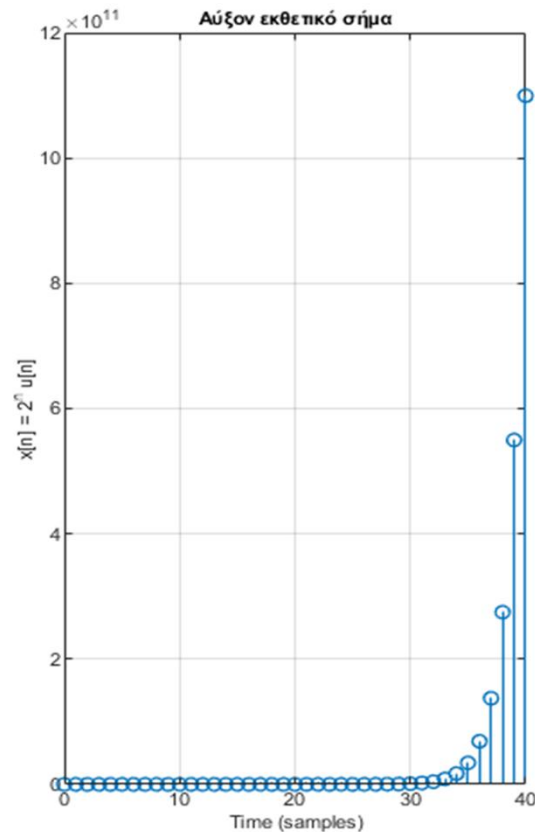
- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$(re^{j\omega})^{-n}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r



- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$(re^{j\omega})^{-n}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προφανώς όταν

$$|X(re^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
 - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη
- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n] = 2^n u[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2^n}{r^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{2}{r} \right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, |z| > 2$$

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n u[n]) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |a z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{a}{z} \right| < 1 \Leftrightarrow$$

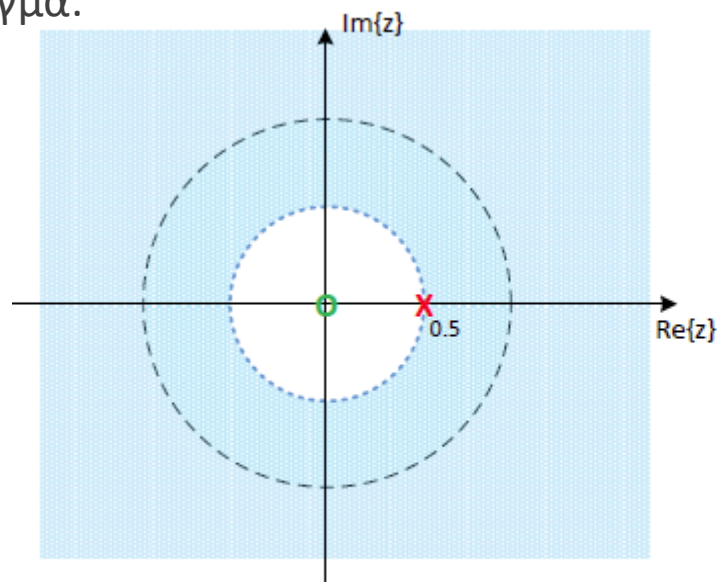
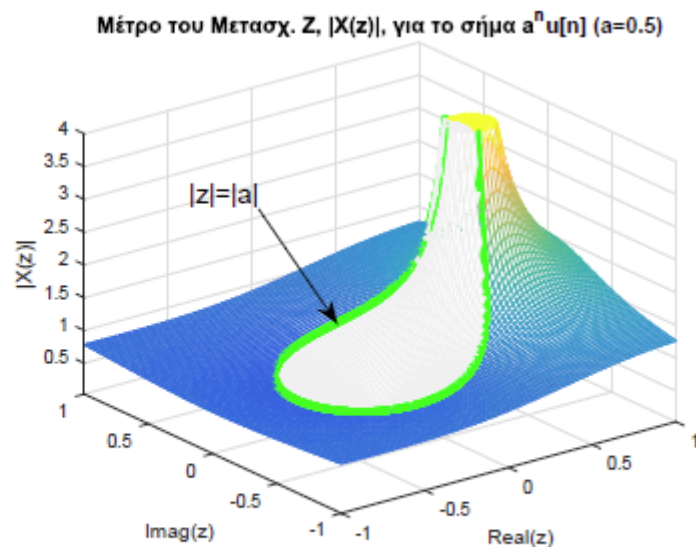
$$\boxed{\begin{array}{c} \uparrow \text{επιλογή} \\ |z| > |a| \\ \downarrow \text{Σύγκριση} \end{array}}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \frac{1}{1-b}, \quad \text{ανν} \\ |b| < 1$$

• Παράδειγμα:

$$a = \frac{1}{2}$$

(α) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$ 

(β) Μέτρο μετασχ. Z.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z - a}$$

Μηδενικά : $X(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Πόλοι : $X(z) \rightarrow \infty \Leftrightarrow z - a = 0 \Leftrightarrow z = a$

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$

Είναι

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a^n u[-n-1]) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n z^{-n}) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (a z^{-1})^n \underset{n=-k}{=} - \sum_{k=1}^{+\infty} (a z^{-1})^{-k} \\
 &= - \sum_{k=1}^{+\infty} (\bar{a}^{-1} z)^k = - \frac{\bar{a}^{-1} z}{1 - \bar{a}^{-1} z}, \text{ όταν } |\bar{a}^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

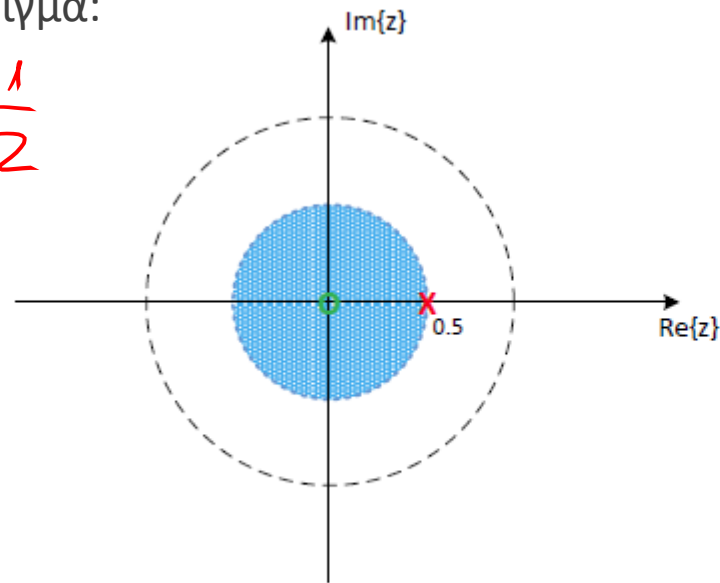
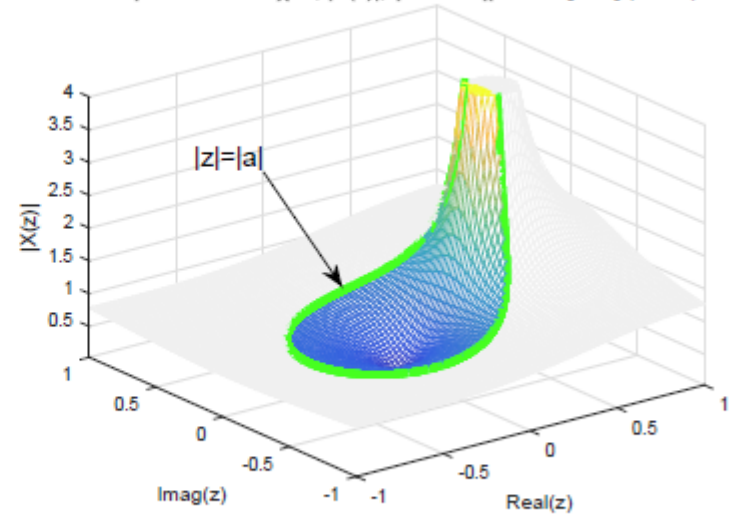
$$\Leftrightarrow |\bar{a}^{-1}| \cdot |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a| \leftarrow \text{ROC}$$

Είναι

$$X(z) = \frac{-\bar{a}^{-1} z}{1 - \bar{a}^{-1} z} = \frac{\cancel{-\bar{a}^{-1} z}}{\cancel{-\bar{a}^{-1} z} (-a z^{-1} + 1)} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \cdot \left(\sum_{n=N_1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{N_1}}{1 - a}, |a| < 1 \right)$$

• Παράδειγμα:

$$a = \frac{1}{2}$$

(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$ Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $-a^n u[-n-1]$ ($a=0.5$)(β') Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|.$$

$$\text{Μηδενικό: } z = 0$$

$$\text{Πόλος: } z - a = 0 \Leftrightarrow z = a.$$

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n u[n] - b^n u[-n-1]) z^{-n}$$

δύο ηρωχ.
ναφιδ.

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-b^n u[-n-1]) z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

$|z| > |a| \quad |z| < |b|$

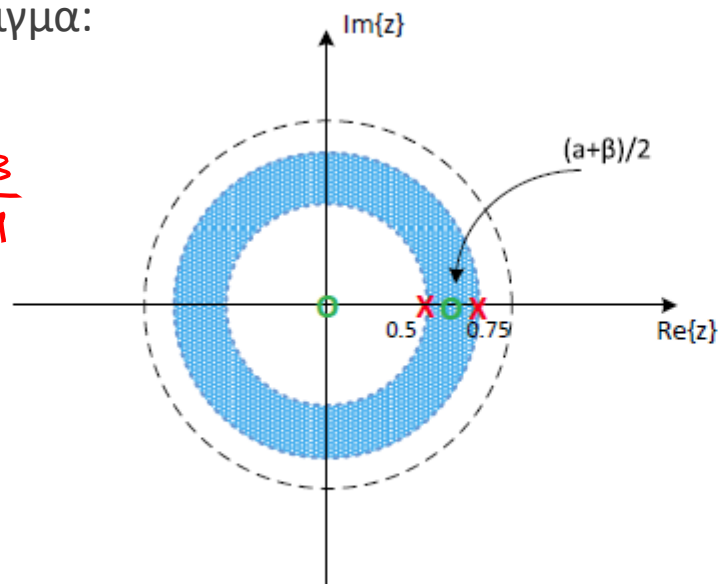
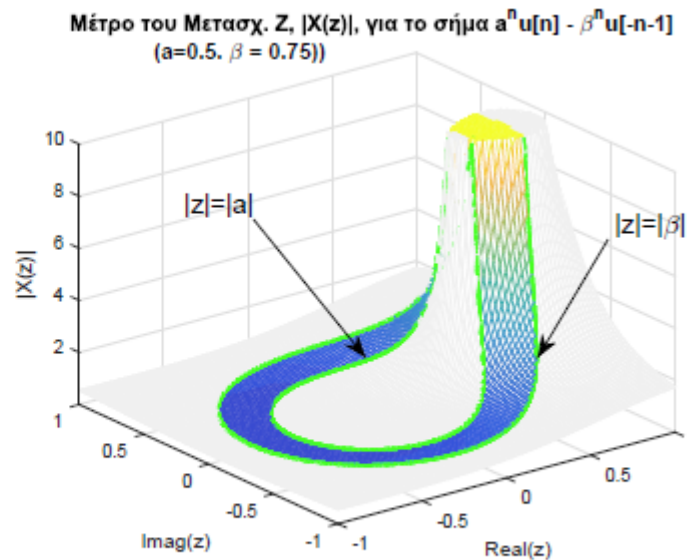
Πεδίο σύγκλισης: $\sim |a| > |b|$, η τότε των δύο ηρωχών σύγκλισης είναι το κενό σύνολο. $ROC = \emptyset$

$\sim |a| < |b|$, τότε η τότε των είναι $|a| < |z| < |b|$ και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης.

• Παράδειγμα:

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{3}{4}$$

(α) Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.(β) Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Είναι

$$X(z) = \frac{2 - (a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{z^2}{z^2} \frac{2 - (a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} =$$

$$= \frac{2z^2 - (a+b)z}{(z-a)(z-b)}$$

Μηδενικά: $2z^2 - (a+b)z = 0 \Rightarrow z=0$ και $z = \frac{a+b}{2}$.

Πόλοι: $(z-a)(z-b) = 0 \Rightarrow z=a$ και $z=b$.

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = u[n]$

Είναι

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{αυ} \end{aligned}$$

$$|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \leftarrow \text{ROC}$$

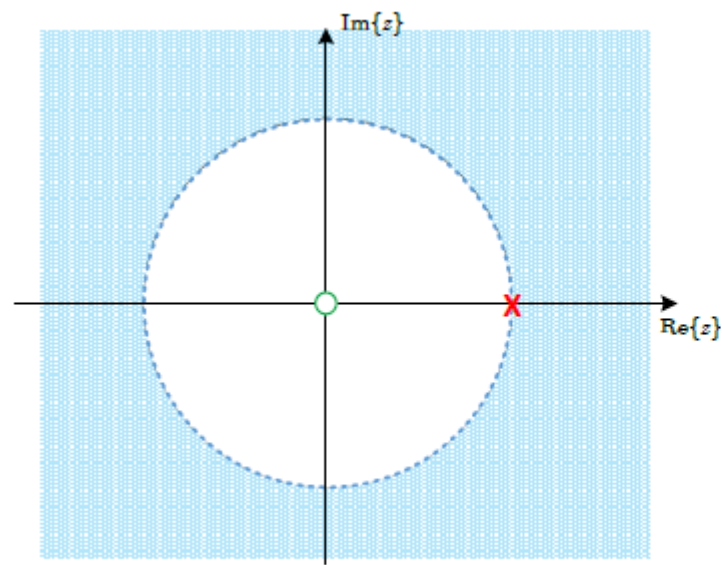
Αρα

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

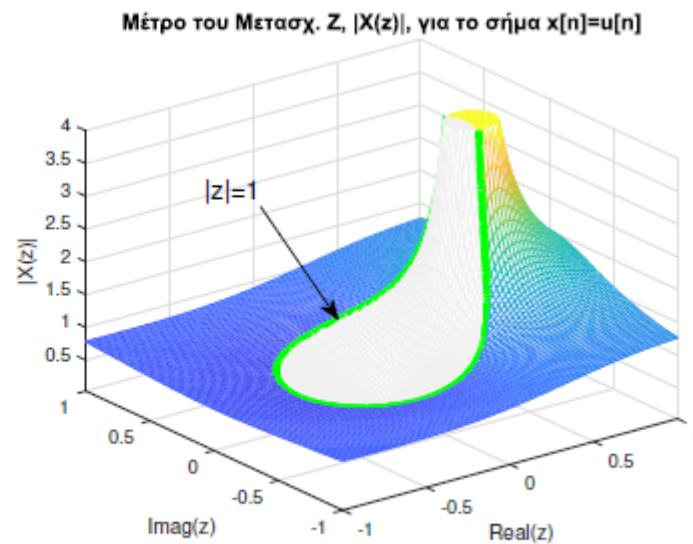
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

$$|a| < 1$$

- Παράδειγμα:



(α) Περιοχή σύγκλισης.

(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = u[n]$.

Είναι
$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Μηδενισμός: $z = 0$

Πόλος: $z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

Είναι

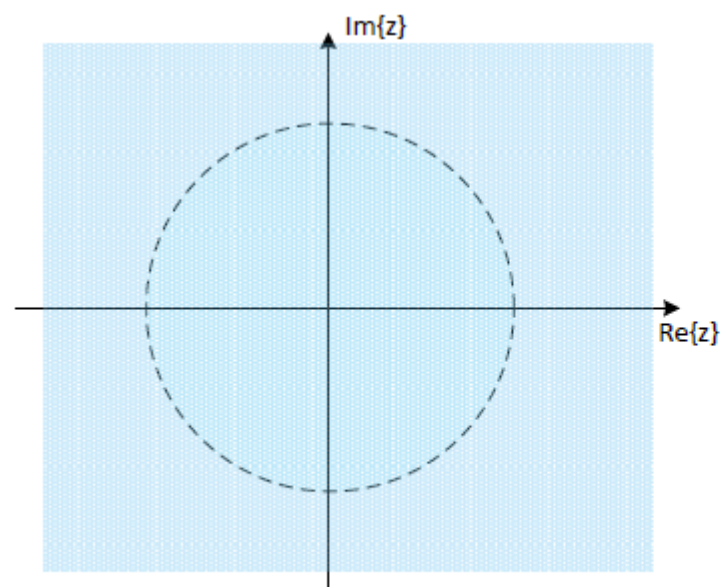
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

$\begin{cases} 1, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$

Άρα

$$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1, \forall z$$

• Παράδειγμα:



(α') Πεδίο σύγκλισης.

(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n]$.

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] z^{-n}$$

$$\begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$= z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}} = \frac{1}{\underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n_0 \text{ φορές}}}$$

~ αν $n_0 > 0$, $X(z) = \frac{1}{z^{n_0}}$, έχει πόλο στο $z = 0$

και μηδενικά στο άπειρο γιατί $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$

ROC: $|z| > 0$ ←

~ αν $n_0 < 0$, $X(z) = z^{n_0}$, έχει πόλο στο άπειρο και

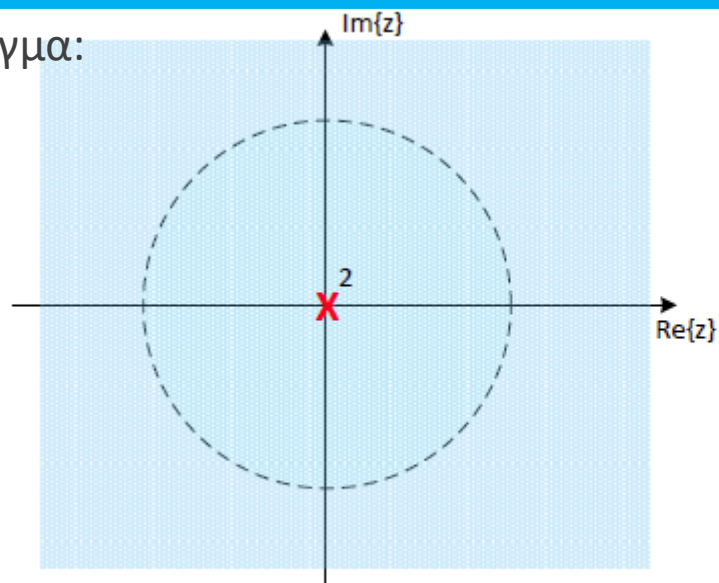
μηδενικά στο $z = 0$.

ROC: $|z| < \infty$ ←

$$z^{n_0} = 0 \Rightarrow z = 0, \quad n_0 \text{ φορές}$$

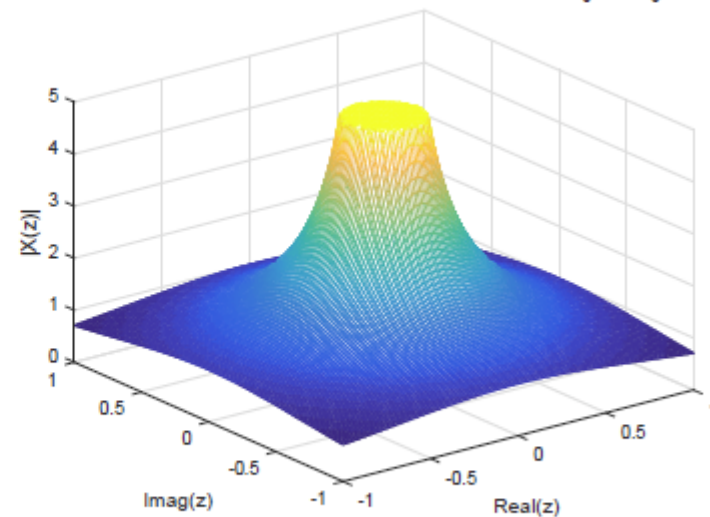
- Παράδειγμα:

$$n_0 = 2$$



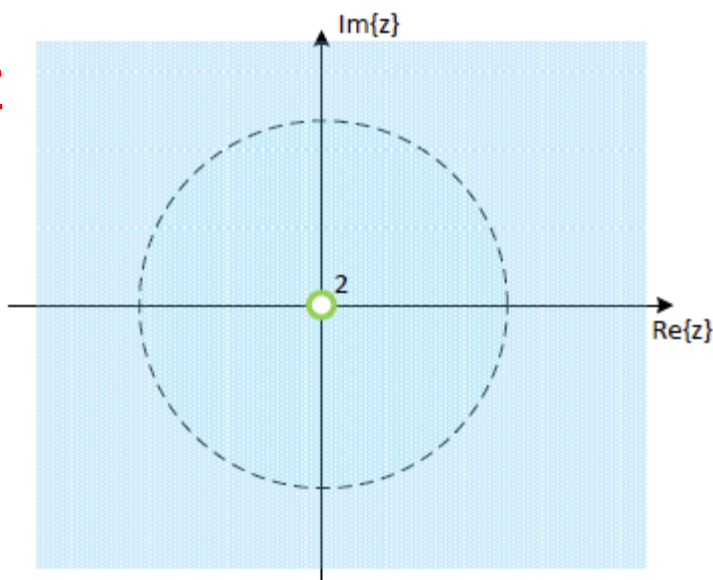
(α') Πεδίο σύγκλισης.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, για το σήμα $x[n] = \delta[n-n_0]$, με $n_0 = 2$



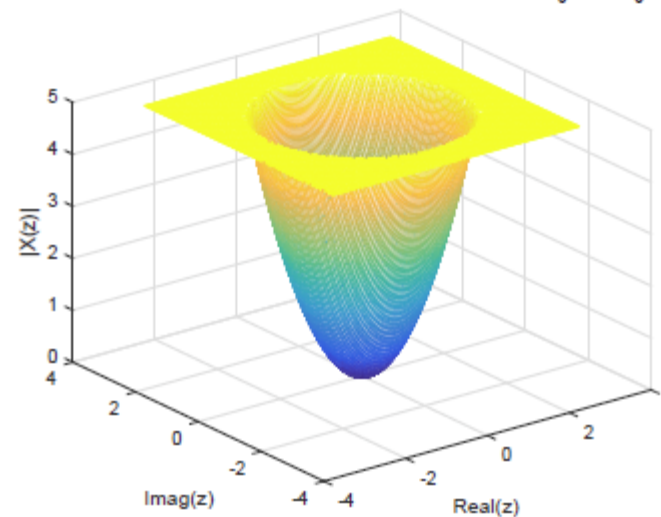
(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = 2$.

$$n_0 = -2$$



(α') Πεδίο σύγκλισης.

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$, του σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο
- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
 - ΌΧΙ!
 - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z!
- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$


• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

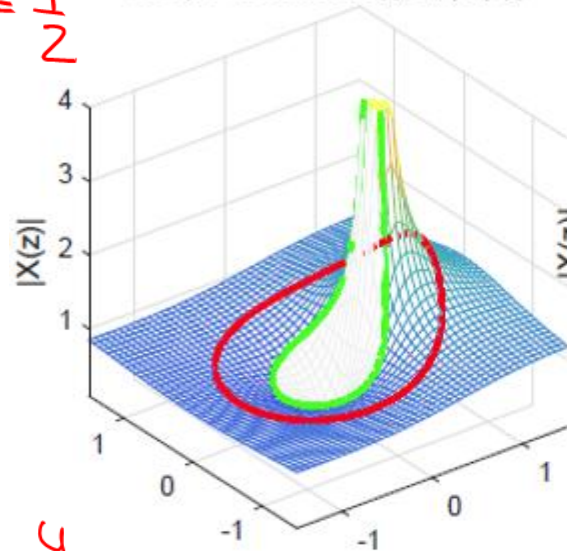
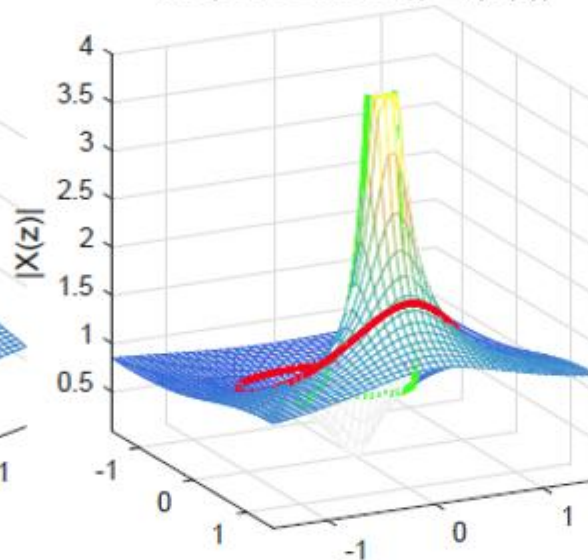
- Για το σήμα $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$ δείξαμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

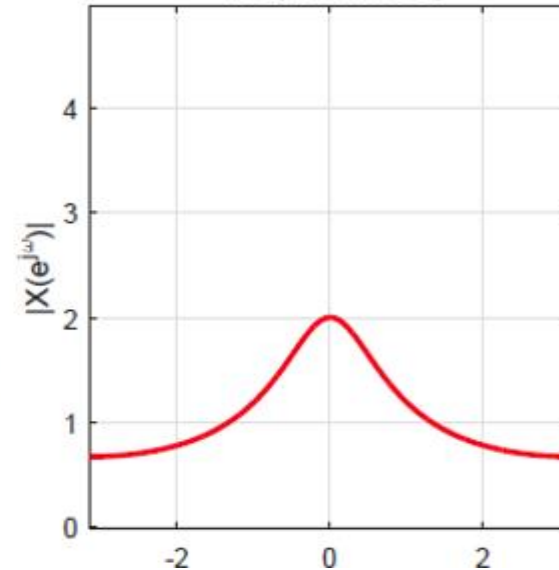
- Ας βάλουμε τιμές στον πόλο a , κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών
- Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$
- Δείτε τι συμβαίνει...

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

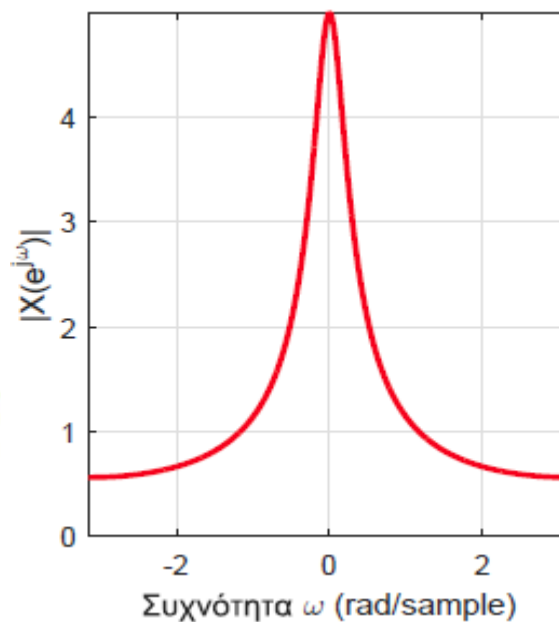
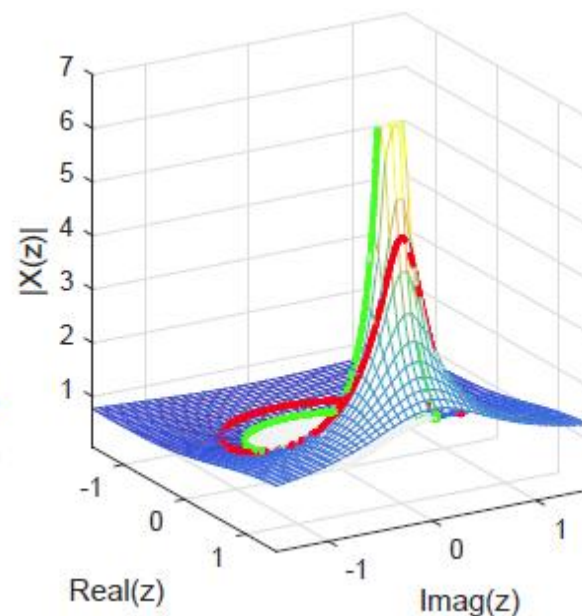
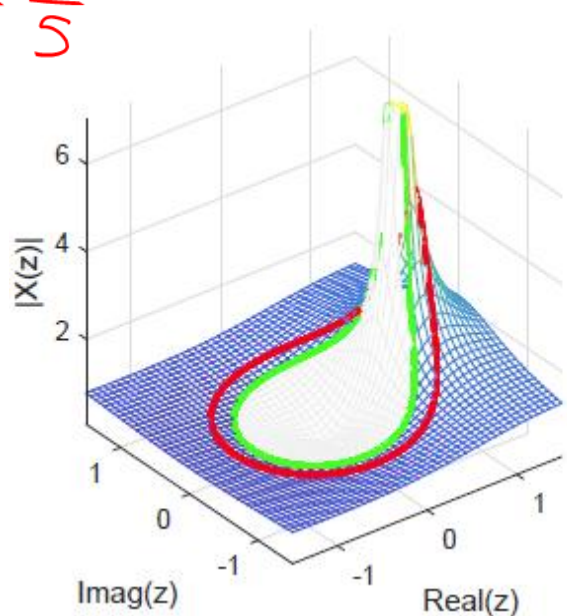
$$a = \frac{1}{2}$$

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ 

Φάσμα Πλάτους

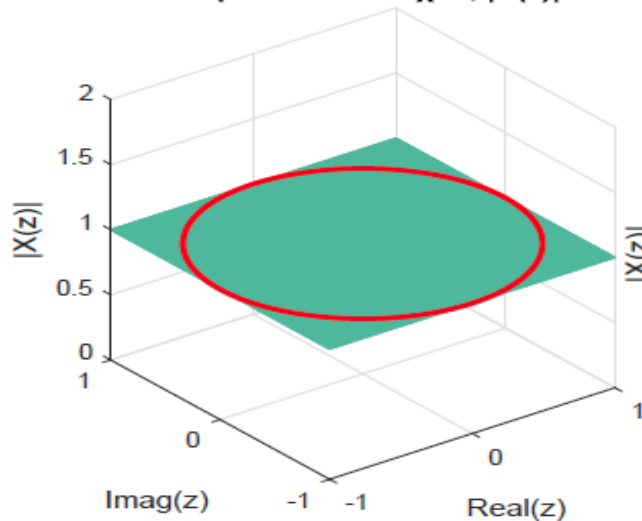
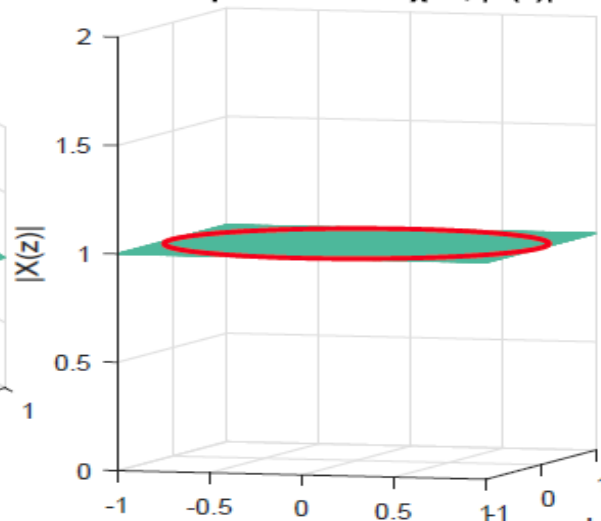


$$a = \frac{1}{5}$$

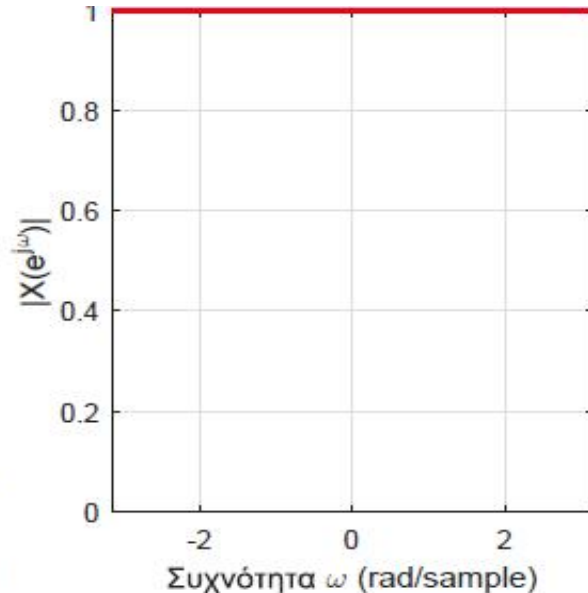
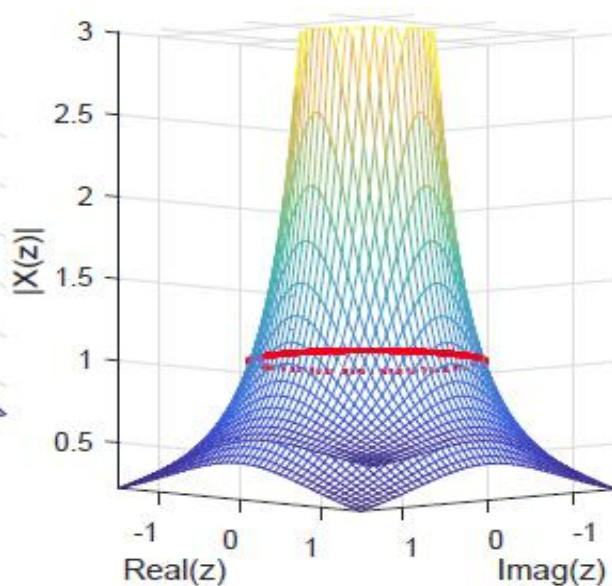
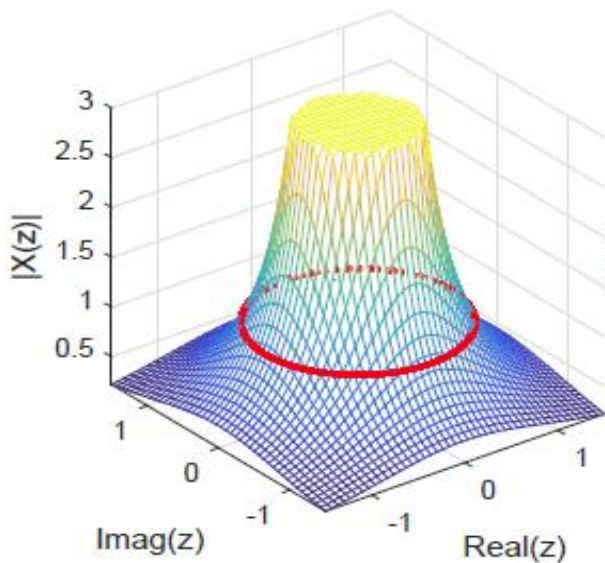
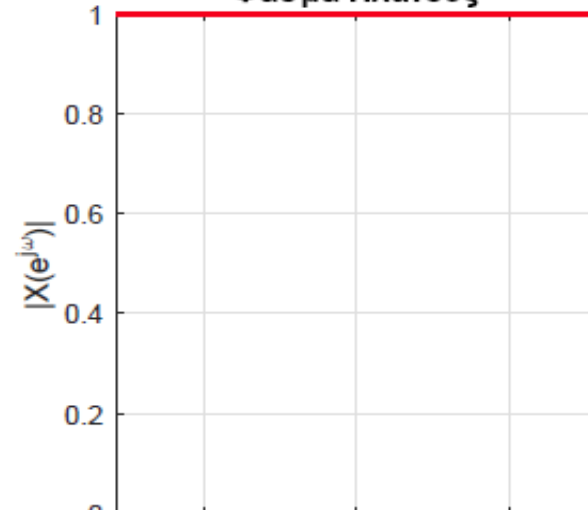


• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n]$, $x[n] = \delta[n - 2]$?

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ Μέτρο του Μετασχ. Z, $|X(z)|$ 

Φάσμα Πλάτους



- Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

- (α') Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
- (β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.
- (γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

Συνεχίζεται... 😊

