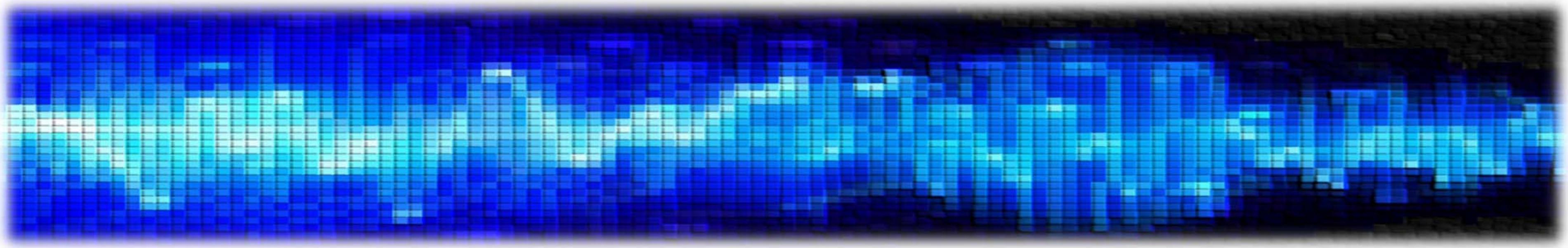
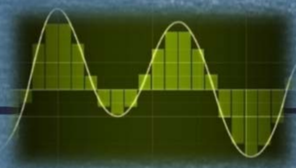
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

## ΔΙΑΛΕΞΗ 2Η



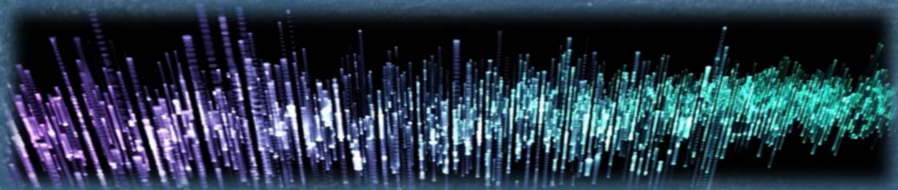
- Βασικά Σήματα και ιδιότητες
- Συστήματα και ιδιότητες

# Τι περιέχει το ΗΥ370?



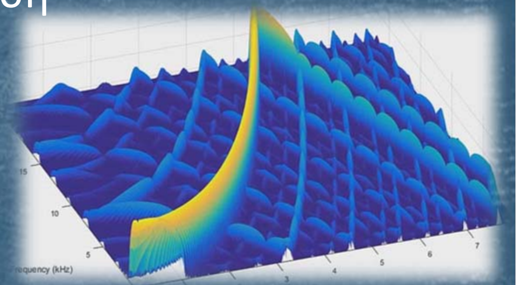
## 1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

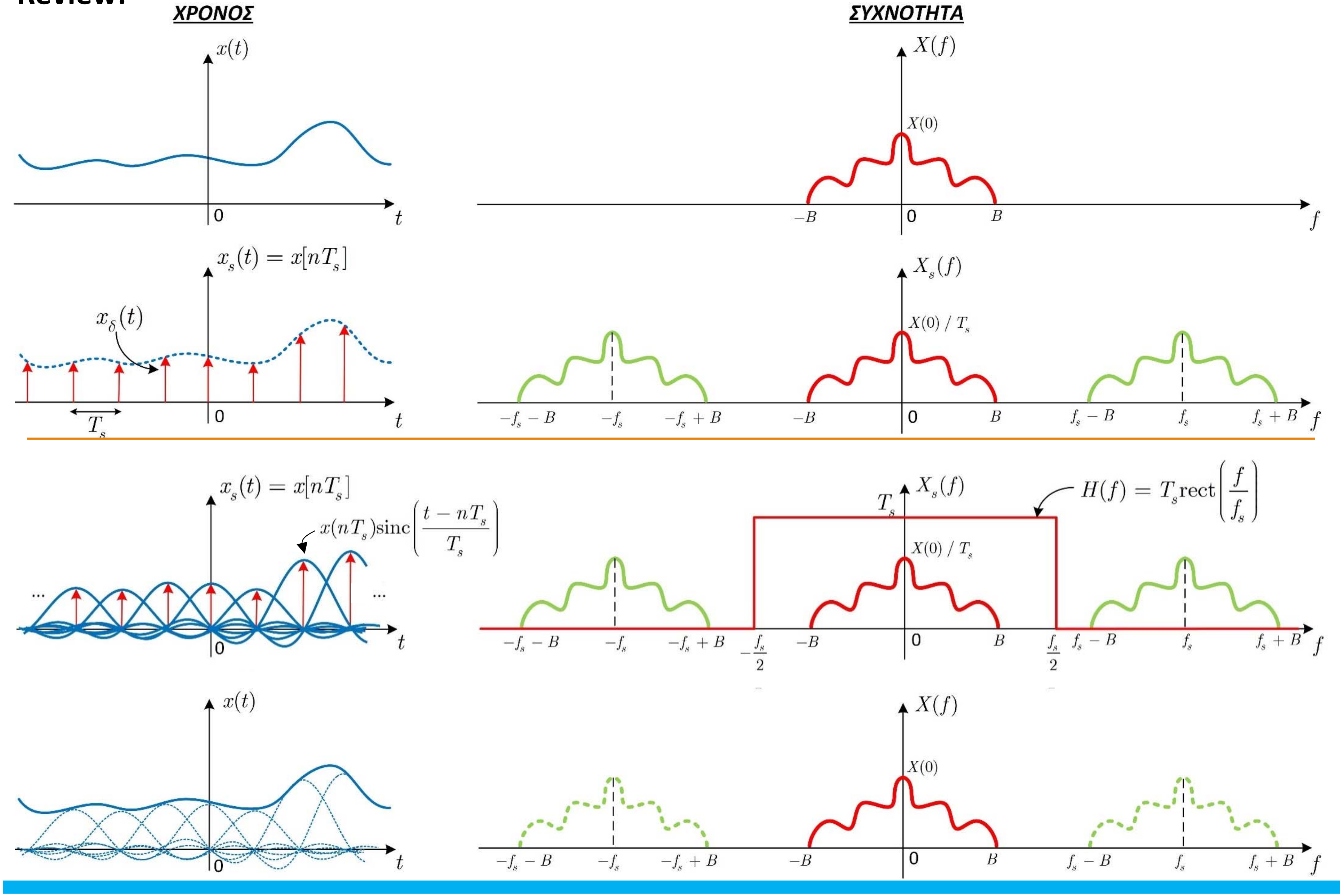


## 2ο Κομμάτι

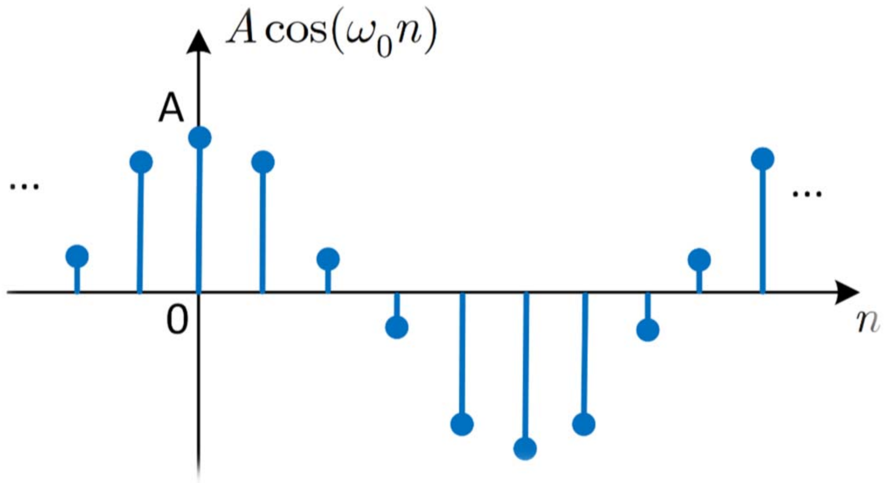
- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



# Review:


ΧΡΟΝΟΣ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
$x(t)$
$X(f)$
$X(0)$
$-B$
$B$
$x_s(t) = x[nT_s]$
$x_\delta(t)$
$T_s$
$X_s(f)$
$X(0) / T_s$
$-f_s - B$
$-f_s$
$-f_s + B$
$f_s - B$
$f_s$
$f_s + B$
$x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$
$H(f) = T_s\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$
$-\frac{f_s}{2}$
$\frac{f_s}{2}$
0
$t$
$f$

- **Ημίτονα (Review)**
- Σύνοψη:




ΧΡΟΝΟΣ ⟷ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

**Περιοδικό?**
Εξαρτάται από το $\omega_0$!

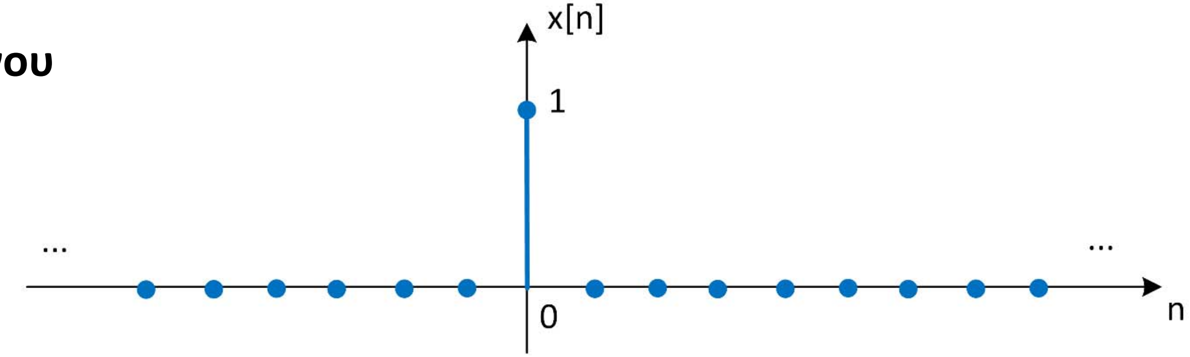
**Περιοδικό?**
Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με $2\pi$

- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.

- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

- **Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου**



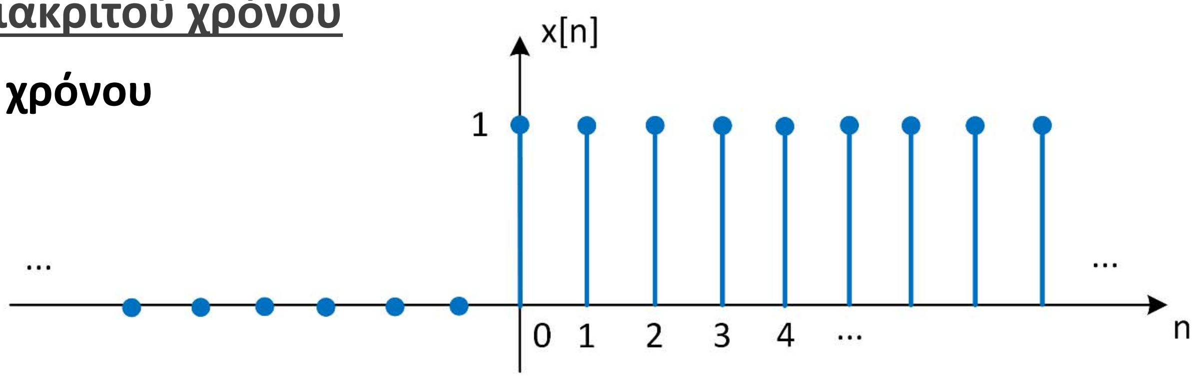

Ορισμός:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**
- **Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου**




Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

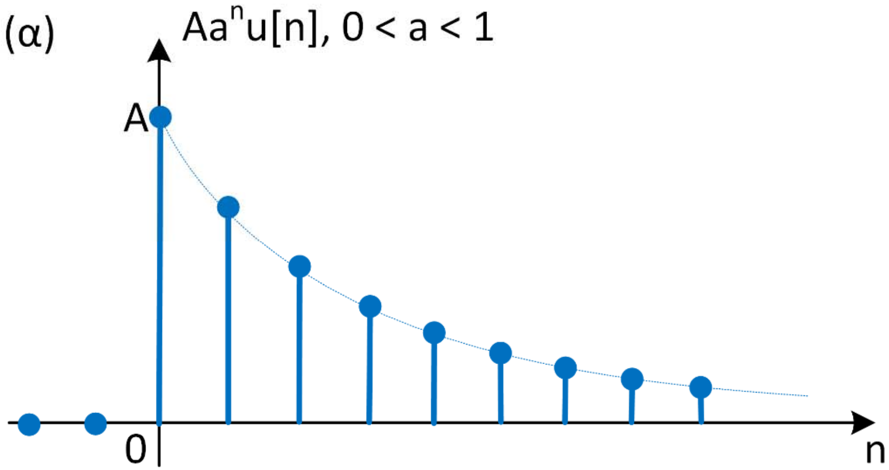
- **Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου**

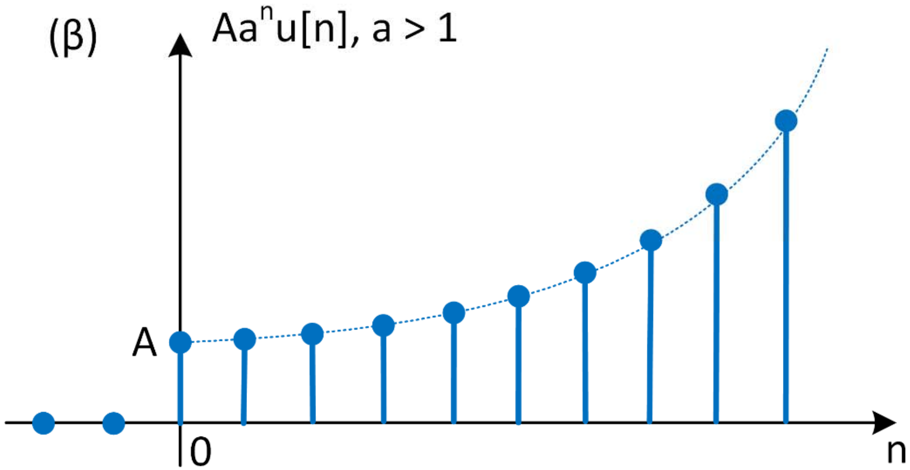
- **Εκθετική μιγαδική συνάρτηση διακριτού χρόνου**

$$x[n] = a^n, \qquad a \in C$$

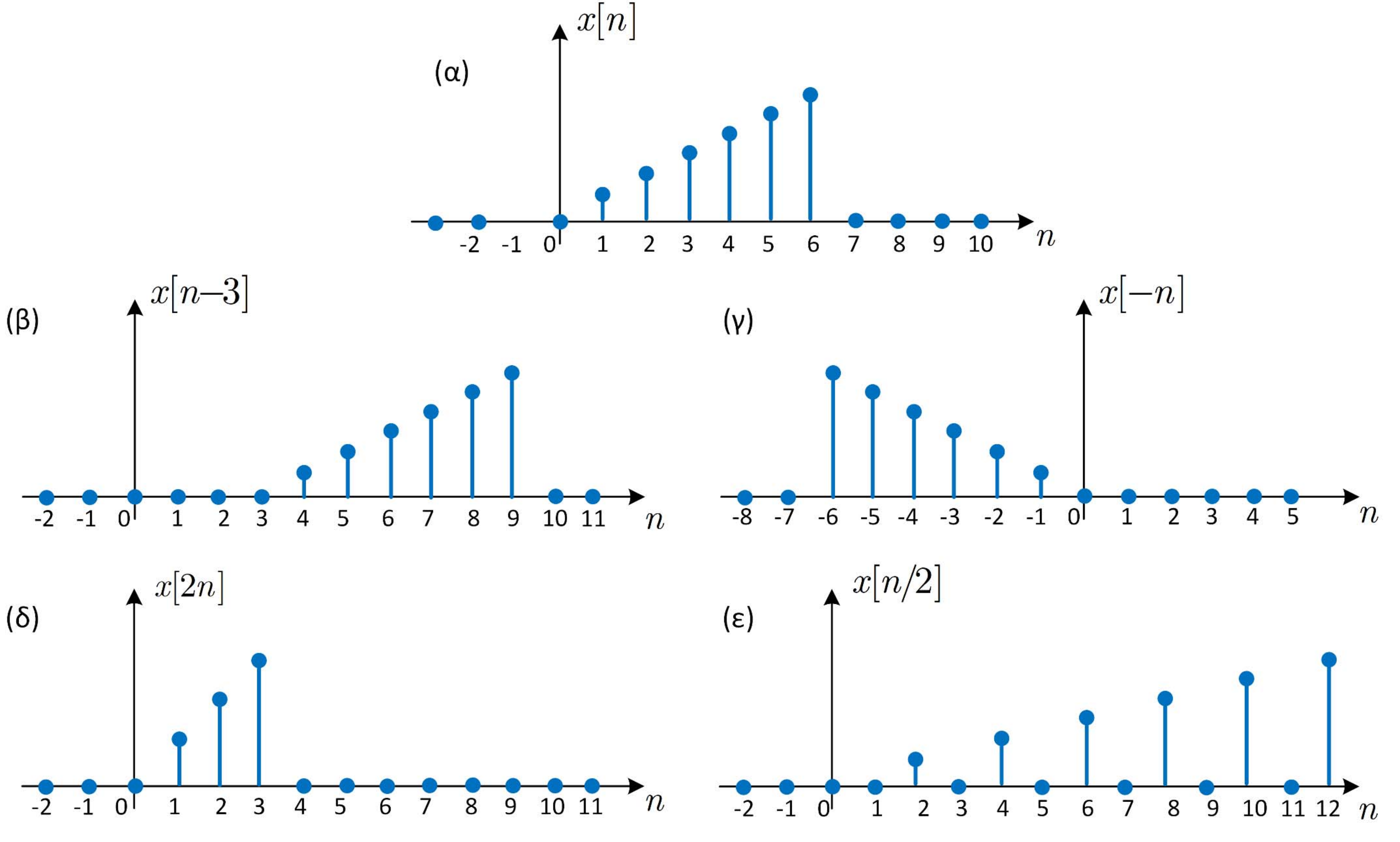
- Περισσότερο χρήσιμες είναι οι «εκδόσεις» γινομένου με τη βηματική συνάρτηση

$$x[n] = a^n u[n],\ 0 < a < 1 \text{ ή } a > 1$$

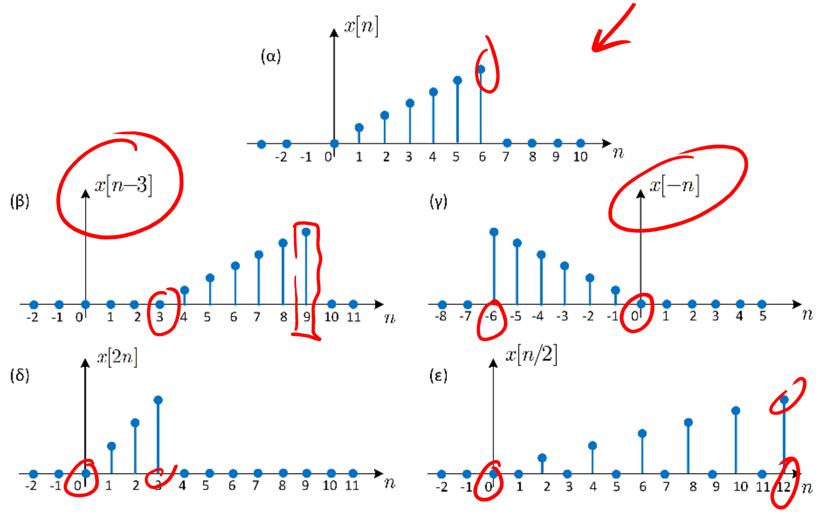


- **Μετασχηματισμοί σημάτων**



- **Μετασχηματισμοί σημάτων**




$$x[n] = \begin{cases} n & 0 \le n \le 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x[n-3] = \begin{cases} n-3 & 0 \le n-3 \le 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} n-3 & 3 \le n \le 9 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x[-n] = \begin{cases} -n & 0 \le -n \le 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -n & -6 \le n \le 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x[2n] = \begin{cases} 2n & 0 \le 2n \le 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 2n & 0 \le n \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x[n/2] = \begin{cases} n/2 & 0 \le \frac{n}{2} \le 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} n/2 & 0 \le n \le 12, \quad n = 0, 2, 4, \ldots, 12 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- **Ανάλυση σήματος**

- Κάθε σήμα διακριτού χρόνο μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

- Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση Δέλτα έχει πλάτος την αντίστοιχη τιμή του σήματος $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n = k$

- Σκεφτείτε το ανάλογο του συνεχούς χρόνου:

$$\underline{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

- Παράδειγμα:

  o Γράψτε το σήμα $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ με χρήση συναρτήσεων Δέλτα

$x[n] = \delta[n] - 2\cdot\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**

- Χρειαζόμαστε μια μετρική που να απεικονίζει το «μέγεθος» ενός σήματος

- Μια τέτοια είναι η **ενέργεια** ενός σήματος

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

- Σήματα για τα οποία $0 < E < +\infty$ ονομάζονται **σήματα ενέργειας**
    - **Όλα** τα σήματα στη φύση ή στο εργαστήριο είναι σήματα ενέργειας

- Κάποια ενδιαφέροντα σήματα (από θεωρητικής πλευράς) έχουν άπειρη ενέργεια

- Μια πιο κατάλληλη μετρική είναι η **ισχύς** ενός σήματος

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- Ένα σήμα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δυο!

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**
- Hints:
- Σήμα με:
  - Πεπερασμένη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$ → **πιθανότατα σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που **δε** φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$ → **σήμα ισχύος**
  - **Περιοδικό** σήμα με πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ισχύος**
- Από μαθηματικής σκοπιάς, μπορεί να υπάρχουν σήματα που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες αλλά να μην είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος
  - Αλλά αυτά είναι μαθηματικές κατασκευές, δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν στο εργαστήριο, δεν υπάρχουν στη φύση, και δε μας ενδιαφέρουν από πρακτικής σκοπιάς

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**

- Παραδείγματα:

  ο Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u[n]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{4-1}{4}} = \frac{4}{3} < \infty$$

$$\boxed{x[n] = u[n]}$$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u^2[n] =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} N+1 = \lim_{N \to \infty} \frac{\cancel{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)}{\cancel{N}\left(2+\frac{1}{N}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

- Τα σήματα φέρουν χρήσιμη πληροφορία που μπορεί να εξαχθεί μέσω των **συστημάτων**

- Ένα σύστημα δεν είναι τίποτε άλλο από μια οποιαδήποτε διαδικασία παράγει μια **έξοδο** όταν διεγερθεί από μια **είσοδο**
  - Το σύστημα διεγείρεται από ένα **σήμα εισόδου** και παράγει ως απόκριση ένα **σήμα εξόδου**
  - Το σύστημα μπορεί να υλοποιείται σε υλικό, λογισμικό, ή να υπάρχει στη φύση

- Η πιο γενική απεικόνιση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\;S\;} \longrightarrow y[n]$$

- Το σήμα εισόδου συμβολίζεται με $x[n]$

- Το σήμα εξόδου συμβολίζεται με $y[n]$

- Το σύστημα πραγματοποιεί μια λειτουργία επάνω στο σήμα εισόδου με σκοπό να εξάγει κάποια πληροφορία από αυτό
- Μια διαφορετική αναπαράσταση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

με $T\{\cdot\}$ να αναπαριστά έναν τελεστή (πράξη) που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος $x[n]$ ώστε να παραχθεί η έξοδος $y[n]$

- Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα αναπαριστά μια **σχέση εισόδου-εξόδου**
- Παραδείγματα συστημάτων:

$$y[n] = 2x[n]$$
$$y[n] = 3x^2[n-1]$$
$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

- Γενικότερα, ένα σύστημα αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια **εξίσωση διαφορών**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Τα συστήματα διακρίνονται σε 5 (για τους σκοπούς μας) κατηγορίες:

1. Δυναμικά ή Στατικά
2. Γραμμικά ή μη γραμμικά
3. Χρονικά μεταβλητά ή αμετάβλητα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά
5. Ευσταθή και ασταθή

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε ότι ένα σύστημα με είσοδο $x[n]$ θα δίνει έξοδο $y[n]$

- **Δυναμικά ή Στατικά**
  - Αλλιώς, ονομάζονται συστήματα **με μνήμη ή χωρίς μνήμη**
  - **Δυναμικά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $n_0$
  - **Στατικά** ονομάζονται αυτά που δεν έχουν αυτήν την απαίτηση, δηλ. για τον υπολογισμό της εξόδου τη στιγμή $n_0$ απαιτείται η είσοδος την ίδια χρονική στιγμή <u>και μόνο</u>
  - Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n-2]$$
$$y[n] = x[n+1] - 2x[n-1]$$
$$y[n] = \log|x[n]|$$
$$y[n] = x^2[n]$$

  - **Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?**

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - **Γραμμικό** λέγεται ένα σύστημα ικανοποιεί δυο ιδιότητες:
  - Την ιδιότητα της **ομογένειας**
  - Την ιδιότητα της **αθροιστικότητας**

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

  - **Ομογένεια**: αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $cx[n]$ τότε στην έξοδο θα εμφανίζεται το σήμα $cy[n]$

    - Π.χ. $y[n] = 2x[n-1], \quad y[n] = x[n+3] - x[n], \quad y[n] = 3x[-n] + 2x[n^2]$

    - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n], \ \ y[n] = \frac{1}{x[n]}, \ \ y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

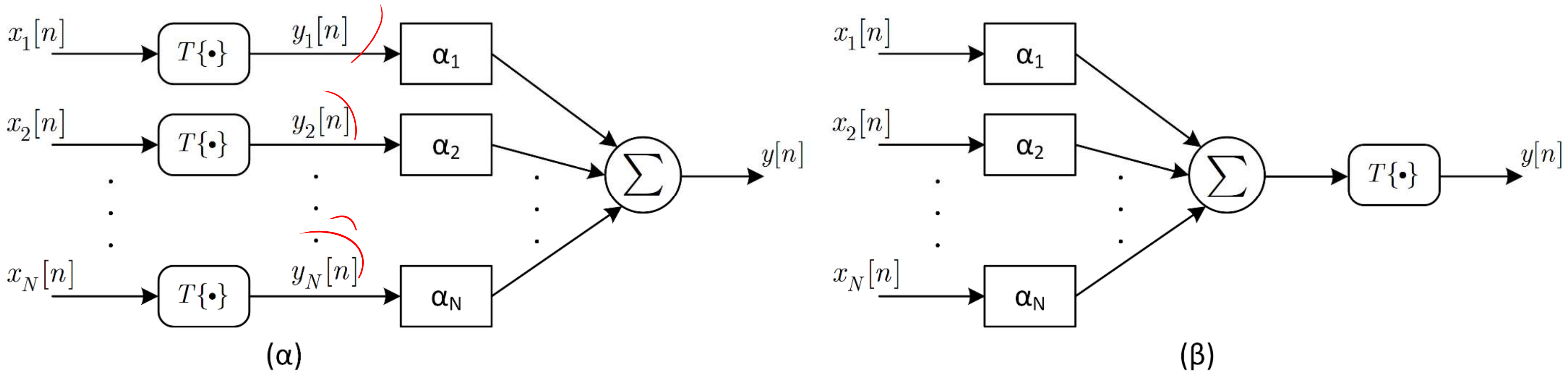
  - **Αθροιστικότητα**: αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα $x_1[n] + x_2[n]$ τότε στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα $y_1[n] + y_2[n]$, με $y_1[n]$ και $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ αντίστοιχα.

    - Π.χ. $y[n] = 2x[n-1] + x[n], \ \ y[n] = nx[-n] - 5x[n+1], \ \ y[n] = 3x[-n-1] + 2x[n+1]$

    - Αντιπαράδειγμα: $y[n] = x^2[n], \ \ y[n] = \frac{1}{x[n]}, \ \ y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

  - Για τους οπτικούς τύπους ☺ η γραμμικότητα ισχύει αν οι δυο παρακάτω διατάξεις πραγματοποιούν την ίδια έξοδο




  - Με μαθηματικά, αν

$$
\begin{aligned}
&T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = \\
&= T\{ax_1[n]\} + T\{bx_2[n]\} \\
&= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\
&= ay_1[n] + by_2[n]
\end{aligned}
$$

$x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n]$

$x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n]$

με $y_1[n]$, $y_2[n]$ τις εξόδους του συστήματος για εισόδους $x_1[n]$, $x_2[n]$ αντίστοιχα, τότε το σύστημα είναι γραμμικό.

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - Παράδειγμα:

  o Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n]$$

είναι γραμμικό.

1) $x[n] \xrightarrow{T} y[n]$

$c\,x[n] \xrightarrow{T} c\,y[n]$

$$T\{c\,x[n]\} = 2 \cdot c\,x[n-1] + c\,x[n] =$$
$$= c\,(2x[n-1] + x[n]) =$$
$$= c\,y[n]$$

2) $x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n]$

$x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n]$

$x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{T}$

$$T[x_1[n] + x_2[n]] = 2\,(x_1[n-1] + x_2[n-1]) + x_1[n] + x_2[n] =$$

$$= \underbrace{2x_1[n-1] + x_1[n]}_{y_1[n]} + \underbrace{2x_2[n-1] + x_2[n]}_{y_2[n]} = y_1[n] + y_2[n]$$

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**
  - Παράδειγμα:

Ο Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι γραμμικό.

1) $x[n] \xrightarrow{T} y[n]$

$c\,x[n] \xrightarrow{T} c\,y[n]$

$T\{c\,x[n]\} = c^2 x^2[n] \neq c\,y[n]$

2) $x_1[n] \xrightarrow{T} x_1^2[n]$

$x_2[n] \xrightarrow{T} x_2^2[n]$

$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = (x_1[n] + x_2[n])^2 =$

$= x_1^2[n] + x_2^2[n] + 2\,x_1[n] \cdot x_2[n]$

$\neq y_1^2[n] + y_2^2[n]$

- **Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα**

  - Η χρονική (α)μεταβλητότητα έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του συστήματος όταν η είσοδος καθυστερεί κατά κάποια δείγματα

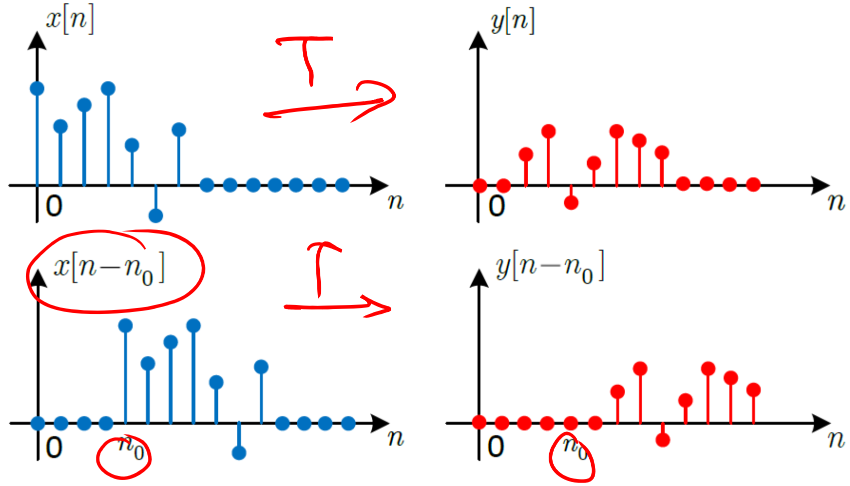
  - Έστω $x[n]$ η είσοδος σε ένα **χρονικά αμετάβλητο** (ΧΑ) σύστημα, και έστω $y[n]$ η έξοδος. Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά $n_0$ δείγματα, δηλ.

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

  τότε η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

  - Ένα σύστημα που δεν ικανοποιεί τα παραπάνω ονομάζεται **χρονικά μεταβλητό**. Ένα χρονικά μεταβλητό σύστημα αποκρίνεται διαφορετικά σε κάθε καθυστέρηση της εισόδου
    - Η διαφορά μπορεί να έγκειται στην καθυστέρηση της εξόδου, στο πλάτος της, ακόμα και στη γραφική παράσταση του σήματος εξόδου!



- **Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

$x[n) \xrightarrow{T} y[n] = x^2[n]$

$x[n-n_0] \xrightarrow{T}$ $\quad T\{x[n-n_0]\} = x^2[n-n_0]$

$y[n-n_0] = x^2[n-n_0]$

- **Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα**
  - Παράδειγμα:
  - Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = nx^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

$$x[n-n_0] \xrightarrow{T} n \cdot x^2[n-n_0]$$

$$y[n-n_0] = (n-n_0)\, x^2[n-n_0]$$

$\neq$

- **Αιτιατά και μη αιτιατά**

  - Αιτιατό λέγεται ένα σύστημα που **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογίσει μια τιμή της εξόδου του

  - Κάθε φυσικό σύστημα είναι αιτιατό

  - Μη αιτιατά συστήματα είναι υλοποιήσιμα όταν η είσοδος βρίσκεται διαθέσιμη ολόκληρη από πριν
    - Καταγεγραμμένη σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο

  - Παραδείγματα:

$$y[n] = x[n] + x[n-2]$$
$$y[n] = x^2[n+1] - 2\sin(x[n-1])$$
$$y[n] = \log|x[n+1]|$$
$$y[n] = \sqrt{x[n-1]}$$

  - **Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?**

- **Ευσταθή και ασταθή**

  - Ένα σύστημα ονομάζεται **Φραγμένης-Εισόδου-Φραγμένης-Εξόδου (Bounded-Input-Bounded-Output – BIBO) ευσταθές** αν

$$|x[n]| < B_x, \qquad B_x \in \Re$$

  συνεπάγεται ότι

$$|y[n]| < B_y, \qquad B_y \in \Re$$

  - Η ευστάθεια ουσιαστικά απαιτεί για απολύτως φραγμένη είσοδο, η έξοδος να είναι επίσης απολύτως φραγμένη

- **Ευσταθή και ασταθή**
  - Παράδειγμα:

  O Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y[n] = \frac{1}{x[n]}$$

$$y[n] = x^2[n-2]$$

είναι ευσταθή.

1) $y[n] = \frac{1}{x[n]}$ : Έστω $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| = \frac{1}{|x[n]|}$ ... Αν $x[n]=0$ τότε $y[n] \to \infty$. Άρα το σύστημα είναι Ασταθές.

2) $y[n] = x^2[n-2]$. Έστω $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| = |x^2[n-2]|$
$= |x[n-2]|^2 < B_x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |y[n]| < B_y = B_x^2$

Επομένως το σύστημα είναι Ευσταθές

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ