

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 8^Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

Τι περιέχει το ΗΥ370?



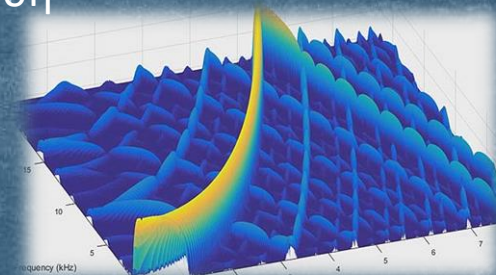
1^ο Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier



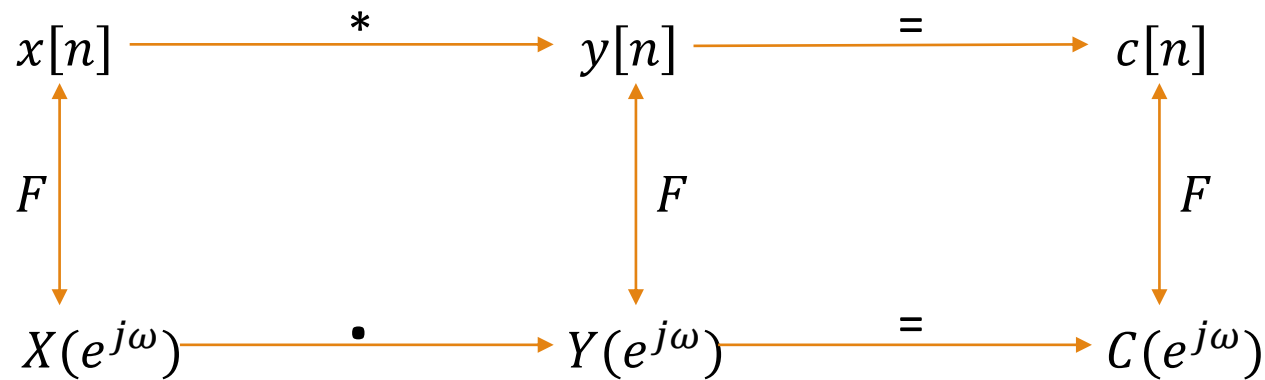
2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



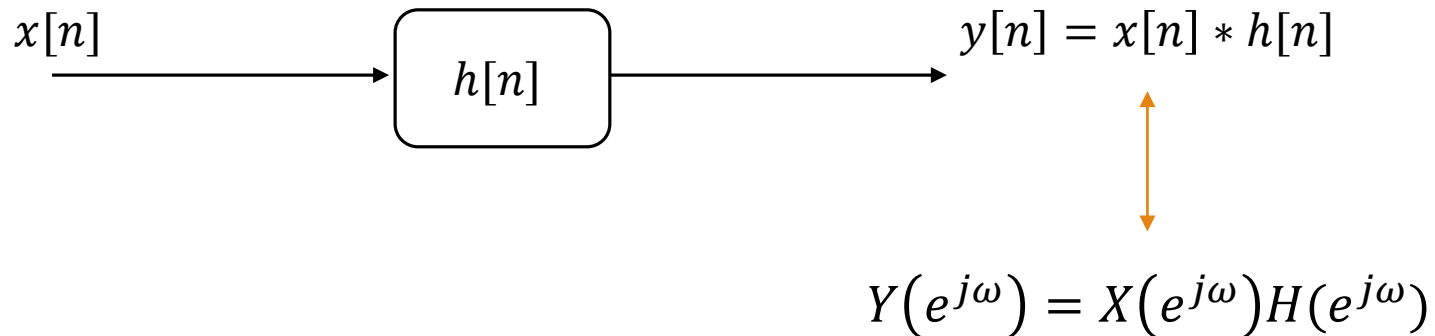
- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του DTFT είναι:



- Αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

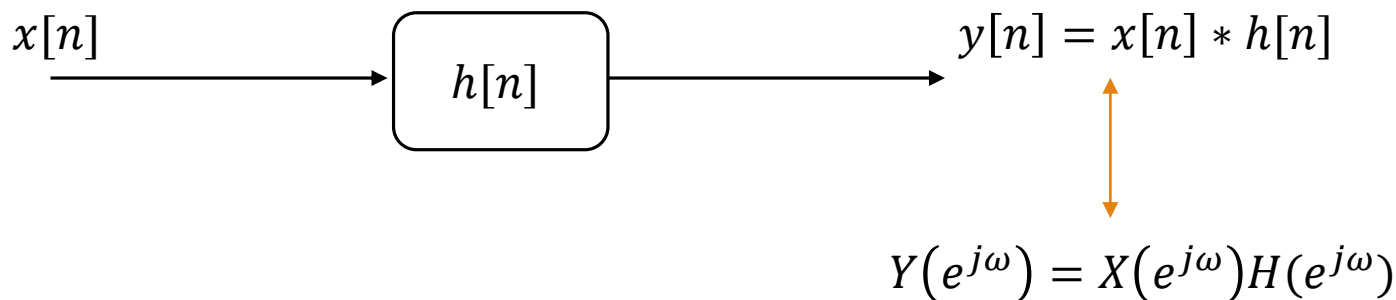
- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
 - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
 - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



- Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

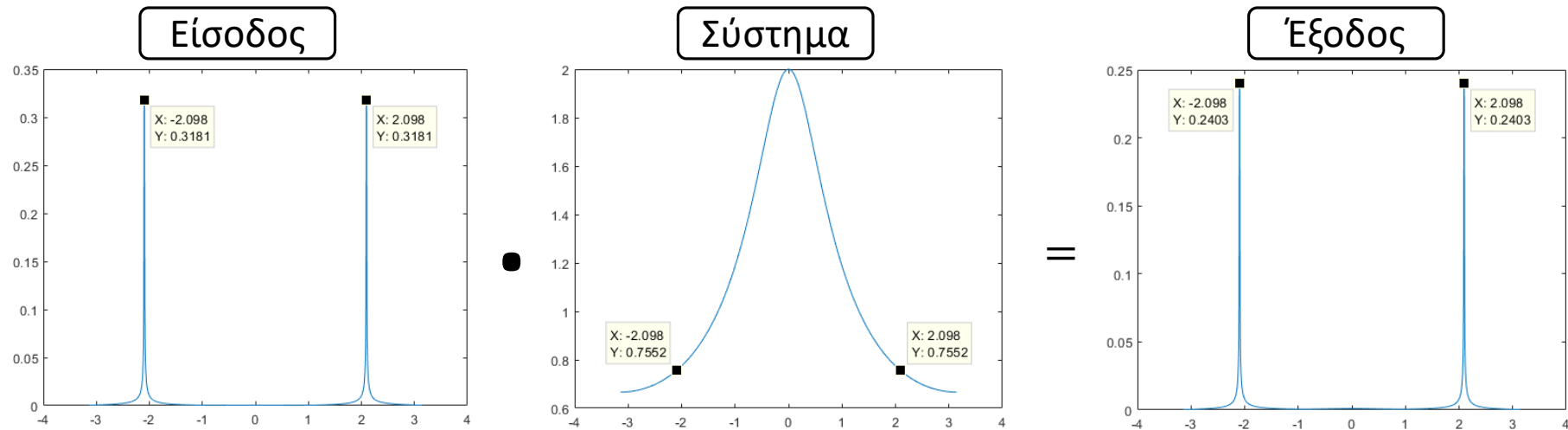
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$

$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

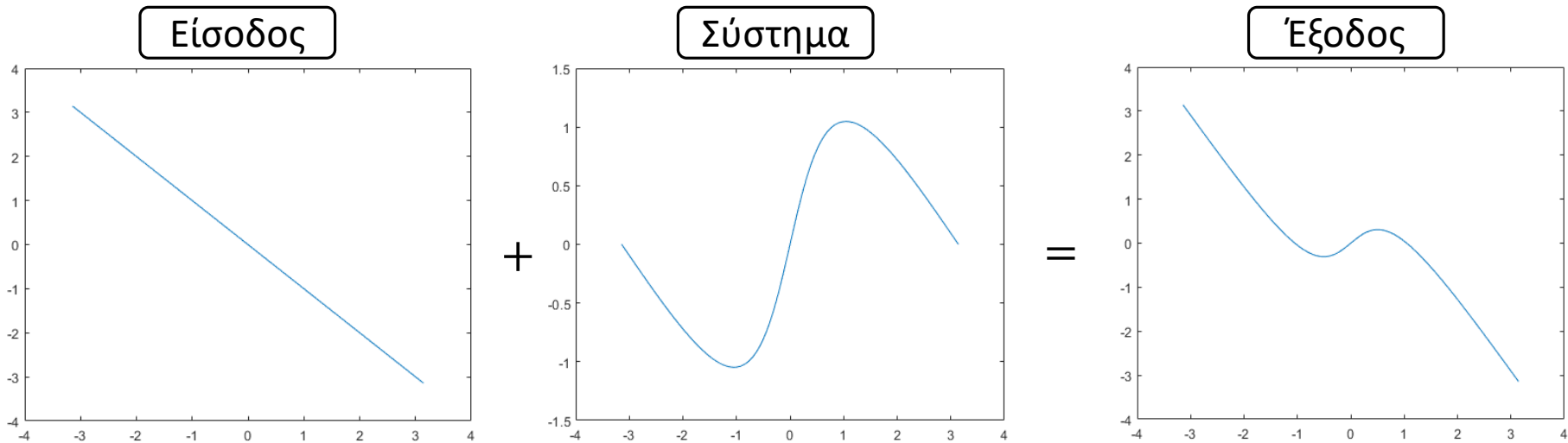
- Άρα
1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
 2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

- Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
 - Κατά πλάτος



- Κατά φάση



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

- Η σχέση

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

- Πώς? Λύνοντας ως προς $H(e^{j\omega})$, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Ας δούμε ένα παράδειγμα...

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

• Παράδειγμα:

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.
Βρείτε την κρουστική απόκριση.

Είναι
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (1)$$

Από πίνακες

$$\left. \begin{aligned} x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \\ y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \end{aligned} \right\} (2)$$

$$H(e^{j\omega}) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

- Παράδειγμα:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}e^{-j\omega} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}}_{W(e^{j\omega})} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}e^{-j\omega} W(e^{j\omega}) \\ \updownarrow F^{-1} \\ \frac{1}{2}\omega[n-1] \end{array} \right.$$

Αρα

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες
- Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

1^η μέθοδος:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι $\gamma - \frac{1}{2}$, και η χαρακ. ρίζα είναι $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Έστω το σύστημα S_0 , να είναι το

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

Θέτω $x[n] = \delta[n]$ και τότε

$$h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n].$$

$$\text{Για } n=0, \quad h_0[0] - \frac{1}{2}h_0[-1] = \delta[0] = 1 \Leftrightarrow \boxed{h_0[0] = 1}$$

Επίσης,

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

$$h_c[n] = c_1 \gamma_1^n, n \geq 0 = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0.$$

Έχω

$$h_c[0] = 1 \Leftrightarrow c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{c_1 = 1}$$

Άρα

$$h_c[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} h[n] &= h_c[n] - \frac{1}{4} h_c[n-1] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]. \end{aligned}$$

Ξέρω:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4} x[n-1]$$

$\updownarrow F$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

$$Y(e^{j\omega}) \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega}) \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

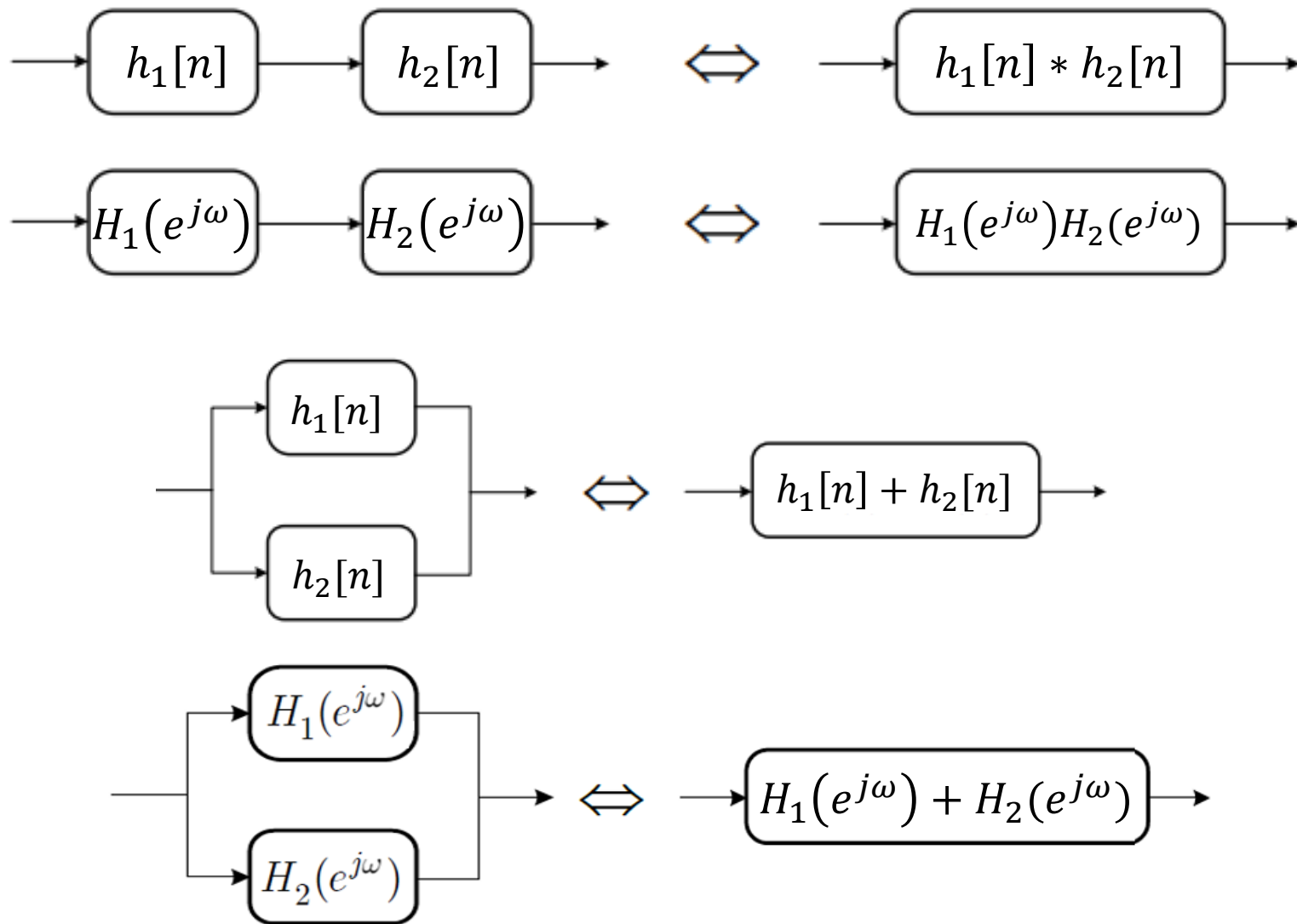
Άρα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} - \frac{1}{4} e^{-j\omega} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

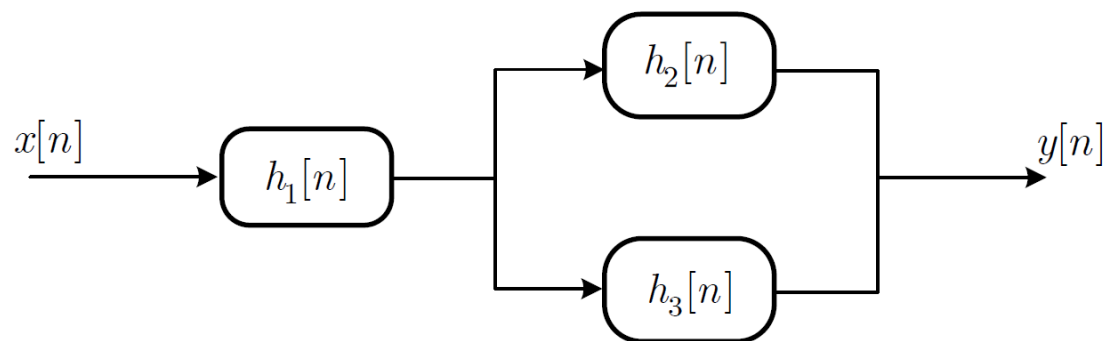
• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$h_2[n] = \delta[n - 2],$$

$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

$$\alpha) \text{ Από το σχήμα, } H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot (H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})).$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left(e^{-j2\omega} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right) = \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$\beta) \text{ Είναι } h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \right\}$$

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

• Παράδειγμα:

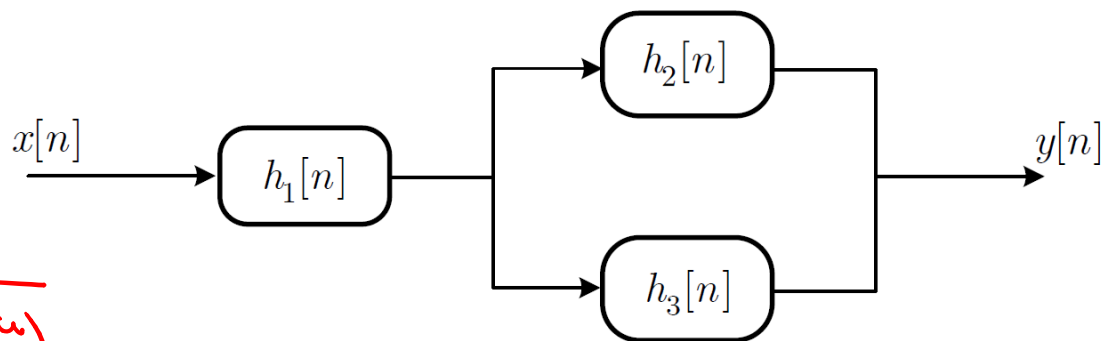
Είναι (ο 2ος όρος μόνο)

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$A = G(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$B = G(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

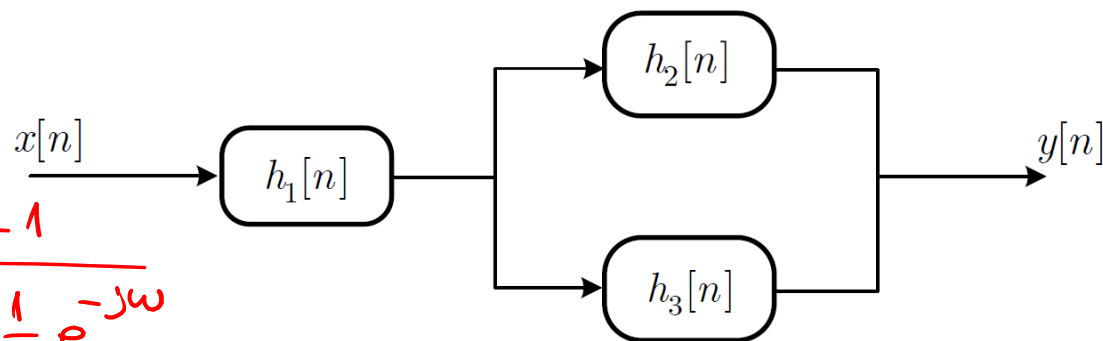


ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

- Παράδειγμα:

Αρα

$$G(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$



Συνολικά

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

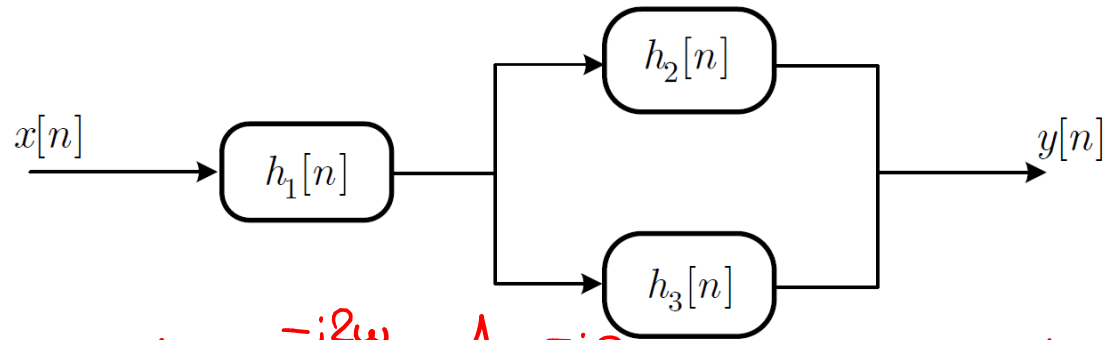
• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

• Παράδειγμα:

Από (α) ερώτημα:

$$\gamma) H(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{e^{-j2\omega} \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right) + 1}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)} = \frac{1 + e^{-j2\omega} - \frac{1}{4} e^{-j3\omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega} - \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$



Άρα

$$Y(e^{j\omega}) \left(1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}\right) = X(e^{j\omega}) \left(1 + e^{-j2\omega} - \frac{1}{4} e^{-j3\omega}\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8} e^{-j2\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega} X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j3\omega} X(e^{j\omega})$$

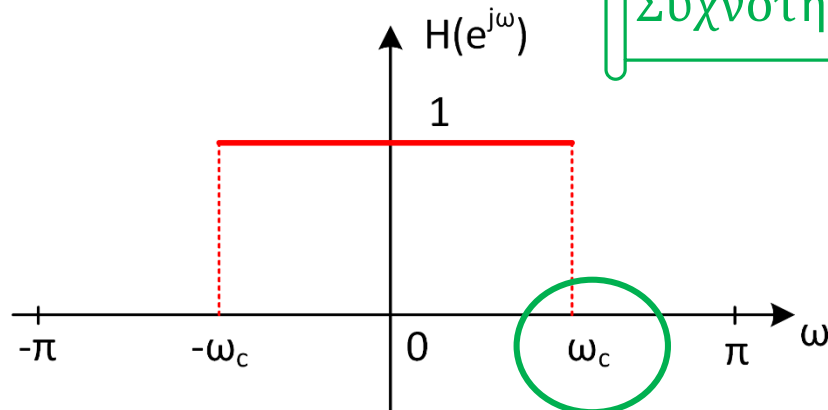
$\uparrow F^{-1}$

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4} x[n-3].$$

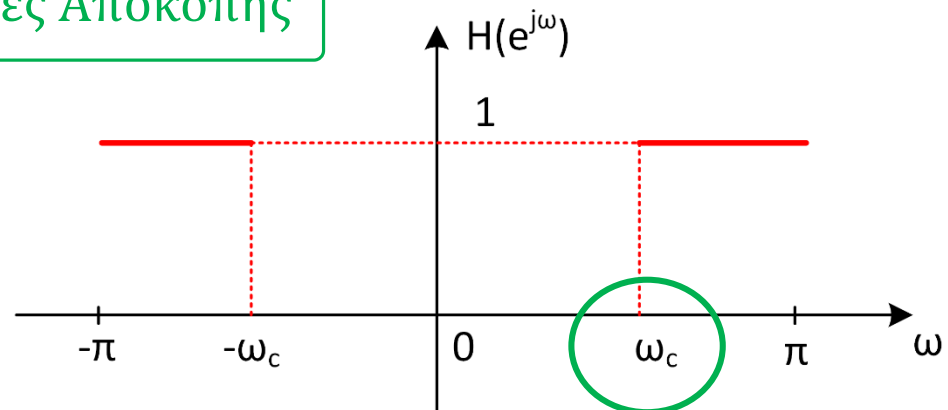
• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας

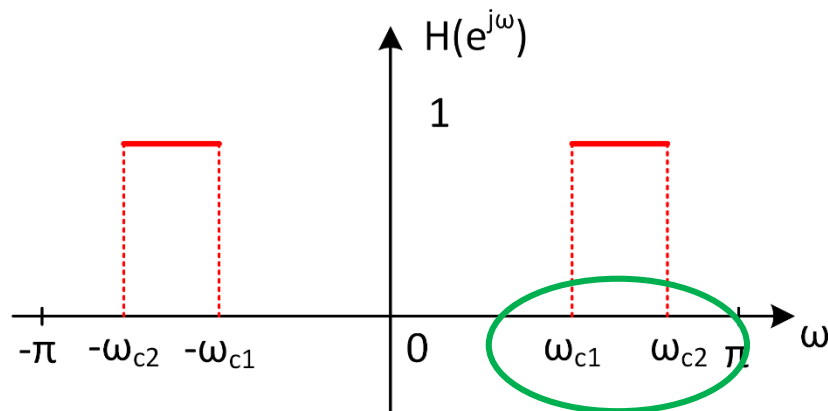
Συχνότητες Αποκοπής



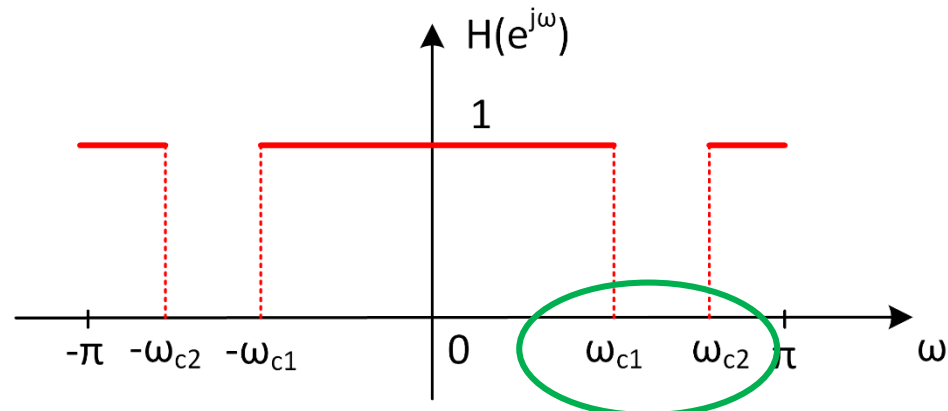
(α) Χαμηλοπερατό



(β) Υψηλοπερατό



(γ) Ζωνοπερατό



(δ) Ζωνοφρακτικό

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

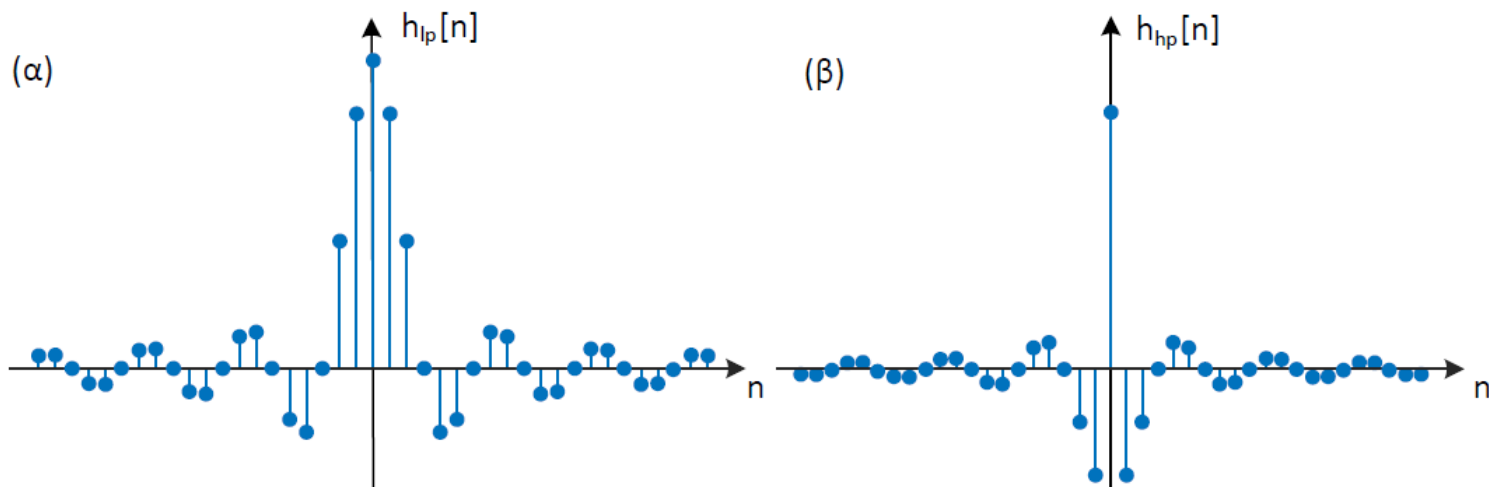
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \leftrightarrow H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- Το υψιπερατό φίλτρο (με ίδια συχνότητα αποκοπής) μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

- Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο

# Τόνοι
f1 = 1800 # Hz
f2 = 2800 # Hz

# Συχνότητα δειγματοληψίας και άξονας χρόνου
fs = 16000
t = np.arange(0, 0.1, 1/fs)
n = np.arange(0, len(t))

# Διακριτές συχνότητες
w1 = 2*np.pi*f1/fs # rad/sample
w2 = 2*np.pi*f2/fs # rad/sample

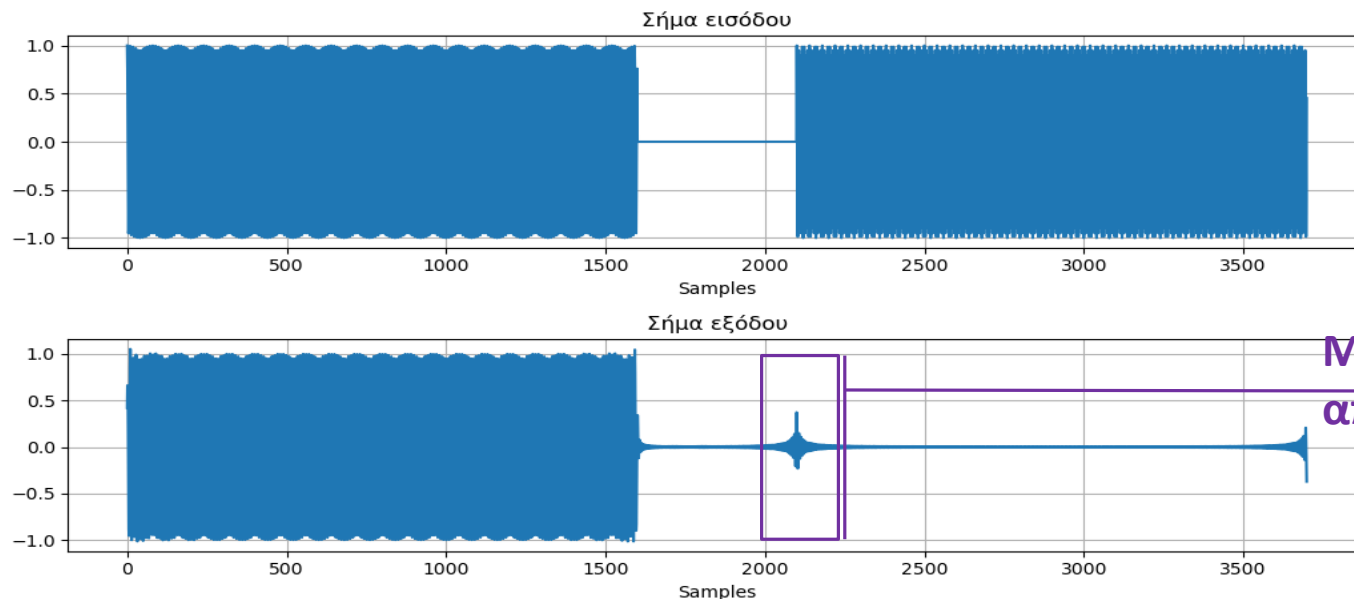
# Ήχος
x = np.hstack([np.cos(w1*n), np.zeros((500)), np.cos(w2*n)])
n_x = np.arange(0, len(x))
```

```
# Χαμηλοπερατό φίλτρο
fc = 2600 # Hz
wc = 2*np.pi*fc/fs # rad/sample
n_y = np.arange(-len(x)/2, len(x)/2)
hlp = wc/np.pi * np.sinc(wc*n_y/np.pi)

# Φιλτράρισμα
y = np.convolve(x, hlp, mode='same')

# Γράφημα
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(6,6))
axs[0].plot(n_x, x)
axs[0].set_title('Σήμα εισόδου')
axs[0].grid()
axs[0].set_xlabel('Samples')

axs[1].plot(n_x, y)
axs[1].set_title('Σήμα εξόδου')
axs[1].grid()
axs[1].set_xlabel('Samples')
```



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

