

Κεφάλαιο 16

Συστήματα στο χώρο του Z

Στο προηγούμενο κεφάλαιο συζητήσαμε τη συμπεριφορά σημάτων στο χώρο του μετασχηματισμού Z. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αναπτύξουμε τα εργαλεία για τη μελέτη σημάτων και συστημάτων στο χώρο του μετασχ. Z με περισσότερη λεπτομέρεια, και θα γνωρίσουμε χρήσιμες κατηγορίες ΓΧΑ συστημάτων που προκύπτουν πολύ συχνά σε πρακτικές εφαρμογές.

16.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Σίγουρα γνωρίζετε το πολύ συνηθισμένο τεστ που κάνουμε για την καρδιά μας, το περίφημο ηλεκτροκαρδιογράφημα (electrocardiogram - ECG). Το ECG καταγράφει την ηλεκτρική δραστηριότητα της καρδιάς που μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια ενός καρδιακού κύκλου. Ένας καρδιακός κύκλος αναφέρεται σε έναν πλήρη χτύπο της καρδιάς, από την αρχή του έως τον επόμενο χτύπο, και περιλαμβάνει πολλαπλά επίπεδα πλήρωσης και εκκένωσης των τεσσάρων θαλάμων της καρδιάς. Η καταγραφή γίνεται ως εξής: ο καρδιολόγος τοποθετεί μεταλλικά ηλεκτρόδια επαλειμμένα με αγωγίμο gel σε διάφορες θέσεις στο σώμα ή γύρω από το στήθος, ώστε να “πιάσει” αυτά τα καρδιακά ηλεκτρικά σήματα που γεννιούνται από αποπολώσεις των μυών της καρδιάς, και οι οποίες διαδίδονται σε παλλόμενα ηλεκτρικά κύματα προς το δέρμα. Μια φορητή συσκευή ηλεκτροκαρδιογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 16.1.

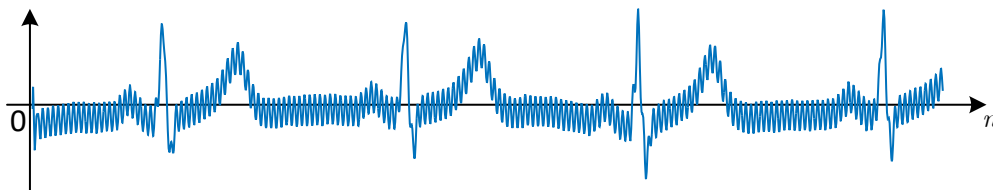


Σχήμα 16.1: Φορητή συσκευή ηλεκτροκαρδιογραφήματος.

Δυστυχώς, τα ηλεκτρόδια καταγράφουν επίσης σήματα από άλλες ηλεκτρικές πηγές, συνήθως αρμονικές στα 50 Hz, που είναι η συχνότητα των συσκευών που έχουμε στα σπίτι μας στην Ελλάδα (σε άλλες χώρες, η συχνότητα λειτουργίας τους είναι 60 Hz). Ένα παράδειγμα ενός “θορυβώδους” ηλεκτροκαρδιογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 16.2.

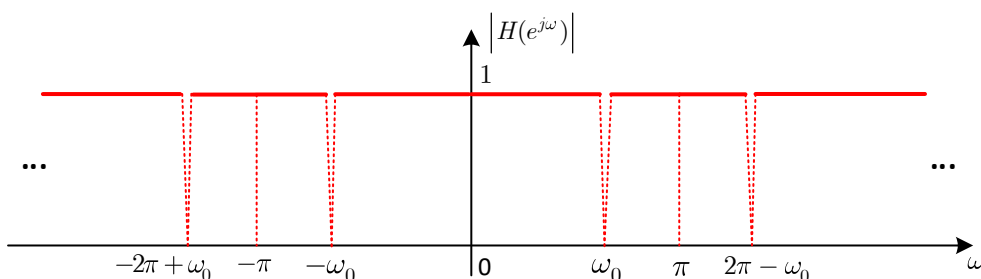
Θα επιθυμούσαμε να αφαιρέσουμε μια τέτοια ανεπιθύμητη παρεμβολή, ώστε να παραδίδεται στο γιατρό ένα καθαρό σήμα προς διάγνωση πιθανών καρδιολογικών προβλημάτων. Όμως θα θέλαμε ιδανικά να αφαιρεθεί μόνο το ανεπιθύμητο σήμα και τίποτε άλλο! Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται η αφαίρεση μιας και μόνο συχνότητας, αυτής της ημιτονοειδούς παρεμβολής. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι ένα τέτοιο ιδανικό σύστημα δεν είναι υλοποιήσιμο. Όμως, ένα ΓΧΑ σύστημα που αφαιρεί πολύ καλά την ημιτονοειδή παρεμβολή του Σχήματος 16.2 περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - 2\alpha \cos(\omega_0 n)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = x[n] - 2\alpha \cos(\omega_0 n)x[n-1] + x[n-2] \quad (16.1)$$



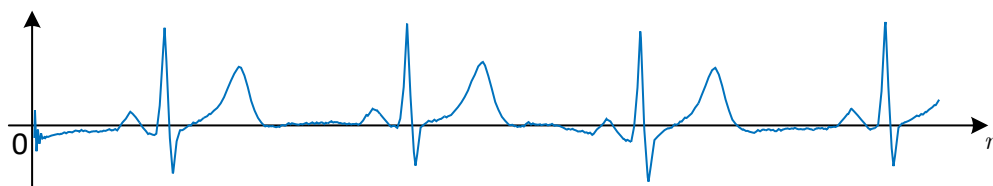
Σχήμα 16.2: Ηλεκτροκαρδιογράφημα με ημιτονοειδή θόρυβο.

με τιμές του α πολύ κοντά στη μονάδα και ω_0 την τιμή της συχνότητας που επιθυμούμε να αφαιρέσουμε. Τέτοια συστήματα ονομάζονται *notch φίλτρα*. Η απόκριση πλάτους ενός τέτοιου συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 16.3.



Σχήμα 16.3: Απόκριση πλάτους notch φίλτρου.

Βλέπετε ότι το φίλτρο εξουδετερώνει σχεδόν μια και μόνο συχνότητα, την ω_0 , ενώ αφήνει αναλλοίωτες όλες τις υπόλοιπες. Το αποτέλεσμα εφαρμογής του φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 16.4.



Σχήμα 16.4: Αποτέλεσμα αποθρονοποίησης ηλεκτροκαρδιογραφήματος με notch φίλτρο.

Πώς μπορεί κανείς όμως να το σχεδιάσει από το μηδέν; Πώς προέκυψε η Σχέση (16.1); Πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε συστήματα με τέτοιες (ή άλλες) συχνотικές αποκρίσεις, κατάλληλες για συγκεκριμένες εφαρμογές; Τέτοια ερωτήματα θα μπορείτε να απαντήσετε όταν ολοκληρώσετε αυτό το κεφάλαιο.

16.2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Δεν πρέπει να σας προκαλεί έκπληξη ότι σήματα της μορφής

$$x[n] = (re^{j\omega_0})^n = z_0^n, \quad -\infty < n < \infty, \quad r > 0 \quad (16.2)$$

όπου r, ω_0 σταθερές, αποτελούν *ιδιοσυναρτήσεις* ενός ΓΧΑ συστήματος. Ας το αποδείξουμε, αξιοποιώντας ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος, $y[n]$, συνδέεται με την είσοδο αυτού, $x[n]$, και με την χρονστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος, με την πράξη της συνέλιξης:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{n-k} = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{-k} = H(z_0)z_0^n \quad (16.3)$$

Άρα, η ιδιοτιμή του συστήματος, που συμβολίζουμε με $H(z_0)$, είναι η

$$H(z_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{-k} \quad (16.4)$$

για κάποιο σταθερό z_0 . Αν τη δούμε ως συνάρτηση του z , αναγνωρίζουμε ότι η παράσταση $H(z)$ δεν είναι άλλη από το μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ του συστήματος.

$$h[n] \longleftrightarrow H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (16.5)$$

Παρατηρήστε την ομοιότητα με την περίπτωση του μετασχ. Fourier (Παράγραφος 14.2.1), όπου γνωρίσαμε τον όρο της συχνότητας απόκρισης. Όμως εδώ ο μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης λέγεται **Συνάρτηση Μεταφοράς - Transfer Function**, γιατί – προφανώς – μας μεταφέρει από το χώρο του χρόνου στο χώρο του μετασχ. Z.

Από τον Πίνακα 15.1, παρατηρούμε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος, που αποτελείται από τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης και της εισόδου στο χώρο του χρόνου, μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο του Z, δηλ.

$$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(z) = X(z)H(z), \quad R_Y \supseteq R_X \cap R_H \quad (16.6)$$

Ως τώρα βλέπετε ότι τα πράγματα μοιάζουν πάρα πολύ με ό,τι κάναμε στο μετασχ. Fourier – και έτσι είναι, μια και ο τελευταίος είναι, όπως είπαμε (υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις βέβαια), “εξειδίκευση” του μετασχ. Z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Θα ήταν πολύ χρήσιμο για τη μελέτη μας να διαχωρίσουμε τη μελέτη των συστημάτων στο χώρο του Z σε δυο κατηγορίες, σύμφωνα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης.

16.2.1 Συστήματα Άπειρης και Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης

Μια σημαντική κατηγοριοποίηση των ΓΧΑ συστημάτων έχει να κάνει με τη διάρκεια της κρουστικής απόκρισής τους, $h[n]$. Ας γνωρίσουμε αυτήν την κατηγοριοποίηση και ας δούμε τι συμβαίνει στο καθένα στο χώρο της συχνότητας (υπό τη γενική περιγραφή στο χώρο του Z).

16.2.2 Συστήματα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης

Συστήματα που περιγράφονται από κρουστική απόκριση η οποία έχει πεπερασμένη διάρκεια (δηλ. είναι μη μηδενική μόνο για συγκεκριμένο και πεπερασμένο διάστημα δειγμάτων $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$) λέγονται συστήματα **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης**, ή πιο σύντομα, FIR συστήματα. Η γενική τους μορφή δίνεται ως

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k], \quad N_1, N_2 > 0 \quad (16.7)$$

δηλ. αποτελούν πεπερασμένο άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα. Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N_2} b_k \delta[n-k], \quad N_2 > 0 \quad (16.8)$$

ενώ αν είναι αντι-αιτιατό, θα είναι

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^0 b_k \delta[n-k], \quad N_1 > 0 \quad (16.9)$$

Μεταφερόμενοι στο χώρο της συχνότητας, το FIR σύστημα της Σχέσης (16.7) μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k} \quad (16.10)$$

Όμως αυτή η σχέση δε μας λέει πολλά για τη θέση των πόλων και των μηδενικών του συστήματος. Αν θέσουμε $l = k + N_1$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$H(z) = \frac{1}{z^{N_2}} \sum_{l=0}^{N_1+N_2} b_{l-N_1} z^{N_1+N_2-l} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right) \quad (16.11)$$

Παρατηρήστε ότι το σύστημα έχει N_2 πόλους στο $z = 0$ και N_1 πόλους στο άπειρο. Η περιοχή σύγκλισής του θα είναι της μορφής $0 < |z| < \infty$. Επίσης, δείτε ότι το σύστημα έχει $N_1 + N_2$ μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο. Ας δούμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Ένα αιτιατό FIR σύστημα εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του z^{-1} . Θέτοντας $N_1 = 0$ έχουμε

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right) \quad (16.12)$$

και πρέπει να σας είναι προφανές ότι έχει N_2 πόλους μόνο στη θέση $z = 0$. Άρα η περιοχή σύγκλισης θα είναι $|z| > 0$. Επίσης δείτε ότι έχει N_2 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο.

- Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του z . Θέτοντας $N_2 = 0$ έχουμε

$$H(z) = \sum_{k=N_1}^0 b_k z^{-k} = b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} (z - c_k) = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right) \quad (16.13)$$

και βλέπετε ότι έχει μόνο N_1 πόλους στο άπειρο. Έτσι, η περιοχή σύγκλισης θα είναι $|z| < \infty$. Δείτε επίσης ότι το σύστημα έχει N_1 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο.

Συνοψίζοντας

- Ένα αιτιατό FIR σύστημα δεν έχει πόλους στο άπειρο, παρά μόνο στο $z = 0$. Η περιοχή σύγκλισης θα είναι $|z| > 0$.
- Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα δεν έχει πόλους στο $z = 0$, παρά μόνο στο άπειρο. Η περιοχή σύγκλισης θα είναι $|z| < \infty$.
- Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους και στο $z = 0$ και στο άπειρο. Η περιοχή σύγκλισης θα είναι $0 < |z| < \infty$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ένα κύριο χαρακτηριστικό των FIR συστημάτων: **οι πόλοι τους βρίσκονται είτε στο $z = 0$ είτε στο $z = \infty$, είτε και στα δυο.**

16.2.3 Συστήματα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης

Υπάρχουν όμως και κρουστικές αποκρίσεις που είναι άπειρες σε διάρκεια. Τέτοια συστήματα λέγονται **Συστήματα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης - Infinite Impulse Response**, και εκφράζονται στο χώρο του Z μέσω ρητών συναρτήσεων μεταφοράς (δηλ. λόγου πολυωνύμων του z^{-1}) με πόλους και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο, δηλ.

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}, \quad R_H \quad (16.14)$$

Με παρόμοια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε για τα FIR συστήματα μπορούμε να δείξουμε ότι

- Ένα αιτιατό IIR σύστημα δεν έχει πόλους στο άπειρο. Η περιοχή σύγκλισης θα είναι της μορφής $|z| > \max|c_k|$.
- Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα δεν έχει πόλους στο μηδέν. Η περιοχή σύγκλισης θα είναι της μορφής $|z| < \min|c_k|$.
- Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους οπουδήποτε. Η περιοχή σύγκλισης θα είναι της μορφής $|c_i| < |z| < |c_j|$.

Η Σχέση (16.14) μπορεί εν γένει να απλοποιηθεί ως

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-M} B_k z^{-k} + \sum_{k=1, k \neq i}^M \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^S \frac{C_m}{(1 - c_i z^{-1})^m} \quad (16.15)$$

και αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε η Σχέση (16.15) δίνει την κρουστική απόκριση $h[n]$ ως

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-M} B_k \delta[n-k] + \sum_{k=1, k \neq i}^M A_k c_k^n u[n] + \sum_{m=1}^S C_m \frac{(n+1) \cdots (n+m-1)}{(m-1)!} c_i^n u[n] \quad (16.16)$$

Αντίθετα, αν είναι αντι-αιτιατό, η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-M} B_k \delta[n-k] - \sum_{k=1, k \neq i}^M A_k c_k^n u[-n-1] - \sum_{m=1}^S C_m \frac{(n+1) \cdots (n+m-1)}{(m-1)!} c_i^n u[-n-1] \quad (16.17)$$

16.3 Εξισώσεις Διαφορών και Μετασχηματισμός Z

Στο διακριτό χρόνο, θεωρούμε ότι τα συστήματα περιγράφονται από μια εξίσωση διαφορών. Εν γένει λοιπόν, ο μετασχ. Z μας επιτρέπει να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις διαφορών πολύ εύκολα, μετατρέποντάς τες σε απλές αλγεβρικές!

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές a_k, b_l ,

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (16.18)$$

Έχουμε δει σε προηγούμενα κεφάλαια τον τρόπο λύσης μιας τέτοιας εξίσωσης διαφορών τόσο στο χώρο του διακριτού χρόνου, όσο και σε αυτόν της συχνότητας. Τα προβλήματα που συναντήσαμε – και λύσαμε – ήταν τα ακόλουθα:

- (α') **Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που δεν είναι ΓΧΑ**, δηλ. που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος, όπως θα θυμάστε, αποτελείται από δυο συνιστώσες: την απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zs}[n]$ και την απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zi}[n]$. Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε τις αποκρίσεις αυτές στο χώρο του Z. Όμως ο δίπλευρος μετασχ. Z δεν περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του, άρα δεν μπορεί να μας δώσει την απόκριση μηδενικής εισόδου. Αυτό όμως μπορεί να το κάνει ο **μονόπλευρος μετασχ. Z**, ο οποίος (δείτε τον Πίνακα 15.1) περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του! Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη σχέση της χρονικής μετατόπισης

$$x[n-k] \longleftrightarrow \sum_{i=1}^k z^{i-k} x[-i] + z^{-k} X(z) \quad (16.19)$$

από το μονόπλευρο μετασχ. Z, για να μετατρέψουμε την εξίσωση διαφορών σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Z της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι ο μετασχ. Z της εξόδου $Y(z)$ δίνεται σε αυτήν την περίπτωση ως

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) \quad (16.20)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k z^{i-l} x[-i] + \sum_{l=0}^M \sum_{i=1}^l z^{i-l} y[-i]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (16.21)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k z^{i-k} y[-i]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (16.22)$$

αφού η είσοδος εφαρμόζεται πάντα σε χρονικές στιγμές $n \geq 0$. Παρατηρήστε πόσο εύκολα διαχωρίζονται οι αποκρίσεις μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης.

- (β') **Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που είναι ΓΧΑ**, δηλ. έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Αφού οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, χρησιμοποιούμε τη σχέση της χρονικής μετατόπισης του δίπλευρου μετασχ. Z

$$x[n-k] \longleftrightarrow z^{-k} X(z) \quad (16.23)$$

για να μετατρέψουμε την εξίσωση διαφορών σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Z της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Τότε η Σχέση (16.22) γίνεται

$$Y(z) = Y_{zs}(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) \quad (16.24)$$

- (γ') **Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ ενός ΓΧΑ συστήματος**. Στο χώρο του Z αυτό γίνεται μέσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα. Τότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε ξανά τη σχέση

$$x[n-k] \longleftrightarrow z^{-k} X(z) \quad (16.25)$$

για να μετατρέψουμε την εξίσωση διαφορών σε αλγεβρική και να κατασκευάσουμε το λόγο $\frac{Y(z)}{X(z)}$ που θα μας δώσει τη συνάρτηση μεταφοράς. Από τη Σχέση (16.24), θα έχουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (16.26)$$

Η ίδια σχέση λαμβάνεται απ' ευθείας από τη Σχέση (16.24), αφού γνωρίζουμε ότι η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος αποτελείται από τη συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Στο χώρο του Z , η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ και του μετασχ. Z της εισόδου $X(z)$. Με το ίδιο σκεπτικό, μπορούσαμε να λάβουμε την ίδια παράσταση από τη Σχέση (16.22), αφού η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται ξανά από την ίδια πράξη της συνέλιξης που αναφέραμε μόλις.

Παρατηρήστε ότι για ένα σύστημα που περιγράφεται από εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση του z^{-1} . Αυτό είναι χαρακτηριστικό των ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές.

16.3.1 Εξισώσεις Διαφορών και Συστήματα με Αρχικές Συνθήκες

Ας δούμε δυο παραδείγματα που δείχνουν χαρακτηριστικά πώς ο μετασχ. Z μπορεί να μας διευκολύνει όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα με αρχικές συνθήκες. Ας υποθέσουμε ότι, όπως και όταν δουλεύαμε στο πεδίο του χρόνου, οι λύσεις μας θα είναι αιτιατές.

Παράδειγμα 16.1:

Έστω το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (16.27)$$

με αρχική συνθήκη $y[-1] = 4$. Βρείτε την συνολική έξοδο του συστήματος για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

Λύση:

Με χρήση του μονόπλευρου μετασχ. Z , θα έχουμε

$$Y(z) - \frac{1}{2}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) = X(z) \quad (16.28)$$

$$Y(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}y[-1] = X(z) \quad (16.29)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}y[-1]}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.30)$$

$$= X(z)H(z) + Y_{zi}(z) \quad (16.31)$$

$$= Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) \quad (16.32)$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τους δυο μετασχηματισμούς Z της εξόδου, έχουμε

$$Y_{zs}(z) = X(z) \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.33)$$

με

$$A = X(z) \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=4} = -1 \quad (16.34)$$

$$B = X(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = 2 \quad (16.35)$$

Οπότε

$$Y_{zs}(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \longleftrightarrow y_{zs}[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.36)$$

Αντίστοιχα,

$$Y_{zi}(z) = \frac{\frac{1}{2}y[-1]}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \longleftrightarrow y_{zi}[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.37)$$

Άρα η συνολική έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (16.38)$$

Παρατηρήστε πόσο γρηγορότερα υπολογίσαμε τη συνολική έξοδο του συστήματος σε σχέση με το πεδίο του χρόνου, ενώ έχουμε διαθέσιμη και την συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ως παράπλευρο αποτέλεσμα της όλης διαδικασίας. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε το παραπάνω αποτέλεσμα λύνοντας την άσκηση στο πεδίο του χρόνου;

Παράδειγμα 16.2:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] \quad (16.39)$$

με αρχικές συνθήκες $y[-1] = 2$, $y[-2] = 0$. Βρείτε την συνολική έξοδο του συστήματος για είσοδο $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$

Λύση:

Εφαρμόζοντας μονόπλευρο μετασχ. Z θα έχουμε

$$Y(z) + \frac{1}{2}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) - \frac{1}{2}(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]) = X(z) - 2(z^{-1}X(z) + x[-1]) \quad (16.40)$$

$$\frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}X(z) - \frac{2x[-1] + \frac{1}{2}y[-1] - \frac{1}{2}y[-2] - \frac{1}{2}z^{-1}y[-1]}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = Y(z) \quad (16.41)$$

$$\frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}X(z) - \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = Y(z) \quad (16.42)$$

$$H(z)X(z) + Y_{zi}(z) = Y(z) \quad (16.43)$$

$$Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = Y(z) \quad (16.44)$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τους επιμέρους μετασχηματισμούς, έχουμε

$$Y_{zi}(z) = -\frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{-1+z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \quad (16.45)$$

το οποίο αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα ως

$$Y_{zi}(z) = \frac{A}{1+z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.46)$$

με

$$A = Y_{zi}(z)(1+z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{-1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-1} = -\frac{4}{3} \quad (16.47)$$

$$B = Y_{zi}(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{-1+z^{-1}}{1+z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{3} \quad (16.48)$$

Οπότε

$$Y_{zi}(z) = -\frac{4}{3} \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.49)$$

και από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$y_{zi}[n] = -\frac{4}{3}(-1)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.50)$$

Επιπλέον,

$$Y_{zs}(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2})} \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \quad (16.51)$$

$$= \frac{(1-2z^{-1})(-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \quad (16.52)$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα την παραπάνω έκφραση, έχουμε

$$Y_{zs}(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 + z^{-1}} + \frac{C}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.53)$$

με

$$A = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{(1 + z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{2} \quad (16.54)$$

$$B = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-1} = 2 \quad (16.55)$$

$$C = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-2} = -\frac{5}{2} \quad (16.56)$$

Οπότε

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + 2 \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{5}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.57)$$

και από τα γνωστά ζεύγη έχουμε

$$y_{zs}[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2(-1)^n u[n] - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.58)$$

Τέλος, η συνολική έξοδος γράφεται ως

$$y[n] = -\frac{4}{3}(-1)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2(-1)^n u[n] - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.59)$$

$$= \frac{2}{3}(-1)^n u[n] + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.60)$$

16.3.2 Εξισώσεις Διαφορών και ΓΧΑ Συστήματα

Ας επικεντρώσουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στα ΓΧΑ συστήματα, αυτή τη φορά από τη σκοπιά του μετασχηματισμού Z, όπως κάναμε και για τον μετασχ. Fourier. Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε δει, περιγράφονται με τρεις τρόπους:

1. με μια εξίσωση εισόδου-εξόδου

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (16.61)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες

2. με την χρονική απόκρισή τους, $h[n]$
3. με τη συχνотική απόκρισή τους, $H(e^{j\omega})$
4. πλέον, και με τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(z)$

Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα διαπιστώσετε μεγάλη ομοιότητα με τη αντίστοιχη που κάναμε για το μετασχ. Fourier, γι' αυτό και θα ακολουθήσουμε το ίδιο μοτίβο.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για το πως δουλεύουμε στο χώρο του μετασχ. Z.

Παράδειγμα 16.3:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με τη μορφή εξίσωσης διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] \quad (16.62)$$

και ας βρούμε την χρονική απόκριση του συστήματος.

Λύση:

Ας δούμε λίγο τη Σχέση (16.6). Αν λύσουμε ως προς $H(z)$, θα πάρουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (16.63)$$

Ας το εφαρμόσουμε στο παράδειγμά μας:

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] \longleftrightarrow Y(z) = X(z) + 2X(z)z^{-1} - 3X(z)z^{-2} \quad (16.64)$$

$$= X(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) \quad (16.65)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \quad (16.66)$$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \quad (16.67)$$

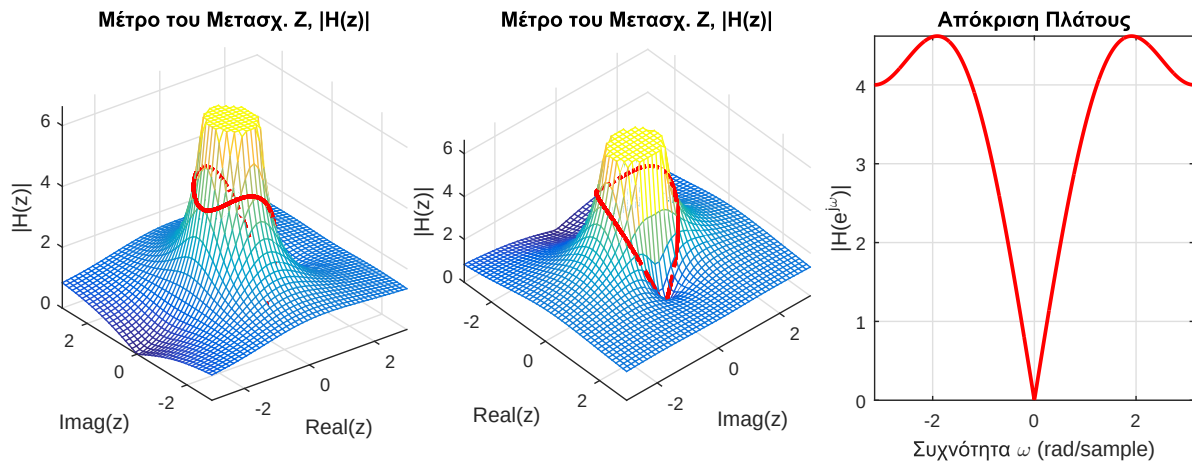
Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος μπορεί να βρεθεί από τον Πίνακα 15.2, και είναι

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2] \quad (16.68)$$

Παρατηρήστε ότι το σύστημα είναι αιτιατό, και η περιοχή σύγκλισής του είναι $|z| > 0$. Από τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς, βλέπουμε ότι αν τη γράψουμε στη μορφή

$$H(z) = 1 + 2\frac{1}{z} - 3\frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + 2z - 3}{z^2} \quad (16.69)$$

θα βρούμε ότι έχει δυο πόλους στη θέση $z = 0$ (διπλός πόλος) και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = -3, z = 1$. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας την απόκριση πλάτους στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Το μηδενικό στη θέση $z = -3$ βρίσκεται “μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, οπότε θα έχει μικρή επίδραση στις συχνότητες κοντά στα $\omega = \pm\pi$. Αντίθετα, το μηδενικό $z = 1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = 0$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως υψιπερατής φύσεως. Το Σχήμα 16.5 επιβεβαιώνει τα προηγούμενα.



Σχήμα 16.5: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

Το παραπάνω παράδειγμα ήταν σχετικά απλό, και μπορούσε να λυθεί στο χώρο του χρόνου πιο εύκολα και γρήγορα. Πώς; Απλά θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και παίρνοντας $y[n] = h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$. Απλά δείξαμε τον τρόπο που χρησιμοποιείται το πεδίο της συχνότητας και ο μετασχ. Z για να βρούμε την κρουστική απόκριση. Σε άλλα, πιο σύνθετα παραδείγματα συστημάτων, επιβάλλεται η χρήση του μετασχ. Z αν θέλουμε να γλιτώσουμε κόπο και χρόνο. Τέτοια παραδείγματα θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.4:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4] \quad (16.70)$$

Να βρεθεί:

(α') η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(z)$

(β') η κρουστική του απόκριση, $h[n]$

(γ') η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανιστεί το σήμα $x[n] = u[n]$.

Λύση:

(α') Θα είναι:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4] \longleftrightarrow Y(z) = X(z) \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \right) \quad (16.71)$$

και άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \quad (16.72)$$

Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4} \quad (16.73)$$

βλέπουμε ότι έχει τέσσερις πόλους στη θέση $z = 0$ και τέσσερα μηδενικά στις θέσεις $z = -1$, $z = 4/3$, $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Παρατηρήστε ότι τα δυο τελευταία μηδενικά είναι συζυγή. Ας προσπαθήσουμε και σε αυτό το παράδειγμα να καταλάβουμε διασθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Το μηδενικό στη θέση $z = 4/3$ βρίσκεται “αρκετά κοντά” στο μοναδιαίο κύκλο, οπότε θα έχει μια επίδραση στις συχνότητες κοντά στα $\omega = 0$, χαμηλώνοντας τις τιμές του φάσματος πλάτους. Αντίθετα, το μηδενικό $z = -1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = \pm\pi$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Το μηδενικό $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ βρίσκεται υπό γωνία $\theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$ σε σχέση με τον άξονα των πραγματικών, και έχει μέτρο $|z| = 1$, άρα βρίσκεται ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Ως αποτέλεσμα, μηδενίζει τη συχνότητα $\omega = \pi/3$ rad/sample. Το συζυγές μηδενικό, $z = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ βρίσκεται υπό γωνία $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\pi/3$ σε σχέση με τον άξονα των πραγματικών, και έχει επίσης μέτρο $|z| = 1$, άρα βρίσκεται κι αυτό επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μηδενίζοντας απόλυτα τη συχνότητα $\omega = -\pi/3$ rad/sample. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως ζωνοπερατής φύσεως. Το Σχήμα 16.6 επιβεβαιώνει την ανάλυσή μας.

(β') Η κρουστική απόκριση είναι ο αντίστροφος μετασχ. Ζ της συνάρτησης μεταφοράς που μόλις βρήκαμε. Άρα θα είναι:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4] \quad (16.74)$$

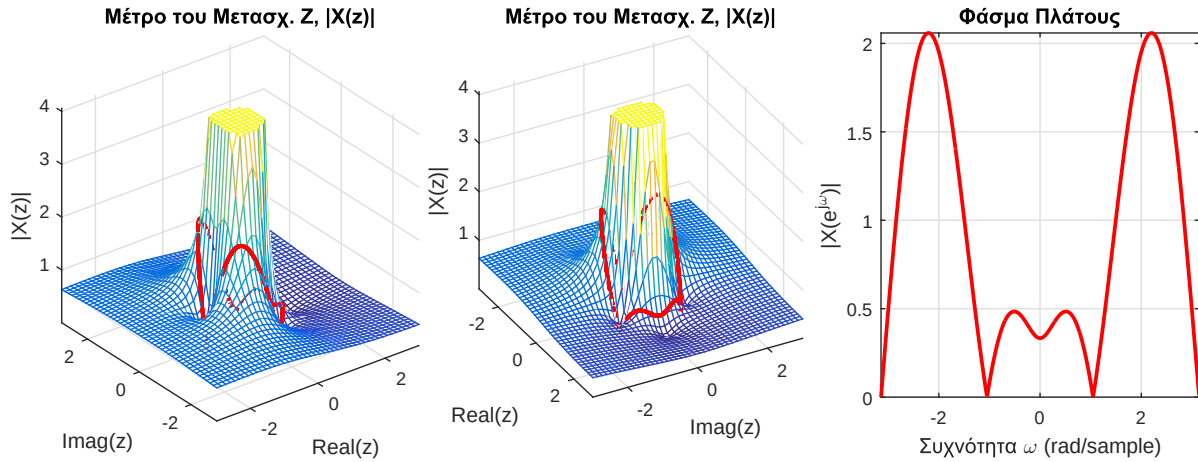
Φυσικά θα μπορούσαμε να βρούμε την κρουστική απόκριση θέτοντας απλά $h[n] = \delta[n]$ στην εξίσωση διαφορών. Θα παίρναμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, και μάλιστα πιο εύκολα.

(γ') Η εύκολη λύση δίνεται στο πεδίο του χρόνου, αφού η κρουστική απόκρισή μας είναι απλά συναρτήσεις Δέλτα. Θα είναι

$$y[n] = h[n] * x[n] = \left(\frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4] \right) * u[n] \quad (16.75)$$

$$= \frac{1}{2}u[n] - \frac{2}{3}u[n-1] + \frac{1}{2}u[n-3] - \frac{2}{3}u[n-4] \quad (16.76)$$

$$= \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{2}{3}\delta[n-3] - \frac{1}{3}u[n-4] \quad (16.77)$$



Σχήμα 16.6: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $H(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

Ας δούμε αν παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα στο χώρο του μετασχ. Z. Η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών, οπότε

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \right) \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (16.78)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{2}{3} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}} - \frac{2}{3} \frac{z^{-4}}{1 - z^{-1}} \quad (16.79)$$

Με χρήση των Πινάκων 15.1, 15.2, διαπιστώνουμε ότι

$$y[n] = \frac{1}{2}u[n] - \frac{2}{3}u[n-1] + \frac{1}{2}u[n-3] - \frac{2}{3}u[n-4] \quad (16.80)$$

$$= \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{2}{3}\delta[n-3] - \frac{1}{3}u[n-4] \quad (16.81)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τη Σχέση (16.77).

Τέλος, ένα ακόμα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.5:

Έστω το αιτιατό σύστημα

$$y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-2]. \quad (16.82)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

(γ') την έξοδο του συστήματος, $y[n]$, για είσοδο $x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-3]$.

Λύση:

(α') Εφαρμόζουμε μετασχ. Z στην εξίσωση διαφορών:

$$Y(z) - Y(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-2} \quad (16.83)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - z^{-2}) \quad (16.84)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (16.85)$$

Να λοιπόν εδώ που έχουμε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς που δεν έχει πόλους μόνο στο μηδέν. Σε πρώτη σκέψη, ίσως το σύστημά μας δεν είναι FIR, καθώς τα προηγούμενα παραδείγματα δεν ήταν τέτοιας μορφής. Ας το δούμε.

- (β') Κατ' αρχάς, εδώ δεν μπορούμε να βρούμε γρήγορα την κρουστική απόκριση θέτοντας $x[n] = \delta[n]$ και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, γιατί τότε παίρνουμε

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n] - \delta[n-2] \quad (16.86)$$

που δεν οδηγεί άμεσα σε κλειστό τύπο της κρουστικής απόκρισης $h[n]$. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε τις τεχνικές που είδαμε στην ανάλυσή μας στο πεδίο του χρόνου. Για να το αποφύγουμε, βλέπουμε ότι ο αριθμητής είναι διαφορά τετραγώνων. Άρα

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (16.87)$$

πολύ εύκολα και πολύ γρήγορα. Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημά μας είναι τελικά FIR.

Ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσης της κρουστικής απόκρισης θα ήταν να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, αλλά επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μικρότερος από του αριθμητή, θα χρειαστεί να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Μετά τη διαίρεση, η συνάρτηση $H(z)$, και κατά συνέπεια η $h[n]$, γράφεται ως

$$H(z) = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (16.88)$$

Ας υποθέσουμε όμως ότι δε θέλουμε να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, αν και σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητη. Τι άλλο θα μπορούσαμε να κάνουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα; Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} \quad (16.89)$$

Αν συμβουλευτούμε τον Πίνακα 15.2 με τα ζεύγη μετασχηματισμών Z, θα δούμε ότι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο ζεύγος:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (16.90)$$

με ROC $|z| > 1$, γιατί το σύστημα είναι αιτιατό. Άρα ο αντίστοιχος μετασχ. Z του πρώτου όρου είναι η βηματική συνάρτηση $u[n]$. Από τους Πίνακες 15.1, 15.2, εύκολα βρίσκουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι η καθυστερημένη βηματική κατά $n_0 = 2$, δηλ. η $u[n-2]$. Άρα τελικά η κρουστική απόκριση θα είναι

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} \longleftrightarrow h[n] = u[n] - u[n-2] \quad (16.91)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε διαφορετικό αποτέλεσμα σε σχέση με πριν; Ασφαλώς όχι. Προσέξτε ότι το σήμα $h[n] = u[n] - u[n-2]$ είναι ουσιαστικά το $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ - σχεδιάστε τη διαφορά των δυο βηματικών για να το δείτε.

Ας δούμε πως συμπεριφέρεται το σύστημα μας. Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z + 1}{z} \quad (16.92)$$

βλέπουμε ότι έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = -1$. Ας προσπαθήσουμε και σε αυτό το παράδειγμα να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Το μηδενικό $z = -1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = \pm\pi$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως χαμηλοπερατής φύσεως. Το Σχήμα 16.7 επιβεβαιώνει την ανάλυσή μας.

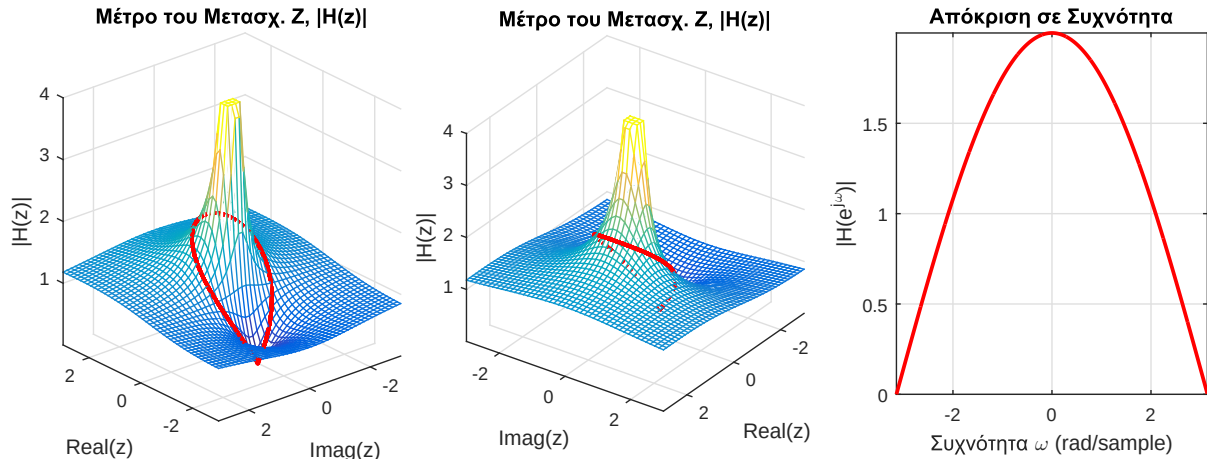
- (γ') Αφού η είσοδός μας είναι ένα άθροισμα από συναρτήσεις Δέλτα, η έξοδος βρίσκεται πολύ εύκολα κατ' ευθείαν στο πεδίο του χρόνου, ως

$$y[n] = x[n] * h[n] = (u[n] - u[n-2]) * (\delta[n] - 2\delta[n-3]) \quad (16.93)$$

$$= u[n] * \delta[n] - 2u[n] * \delta[n-3] - u[n-2] * \delta[n] + 2u[n-2] * \delta[n-3] \quad (16.94)$$

$$= u[n] - 2u[n-3] - u[n-2] + 2u[n-5] \quad (16.95)$$

$$= u[n] - u[n-2] - 2u[n-3] + 2u[n-5] \quad (16.96)$$



Σχήμα 16.7: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

και σχεδιάζοντας τις βηματικές συναρτήσεις στο χρόνο, βλέπουμε ότι γράφεται ως

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - 2\delta[n-3] - 2\delta[n-4] \quad (16.97)$$

Στο ίδιο θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη μορφή του $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ (χάντε το!).

Ας δούμε τώρα το ίδιο στο χώρο του μετασχ. Z. Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-3] \longleftrightarrow X(z) = 1 - 2z^{-3} \quad (16.98)$$

και έτσι

$$Y(z) = H(z)X(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} z^{-2} \right) (1 - 2z^{-3}) \quad (16.99)$$

$$= \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}} - \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}} z^{-2} \quad (16.100)$$

Για να βρούμε τώρα την έξοδο $y[n]$, θα δουλέψουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Θα χωρίσουμε τις επιμέρους ρητές συναρτήσεις του z^{-1} σε πιο απλές, θα συμβουλευτούμε τους Πίνακες 15.1, 15.2 και μπορούμε να βρούμε τα κατάλληλα ζεύγη που θα μας μεταφέρουν εύκολα και γρήγορα στο πεδίο του χρόνου.

$$Y(z) = \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}} - \frac{1-2z^{-3}}{1-z^{-1}} z^{-2} \quad (16.101)$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} - 2\frac{1}{1-z^{-1}} z^{-3} - \frac{1}{1-z^{-1}} z^{-2} + 2\frac{1}{1-z^{-1}} z^{-5} \quad (16.102)$$

Με χρήση πινάκων και ιδιοτήτων, η έξοδος του συστήματος, $y[n]$, θα είναι η:

$$y[n] = u[n] - 2u[n-3] - u[n-2] + 2u[n-5] = u[n] - u[n-2] - 2u[n-3] + 2u[n-5] \quad (16.103)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με την προηγούμενη προσέγγισή μας και απλοποιείται ξανά με τον ίδιο τρόπο.

Παράδειγμα 16.6:

Έστω το αιτιατό σύστημα

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]. \quad (16.104)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την χρονιστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνοντας μετασχ. Z στην εξίσωση διαφορών έχουμε

$$Y(z) + 2Y(z)z^{-1} - 3Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (16.105)$$

$$Y(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (16.106)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} \quad (16.107)$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 3$, λόγω αιτιατότητας, αφού οι ρίζες του πολωνύμου είναι οι $z_1 = 1, z_2 = -3$.

(β') Ας παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή.

$$1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1}) \quad (16.108)$$

Τώρα λοιπόν θα έχουμε, αντικαθιστώντας:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (16.109)$$

Ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από του παρονομαστή, οπότε θα είναι

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 3z^{-1}} \quad (16.110)$$

με

$$A = H(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = -\frac{1}{4} \quad (16.111)$$

$$B = H(z)(1 + 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{5}{4} \quad (16.112)$$

και άρα

$$H(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{5}{4} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (16.113)$$

Εύκολα λοιπόν καταλήγουμε, σύμφωνα και με τον Πίνακα 15.2, ότι

$$h[n] = -\frac{1}{4}u[n] + \frac{5}{4}3^n u[n] \quad (16.114)$$

αφού το σύστημά μας είναι αιτιατό από εκφώνηση. Παρατηρήστε ότι ο όρος $3^n u[n]$ οδηγεί τις τιμές της κρουστικής απόκρισης στο $+\infty$, όταν $n \rightarrow +\infty$, άρα το σύστημά μας δεν είναι ευσταθές. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την παρουσία ενός πόλου στη θέση $z = 1$, δηλ. επάνω στο μοναδιαίο κύκλο όπου ορίζεται ο μετασχ. Fourier, πράγμα που τον οδηγεί στο να μη συγκλίνει.

Παράδειγμα 16.7:

Έστω το αντι-αιτιατό σύστημα

$$y[n] - 7y[n-1] + 12y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]. \quad (16.115)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνουμε μετασχ. Z στην εξίσωση διαφορών και έχουμε

$$Y(z) - 7Y(z)z^{-1} + 12Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (16.116)$$

$$Y(z)(1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (16.117)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} \quad (16.118)$$

Οι ρίζες του πολωνύμου είναι οι $z_1 = 3, z_2 = 4$, άρα η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| < 3$, αφού το σύστημα είναι αντι-αιτιατό.

- (β') Εδώ πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή, και να χρησιμοποιήσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος απ' το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή, οπότε μπορούμε να την εφαρμόσουμε. Ο παρονομαστής θα γράφεται ως

$$1 - 7z^{-1} + 12z^{-2} = (1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1}) \quad (16.119)$$

Άρα

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})} \quad (16.120)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{A}{1 - 3z^{-1}} + \frac{B}{1 - 4z^{-1}} \quad (16.121)$$

με

$$A = H(z)(1 - 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = -1 \quad (16.122)$$

$$B = H(z)(1 - 4z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = 2 \quad (16.123)$$

Οπότε τελικά η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = -\frac{1}{1 - 3z^{-1}} + 2\frac{1}{1 - 4z^{-1}} \quad (16.124)$$

και συμβουλευόμενοι/ες τον Πίνακα 15.2 και δεδομένου ότι το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, θα είναι

$$h[n] = 3^n u[-n - 1] - 2(4)^n u[-n - 1] \quad (16.125)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Ας δούμε πως συμπεριφέρεται το σύστημα μας. Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 7z + 12} = \frac{z(z - 2)}{(z - 3)(z - 4)} \quad (16.126)$$

βλέπουμε ότι έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = 3$, $z = 4$ και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 0$, $z = 2$.

Παράδειγμα 16.8:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (16.127)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ για κάθε πιθανή περιοχή σύγκλισης.

Λύση:

Το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μεγαλύτερου βαθμού από του παρονομαστή, άρα δεν μπορεί να γίνει απ' ευθείας ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Πρέπει αναγκαστικά να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, η οποία μας δίνει

$$H(z) = 4 - 8z^{-1} + \frac{5}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (16.128)$$

Από τους πίνακές μας, έχουμε κατ' ευθείαν ότι αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h[n] = 4\delta[n] - 8\delta[n - 1] + 5\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \quad (16.129)$$

με $|z| > \frac{3}{4}$, ενώ αν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, τότε

$$h[n] = 4\delta[n] - 8\delta[n - 1] - 5\left(\frac{3}{4}\right)^n u[-n - 1] \quad (16.130)$$

με $|z| < \frac{3}{4}$. Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση πεδίου σύγκλισης καθώς ο πόλος είναι μοναδικός.

Παράδειγμα 16.9:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση δίνεται παρακάτω:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2}u[n-4]. \quad (16.131)$$

Ας βρούμε

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

Λύση:

(α') Η κρουστική απόκριση μπορεί να γραφεί ως

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2}u[n-4] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)(3^{-2})3^{n-2}u[n-4] \quad (16.132)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)3^{n-4}u[n-4] \quad (16.133)$$

Κάνοντας μετασχ. Ζ στην κρουστική απόκριση, παίρνουμε

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9 \frac{1}{1 - 3z^{-1}} z^{-4}, \quad |z| > 3 \quad (16.134)$$

αφού το σύστημα είναι αιτιατό – το συμπεραίνουμε απλά παρατηρώντας την κρουστική απόκριση.

(β') Προφανώς

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9 \frac{1}{1 - 3z^{-1}} z^{-4} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (16.135)$$

και άρα θα έχουμε

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (16.136)$$

$$X(z) \left(1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}\right) = Y(z) \left(1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}\right) \quad (16.137)$$

και τελικά με αντίστροφο μετασχ. Ζ και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$Y(z) - \frac{7}{2}Y(z)z^{-1} + \frac{3}{2}Y(z)z^{-2} = X(z) - 3X(z)z^{-1} - 9X(z)z^{-4} + \frac{9}{2}X(z)z^{-5} \quad (16.138)$$

και

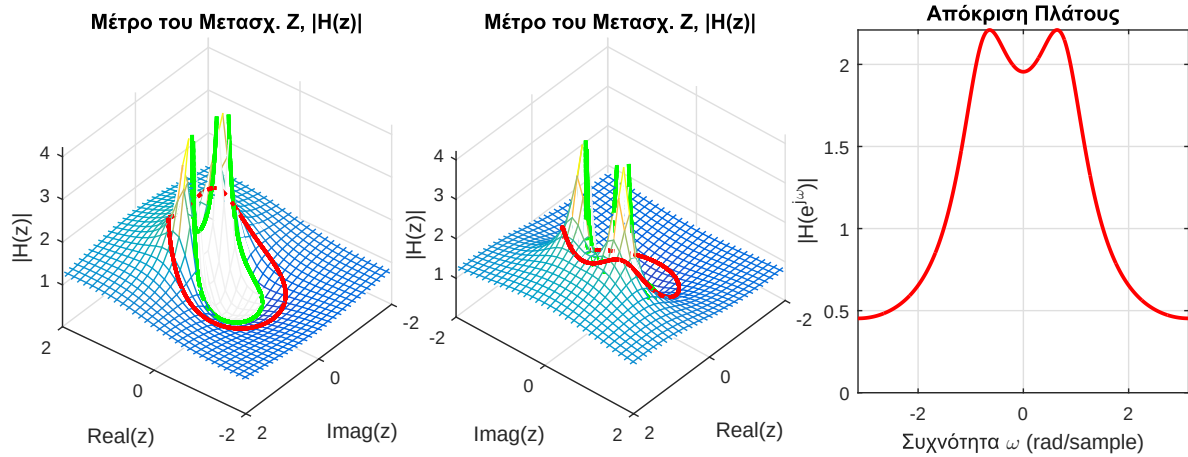
$$y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2] = x[n] - 3x[n-1] - 9x[n-4] + \frac{9}{2}x[n-5] \quad (16.139)$$

Παράδειγμα 16.10:

Έστω το αιτιατό σύστημα $H(z)$ που δίνεται ως

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\pi/4}z^{-1})(1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})} \quad (16.140)$$

Μελετήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά του φάσματος πλάτους του συστήματος για $r = 0.6$ και $r = 0.9$ και βρείτε την κρουστική του απόκριση $h[n]$.



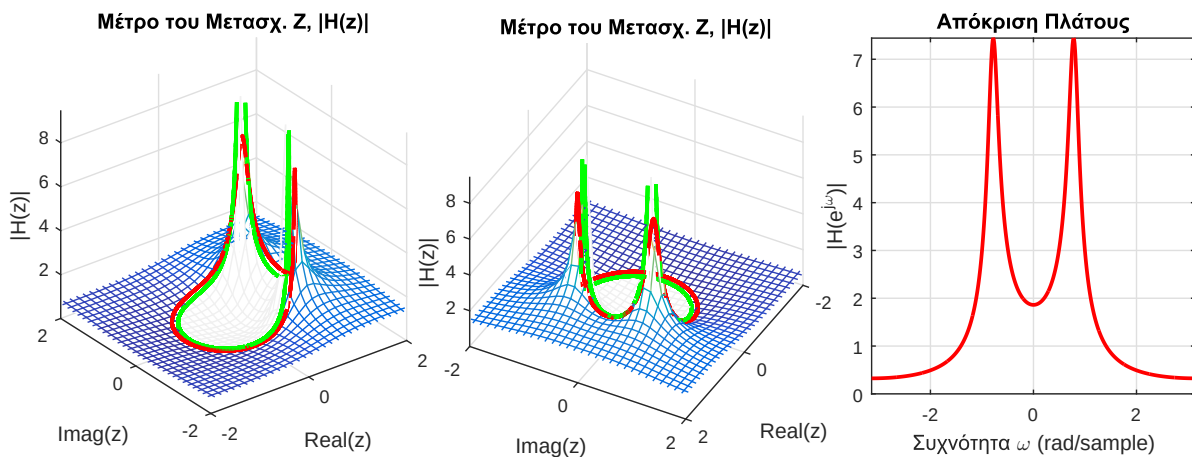
Σχήμα 16.8: Παράδειγμα 16.10: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $r = 0.6$.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - re^{j\pi/4})(z - re^{-j\pi/4})} \quad (16.141)$$

και άρα έχει δυο μηδενικά στη θέση $z = 0$, και δυο πόλους στις θέσεις $z = re^{\pm j\pi/4}$. Η παρουσία πόλων για $\omega = \pm\pi/4$ θα αυξήσει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από αυτές τις συχνότητες. Στην περίπτωση που $r = 0.6$, η αύξηση θα είναι μικρή και πιο ομαλή, αφού οι πόλοι βρίσκονται “μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, ενώ για $r = 0.9$, η αύξηση θα είναι μεγαλύτερη και πιο απότομη, αφού οι πόλοι βρίσκονται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται από τα Σχήματα 16.8 και 16.9. Η χροστική απόκριση δίνεται



Σχήμα 16.9: Παράδειγμα 16.10: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $r = 0.9$.

αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς. Είναι

$$H(z) = \frac{A}{1 - re^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - re^{-j\pi/4}z^{-1}} \quad (16.142)$$

με

$$A = (1 - re^{j\pi/4}z^{-1})H(z) \Big|_{z=re^{j\pi/4}} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \quad (16.143)$$

$$B = (1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})H(z) \Big|_{z=re^{-j\pi/4}} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \quad (16.144)$$

τα οποία είναι μιγαδικοί συντελεστές και μπορούν να γραφούν σε πολική μορφή ως

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \quad (16.145)$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} \quad (16.146)$$

Οπότε

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \frac{1}{1 - re^{j\pi/4} z^{-1}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} \frac{1}{1 - re^{-j\pi/4} z^{-1}} \quad (16.147)$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$h[n] = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} (re^{j\pi/4})^n u[n] + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} (re^{-j\pi/4})^n u[n] \quad (16.148)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} r^n (e^{j\pi(n-1)/4} + e^{-j\pi(n-1)/4}) u[n] \quad (16.149)$$

$$= \sqrt{2} r^n \cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) u[n] \quad (16.150)$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε εν γένει ότι:

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Μετασχ. Z - I

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται με το ζεύγος

$$h[n] \longleftrightarrow H(z)$$

είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (a_k)^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - a_k z^{-1}}$$

με $|z| > \max |a_k|$, τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

και εφαρμόζοντας ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y[n]$. Αντίστοιχες περιγραφές μπορούν να γίνουν για αντι-αιτιατή ή μη αιτιατή είσοδο.

ενώ για την περίπτωση των εξισώσεων διαφορών, μπορούμε να συνοψίσουμε:

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Μετασχ. Z - II

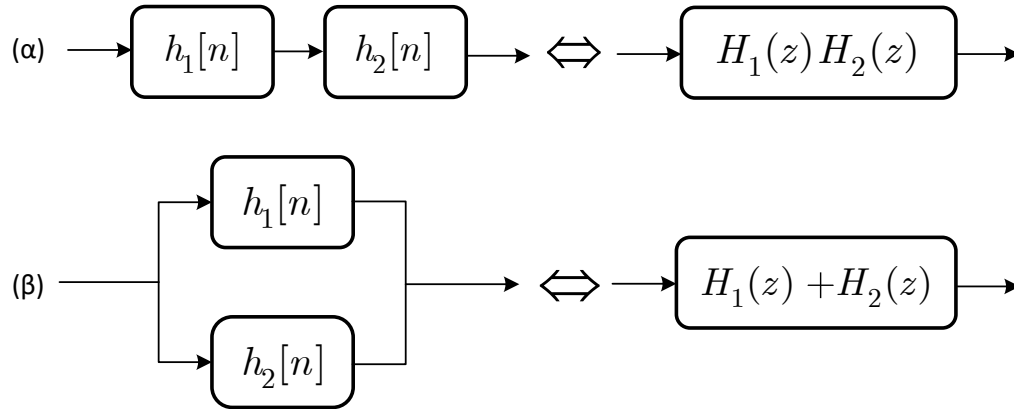
Αν ένα σύστημα περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών ως

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \longleftrightarrow H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

τότε χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα για να αναλύσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ σε απλά κλάσματα και να βρούμε με χρήση Πινάκων την κρουστική απόκριση $h[n]$.

16.3.3 Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων

Η διάταξη σε σειρά και σε παραλληλία έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο περί Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου. Συστήματα σε σειρά εκφράζονται ως η συνέλιξη των επιμέρους συστημάτων στο χρόνο (και άρα σε γινόμενο των μετασχ. Z τους, αρκεί η τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης να μην είναι το κενό σύνολο), ενώ συστήματα σε παραλληλία εκφράζονται σε άθροισμα των επιμέρους συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν του μετασχ. Z, με την ίδια προϋπόθεση για την περιοχή σύγκλισης. Συνοπτικά, δείτε το Σχήμα 16.10.



Σχήμα 16.10: Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων στο χώρο του μετασχ. Z.: (α) σύνδεση σε σειρά, (β) παράλληλη σύνδεση.

16.3.4 Πόλοι και Μηδενικά στο z -επίπεδο

Πρέπει να σας είναι εμφανές από όσα έχουμε δει ως τώρα ότι όταν μιλάμε για συστήματα στο χώρο του μετασχηματισμού Z, μας ενδιαφέρει να μπορούμε να γνωρίζουμε τους πόλους και τα μηδενικά τους και να μπορούμε να σχεδιάζουμε το περίφημο **διάγραμμα πόλων-μηδενικών**. Θα επικεντρωθούμε σε μετασχηματισμούς που έχουν ρητή μορφή (λόγος πολωνύμων του z^{-1}), όπως σχεδόν όλοι όσοι έχουμε δει ως τώρα, αφού στην πράξη είναι πολύ συχνά εμφανιζόμενοι, αφού προκύπτουν ως μετασχηματισμοί εξισώσεων διαφορών. Ας θυμηθούμε τους ορισμούς: για ένα ρητό μετασχ. Z, **μηδενικά** ονομάζονται οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου μηδενίζεται ο μετασχ. Z (πιθανές τέτοιες θέσεις: οι ρίζες του πολωνύμου του αριθμητή) και **πόλοι** ονομάζονται οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου απειρίζεται ο μετασχ. Z (πιθανές τέτοιες θέσεις: οι ρίζες του πολωνύμου του παρονομαστή). Ένας ρητός μετασχηματισμός Z μπορεί να γραφεί γενικότερα ως:

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (16.151)$$

όπου M, N ο βαθμός των πολωνύμων. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με z^M και z^N αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$X(z) = z^{N-M} \frac{a_0 z^M + a_1 z^{M-1} + a_2 z^{M-2} + \dots + a_M}{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N} \quad (16.152)$$

Παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (16.153)$$

με ξ_k, λ_k τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι, ενώ

- αν $N > M$ τότε υπάρχουν επιπλέον $N - M$ μηδενικά στο $z = 0$ (δηλ. ένα μηδενικό τάξης $N - M$), και
- αν $N < M$ υπάρχουν επιπλέον $M - N$ πόλοι στο $z = 0$ (δηλ. ένας πόλος τάξης $N - M$).

Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τόσους πόλους όσα και μηδενικά!

Αν πάλι ο μετασχ. Z είναι της μορφής

$$X(z) = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{b_0 \prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (16.154)$$

τότε υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι, ενώ

- αν $N > M$, τότε υπάρχουν $N - M$ μηδενικά στο ∞ , και
- αν $N < M$, τότε υπάρχουν $M - N$ πόλοι στο ∞ .

Άρα και πάλι βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τοσους πόλους οσα και μηδενικά.

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι ο μετασχ. Z καθορίζεται πλήρως από τη θέση των πόλων και των μηδενικών του, πέραν μιας σταθεράς a_0/b_0 . Η σταθερά αυτή επηρεάζει μόνο το πλάτος του σήματος, ενώ οι πόλοι και τα μηδενικά καθορίζουν τη συμπεριφορά του, όπως έχουμε ήδη δει στα παραδείγματα.

Αποδείξαμε λοιπόν κάτι πολύ σημαντικό.

Πόλοι και Μηδενικά Ρητής Συνάρτησης Μεταφοράς

Ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, **το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών**, συμπεριλαμβάνοντας πιθανούς πόλους ή μηδενικά στο μηδέν ή στο άπειρο.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.11:

Έστω οι συναρτήσεις μεταφοράς

$$(\alpha') \quad H_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$(\gamma') \quad H_3(z) = 2 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}$$

$$(\beta') \quad H_2(z) = \frac{(z-1)(z+\frac{1}{2})(z-\frac{3}{4})}{z(z+1)(z+\frac{5}{6})}$$

$$(\delta') \quad H_4(z) = H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

(α') Για το σύστημα $H_1(z)$ η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2}. \quad (16.155)$$

Έχουμε

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \implies z = 1 + j\sqrt{2} \text{ ή } z = 1 - j\sqrt{2} \quad (16.156)$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \implies z = 2 \text{ ή } z = 1 \quad (16.157)$$

Προφανώς το σύστημα είναι ΠR, αφού υπάρχουν πόλοι σε αυτό σε θέσεις πλην του μηδενός ή του άπειρου. Άρα έχουμε δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 1 + j\sqrt{2}$ και $z = 1 - j\sqrt{2}$, και δυο πόλους στις θέσεις $z = 2$ και $z = 1$. Το πλήθος των πόλων είναι ίσο με αυτό των μηδενικών. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται παρακάτω, στο Σχήμα 16.11(α).

(β') Για το σύστημα $H_2(z)$, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ήδη παραγοντοποιημένη και βλέπουμε πολύ εύκολα τους πόλους και τα μηδενικά από την εξίσωση. Έχουμε 3 μηδενικά στις θέσεις $z = 1$, $z = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{4}$ και 3 πόλους στις θέσεις $z = 0$, $z = -1$, $z = -\frac{5}{6}$. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται παρακάτω, στο Σχήμα 16.11(β).

(γ') Για το σύστημα $H_3(z)$, η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = 2 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} = z^{-2} \left(2z^2 + z + \frac{1}{4} \right) = \frac{2z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2} \quad (16.158)$$

Έτσι

$$2z^2 + z + \frac{1}{4} = 0 \iff z = -0.25 + j0.25, z = -0.25 - j0.25 \quad (16.159)$$

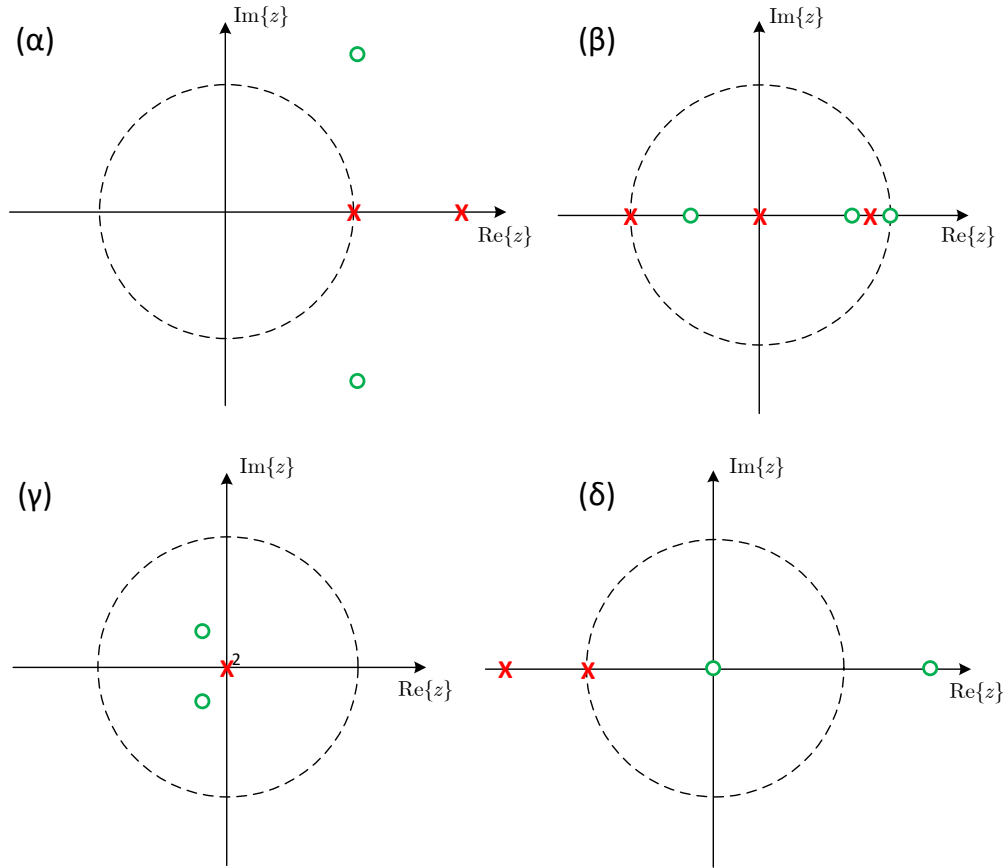
$$z^2 = 0 \iff z = 0, \text{ διπλή ρίζα.} \quad (16.160)$$

Έχουμε δυο μηδενικά στις θέσεις $z = -0.25 + j0.25$, $z = -0.25 - j0.25$ και δυο πόλους στη θέση $z = 0$. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 16.11(γ).

(δ') Τέλος, για το σύστημα $H_4(z)$, η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z - 2)}{(z + 1)(z + 2)} \quad (16.161)$$

Προφανώς τα μηδενικά είναι στις θέσεις $z = 0, z = 2$, ενώ οι πόλοι είναι στις θέσεις $z = -2, z = -1$. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 16.11(δ).



Σχήμα 16.11: Διαγράμματα Πόλων-Μηδενικών Παραδείγματος 16.11.

Μπορείτε να αναγνωρίσετε τις πιθανές περιοχές σύγκλισης κάθε μετασχηματισμού από τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 16.11; ☺

16.3.5 Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Z

Ας μιλήσουμε επίσης για την ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος στο χώρο του μετασχ. Z. Για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές πρέπει να παράγει φραγμένη έξοδο για φραγμένη είσοδο, δηλ.

$$|x[n]| < M_x \implies |y[n]| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R}_+ \quad (16.162)$$

Αν πάρουμε το άθροισμα της συνέλιξης, θα έχουμε

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| \quad (16.163)$$

Όμως $|x[n]| < M_x$, άρα

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_x |h[n-k]| = M_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \quad (16.164)$$

Άρα για να είναι απολύτως φραγμένη η έξοδος πρέπει να ισχύει

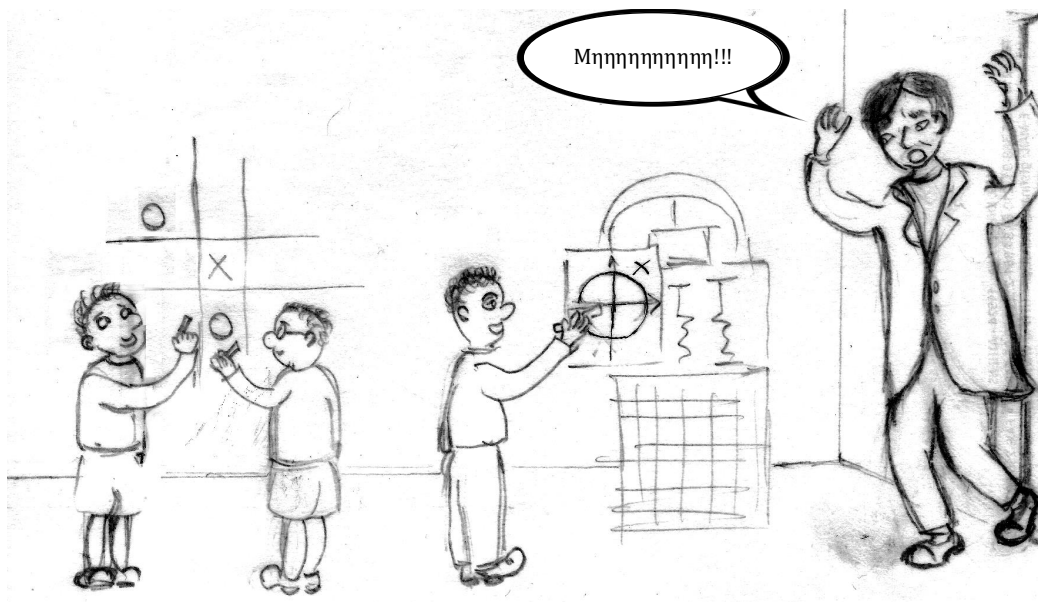
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (16.165)$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει ο μετασχ. Fourier της χρουστικής απόκρισης $h[n]$, δηλ. η συχνοτική απόκριση! Όμως είπαμε ότι ο μετασχ. Fourier ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο! Άρα τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιέχεται στην περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Z!

Οπότε τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι:

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα σύγκλισης του μετασχ. Fourier) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπερίληψη του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ μέσα στην περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$.



Σχήμα 16.12: Μην αφήνετε παιδιά να παίζουν με τα συστήματά σας! ©

16.3.6 Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

Επειδή η χρουστική απόκριση $h[n]$ ενός αιτιατού συστήματος είναι δεξιόπλευρο σήμα, το πεδίο σύγκλισης του $H(z)$ θα είναι εξωστρεφές, δηλ. θα είναι της μορφής $|z| > |a|$, με a τον πόλο της $H(z)$ με το μεγαλύτερο μέτρο. Όμως εξωστρεφείς περιοχές σύγκλισης έχουν και δεξιόπλευρα σήματα που δεν είναι αιτιατά! Για παράδειγμα, το σύστημα

$$h[n] = u[n + 1] \quad (16.166)$$

είναι δεξιόπλευρο και έχει μετασχ. Z

$$H(z) = \frac{z}{1 - z^{-1}} \quad (16.167)$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 1$. Άρα πως διαχωρίζει κανείς τα αιτιατά από τα δεξιόπλευρα σήματα; Μια διαισθητική απάντηση μπορεί να έρθει από το παραπάνω παράδειγμα. Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα έχει δυο μηδενικά στο $z = 0$ (διπλή ρίζα) και έναν πόλο στο $z = 1$. Αναζητώντας τον εναπομείναντα πόλο, βρίσκετε ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \infty \quad (16.168)$$

και άρα υπάρχει ένας πόλος στο $z = \infty$. Έτσι λοιπόν η περιοχή σύγκλισης – ως ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που δεν πρέπει να περιέχει πόλους – δεν πρέπει να περιέχει το άπειρο εντός της! Παρατηρήστε επίσης ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει βαθμό πολυωνύμου αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή.

Ας μετατοπίσουμε κατά ένα δείγμα το παραπάνω σύστημα προς τα δεξιά, ώστε να το κάνουμε αιτιατό, κι ας παρατηρήσουμε τι θα αλλάξει. Έχουμε

$$h_c[n] = u[n] \longleftrightarrow H_c(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (16.169)$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχει ένα μηδενικό στο $z = 0$ και ένας πόλος στο $z = 1$, και άρα η περιοχή σύγκλισης είναι το $|z| > 1$, το οποίο περιλαμβάνει και το άπειρο! Οπότε μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η ύπαρξη πόλου – ή πόλων – στο άπειρο είναι μια ένδειξη ότι το σύστημα δεν μπορεί να είναι αιτιατό.

Συνοψίζοντας:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος στο χώρο του Z

Ενα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών – και κατά συνέπεια από μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ – είναι αιτιατό αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης είναι της μορφής $|z| > d_{\max}$, με $d_{\max}$ τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο, με την περιοχή να περιλαμβάνει το άπειρο. Μια τέτοια περιοχή σύγκλισης είναι εφικτή αν και μόνον αν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος με το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή:

$$N \geq M \quad (16.170)$$

Η αιτιατότητα επιβάλλει κάποιους περιορισμούς στην απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος. Ένας απ' αυτούς εκφράζεται με το θεώρημα **Paley-Wiener**:

$$\text{Αν } h[n] = 0, \quad n < 0, \text{ και } \int_{-\infty}^{+\infty} |h[n]|^2 < \infty, \text{ τότε}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(e^{j\omega})|| d\omega < \infty \quad (16.171)$$

Κατά συνέπεια, η συχνοτική απόκριση ενός ευσταθούς και αιτιατού συστήματος δεν μπορεί να είναι ποτέ μηδενική για κάποια πεπερασμένη ζώνη συχνοτήτων. Έτσι, οποιοδήποτε ευσταθές ιδανικό φίλτρο επιλογής συχνοτήτες (χαμηλοπερατό, ζωνοπερατό, υψιπερατό) – τα οποία είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο – θα είναι αναγκαστικά μη αιτιατό.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα που συνοψίζουν όλα τα παραπάνω.

Παράδειγμα 16.12:

Έστω η κρουστική απόκριση $h[n]$ με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (16.172)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ για κάθε πιθανή περιοχή σύγκλισης, και χαρακτηρίστε το σύστημα που περιγράφει ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

Λύση:

Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ σε μορφή δυνάμεων του z , θα έχουμε

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{z^2(z + 1)}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})(z + 3)} \quad (16.173)$$

και βλέπουμε ότι έχει τρεις πόλους, στις θέσεις $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$. Επίσης, βλέπουμε ότι έχει τρία μηδενικά, στις θέσεις $z_0 = -1, z_1 = z_2 = 0$. Οπότε οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι

$$(\alpha') \quad |z| > 3$$

$$(\beta') \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$(γ') \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

$$(δ') \quad 1 < |z| < 3$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να αναπτυχθεί με τη γνωστή σας διαδικασία του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα, καθώς το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μικρότερου βαθμού από του παρονομαστή. Έχουμε

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (16.174)$$

$$= A \frac{1}{1 - z^{-1}} + B \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + C \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (16.175)$$

με

$$A = H(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=1} = 1 \quad (16.176)$$

$$B = H(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=2} = -\frac{3}{7} \quad (16.177)$$

$$C = H(z)(1 + 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{3}{7} \quad (16.178)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (16.179)$$

Για κάθε μια από τις παραπάνω περιοχές σύγκλισης, θα έχουμε

(α') Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 3$, άρα η κρουστική απόκριση θα είναι δεξιόπλευρη, οπότε από τον Πίνακα 15.2, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (16.180)$$

θα οδηγεί στην κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n] \quad (16.181)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στην περιοχή σύγκλισής του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

(β') Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| < 1/2$, άρα η κρουστική απόκριση θα είναι αριστερόπλευρη, οπότε από τον Πίνακα 15.2, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (16.182)$$

θα οδηγήσει στην κρουστική απόκριση

$$h[n] = -u[-n - 1] + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n - 1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n - 1] \quad (16.183)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στην περιοχή σύγκλισής του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αντι-αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

(γ') Η περιοχή σύγκλισης είναι $1/2 < |z| < 1$, άρα η κρουστική απόκριση θα είναι αμφίπλευρη. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους περιοχών σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτές οι επιμέρους περιοχές να είναι οι

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| < 1\} = \{1/2 < |z| < 1\} \quad (16.184)$$

Οπότε από τον Πίνακα 15.2 και τις επιμέρους περιοχές σύγκλισης παραπάνω, έχουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (16.185)$$

οδηγεί στην κρουστική απόκριση

$$h[n] = -u[-n-1] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (16.186)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στην περιοχή σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

- (δ') Η περιοχή σύγκλισης είναι $1 < |z| < 3$, άρα η κρουστική απόκριση θα είναι αμφίπλευρη. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους περιοχών σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτές οι επιμέρους περιοχές να είναι οι

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| > 1\} = \{1 < |z| < 3\} \quad (16.187)$$

Οπότε από τον Πίνακα 15.2 και τις επιμέρους περιοχές σύγκλισης παραπάνω, έχουμε

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (16.188)$$

που δίνει

$$h[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (16.189)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στην περιοχή σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

■

Στο παραπάνω παράδειγμα, καμιά από τις περιοχές σύγκλισης δεν περιλάμβανε το μοναδιαίο κύκλο, οπότε καμιά κρουστική απόκριση δεν περιέγραφε ένα ευσταθές σύστημα. Αυτό ήταν αναμενόμενο, μια και υπάρχει πόλος στη θέση $z = 1$, δηλ. ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο!

Παράδειγμα 16.13:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (16.190)$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι

(α') ευσταθές

(β') αιτιατό

Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Λύση:

Λόγω πρωτοβάθμιου πολυωνύμου στον αριθμητή και δευτεροβάθμιου στον παρονομαστή, αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα, κι έχουμε

$$H(z) = \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.191)$$

με

$$A = (1 - 2z^{-1})H(z) \Big|_{z=2} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=2} = 1 \quad (16.192)$$

$$B = \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) H(z) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \Big|_{z=2} = \frac{1}{2} = 1 \quad (16.193)$$

Οπότε

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.194)$$

Οι πόλοι του συστήματος βρίσκονται στις θέσεις $z = 2$, $z = -1/2$, και οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι οι

- $|z| > 2$
- $1/2 < |z| < 2$
- $|z| < 1/2$

(α') Αν το σύστημα είναι ευσταθές, τότε η περιοχή σύγκλισης πρέπει να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Η μόνη πιθανή περιοχή σύγκλισης που ικανοποιεί την απαίτηση αυτή είναι η $1/2 < |z| < 2$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι επιμέρους περιοχές σύγκλισης είναι $|z| > 1/2$ και $|z| < 2$. Με χρήση των Πινάκων 15.1, 15.2, έχουμε

$$h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.195)$$

(β') Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε η περιοχή σύγκλισης πρέπει να είναι εξωστρεφές. Η μόνη τέτοια περιοχή είναι η $|z| > 2$, η οποία προκύπτει ως η τομή των $|z| > 1/2$ και $|z| > 2$. Συμβουλευόμενοι τους πίνακες, έχουμε

$$h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.196)$$

Η εξίσωση διαφορών δίνεται με αντίστροφο μετασχ. Ζ στη συνάρτηση μεταφοράς.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (16.197)$$

$$Y(z)(1 - 2z^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = X(z) \left(2 - \frac{3}{2}z^{-1}\right) \quad (16.198)$$

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2}x[n-1] \quad (16.199)$$

Παράδειγμα 16.14:

Ένα σύστημα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το σύστημα είναι αιτιατό
- Η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική
- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = \frac{j}{2}$ και ακριβώς ένα μηδενικό
- Η συνάρτηση μεταφοράς $1/H(z)$ έχει δυο μηδενικά.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} h[n]2^{-n} = 0$
- $h[0] = 1$

Βρείτε την κρουστική απόκριση και ελέγξτε την ευστάθεια του συστήματος.

Λύση:

Αφού η κρουστική απόκριση είναι πραγματική και το $H(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = j/2$, θα έχει υποχρεωτικά κι έναν πόλο στη θέση $z = -j/2$. Αφού η συνάρτηση $1/H(z)$ έχει δυο μηδενικά, θα πρέπει η $H(z)$ να έχει δυο πόλους, όχι περισσότερους ή λιγότερους: αυτό προκύπτει επειδή η συνάρτηση $1/H(z)$ θα έχει ως πόλους τα

μηδενικά της $H(z)$ και μηδενικά τους πόλους της $H(z)$. Άρα η μορφή της ζητούμενης συνάρτησης μεταφοράς θα είναι

$$H(z) = \frac{A(1 - az^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})} = \frac{A(1 - az^{-1})}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (16.200)$$

Η σχέση

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h[n]2^{-n} = 0 \quad (16.201)$$

υποδηλώνει ότι

$$H(z)\Big|_{z=2} = 0 \quad (16.202)$$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας, έχουμε

$$\frac{A(1 - az^{-1})}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}\Big|_{z=2} = 0 \iff A\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 0 \iff a = 2 \quad (16.203)$$

Άρα

$$H(z) = A \frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})} \quad (16.204)$$

$$= A \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (16.205)$$

$$= A \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-2z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \right] \quad (16.206)$$

Με χρήση του Πίνακα 15.2, έχουμε

$$h[n] = A \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 2A \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right] u[n] \quad (16.207)$$

Αφού $h[0] = 1$, βλέπουμε ότι $A = 1$, άρα η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right] u[n] \quad (16.208)$$

Η ευστάθεια επιβεβαιώνεται από δυο στοιχεία: πρώτον, οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, και εφόσον το σύστημα είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Δεύτερον, η μορφή της κρουστικής απόκρισης τείνει στο μηδέν όσο $|n| \rightarrow \infty$, άρα μπορεί κανείς να δείξει ότι θα ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας. ■

Γενικότερα, συμπεραίνουμε ότι:

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος και Αιτιατότητα

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου, ενώ ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Σκεφτείτε το λίγο.... αν ένα σύστημα είναι αιτιατό, τότε έχει εξωστρεφή περιοχή σύγκλισης, με όριο τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο, έστω $|a_i|$ αυτός. Άρα η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > |a_i|$. Όμως αν όλοι οι πόλοι είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε και αυτός ο πόλος θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, άρα $|a_i| < 1$, και έτσι η περιοχή σύγκλισης αυτόματα περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Άρα είναι ευσταθές! Με παρόμοια λογική αποδεικνύεται και το αντίστοιχο για τα αντι-αιτιατά συστήματα.

16.4 Αντίστροφα Συστήματα

Για ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, το **αντίστροφο σύστημα** ορίζεται ως το σύστημα που έχει συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$, τέτοια ώστε

$$H(z)G(z) = 1, \quad R_H \cap R_G \neq \emptyset \iff h[n] * g[n] = \delta[n] \quad (16.209)$$

Συνήθως το αντίστροφο σύστημα συμβολίζεται με το δείκτη i , ως $H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$. Ένα ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι τι συμβαίνει με την περιοχή σύγκλισης του αντιστρόφου συστήματος. Αν συμβολίσουμε την περιοχή σύγκλισης του συστήματος με R_H , τότε ποιά είναι η αντίστοιχη του αντιστρόφου συστήματος, R_{H_i} ; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας δίνει η ιδιότητα της συνέλιξης, η οποία – όπως γνωρίζετε – αναφέρει ότι τα σήματα $H(z)$ και $G(z) = H_i(z)$ πρέπει να έχουν επικαλυπτόμενες περιοχές σύγκλισης.

Για παράδειγμα, αν το $H(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς του z , όπως στη Σχέση (16.14), το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$G(z) = H_i(z) = \frac{1}{A} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})} \quad (16.210)$$

δηλ. οι πόλοι του $H(z)$ γίνονται μηδενικά για το αντίστροφο σύστημα, ενώ τα μηδενικά γίνονται πόλοι. Συστήματα που έχουν όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου λέγονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**, και θα τα μελετήσουμε πολύ σύντομα. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 16.15:

Έστω

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}, \quad |z| > 0.8 \quad (16.211)$$

Υπολογίστε το αντίστροφο σύστημα αυτού.

Λύση:

Το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (16.212)$$

Όμως, για την περιοχή σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: *i*) $|z| > 0.5$, *ii*) $|z| < 0.5$. Από αυτές τις δυο περιοχές, αυτή που επικαλύπτεται με την περιοχή σύγκλισης του $H(z)$ είναι η $|z| > 0.5$. Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την κρουστική απόκριση, η οποία είναι

$$h_i[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{0.8z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \right\} = \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - 0.8 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u[n-1] \quad (16.213)$$

το οποίο περιγράφει ένα σύστημα αιτιατό και ευσταθές.

Παράδειγμα 16.16:

Έστω το σύστημα

$$H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}, \quad |z| > 0.8 \quad (16.214)$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα.

Λύση:

Σε αυτήν την περίπτωση, το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}} = 2 \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \quad (16.215)$$

το οποίο έχει δυο πιθανές περιοχές σύγκλισης, την $|z| > 2$ και την $|z| < 2$. Παρατηρήστε ότι και οι δύο περιοχές σύγκλισης επικαλύπτονται με την περιοχή σύγκλισης του $H(z)$. Έτσι, και τα δυο είναι έγκυρα αντίστροφα συστήματα, μόνο που ανταποκρίνονται σε διαφορετικές κρουστικές αποκρίσεις στο χρόνο. Για αυτό με περιοχή σύγκλισης το $|z| > 2$, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_i[n] = 2(2)^n u[n] - 1.6(2)^{n-1} u[n-1] \quad (16.216)$$

η οποία περιγράφει ένα αιτιατό αλλά ασταθές σύστημα. Το σύστημα με περιοχή σύγκλισης $|z| < 2$ έχει κρουστική απόκριση

$$h_i[n] = -2(2)^n u[-n-1] + 1.6(2)^{n-1} u[-n] \quad (16.217)$$

η οποία περιγράφει ένα ευσταθές αλλά όχι αιτιατό σύστημα!

16.5 Απόκριση σε Συχνότητα ΓΧΑ Συστημάτων με Χρήση Διαγράμματος Διανυσμάτων

Ανακεφαλαιώνοντας εν τάχει τα προηγούμενα, γνωρίζουμε ότι, δεδομένου ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$, η είσοδος και η έξοδος σχετίζονται με τη σχέση της συνέλιξης

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (16.218)$$

Όπως έχουμε ήδη δει, η σχέση αυτή μεταφερόμενη στο πεδίο της συχνότητας συνεπάγεται ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (16.219)$$

όπου $H(e^{j\omega})$ η συχνοτική απόκριση του συστήματος. Η σχέση αυτή μπορεί να εκφραστεί στο χώρο του Z ως

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad R_Y \supseteq R_X \cap R_H \quad (16.220)$$

όπου $H(z)$ ο μετασχ. Z του $h[n]$, που φέρει το όνομα *συνάρτηση μεταφοράς* του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι πολύ χρήσιμη στην περιγραφή και την ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων.

Αν αναλύσουμε σε πολική μορφή τη συχνοτική απόκριση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος, εκφρασμένη όπως στη Σχέση (16.219), βλέπουμε ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (16.221)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}|H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (16.222)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}))} \quad (16.223)$$

και άρα

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \quad (16.224)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \quad (16.225)$$

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ λέγεται *απόκριση πλάτους* (magnitude response) ή *κέρδος* (gain) του συστήματος, και η συνάρτηση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ λέγεται *απόκριση φάσης* (phase response) του συστήματος. Τονίζεται ξανά εδώ ότι η απόκριση πλάτους της εξόδου αποτελείται από το *γινόμενο* των αποκρίσεων πλάτους της εισόδου και του συστήματος, ενώ η απόκριση φάσης της εξόδου αποτελείται από το *άθροισμα* των αποκρίσεων φάσης της εισόδου και του συστήματος.

Ας θυμηθούμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})} \quad (16.226)$$

Γνωρίζουμε ότι η συχνοτική απόκριση ενός συστήματος μπορεί να υπολογιστεί αν εκτιμήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (16.227)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η περιοχή σύγκλισής της περιέχει το μοναδιαίο κύκλο. Ένα σημαντικό ερώτημα – που το απαντήσαμε εν μέρει και ποιοτικά για την απόκριση πλάτους στο προηγούμενο κεφάλαιο – είναι *ποιά επιρροή έχουν οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ στη μορφή της συχνοτικής απόκρισης $H(e^{j\omega})$* . Για ρητές συναρτήσεις μεταφοράς, η συχνοτική απόκριση μπορεί να βρεθεί *γεωμετρικά* από τους πόλους και τα μηδενικά του $H(z)$! Ας δούμε πως.

Η απόκριση πλάτους δίνεται από τη Σχέση (16.226), αν θέσουμε $z = e^{j\omega}$ και πάρουμε το μέτρο της:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^N |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (16.228)$$

ενώ η απόκριση φάσης δίνεται από τη σχέση

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle \left[\frac{b_0}{a_0} \right] + \sum_{k=1}^M \angle [1 - a_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \angle [1 - b_k e^{-j\omega}] \quad (16.229)$$

Τέλος, η καθυστέρηση ομάδας δίνεται ως

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \angle [1 - a_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} \angle [1 - b_k e^{-j\omega}] \quad (16.230)$$

την οποία θα μελετήσουμε παράλληλα με τις υπόλοιπες αποκρίσεις σε αυτό το κεφάλαιο. Μια εναλλακτική έκφραση για την καθυστέρηση ομάδας είναι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{|a_k|^2 - \text{Re}\{a_k e^{-j\omega}\}}{1 + |a_k|^2 - 2 \text{Re}\{a_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^M \frac{|b_k|^2 - \text{Re}\{b_k e^{-j\omega}\}}{1 + |b_k|^2 - 2 \text{Re}\{b_k e^{-j\omega}\}} \quad (16.231)$$

Παρατηρήστε ότι οι Σχέσεις (16.228, 16.229, 16.230) εκφράζονται ως άθροισμα από τις συνεισφορές των πόλων των και των μηδενικών σε πλάτος, φάση, και καθυστέρηση ομάδας. Με άλλα λόγια, εκφράζονται από τις συνεισφορές των όρων της μορφής

$$f(e^{j\omega}) = 1 - c e^{-j\omega} \quad (16.232)$$

Αυτό είναι ενδιαφέρον, γιατί για να καταλάβουμε πώς οι πόλοι και τα μηδενικά επηρεάζουν τη συχνотική απόκριση σε πραγματικά συστήματα μεγάλης τάξης, πρέπει να καταλάβουμε σε βάθος πως λειτουργούν συστήματα μικρής τάξης, όπως π.χ. πρώτης και δεύτερης τάξης, σε σχέση με τη θέση των πόλων και των μηδενικών τους. Μπορούμε τώρα να μελετήσουμε τη γεωμετρική σχέση πόλων-μηδενικών και απόκρισης σε συχνότητα, χρησιμοποιώντας **διαγράμματα διανυσμάτων**.

Ας επιστρέψουμε στη σχέση

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^N |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (16.233)$$

Βλέπετε ότι η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ είναι $|b_0/a_0|$ φορές το γινόμενο των όρων $|1 - b_k e^{-j\omega}|$ δια το γινόμενο των όρων $|1 - a_k e^{-j\omega}|$. Κάθε όρος στον αριθμητή

$$|1 - b_k e^{-j\omega}| = \frac{|e^{j\omega} - b_k|}{|e^{j\omega}|} = |e^{j\omega} - b_k| \quad (16.234)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως το μήκος του διανύσματος $\vec{u}_k$ που ξεκινά από το μηδενικό στη θέση $z = b_k$ και καταλήγει στο μοναδιαίο κύκλο, στο $z = e^{j\omega}$. Όμοια ακριβώς, κάθε όρος στον παρονομαστή

$$|1 - a_k e^{-j\omega}| = \frac{|e^{j\omega} - a_k|}{|e^{j\omega}|} = |e^{j\omega} - a_k| \quad (16.235)$$

μπορεί να ιδωθεί ως το μήκος του διανύσματος $\vec{u}_k$ από τον πόλο στη θέση $z = a_k$ ως το μοναδιαίο κύκλο, στο $z = e^{j\omega}$. Καταλαβαίνετε ότι, και στις δυο περιπτώσεις, το πέρασ των διανυσμάτων είναι μεταβαλλόμενο – συναρτήσει της συχνότητας ω ! Άρα εν τέλει, η απόκριση πλάτους είναι ουσιαστικά ένας λόγος γινομένων μηκών διανυσμάτων στο μιγαδικό επίπεδο! Ας δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού απόκρισης πλάτους από το διάγραμμα διανυσμάτων.

16.5.1 Συστήματα Πρώτης Τάξης

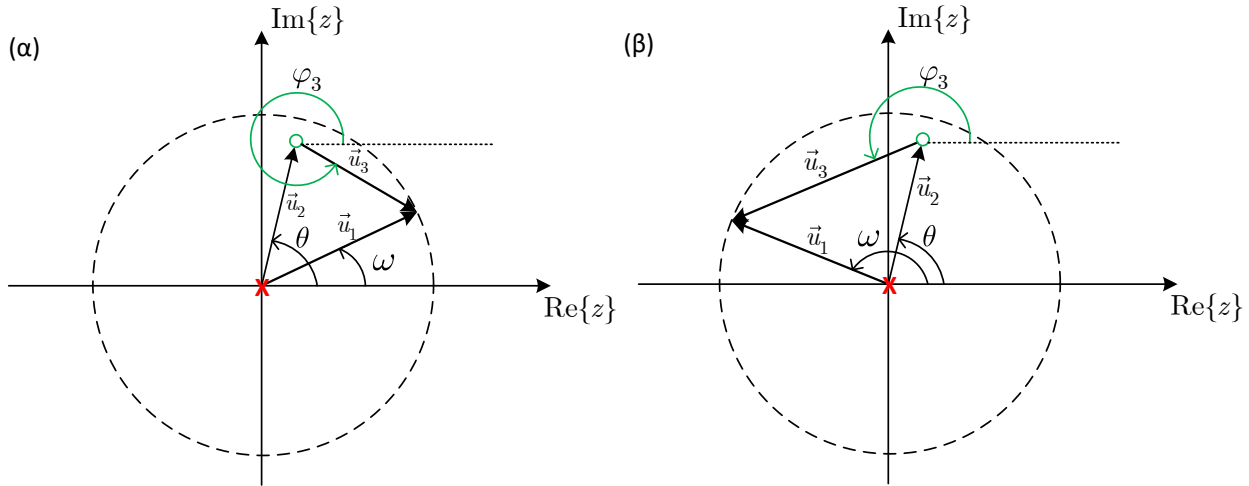
Ας ξεκινήσουμε με μερικά απλά συστήματα πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 16.17:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = b_k = re^{j\theta}$ και, αναπόφευκτα, θα έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0$, όπως στο Σχήμα 16.13. Σχεδιάστε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και καθυστέρησης ομάδας.

Λύση:

Το διάνυσμα από το μηδενικό ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με $\vec{u}_3$, ενώ το διάνυσμα $\vec{u}_1$ είναι το διάνυσμα του μεταβαλλόμενου μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$, και τέλος το διάνυσμα $\vec{u}_2$ είναι το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων ως τη θέση του μηδενικού. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι



Σχήμα 16.13: Διάγραμμα Διανυσμάτων συστήματος πρώτης τάξης με ένα μηδενικό σε δυο στιγμιότυπα.

$$H(z) = (1 - re^{j\theta} z^{-1}) = \frac{z - re^{j\theta}}{z} \quad (16.236)$$

και άρα η συχνοτική απόκριση είναι

$$H(e^{j\omega}) = (1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \quad (16.237)$$

Η πρωτεύουσα φάση θα είναι

$$\text{ARG}[1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}] = \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (16.238)$$

Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\text{grd}[1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}] = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (16.239)$$

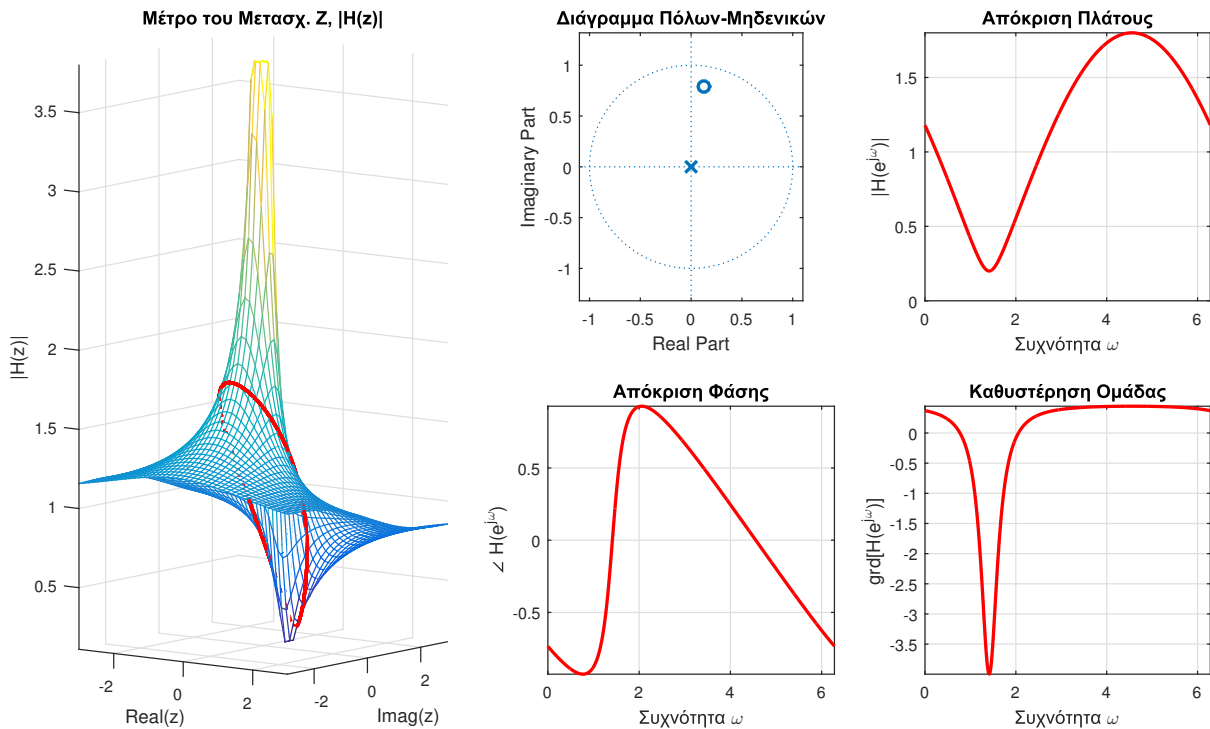
Η απόκριση πλάτους θα είναι, όπως είδαμε πιο πάνω, ίση με

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \right| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}| \quad (16.240)$$

Όμως αυτό το μέτρο είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}_3$, δηλ. η απόκριση πλάτους εξαρτάται μόνο από το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}_3$! Όταν το διάνυσμα $\vec{u}_1$ αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία ω του, το μέτρο του $\vec{u}_3$ μεταβάλλεται, δίνοντάς μας τις τιμές της $|H(e^{j\omega})|$ για κάθε ω . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του $\vec{u}_1$:

- Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα ξεκινά από μια τιμή στο $\omega = 0$, έστω $|H(e^{j0})|$.
- Προσέξτε ότι το $|\vec{u}_3|$ μικραίνει όσο το $\omega \rightarrow \theta$, και θα γίνει ελάχιστο όταν $\omega = \theta$. Άρα η απόκριση πλάτους θα φθίνει μέχρι το $\omega = \theta$, όπου θα γίνει ελάχιστη.

- Μετά, το διάνυσμα $|\vec{u}_3|$ θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, άρα η απόκριση πλάτους θα αυξάνει και πάλι μέχρι $\omega = \pi + \theta$, όπου θα γίνει μέγιστη.
- Όσο $\omega \rightarrow 2\pi$, το $|\vec{u}_3|$ θα φθίνει και πάλι, άρα η απόκριση πλάτους θα μικραίνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή $|H(e^{j0})|$ που είχε όταν $\omega = 0$, αφού τώρα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.



Σχήμα 16.14: Ανάλυση συστήματος πρώτης τάξης με ένα μηδενικό.

Για την απόκριση φάσης, έχουμε ότι

$$\angle(1 - re^{j\theta}) = \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle e^{j\omega} = \angle u_3 - \angle u_1 = \phi_3 - \phi_1 = \phi_3 - \omega \quad (16.241)$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση φάσης ισούται με τη διαφορά της γωνίας ϕ_3 , δηλ. της γωνίας του διανύσματος $\vec{u}_3$ μείον τη γωνία του διανύσματος $\vec{u}_1$. Ας κάνουμε παρόμοια ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα 16.13:

- Όταν $\omega = 0$, η απόκριση φάσης έχει μια τιμή, έστω $\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3$, η οποία όμως είναι αρνητική, γιατί η ϕ_3 είναι μεγαλύτερη από π , οπότε η τιμή της ανήκει στο διάστημα $(-\pi, 0)$.
- Όταν $\omega \rightarrow \theta$, παρατηρούμε τα εξής:
 - Όταν το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_1$ γίνει ίσο με το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_2$, τότε $\angle H(e^{j\omega}) = 2\pi - \omega = -\omega$, και εκεί η απόκριση φάσης είναι ελάχιστη.
 - Όταν $\omega \rightarrow \theta$, η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μικρή μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μεγαλώνει απότομα.
 - όταν $\omega = \theta$, η διαφορά $\phi_3 - \omega$ θα είναι μηδέν, γιατί τότε $\phi_3 = \theta = \omega$. Άρα η φάση θα είναι μηδέν.
 - Όταν η ω απομακρύνεται αλλά βρίσκεται κοντά στη θ , η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μεγάλη μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μεγαλώνει απότομα μέχρι το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_1$ γίνει ξανά ίσο με το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_2$. Τότε η απόκριση φάσης θα γίνει μέγιστη, και από εκεί και μετά θα αρχίσει να φθίνει.
- Όταν $\omega = \pi + \theta$, η φάση θα είναι μηδέν, γιατί οι γωνίες ϕ_3 και ω θα είναι ίσες.

- Τέλος, όταν $\omega \rightarrow 2\pi$, η ω θα είναι όλο και μεγαλύτερη από την ϕ_3 και άρα η απόκριση φάσης θα φθίνει, μέχρι να φτάσει στην ίδια τιμή $\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3$ που είχε για $\omega = 0$.

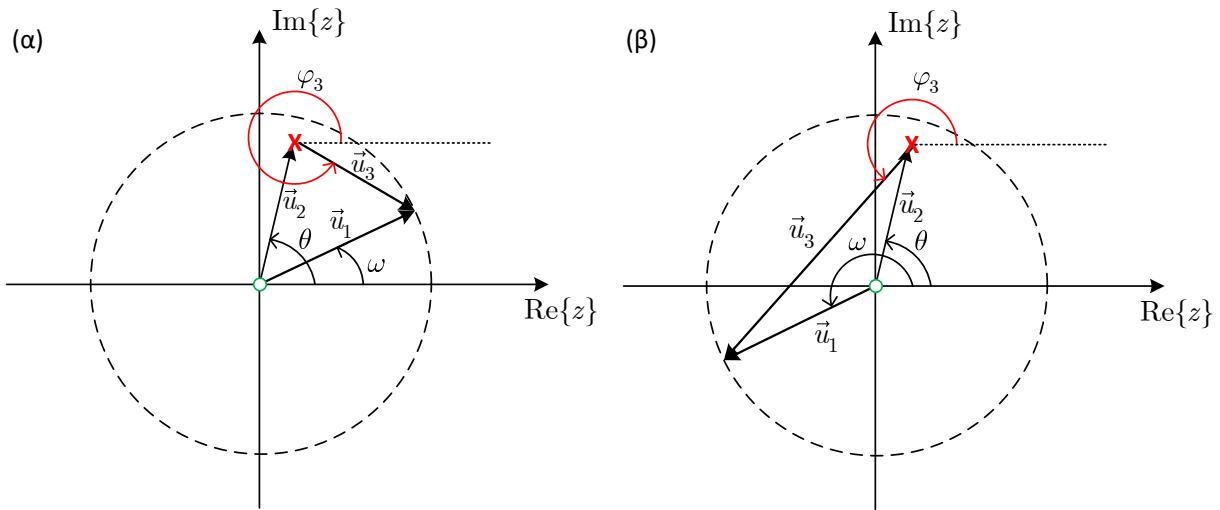
Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές του μηδενικού είναι $r = 0.8$ και $\theta = 0.45\pi$, τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα 16.13. Τα στοιχεία φαίνονται στο Σχήμα 16.14. Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη τιμή του είναι για $\omega = \theta = 0.45\pi \approx 1.41$, όταν δηλαδή το διάνυσμα $|\vec{u}_3|$ βρίσκεται στο μικρότερο μήκος του, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για $\omega = \pi + 0.45\pi = 1.45\pi \approx 4.55$, όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας. Παρατηρήστε και την απόκριση φάσης και δείτε τις ομοιότητες με την ανάλυσή μας.

Παράδειγμα 16.18:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που έχει έναν πόλο στη θέση $z = b_k = re^{j\theta}$ και, αναπόφευκτα, θα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 0$, όπως στο Σχήμα 16.15. Σχεδιάστε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και καθυστέρησης ομάδας.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι



Σχήμα 16.15: Διάγραμμα Διανυσμάτων συστήματος πρώτης τάξης με έναν πόλο σε δυο στιγμιότυπα.

$$H(z) = \frac{1}{1 - re^{j\theta}z^{-1}} = \frac{z}{z - re^{j\theta}} \quad (16.242)$$

και άρα η συχνοτική απόκριση είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - re^{j\theta}} \quad (16.243)$$

Η πρωτεύουσα φάση θα είναι

$$\text{ARG} \left[\frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right] = \tan^{-1} \frac{-r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} = -\tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (16.244)$$

Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\text{grd} \left[\frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right] = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (16.245)$$

Παρατηρήστε ότι η απόκριση φάσης και η καθυστέρηση ομάδας είναι οι αρνητικές συναρτήσεις του προηγούμενου παραδείγματος, ενώ δεν ισχύει το ίδιο για την απόκριση πλάτους, όπως θα δούμε αμέσως!

Το διάνυσμα από τον πόλο ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με $\vec{u}_3$, ενώ το διάνυσμα $\vec{u}_1$ είναι το διάνυσμα του μεταβαλλόμενου μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$, και τέλος το διάνυσμα $\vec{u}_2$ είναι το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων ως τη θέση του πόλου. Η απόκριση πλάτους εκφράζεται με όρους μετρών διανυσμάτων ως

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - re^{j\theta}} \right| = \frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|} \quad (16.246)$$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται από το $\frac{1}{|\vec{u}_3|}$. Όταν το διάνυσμα $\vec{u}_1$ αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία ω του, το μέτρο του $\vec{u}_3$ μεταβάλλεται, και άρα αντίστοιχα μεταβάλλεται η ποσότητα $\frac{1}{|\vec{u}_3|}$, δίνοντάς μας τις τιμές της $|H(e^{j\omega})|$ για κάθε ω . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του $\vec{u}_1$:

- Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα ξεκινά από μια τιμή στο $\omega = 0$, έστω $|H(e^{j0})|$.
- Προσέξτε ότι το $|\vec{u}_3|$ μικραίνει όσο το $\omega \rightarrow \theta_+$, και θα γίνει ελάχιστο όταν $\omega = \theta$. Άρα η απόκριση πλάτους θα μεγαλώνει μέχρι το $\omega = \theta$, όπου θα λάβει τη μέγιστη τιμή της. Σημειώστε ότι γύρω από τη γωνία $\omega = \theta$, η μεταβολή της απόκρισης πλάτους θα είναι πολύ απότομη, καθώς η ποσότητα $1/|\vec{u}_3|$ μεταβάλλεται πολύ γρήγορα γύρω από τη γωνία του πόλου.
- Στη συνέχεια, το $|\vec{u}_3|$ θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, άρα η απόκριση πλάτους θα φθίνει και πάλι μέχρι $\omega = \pi + \theta$, όπου θα γίνει ελάχιστη.
- Όσο $\omega \rightarrow 2\pi$, το $|\vec{u}_3|$ θα φθίνει και πάλι, άρα η απόκριση πλάτους θα αυξάνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή $|H(e^{j0})|$, αφού θα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Για την απόκριση φάσης, έχουμε ότι

$$\angle \frac{1}{1 - re^{j\theta}} = \angle \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - re^{j\theta}} = \angle e^{j\omega} - \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) = \angle u_1 - \angle u_3 = \phi_1 - \phi_3 = \omega - \phi_3 \quad (16.247)$$

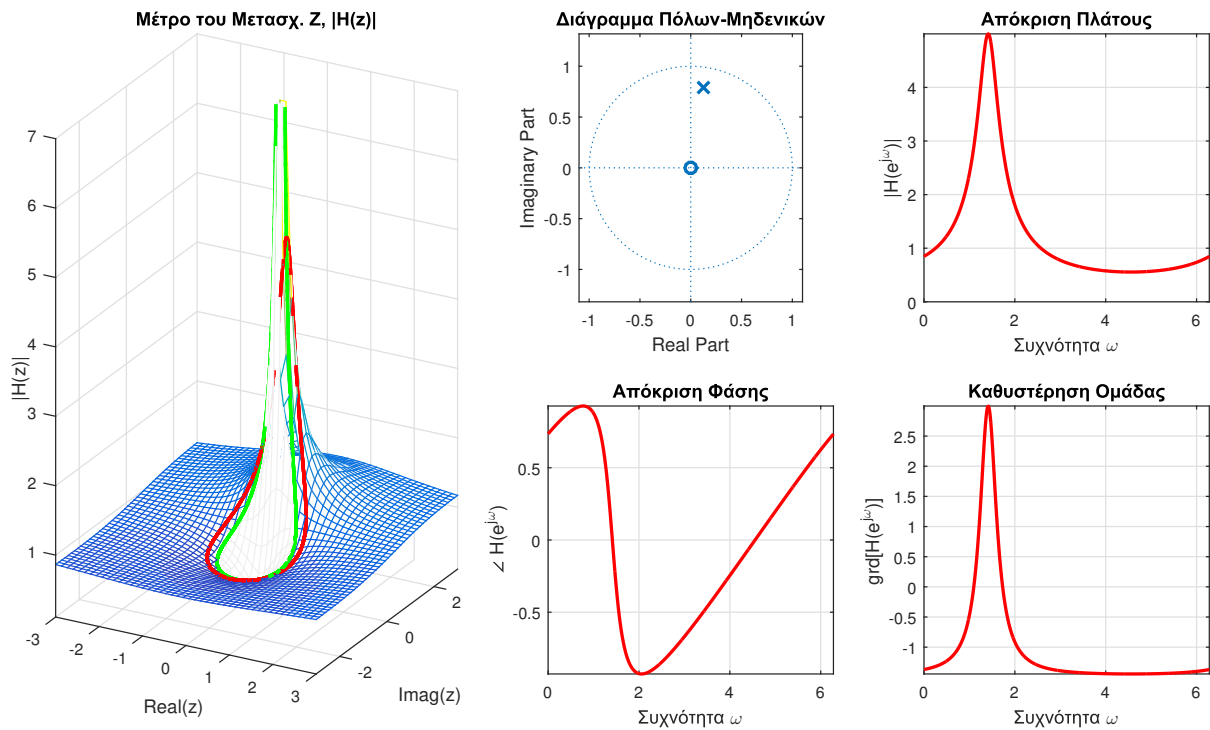
η οποία πράγματι προκύπτει ως η αρνητική της απόκρισης φάσης του προηγούμενου παραδείγματος. Η απόκριση φάσης ισούται με τη διαφορά της γωνίας ϕ_3 , δηλ. της γωνίας του διανύσματος $\vec{u}_3$ από τη γωνία του διανύσματος $\vec{u}_1$. Ας κάνουμε παρόμοια ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα 16.15:

- Όταν $\omega = 0$, η απόκριση φάσης έχει μια τιμή, έστω $\angle H(e^{j\omega}) = -\phi_3$, η οποία όμως είναι θετική, γιατί η ϕ_3 είναι μεγαλύτερη από π , οπότε η τιμή της ανήκει στο διάστημα $(0, \pi)$.
- Όταν $\omega \rightarrow \theta$, παρατηρούμε τα εξής:
 - Όταν το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_1$ γίνει ίσο με το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_2$, τότε $\angle H(e^{j\omega}) = \omega$, και εκεί η απόκριση φάσης είναι μέγιστη.
 - Όταν η ω πλησιάζει τη γωνία θ , η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μικρή μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μικραίνει απότομα.
 - όταν $\omega = \theta$, η διαφορά $\omega - \phi_3$ θα είναι μηδέν, γιατί τότε $\phi_3 = \theta = \omega$. Άρα η απόκριση φάσης θα είναι μηδέν στη συχνότητα $\omega = \theta$.
 - Όταν η ω απομακρύνεται αλλά βρίσκεται κοντά στη γωνία θ , η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μεγάλη μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μικραίνει ξανά απότομα μέχρι το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_1$ γίνει ξανά ίσο με το φανταστικό μέρος του $\vec{u}_2$. Τότε η απόκριση φάσης θα γίνει ελάχιστη, και από εκεί και μετά θα αρχίσει να αυξάνει.
- Όταν $\omega = \pi + \theta$, η φάση θα είναι μηδέν, γιατί οι γωνίες ϕ_3 και ω θα είναι ίσες.
- Τέλος, όταν $\omega \rightarrow 2\pi$, η ω θα είναι όλο και μεγαλύτερη από την ϕ_3 και άρα η απόκριση φάσης θα αυξάνει, μέχρι να φτάσει στην ίδια τιμή $\angle H(e^{j\omega}) = -\phi_3$ που είχε για $\omega = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές του μηδενικού είναι $r = 0.8$ και $\theta = 0.45\pi$, τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα 16.13. Τα στοιχεία φαίνεται στο Σχήμα 16.16. Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη τιμή του είναι για $\omega = \theta = 0.45\pi \approx 1.41$, όταν δηλαδή το διάνυσμα $|\vec{u}_3|$ βρίσκεται στο μικρότερο μήκος του, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για $\omega = \pi + 0.45\pi = 1.45\pi \approx 4.55$, όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας. Παρατηρήστε και την απόκριση φάσης και δείτε τις ομοιότητες με την ανάλυσή μας.

16.5.2 Συστήματα Δευτέρας Τάξης

Τα συστήματα που έχουμε μελετήσει ως τώρα ήταν απλά αλλά όχι πραγματικά, αφού οι πόλοι και τα μηδενικά ήταν μιγαδικά και δεν έρχονταν σε συζυγή ζεύγη. Ας δούμε μερικά πραγματικά συστήματα, μεγαλύτερης τάξης.



Σχήμα 16.16: Ανάλυση συστήματος πρώτης τάξης με έναν πόλο.

Παράδειγμα 16.19:

Έστω ένα σύστημα δεύτερης τάξης, με δυο πόλους σε συζυγείς θέσεις, όπως στο Σχήμα 16.17. Μελετήστε τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, καθώς και την καθυστέρηση ομάδας του μέσω διαγράμματος διανυσμάτων.

Λύση:

Το σύστημα αυτό περιγράφεται από τη σχέση

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r \cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}} \quad (16.248)$$

ή εναλλακτικά, από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - 2r \cos(\theta)y[n-1] + r^2y[n-2] = x[n] \quad (16.249)$$

Η πρωτεύουσα φάση του συστήματος δίνεται ως

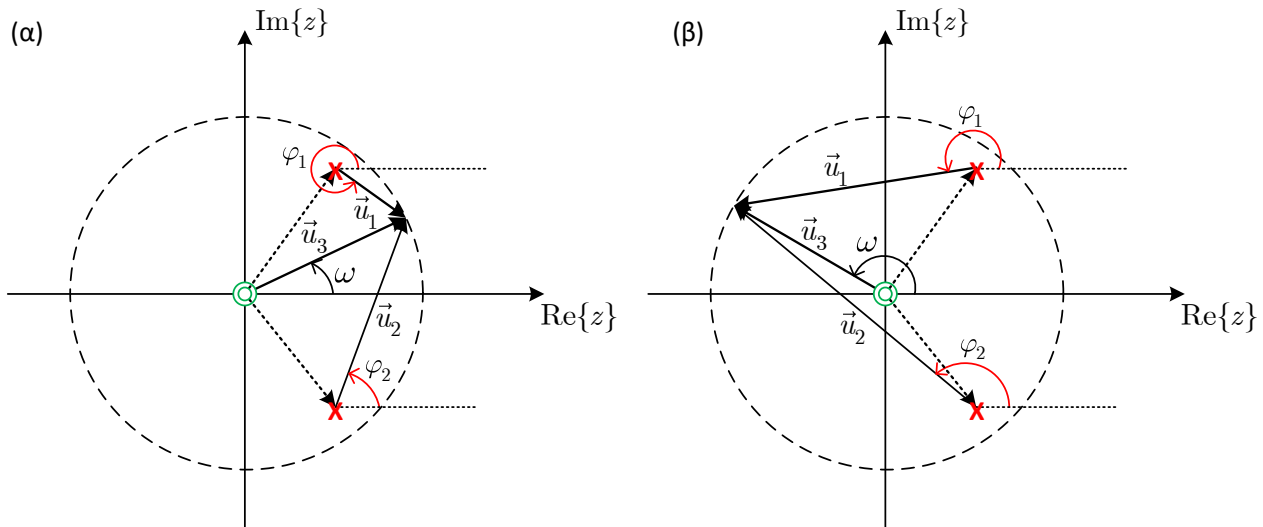
$$\text{ARG}[H(e^{j\omega})] = -\tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \quad (16.250)$$

και άρα η καθυστέρηση ομάδας είναι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r(1 - r \cos(\omega - \theta))}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} - \frac{r(1 - r \cos(\omega + \theta))}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)} \quad (16.251)$$

Η εξαγωγή των φασματικών χαρακτηριστικών του συστήματος από τις παραπάνω σχέσεις απαιτεί λίγη προσπάθεια, αλλά θα μας ανταμείψει με υψηλή ακρίβεια. Μια πιο ποιοτική παραγωγή των φασματικών συναρτήσεων μπορεί να γίνει με χρήση διαγράμματος διανυσμάτων.

Προφανώς, για δυο πόλους σε συζυγείς θέσεις, θα έχουμε δυο μηδενικά στο μηδέν. Επιπλέον, το διάνυσμα με μέτρο $|e^{j\omega} - re^{j\theta}|$, από τον πόλο του πρώτου τεταρτημορίου, $re^{j\theta}$, ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με $\vec{u}_1$, ενώ το διάνυσμα $\vec{u}_3$ είναι το διάνυσμα του μεταβαλλόμενου μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$, και τέλος το διάνυσμα με μέτρο $|e^{j\omega} - re^{-j\theta}|$ είναι το διάνυσμα $\vec{u}_2$ από το συζυγή πόλο του τέταρτου τεταρτημορίου ως το μοναδιαίο κύκλο.



Σχήμα 16.17: Διάγραμμα Διανυσμάτων συστήματος δεύτερης τάξης με δυο συζυγείς πόλους σε δυο στιγμιότυπα.

Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})} \quad (16.252)$$

και άρα η συχνотική απόκριση θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j2\omega}}{(e^{j\omega} - re^{j\theta})(e^{j\omega} - re^{-j\theta})} = \frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - re^{j(\omega-\theta)} - re^{j(\omega+\theta)} + r^2} = \frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - 2r \cos(\theta)e^{j\omega} + r^2} \quad (16.253)$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι ίση με

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j2\omega}|}{|(e^{j\omega} - re^{j\theta})(e^{j\omega} - re^{-j\theta})|} = \frac{1}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|} \quad (16.254)$$

Δηλαδή, η απόκριση πλάτους εξαρτάται μόνο από τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2$! Όταν το διάνυσμα $\vec{u}_3$ αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία ω του, το μέτρο των $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ μεταβάλλεται, δίνοντας μας τις τιμές της $|H(e^{j\omega})|$ για κάθε ω . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του u_3 :

- Όταν $\omega = 0$, τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ έχουν το ίδιο μέτρο, οπότε η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα ξεκινά από μια τιμή στο $\omega = 0$, έστω $|H(e^{j0})|$.
- Στη συνέχεια, το $|\vec{u}_1|$ μικραίνει όσο το $\omega \rightarrow \theta$, ενώ αντίστοιχα το $|\vec{u}_2|$ μεγαλώνει. Παρατηρήστε όμως ότι το $|\vec{u}_1|$ μικραίνει γρηγορότερα απ’ όσο μεγαλώνει το $|\vec{u}_2|$. Έτσι, το γινόμενο τους θα μικρύνει απότομα για συχνότητες κοντά στον πόλο και θα γίνει ελάχιστο (και άρα το αντίστροφο του γινομένου - αυτό μας ενδιαφέρει - θα είναι μέγιστο) όταν $\omega = \theta$.
- Στη συνέχεια, και ξανά για συχνότητες κοντά στον πόλο, το $|\vec{u}_1|$ θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, ενώ το ίδιο θα κάνει και το $|\vec{u}_2|$. Όμως ξανά το $|\vec{u}_1|$ θα μεταβάλλεται (μεγαλώνει) πιο αργά από το $|\vec{u}_2|$, κι έτσι για κάποιες συχνότητες λίγο μεγαλύτερες από τη γωνία του πόλου η απόκριση πλάτους θα φθίνει απότομα.
- Όσο απομακρύνεται η συχνότητα ω από τον πόλο, η απόκριση πλάτους θα φθίνει και πάλι μέχρι $\omega = \pi$, όπου τα μέτρα των $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι ξανά ίσα. Εκεί, η απόκριση πλάτους θα έχει ελάχιστο.
- Όσο $\omega \rightarrow 2\pi - \theta$, το $|\vec{u}_2|$ θα μικραίνει, ενώ το $|\vec{u}_1|$ θα μεγαλώνει. Το $|\vec{u}_2|$ μικραίνει πιο γρήγορα απ’ όσο αυξάνει το $|\vec{u}_1|$. Άρα η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα μεγαλώνει ξανά απότομα, μέχρι $\omega = 2\pi - \theta$, όπου θα γίνει μέγιστη. Παρατηρήστε ότι η διαδικασία αυτή είναι συμμετρική με αυτή για $\omega \rightarrow \theta$.
- Όταν η συχνότητα ω απομακρυνθεί απ’ τη γωνία $2\pi - \theta$ και πλησιάζει ξανά τη συχνότητα $\omega = 0$, η απόκριση πλάτους θα φθίνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή $|H(e^{j0})|$ που είχε όταν $\omega = 0$, αφού θα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Για τη φάση, έχουμε ότι

$$\angle \left[\frac{1}{(1 - re^{j\theta}e^{j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega})} \right] = -\angle(1 - re^{j\theta}e^{j\omega}) - \angle(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) \quad (16.255)$$

$$= -(\phi_1 - \omega) - (\phi_2 - \omega) \quad (16.256)$$

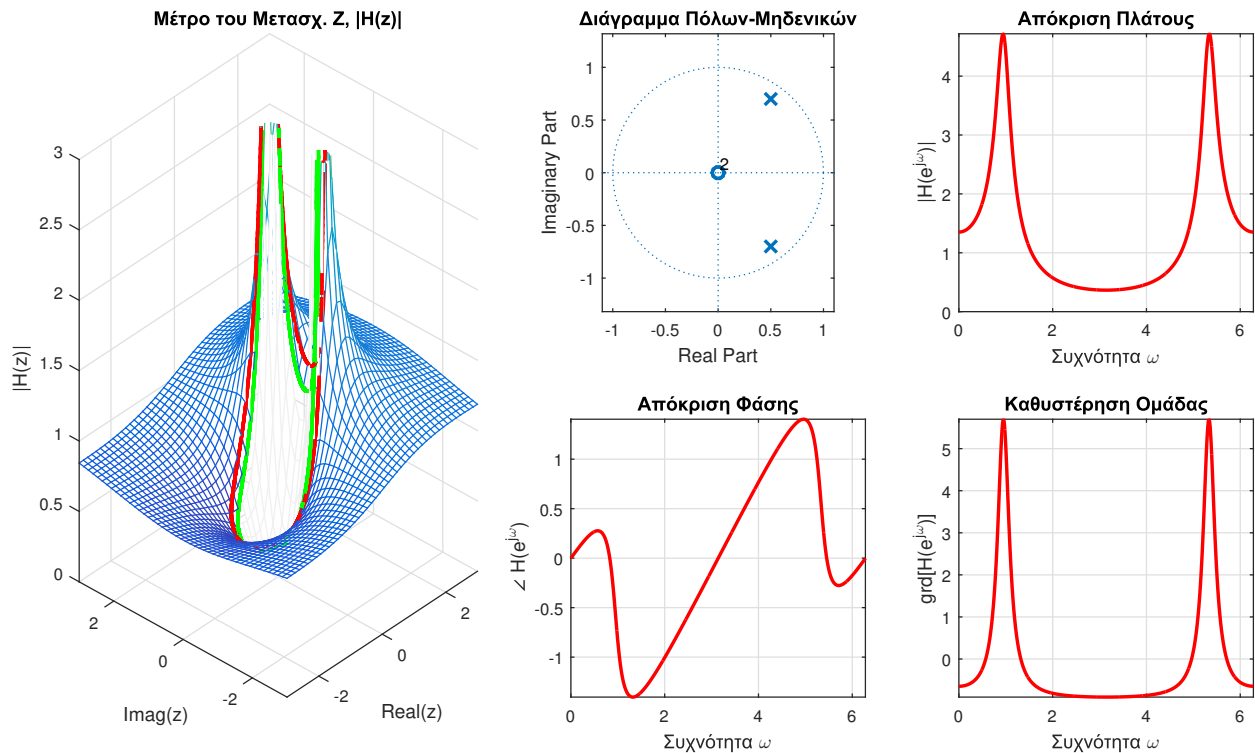
$$= 2\omega - \phi_1 - \phi_2 \quad (16.257)$$

Εδώ η απόκριση φάσης είναι πιο πολύπλοκη. Ας κάνουμε παρόμοια ποιοτική ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα 16.17:

- Όταν $\omega = 0$, η απόκριση φάσης είναι $\angle H(e^{j0}) = -\phi_1 - \phi_2 = 0$, γιατί η $\phi_1 = -\phi_2$.
- Όταν $\omega \rightarrow \theta$, παρατηρούμε ότι η ϕ_2 μεγαλώνει, καθώς και η ϕ_1 , οπότε όταν $\omega = \theta$, έχουμε $\angle H(e^{j\omega}) \approx 2\theta - (-\theta) - \pi/2 = 3\theta - \pi/2$.
- Όταν $\omega = \pi$, τότε $\angle H(e^{j\pi}) = 2\pi - \phi_1 - \phi_2$, όμως τότε $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$, και άρα $\angle H(e^{j\pi}) = 0$.
- Τέλος, όταν η συχνότητα ω μεγαλώνει από το π προς το 2π , η απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ θα έχει περιττή συμμετρία σε σχέση με την καμπύλη που μόλις περιγράψαμε όσο $\omega \in (0, \pi]$.

Αν παρατηρήσετε το Σχήμα 16.18, θα δείτε ότι δεν συμπεριλάβαμε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της απόκρισης φάσης λίγο μετά τη συχνότητα $\omega = 0$ και λίγο πριν τη συχνότητα $\omega = 2\pi$. Θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε αυτές τις περιοχές αν σχεδιάζαμε – με κάποια ακρίβεια – τις αποκρίσεις φάσης κάθε πόλου ξεχωριστά και στη συνέχεια αθροίζαμε τη συνεισφορά του καθενός στη συνολική απόκριση φάσης.

Τέλος, για την καθυστέρηση ομάδας, γνωρίζοντας την φάση και παραγωγίζοντάς την, μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικά τη γραφική παράστασή της. Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές των πόλων είναι $r = 0.85$ και $\theta \approx \pm\pi/3$, τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα 16.17. Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη τιμή της απόκρισης πλάτους εμφανίζεται για $\omega = \pi$, όταν δηλαδή τα $|\vec{u}_1|$, $|\vec{u}_2|$ γίνονται ταυτόχρονα μέγιστα, άρα το $\frac{1}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}$ ελάχιστο, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για $\omega = \pm\theta$, όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας.



Σχήμα 16.18: Ανάλυση Συστήματος δευτέρας τάξης με δυο συζυγείς πόλους.

Παράδειγμα 16.20:

Θεωρήστε το σύστημα

$$h[n] = \delta[n] - 2r \cos(\omega - \theta) \delta[n - 1] + r^2 \delta[n - 2] \quad (16.258)$$

με συνάρτηση μεταφοράς

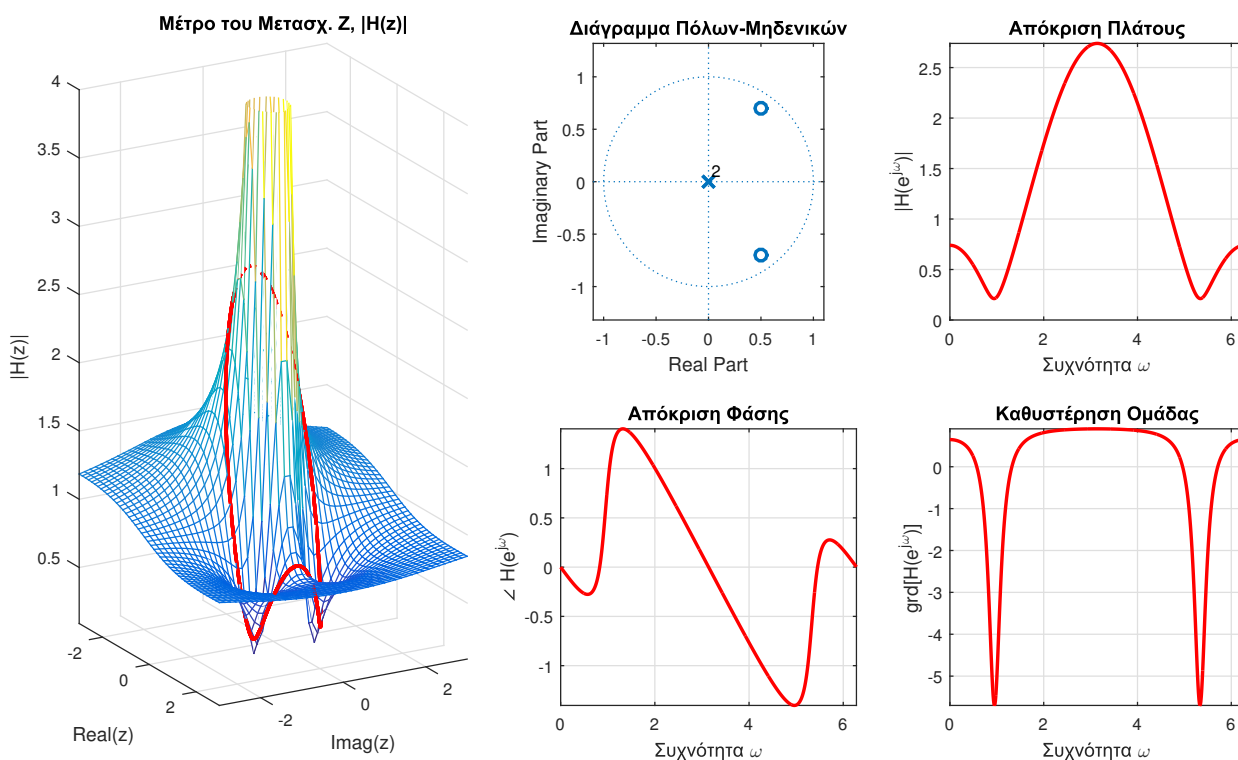
$$H(z) = 1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2} \quad (16.259)$$

Αναλύστε το στο χώρο της συχνότητας.

Λύση:

Προσέξτε ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αποτελεί το αντίστροφο σύστημα του συστήματος του Παραδείγματος 16.19! Σύμφωνα λοιπόν με όσα έχουμε πει για τα αντίστροφα συστήματα, θα πρέπει οι αποκρίσεις φάσης και η καθυστέρηση ομάδας να είναι οι αρνητικές απ' αυτές του Παραδείγματος 16.19. Για το φάσμα πλάτους δεν ισχύει το ίδιο καθώς δεν αποτελεί γραμμική σχέση των πόλων και μηδενικών του. Όμως πολύ σύντομα θα δούμε μια αναπαράσταση απόκρισης πλάτους η οποία να ικανοποιεί αυτήν την “αντίστροφη” απαίτηση για το πλάτος μεταξύ αντιστροφών συστημάτων.

Πράγματι, για $r = 0.86$ και $\theta = 0.9505$, έχουμε τις αποκρίσεις του Σχήματος 16.19.



Σχήμα 16.19: Ανάλυση Συστήματος δεύτερης τάξης με δυο συζυγή μηδενικά.

■

Καταλαβαίνετε ότι όσο προσθέτουμε πόλους και μηδενικά, τόσο η ανάλυση που περιγράψαμε γίνεται όλο και πιο σύνθετη. Μια σοφότερη επιλογή είναι να υπολογίζουμε κάθε φορά τη συνεισφορά κάθε πόλου ή μηδενικού ξεχωριστά, και στη συνέχεια να βρίσκουμε τη συνολική απόκριση πλάτους ή φάσης και καθυστέρησης ομάδας, εφ' όσον οι τελευταίες υπολογίζονται ως γινόμενα ή αθροίσματα των επιμέρους συνεισφορών.

Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.21:

Θεωρήστε το σύστημα με δυο πόλους στις θέσεις

$$p_1 = 0.9e^{j\pi/4}, \quad p_2 = p_1^* \quad (16.260)$$

και ένα μηδενικό στη θέση $z_1 = 1$. Αναλύστε το στο χώρο της συχνότητας.

Λύση:

Με βάση όσα έχουμε πει, θα ήταν προτιμότερο να μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεισφορά κάθε πόλου και κάθε μηδενικού στην απόκριση πλάτους, φάσης, και στην καθυστέρηση ομάδας. Υπάρχουν τρεις παράγοντες που καθορίζουν τις ζητούμενες συχνοτικές συναρτήσεις:

- Ο παράγοντας που οφείλεται στον πόλο p_1 :

$$\frac{1}{1 - 0.9e^{j\pi/4}z^{-1}} \quad (16.261)$$

- Ο παράγοντας που οφείλεται στον πόλο p_1^* :

$$\frac{1}{1 - 0.9e^{-j\pi/4}z^{-1}} \quad (16.262)$$

- Ο παράγοντας που οφείλεται στο μηδενικό z_1 :

$$1 - z^{-1} \quad (16.263)$$

Δείτε το Σχήμα 16.20. Με βάση τα τελευταία παραδείγματα, θα ήταν επιθυμητό να μπορούμε να έχουμε μια σχέση απλής αλλαγής προσήμου και της απόκρισης πλάτους όταν ζητούμε το αντίστροφο σύστημα. Αυτή η απαίτηση, σε συνδυασμό με τις πολλές εφαρμογές των θεωριών των σημάτων και των συστημάτων στο πεδίο της επεξεργασίας του ήχου, οδηγούν σε μια εναλλακτική θεώρηση της απόκρισης πλάτους, που θα τη δούμε εν συντομία στην επόμενη παράγραφο.

16.5.3 Λογαριθμική Απόκριση Πλάτους

Γνωρίζουμε ότι δυο συστήματα σε σειρά σχετίζονται με την πράξη του γινομένου των μετασχηματισμών τους στο χώρο της συχνότητας (Z ή Fourier). Αν θέλαμε να μετατρέψουμε την πράξη αυτή από γινόμενο σε άθροισμα, τότε θα έπρεπε να βρούμε μια συνάρτηση η οποία μετατρέπει το γινόμενο δυο όρων σε άθροισμα. Μια τέτοια συνάρτηση είναι ο λογάριθμος, αφού

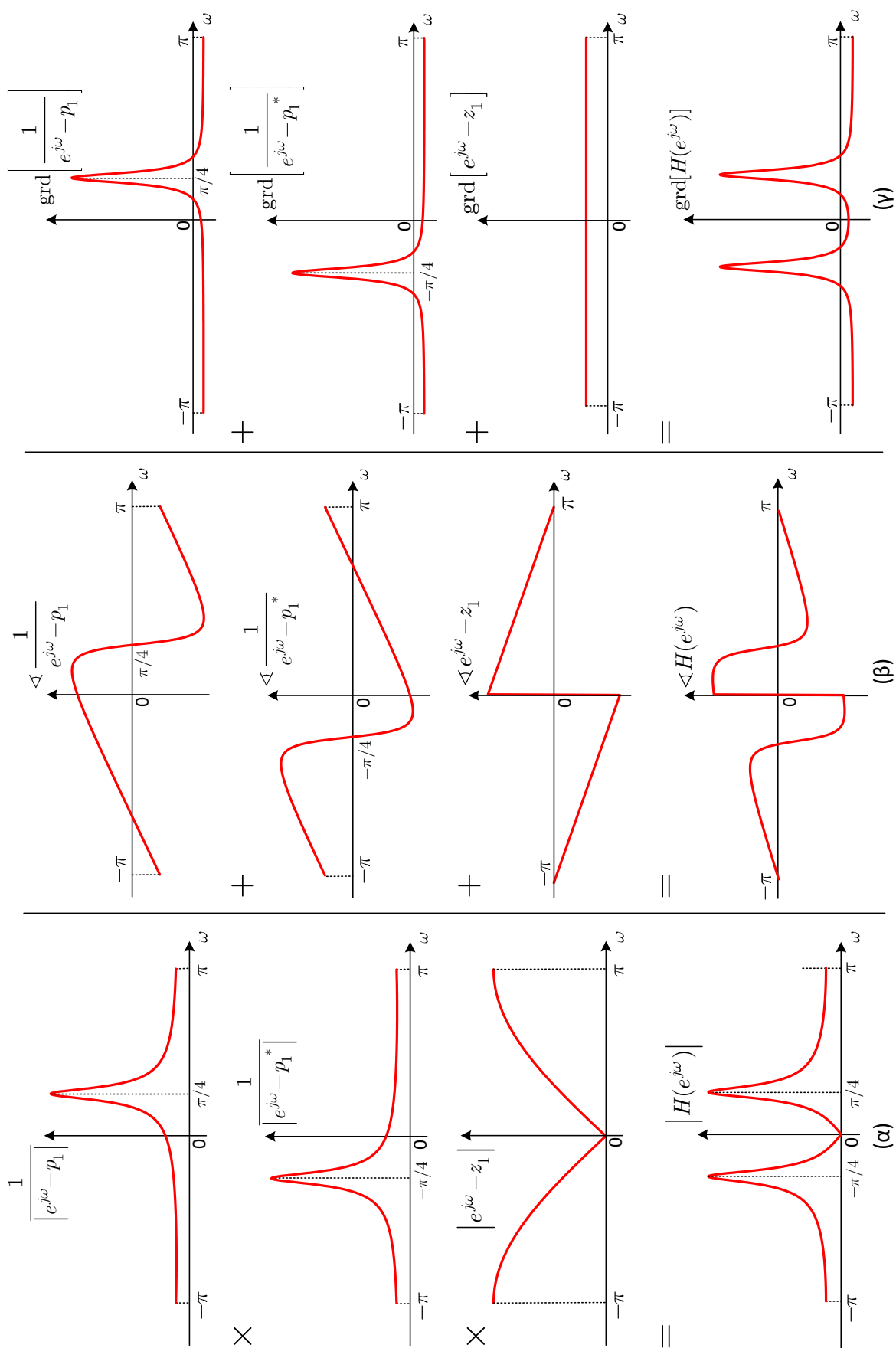
$$\log(\alpha\beta) = \log \alpha + \log \beta \quad (16.264)$$

Το να πάρει κανείς το λογάριθμο μιας μιγαδικής συνάρτησης όπως η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ ή η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ είναι μια κίνηση που θέλει αρκετή προσοχή, όμως μπορεί κανείς να πάρει το λογάριθμο της απόκρισης πλάτους, η οποία είναι πάντα θετική. Στην περίπτωση μας λοιπόν, ο λογάριθμος του γινομένου των επιμέρους αποκρίσεων πλάτους $H_1(e^{j\omega}), H_2(e^{j\omega})$ των συστημάτων σε σειρά θα μετατραπεί σε άθροισμα των λογαρίθμων των αποκρίσεων πλάτους, δηλ.

$$\log_{10} |H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})| = \log_{10} |H_1(e^{j\omega})| + \log_{10} |H_2(e^{j\omega})| \quad (16.265)$$

με τη βάση του λογαρίθμου να είναι ο αριθμός 10. Η παραπάνω πράξη στις αποκρίσεις πλάτους έχει πολλαπλά οφέλη, για τους παρακάτω λόγους:

- Η μέτρηση της έντασης των ηχητικών σημάτων μπορεί να γίνει σε μια κλίμακα που μετρείται σε decibel - dB. Η κλίμακα αυτή είναι λογαριθμική, καθώς προέρχεται από τη μη-γραμμική συμπεριφορά της ακοής μας - για την ακρίβεια, ακούμε σε μια κλίμακα η οποία προσεγγίζεται πολύ καλά από μια λογαριθμική συνάρτηση.
- Ο λογάριθμος αντιστοιχίζει τους πόλους σε τιμές απόκρισης πλάτους ίσες με $+\infty$ και τα μηδενικά σε τιμές ίσες με $-\infty$, διατηρώντας έτσι τη συμπεριφορά της απόκρισης.
- Ο λογάριθμος επιτρέπει μεγαλύτερη ευκρίνεια στη λεπτομέρεια της απόκρισης πλάτους για μικρές τιμές της. Για παράδειγμα, ο λογάριθμος του 100 είναι ίσος με 2, ενώ ο λογάριθμος του 0.01 είναι ίσος με -2. Βλέπετε ότι πολύ μεγάλη έκταση τιμών μπορεί να συμπεριστεί σε μια διαφορετική κλίμακα όπου ευνοούνται μικρές τιμές της γραμμικής κλίμακας - οι οποίες όμως παίζουν σημαντικό ρόλο - και γίνονται ορατότερες σε μια γραφική αναπαράσταση.



Σχήμα 16.20: (α) Συνεισφορά όρων στην απόκριση πλάτους, (β) συνεισφορά όρων στην απόκριση φάσης, (γ) συνεισφορά όρων στην καθυστέρηση ομάδας.

- Η εύρεση της συνολικής απόκρισης πλάτους για πολλά συστήματα σε σειρά δίνεται απλά ως το άθροισμα των λογαριθμικών αποκρίσεων πλάτους των επιμέρους συστημάτων.
- Η εύρεση της απόκρισης πλάτους του αντιστρόφου συστήματος είναι απλά η αρνητική της απόκρισης πλάτους του αρχικού συστήματος, όταν αυτές εκφράζονται σε λογαριθμική κλίμακα.

Ελπίζοντας ότι πειστήκατε για τη χρησιμότητα της λογαριθμικής αναπαράστασης, ας δούμε πως περιγράφει την απόκριση πλάτους ενός συστήματος. Η λογαριθμική απόκριση πλάτους δίνεται ως

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \left[|A| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - a_k e^{-j\omega}|} \right] \quad (16.266)$$

$$= 20 \log_{10} |A| + 20 \log_{10} \prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}| + 20 \log_{10} \prod_{k=1}^N \frac{1}{|1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (16.267)$$

$$= 20 \log_{10} |A| + 20 \log_{10} \prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}| - 20 \log_{10} \prod_{k=1}^N |1 - a_k e^{-j\omega}| \quad (16.268)$$

$$= 20 \log_{10} |A| + \sum_{k=1}^M 20 \log_{10} |1 - b_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \log_{10} |1 - a_k e^{-j\omega}| \quad (16.269)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι οι συνεισφορές των πόλων και μηδενικών λειτουργούν αθροιστικά στη συνολική λογαριθμική απόκριση πλάτους.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.22:

Θεωρήστε το ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα $H(z)$ που έχει δυο συζυγείς πόλους στις θέσεις $z = 0.8e^{\pm j\pi/4}$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = -0.9$. Με άλλα λόγια, περιγράφεται ως

$$H(z) = \frac{1 + 0.9z^{-1}}{(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (16.270)$$

Αναλύστε αυτό και το αντίστροφό του το στο χώρο της συχνότητας.

Λύση:

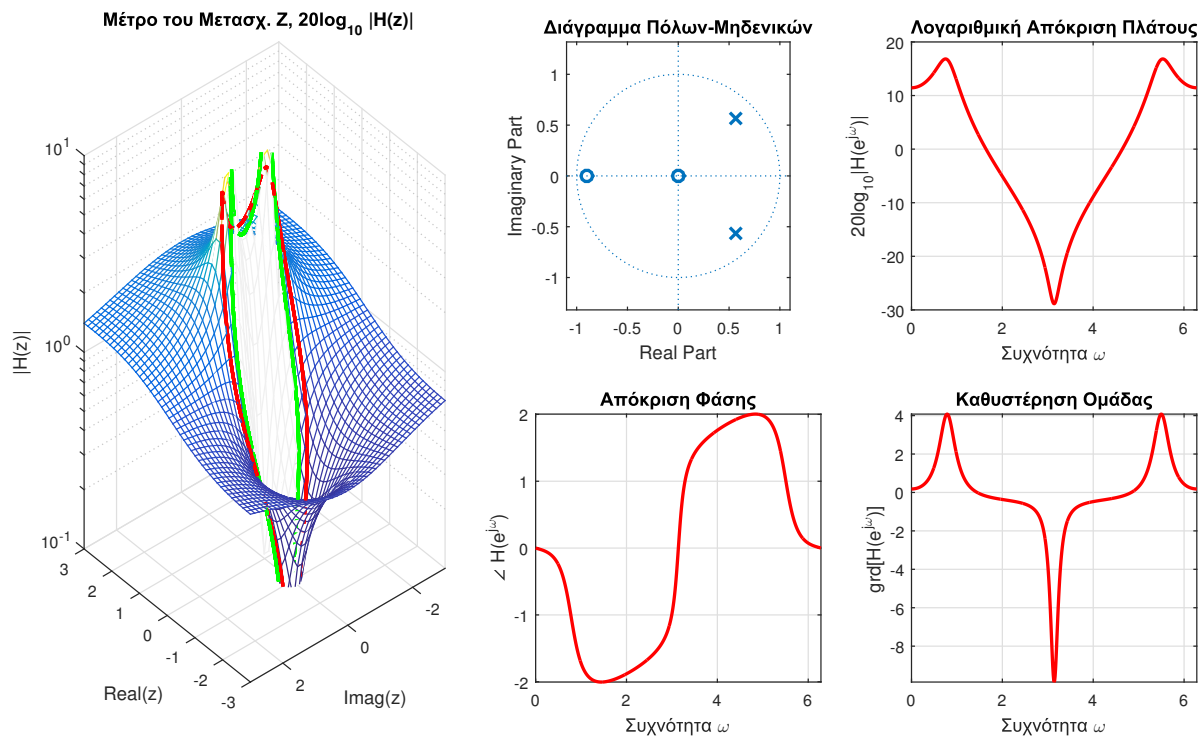
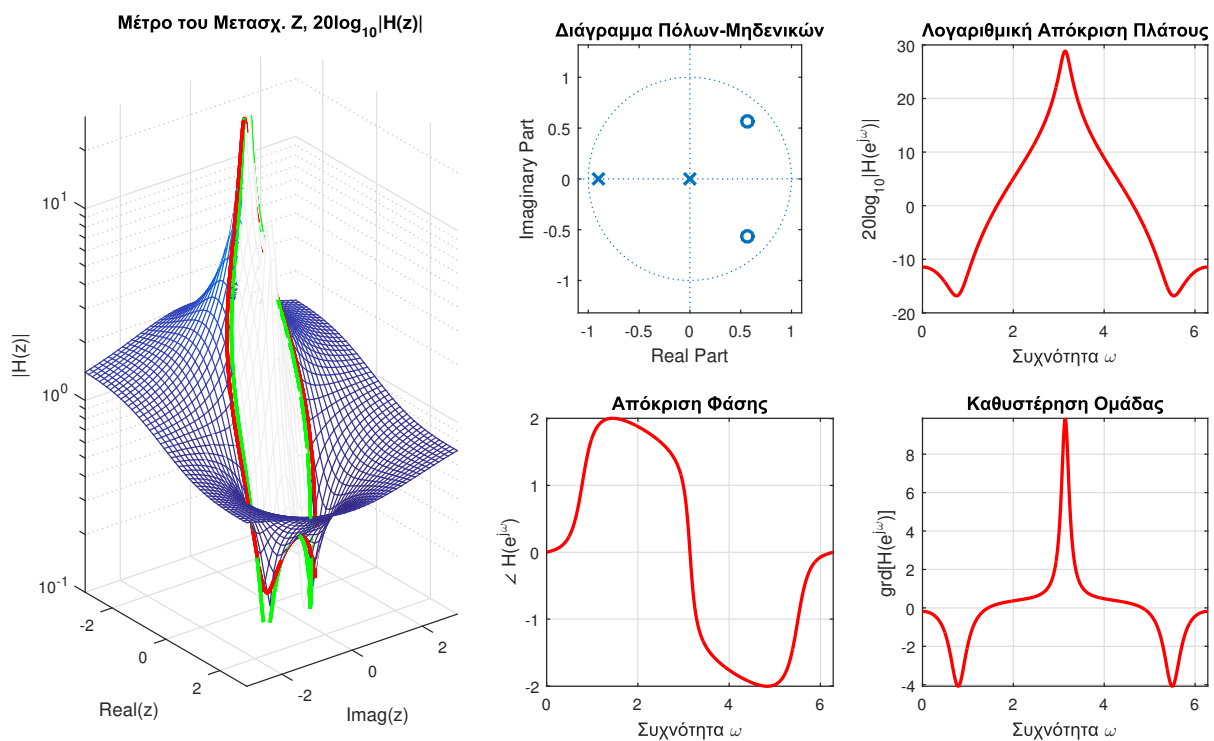
Αρχικά, καταλαβαίνουμε πως το σύστημα $H(z)$ έχει περιοχή σύγκλισης $|z| > 0.8$ λόγω της ιδιότητας της αιτιατότητας. Το αντίστροφό του, $H_i(z)$, έχοντας ως πόλους τα μηδενικά του συστήματος $H(z)$ και ως μηδενικά τους πόλους του, θα πρέπει να ικανοποιεί την απαίτηση

$$R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset \quad (16.271)$$

Έτσι λοιπόν θα έχει περιοχή σύγκλισης $|z| > 0.9$, αν ζητούμε να είναι κι αυτό αιτιατό και ευσταθές, ειδικά μάλιστα να έχει περιοχή σύγκλισης $|z| < 0.9$. Η τελευταία είναι έγκυρη περιοχή σύγκλισης για το αντίστροφο σύστημα, απλώς το τελευταίο δεν είναι ευσταθές και αιτιατό. Λόγω της μεταξύ τους αντίστροφης σχέσης, περιμένουμε ότι η λογαριθμική απόκριση πλάτους, η απόκριση φάσης, και η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος $H(z)$ θα είναι οι αρνητικές των αντίστοιχων του αντίστροφου συστήματος, $H_i(z)$. Εσείς μπορείτε (εξάσκηση!) να βρείτε με λεπτομέρεια τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και καθυστέρησης ομάδας μέσω διαγραμμάτων διανυσμάτων. Εδώ θα δείξουμε μόνο τα γραφήματα στα Σχήματα 16.21 και 16.22.

Παρατηρήστε ότι πράγματι όλες οι μετρικές που μας ενδιαφέρουν (αποκρίσεις πλάτους και φάσεις, καθυστέρηση ομάδας) είναι οι μεν αρνητικές των δε, και ότι αν τα δυο συστήματα τοποθετηθούν σε σειρά, πράγματι το αντίστροφο σύστημα θα ακυρώσει την επίδραση του αρχικού συστήματος σε κάθε συνιστώσα μιας πιθανής εισόδου (πλάτος, φάση). Φυσικά, το τελευταίο ισχύει ανεξαρτήτως της μορφής της απόκρισης πλάτους (γραμμική ή λογαριθμική).

Συνοψίζοντας, όλη η συζήτηση αυτής της παραγράφου μπορεί να καταγραφεί επιγραμματικά σε τρία σημεία:

Σχήμα 16.21: Σύστημα $H(z)$ Παραδείγματος 16.22.Σχήμα 16.22: Σύστημα $H_i(z)$ Παραδείγματος 16.22

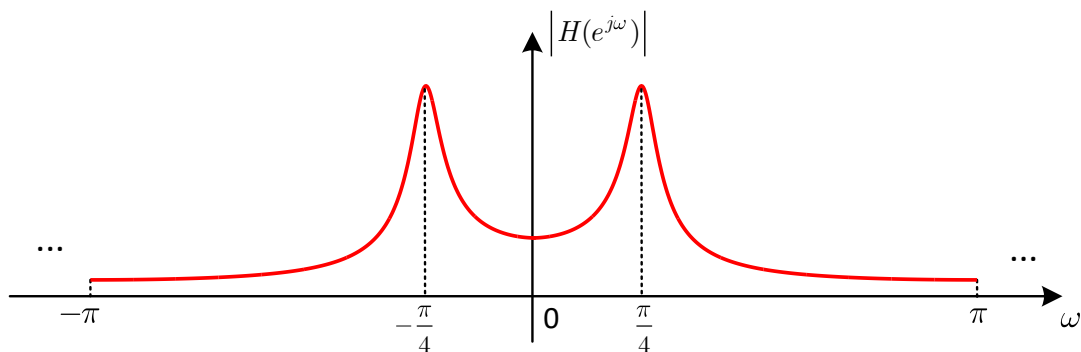
Πόλοι-μηδενικά και Μετασχ. Fourier

- Υποθέτοντας ότι διατρέχουμε το μοναδιαίο κύκλο αριστερόστροφα, όταν ένας πόλος $z = re^{j\theta}$ βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο και $\omega \rightarrow \theta - \epsilon$, η απόκριση πλάτους αυξάνεται γρήγορα. Αντίθετα, όταν $\omega \rightarrow \theta + \epsilon$, η απόκριση πλάτους φθίνει γρήγορα. Η απόκριση φάσης φθίνει γρήγορα γύρω από τη θέση του πόλου, με σημείο καμπής της απόκρισης φάσης τη συχνότητα του πόλου. Τα ακριβώς όμοια συμβαίνουν αν ο πόλος δε βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, με τη μόνη διαφορά ότι οι μεταβολές γύρω από τον πόλο είναι πιο ομαλές.
- Όμοια, όταν ένα μηδενικό $z = re^{j\theta}$ βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο και $\omega \rightarrow \theta - \epsilon$, η απόκριση πλάτους μειώνεται απότομα αλλά με σχετικά σταθερή κλίση, ενώ όταν $\omega \rightarrow \theta + \epsilon$, η απόκριση πλάτους αυξάνεται απότομα αλλά με σχετικά σταθερή κλίση. Η απόκριση φάσης αυξάνει γρήγορα γύρω από τη θέση του μηδενικού, με σημείο καμπής της απόκρισης φάσης τη συχνότητα του μηδενικού. Τα ακριβώς όμοια συμβαίνουν αν το μηδενικό δε βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, με τη μόνη διαφορά ότι οι μεταβολές γύρω από το μηδενικό είναι πιο ομαλές.
- Επειδή η καθυστέρηση ομάδας είναι η αρνητική παράγωγος της απόκρισης φάσης, η καθυστέρηση ομάδας είναι μεγάλη και θετική κοντά σε έναν πόλο, και μεγάλη και αρνητική κοντά σε ένα μηδενικό, όταν αυτά βρίσκονται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο. Μικρές και θετικές και μικρές και αρνητικές γίνονται αντίστοιχα όταν πόλος και μηδενικό δε βρίσκονται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο.

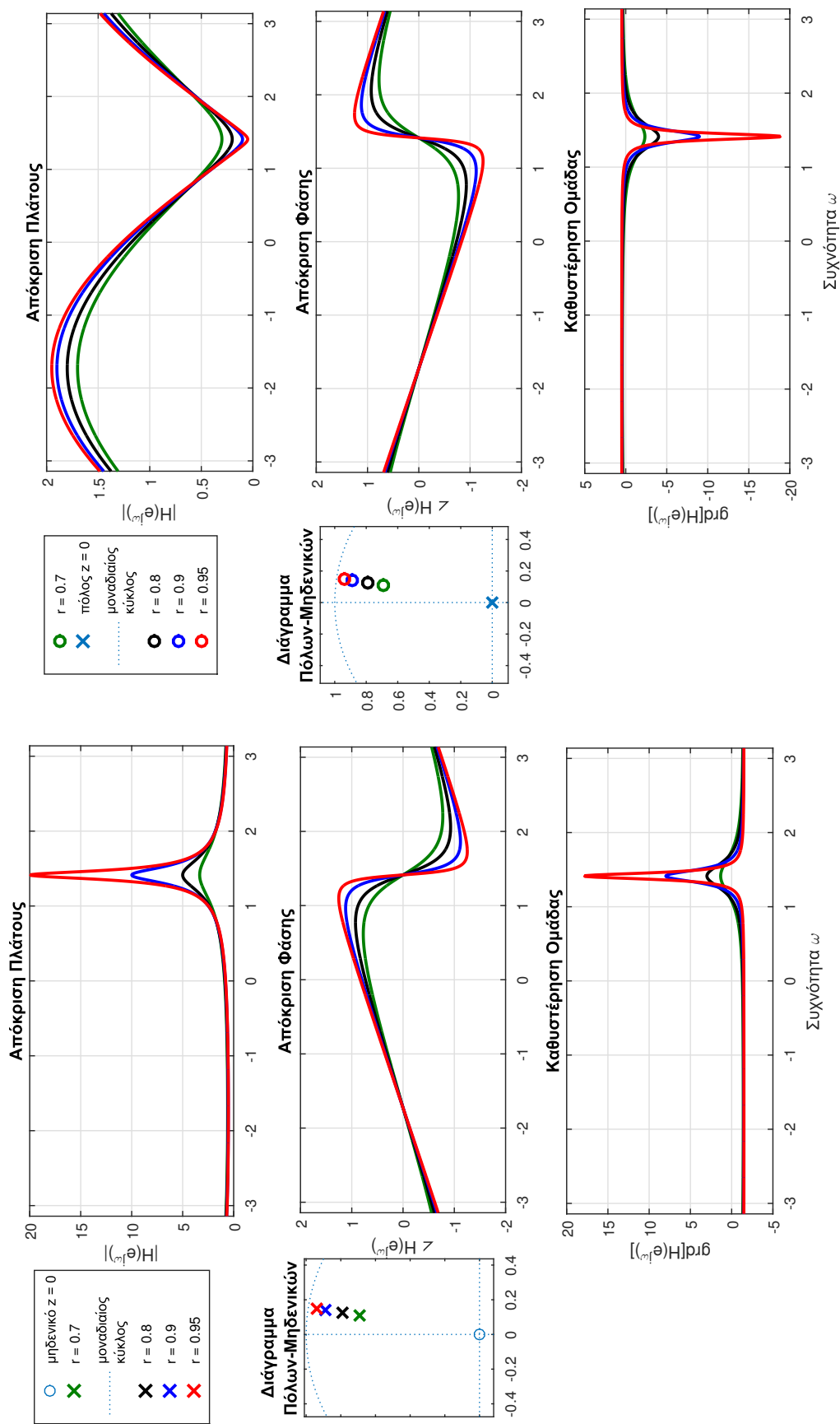
Οι παραπάνω παρατηρήσεις ήταν αρκετά ποιοτικές αλλά μπορείτε να τις επιβεβαιώσετε στο Σχήμα 16.25.

16.6 Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

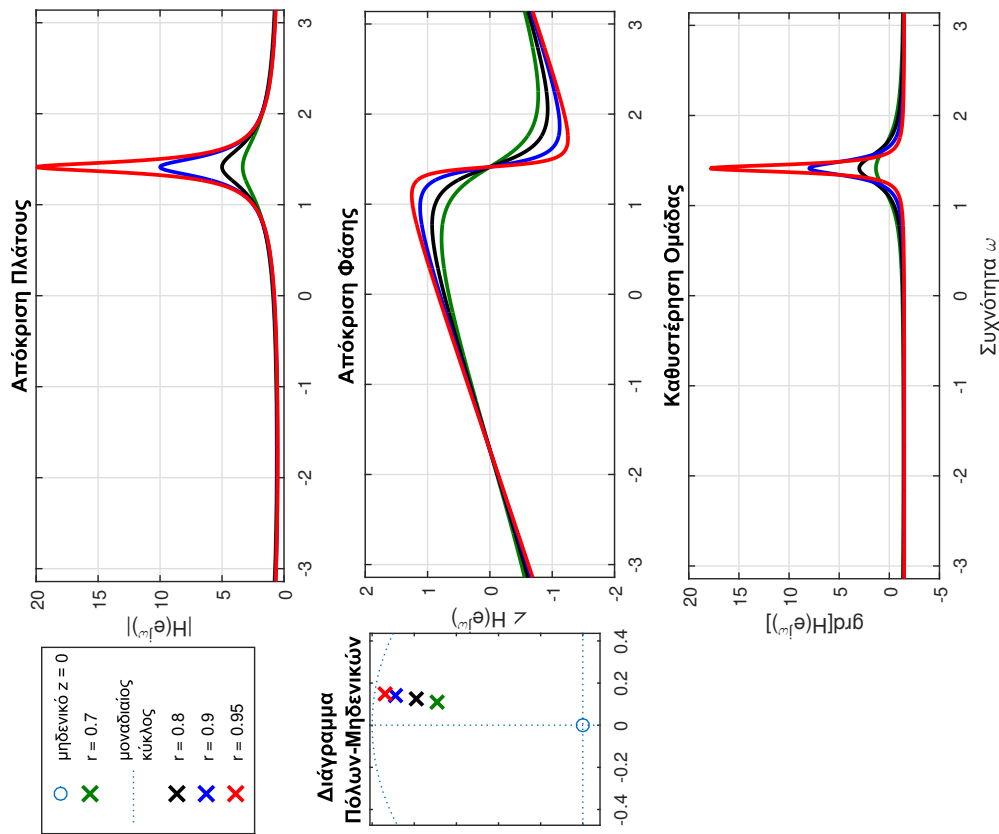
Μετά από όλη αυτή τη συζήτηση περί φασμάτων πλάτους και φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος, θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί: “υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ απόκρισης πλάτους και απόκρισης φάσης; Μπορεί να βρεθεί το ένα από το άλλο, μονοσήμαντα; Κι αν ναι, πότε;” Κατ’ αρχάς πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι οι ερωτήσεις αυτές είναι ενδιαφέρουσες! Έπειτα, ας προσπαθήσουμε να μελετήσουμε αν κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί – η απάντηση θα έρθει στο τέλος της συζήτησης. Εν γένει, το φάσμα πλάτους δε μας δίνει κάποια πληροφορία για το φάσμα φάσης, και το αντίστροφο. Όμως, μιλώντας για ΓΧΑ συστήματα με ρητές συναρτήσεις μεταφοράς, αν γνωρίζουμε πόσους πόλους και πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα, καθώς και την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους επιλογές για την απόκριση φάσης. Όμοια ακριβώς, αν γνωρίζουμε πόσους πόλους και πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα, καθώς και την απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$, τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους επιλογές για την απόκριση πλάτους! Όμως, αν το σύστημα έχει έναν περιορισμό ο οποίος ονομάζεται **ελάχιστη φάση** - **minimum phase**, τότε μπορεί μονοσήμαντα να οριστεί η απόκριση φάσης από την απόκριση πλάτους, ενώ και η απόκριση φάσης μπορεί να ορίσει την απόκριση πλάτους σχεδόν μονοσήμαντα (με διαφορά μιας σταθεράς)! Ας δούμε αρχικά γιατί δεν μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους, με άλλα λόγια, πόσες πιθανές συναρτήσεις μεταφοράς υπάρχουν για μια δεδομένη απόκριση πλάτους. Η μελέτη μας θα γίνει μέσω διαγραμματών πόλων-μηδενικών, αφού στην ουσία μέσω της γνώσης αυτών ορίζεται (σχεδόν μονοσήμαντα) η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, τότε μπορούμε να βρούμε την απόκριση φάσης μονοσήμαντα. Έστω ότι μας δίνεται η απόκριση πλάτους του Σχήματος 16.26.



Σχήμα 16.26: Απόκριση Πλάτους ΓΧΑ Συστήματος.



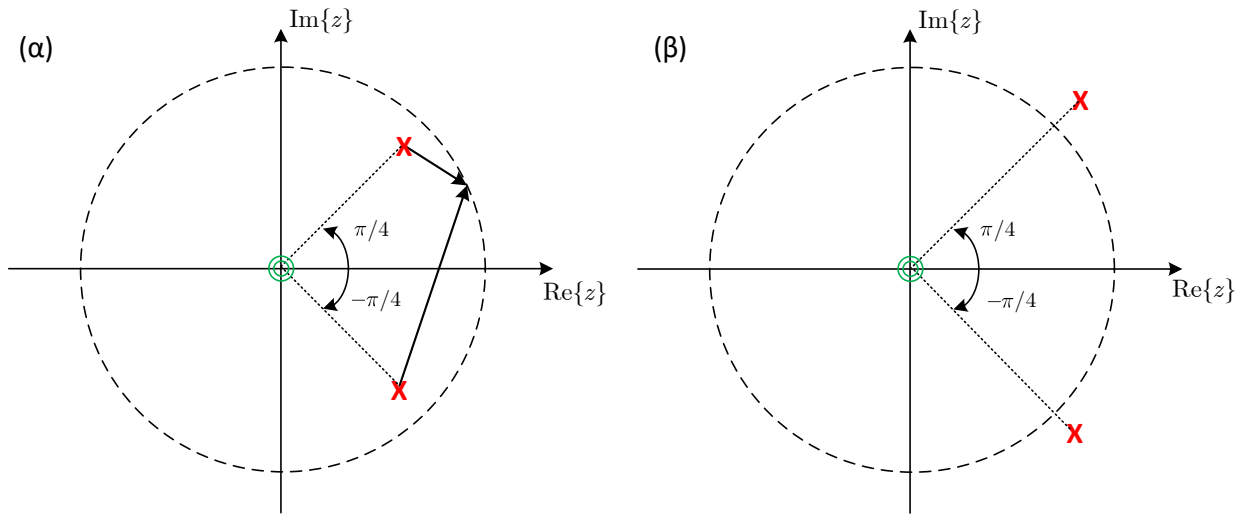
Σχήμα 16.23: Ανάλυση συστήματος με ένα μηδενικό.



Σχήμα 16.24: Ανάλυση συστήματος με έναν πόλο.

Σχήμα 16.25: Συμπεριφορά φασματικών χαρακτηριστικών σε σχέση με την απόσταση πόλου/μηδενικού από το μοναδιαίο κύκλο.

Ας δούμε τα διαγράμματα διανυσμάτων του Σχήματος 16.27. Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δοθείσα



Σχήμα 16.27: Διαγράμματα διανυσμάτων.

απόκριση πλάτους προέρχεται από τη συνάρτηση μεταφοράς του Σχήματος 16.27(α), καθώς αυτή περιλαμβάνει δυο συζυγείς πόλους στις γωνίες $\omega = \pm\pi/4$, και η ακτίνα των πόλων είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο. Έτσι, θα κατέληγε ότι η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H_1(z) = \frac{A}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1})} \quad (16.272)$$

με $z_1 = \rho e^{j\pi/4}$. Η σταθερά A του αριθμητή θα προέκυπτε εύκολα αφού γνωρίζουμε την απόκριση πλάτους. Κάποιος όμως θα μπορούσε να εκφράσει το ενδεχόμενο η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς να δίνεται από τη σχέση

$$H_2(z) = \frac{A}{(z^{-1} - z_1)(z^{-1} - z_1^*)} \quad (16.273)$$

Αν σχεδιάσουμε τους πόλους της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς θα πάρουμε το διάγραμμα του Σχήματος 16.27(β). Παρατηρήστε ότι η μόνη διαφορά των δυο διαγραμμάτων έγκειται στο γεγονός ότι οι πόλοι του δεύτερου έχουν “καθρεπτιστεί” εκτός του μοναδιαίου κύκλου στις περίφημες συζυγείς αμοιβαίες - *conjugate reciprocal* θέσεις τους. Ένας πόλος στη θέση $z = a$ έχει ως αμοιβαία θέση του την $z = 1/a^*$, με $a \in \mathbb{C}$. Επιβεβαιώστε ότι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $H_2(z)$ είναι πράγματι οι αμοιβαία πόλοι αυτών της συνάρτησης μεταφοράς $H_1(z)$. Παρατηρήστε επίσης ότι η αμοιβαία θέση βρίσκεται υπό την ίδια γωνία με την αρχική θέση του εκάστοτε πόλου. Άρα πράγματι η απόκριση πλάτους του παραπάνω συστήματος θα έχει μέγιστα στις δοθείσες συχνότητες, δηλ. στις $\omega = \pm\pi/4$. Μένει να απαντηθεί αν το πλάτος στις συχνότητες αυτές αλλάζει ή όχι με τη μεταφορά των πόλων στις αμοιβαίες θέσεις εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Ας δούμε τι συνεισφέρει στην απόκριση πλάτους ένας εκ των δυο όρων του παρονομαστή σε σχέση με τον όρο που περιλαμβάνει το συζυγή αμοιβαίο πόλο του. Έστω

$$p(z) = \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} \Rightarrow |p(e^{j\omega})| = |p(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{|1 - z_1 e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_1|} \quad (16.274)$$

Για τον όρο με τον συζυγή αμοιβαίο πόλο του, θα είναι

$$p_r(z) = \frac{1}{z^{-1} - z_1^*} \Rightarrow |p_r(e^{j\omega})| = |p_r(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{|e^{-j\omega} - z_1^*|} \quad (16.275)$$

Εξετάστε τις Σχέσεις (16.274, 16.275) και παρατηρήστε ότι είναι ίσες, καθώς οι ποσότητες εντός του μέτρου στους παρονομαστές είναι συζυγείς, και ως εκ τούτου έχουν το ίδιο μέτρο! Αυτό δηλώνει ξεκάθαρα ότι ένας όρος της μορφής

$$1 - z_1 z^{-1} \quad (16.276)$$

έχει την ίδια επίδραση στην απόκριση πλάτους με έναν όρο της μορφής

$$z^{-1} - z_1^* \quad (16.277)$$

δηλ.

$$|1 - z_1 z^{-1}| \Big|_{z=e^{j\omega}} = |z^{-1} - z_1^*| \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (16.278)$$

Ως εκ τούτου, τα δυο παραπάνω συστήματα $H_1(z)$ και $H_2(z)$ έχουν την ίδια ακριβώς απόκριση πλάτους! Με το ίδιο σκεπτικό, αν “καθρεπτίσουμε” μόνο τον έναν από τους δυο πόλους κάθε φορά, μπορούμε να ορίσουμε ακόμη δυο συστήματα, έστω $H_3(z)$ και $H_4(z)$, τα οποία θα έχουν έναν πόλο εντός του μοναδιαίου κύκλου κι έναν εκτός αυτού σε συζυγή αμοιβαία θέση, και τα συστήματα αυτά θα έχουν την ίδια απόκριση πλάτους με τη δοθείσα! Πέραν πάσης αμφιβολίας λοιπόν, η γνώση της απόκρισης πλάτους και του πλήθους των πόλων-μηδενικών δεν μας εξασφαλίζει μονοσήμαντη αντιστοίχιση της απόκρισης πλάτους στη συνάρτηση μεταφοράς¹. Δε θα πρέπει να σας κάνει εντύπωση όμως ότι η απόκριση φάσης στα τέσσερα αυτά συστήματα είναι διαφορετική για το καθένα.

Το ερώτημα που τίθεται πλέον μετατρέπεται στο εξής: “Τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξαγωγήμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους;” Η απάντηση είναι τελικά αρκετά απλή: χρειάζεται να περιορίσουμε τις επιλογές μας στις θέσεις των πόλων-μηδενικών. Αν στο παραπάνω παράδειγμα γνωρίζαμε ότι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, η απάντησή μας για τη συνάρτηση μεταφοράς θα ήταν μονοσήμαντη: το σύστημα $H_1(z)$ θα ήταν το ζητούμενο. Στη γενικότερη περίπτωση ύπαρξης πόλων και μηδενικών, μια μονοσήμαντη αντιστοίχιση υπάρχει αν γνωρίζουμε την ακριβή θέση των πόλων και των μηδενικών. Για την ειδική και πολύ χρήσιμη στην πράξη περίπτωση που θέλουμε το σύστημά μας να είναι ευσταθές και αιτιατό και να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, τότε υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοίχιση μεταξύ απόκρισης πλάτους και συνάρτησης μεταφοράς: αυτό εξασφαλίζεται μόνο αν όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Τέτοια συστήματα ονομάζονται **συστήματα ελάχιστης φάσης - minimum phase systems**, για λόγους που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Ας θέσουμε μια τελευταία σκέψη στους προβληματισμούς μας. Σίγουρα θα σκεφτήκατε ότι – τουλάχιστον στο παραπάνω παράδειγμα – η γνώση του αριθμού των πόλων δε μας ήταν απαραίτητη. Αν υπήρχε κάποιος τρίτος πόλος τότε θα έκανε με κάποιο τρόπο “αισθητή” την παρουσία του στην απόκριση πλάτους. Στο Σχήμα 16.26 δε φαίνεται κάποιο μέγιστο πέραν αυτών στις συχνότητες $\omega = \pm\pi/4$. Κι όμως, μπορεί κανείς να προσθέσει άπειρους πόλους και μηδενικά στο σύστημα χωρίς να αλλοιώσει καθόλου την παρατηρηθείσα απόκριση πλάτους! Παρατηρήστε τι θα συμβεί αν πολλαπλασιάσουμε καθένα από τα τέσσερα συστήματα που βρήκαμε με έναν όρο της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (16.279)$$

Για να δούμε τι συνεισφέρει αυτός ο όρος στην απόκριση πλάτους.

$$\left| \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \right|_{z=e^{j\omega}} = \left| \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| \frac{e^{-j\omega}(1 - a^*e^{j\omega})}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \frac{|e^{-j\omega}| |(1 - a^*e^{j\omega})|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{|1 - a^*e^{j\omega}|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = 1 \quad (16.280)$$

ως ηλίκο μέτρου συζυγών παραστάσεων! Με έκπληξη λοιπόν παρατηρούμε ότι όροι της μορφής της Σχέσης (16.279) δε μεταβάλλουν καθόλου την απόκριση πλάτους, ενώ προσθέτουν πόλους και μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο – σε πολύ ειδικές θέσεις όμως: πράγματι, ένας τέτοιος όρος προσθέτει έναν πόλο στη θέση $z = a$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = 1/a^*$, οπότε μεταβάλλει το συνολικό αριθμό των πόλων-μηδενικών αλλά ως συζυγές αμοιβαίο ζεύγος πόλου-μηδενικού δεν επηρεάζει στο ελάχιστο την απόκριση πλάτους. Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι αν δε γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό πόλων και μηδενικών ενός συστήματος, τότε υπάρχουν άπειρες πιθανές επιλογές για τη συνάρτηση μεταφοράς, καθώς πάντα θα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν ή περισσότερους όρους σαν αυτόν της Σχέσης (16.279) με το σύστημά μας, χωρίς να αλλοιώνουμε στο ελάχιστο την απόκριση πλάτους – μπορείτε όμως να υποθέσετε ότι αλλοιώνεται η απόκριση φάσης! Τέτοιοι όροι είναι τόσο σημαντικοί που αποτελούν ξεχωριστά συστήματα τα οποία δε θα μπορούσαν να μην έχουν το δικό τους όνομα: ονομάζονται **συστήματα all-pass**, και θα τα μελετήσουμε σύντομα.

Πολλές φορές όμως η μελέτη της απόκρισης πλάτους δεν είναι βολική, λόγω της μη γραμμικής μορφής της (ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας), ενώ πολλές φορές οι προδιαγραφές της απόκρισης πλάτους ενός συστήματος δίνονται με βάση το τετράγωνο της απόκρισης πλάτους. Στην προσπάθειά μας να έχουμε πιο “ελκυστικά” μαθηματικά, μπορούμε να μελετήσουμε και το τετράγωνο της απόκρισης πλάτους, $|H(e^{j\omega})|^2$. Ας εκφράσουμε το $|H(e^{j\omega})|^2$ ως

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (16.281)$$

Αυτό σημαίνει ότι το τετράγωνο της απόκρισης πλάτους είναι η εκτίμηση επάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μετασχηματισμού Z

$$M(z) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - b_k z^{-1})(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - a_k z^{-1})(1 - a_k^* z)} \quad (16.282)$$

¹ Αν και τουλάχιστον μας εξασφαλίζει ότι οι επιλογές μας είναι πεπερασμένου πλήθους.

αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $H(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, όπως την έχουμε δει τόσες φορές, δηλ.

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})} \quad (16.283)$$

Άρα

$$H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - b_k^* z)}{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - a_k^* z)} \quad (16.284)$$

Έτσι,

$$|H(e^{j\omega})|^2 = M(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M 1 + |b_k|^2 - 2|b_k| \cos(\omega - \angle b_k)}{\prod_{k=1}^N 1 + |c_k|^2 - 2|c_k| \cos(\omega - \angle c_k)} \quad (16.285)$$

Οπότε αν μας δοθεί η συνάρτηση $|H(e^{j\omega})|^2$, και αντικαταστήσουμε $z = e^{j\omega}$, μπορούμε να βρούμε το γινόμενο $M(z) = H(z)H^*(1/z^*)$. Από αυτό θέλουμε να μάθουμε όσα μπορούμε περισσότερα για το σύστημα $H(z)$. Παρατηρώντας τη Σχέση (16.282), βλέπουμε ότι για κάθε πόλο a_k του συστήματος $H(z)$, έχουμε έναν πόλο a_k κι έναν πόλο $(a_k^*)^{-1}$ στο γινόμενο $M(z)$. Αντίστοιχα, βλέπουμε ότι για κάθε μηδενικό b_k του συστήματος $H(z)$, έχουμε ένα μηδενικό b_k κι ένα μηδενικό $(b_k^*)^{-1}$ στο γινόμενο $M(z)$. Αυτό μας δείχνει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά “έρχονται” σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη. Υπενθυμίζεται ότι συζυγές αμοιβαίο θα λέμε το ζεύγος πόλων ή μηδενικών που τα στοιχεία του ζεύγους βρίσκονται σε θέσεις $z = re^{j\theta}$ το ένα και $z = \frac{1}{r}e^{j\theta}$ το άλλο. Παρατηρήστε ότι το ένα στοιχείο ενός αμοιβαίου συζυγούς ζεύγους σχετίζεται με το σύστημα $H(z)$, ενώ το άλλο με το σύστημα $H^*(1/z^*)$. Επιπλέον, αν το ένα στοιχείο του ζεύγους βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε το άλλο βρίσκεται εκτός (στην αμοιβαία συζυγή θέση)².

Αν υποθέσουμε ότι το $H(z)$ είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε όλοι οι πόλοι του θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Με αυτόν τον περιορισμό, μας είναι εύκολο να ξεχωρίσουμε τους πόλους του $H(z)$ από το $M(z)$. Όμως χωρίς να ξέρουμε τίποτα για τα μηδενικά, δεν μπορούμε να βρούμε τα μηδενικά του $H(z)$ από το $M(z)$, κι έτσι να ορίσουμε μονοσήμαντα το $H(z)$.

Ας το δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.23:

Έστω ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα μας δίνεται ότι

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (16.286)$$

Βρείτε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

Λύση:

Θα είναι

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{j\omega}\right)} \quad (16.287)$$

και άρα

$$|H(z)|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)} \quad (16.288)$$

Οι πόλοι της παραπάνω συνάρτησης δίνονται ως

$$\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{2}e^{j\pi/4} = 0 \quad (16.289)$$

δηλ.

$$z_{p1} = 2e^{j\pi/4}, \quad z_{p2} = \frac{1}{2}e^{j\pi/4} \quad (16.290)$$

Προφανώς το ευσταθές και αιτιατό σύστημα είναι αυτό που περιλαμβάνει τον πόλο z_{p2} , καθώς αυτός βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

²Εκτός κι αν βρίσκονται στην ίδια θέση, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Φυσικά, τα παραπάνω μπορούσαμε να τα εξάγουμε απευθείας συγκρίνοντας τις Σχέσεις (16.285) και (16.286). Από εκεί βλέπουμε ότι

$$|c_1| = \frac{1}{2}, \quad \angle c_1 = \frac{\pi}{4} \quad (16.291)$$

Άρα το ζητούμενο σύστημα πράγματι περιλαμβάνει τον πόλο $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$. ■

Ας περάσουμε τώρα στη μελέτη των συστημάτων all-pass, αφού φαίνεται πως η σημασία τους είναι καθοριστική.

16.6.1 All-pass Συστήματα

Ένα all-pass σύστημα (όπως προδίδει και το όνομά του ☺) έχει συχνотική απόκριση με σταθερό πλάτος, δηλ.

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \forall \omega \quad (16.292)$$

δηλ. ένα all-pass σύστημα αφήνει αμετάβλητο το πλάτος του σήματος που δέχεται στην είσοδό του. Αυτή η ιδιότητα επιβάλλει τον περιορισμό στους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς να βρίσκονται σε συζυγή αμοιβαία ζευγή³:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \quad (16.293)$$

Έτσι, αν το $H(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = a_k$, πρέπει να έχει κι ένα μηδενικό στη συζυγή αμοιβαία θέση $z = 1/a_k^*$. Αν η χρονική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική, οι μιγαδικές ρίζες στην παραπάνω σχέση έρχονται σε συζυγή ζευγή, και αν συνδυάσουμε αυτά τα ζευγή για να πάρουμε παράγοντες δευτερης τάξης, θα έχουμε

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1} - b_k}{1 - b_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{(z^{-1} - d_k^*)(z^{-1} - d_k)}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \quad (16.294)$$

με συντελεστές b_k πραγματικούς και d_k μιγαδικούς, και τη σταθερά A πραγματικό αριθμό. Αν ένα all-pass σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό, έχει προφανώς όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου, $|a_k| < 1, \forall k$.

Η απόκριση φάσης για ένα τέτοιο φίλτρο πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$\angle \left[\frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right] = \angle \left[\frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right] = -\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (16.295)$$

ενώ για ένα δευτέρας τάξης με πόλους στις θέσεις $z = re^{j\theta}$ και $z = re^{-j\theta}$, είναι (δείτε το στην Άσκηση 16.ΞΕ)

$$\angle \left[\frac{(e^{-j\omega} - re^{-j\theta})(e^{-j\omega} - re^{j\theta})}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})} \right] = -2\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \quad (16.296)$$

Ένα πραγματικό, ευσταθές, και αιτιατό all-pass σύστημα έχει καθυστέρηση ομάδας που είναι θετική για κάθε ω . Αυτό γιατί για ένα πραγματικό πρώτης τάξης all-pass σύστημα της μορφής

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (16.297)$$

με $a = re^{j\theta}$, $|r| < 1$, η καθυστέρηση ομάδας δίνεται ως (δείτε το αναλυτικά στην Άσκηση 16.16)

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (16.298)$$

Έτσι, για $0 \leq r < 1$, συνεπάγεται ότι $\text{grd}[H(e^{j\omega})] > 0$. Αυτό όμως μας δίνει μια πολύ σημαντική ιδιότητα των πραγματικών αιτιατών και ευσταθών συστημάτων all-pass: ότι η απόκριση φάσης είναι αρνητική. Ας το δείξουμε. Η απόκριση φάσης δίνεται ως

$$\angle[H_{ap}(e^{j\omega})] = - \int_0^\omega \text{grd}[H_{ap}(e^{j\phi})] d\phi + \angle[H_{ap}(e^{j0})] \quad (16.299)$$

³Σε καθολική ομοιότητα με τα αντίστοιχα συστήματα συνεχούς χρόνου του Κεφαλαίου 8!

για $0 \leq \omega \leq \pi$. Όμως μπορούμε να δείξουμε από τη Σχέση (16.294) ότι

$$H_{ap}(e^{j0}) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{1-b_k}{1-b_k} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{|1-d_k|^2}{|1-d_k|^2} = A \quad (16.300)$$

Άρα

$$\angle[H_{ap}(e^{j0})] = 0 \quad (16.301)$$

και έτσι, αφού

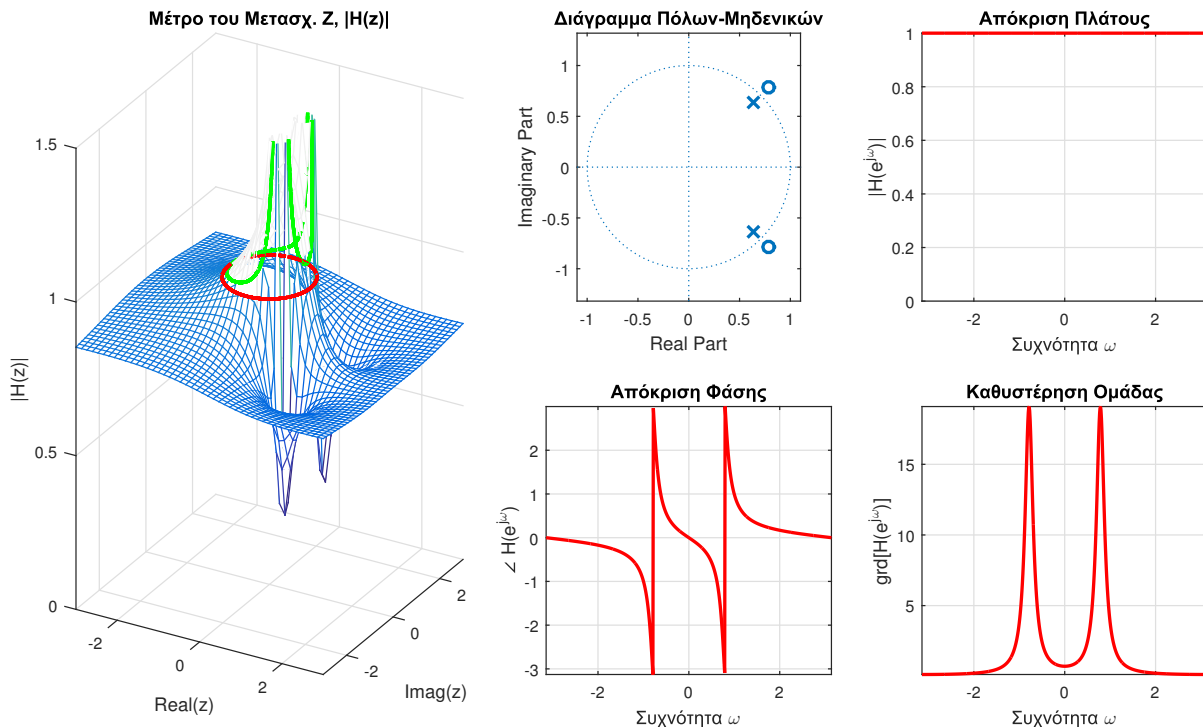
$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] > 0 \quad (16.302)$$

η Σχέση (16.299) δίνει

$$\angle[H_{ap}(e^{j\omega})] < 0 \quad (16.303)$$

για $0 \leq \omega \leq \pi$.

Πρέπει να έχετε καταλάβει ότι αφού τα all-pass συστήματα έχουν μοναδιαία (ή σταθερή) απόκριση πλάτους, η χρήση τους περιορίζεται στη μεταβολή της απόκρισης φάσης της εισόδου τους. Επειδή τα υψηλότερης τάξης all-pass συστήματα αποτελούνται από γινόμενα όρων πρώτης τάξης, η καθυστέρηση ομάδας ισούται με ένα άθροισμα καθυστερήσεων ομάδας όπως αυτής της Σχέσης (16.298). Το ίδιο και η απόκριση φάσης. Άρα εν γένει, ένα αιτιατό all-pass σύστημα έχει πάντα θετική καθυστέρηση ομάδας και αρνητική απόκριση φάσης, όπως μόλις δείξαμε. Η ιδιότητα αυτή είναι αρκετά σημαντική. Ένα παράδειγμα ευσταθούς και αιτιατού all-pass συστήματος δεύτερας τάξης φαίνεται στο Σχήμα 16.28, όπου ο πόλος βρίσκεται στη θέση $a = 0.9e^{j\pi/4}$, ενώ ο δεύτερος πόλος αποτελεί το συζυγή του πρώτου. Τα μηδενικά βρίσκονται στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις, δηλ. στις $(1/0.9)e^{\pm j\pi/4}$.



Σχήμα 16.28: Φασματικές αποκρίσεις ενός all-pass συστήματος.

Τα all-pass φίλτρα είναι χρήσιμα για εφαρμογές εξίσωσης καθυστέρησης ομάδας, για να αντισταθμίζουν τις μη-γραμμικότητες της φάσης σε διάφορες εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου). Επίσης, θα χρειαστούν για τη θεωρία των φίλτρων ελάχιστης φάσης - *minimum phase* που θα δούμε αμέσως. Τέλος, χρησιμοποιούνται για μετατροπή χαμηλοπερατών φίλτρων σε άλλα φίλτρα.

Ας δούμε ένα τελευταίο παράδειγμα πριν προχωρήσουμε.

Παράδειγμα 16.24:

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \alpha y[n-1] = \beta x[n] + x[n-1] \quad (16.304)$$

με $|\alpha| < 1$ και πραγματικό. Βρείτε την τιμή του β έτσι ώστε το σύστημα να είναι all-pass με μοναδιαίο πλάτος.

Λύση:

Εφαρμόζοντας μετασχ. Fourier και στα δυο μέλη της εξίσωσης, έχουμε

$$Y(e^{j\omega}) - \alpha Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \beta X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (16.305)$$

$$Y(e^{j\omega})(1 - \alpha e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})(\beta + e^{-j\omega}) \quad (16.306)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\beta + e^{-j\omega}}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (16.307)$$

Για να είναι η απόκριση πλάτους μοναδιαία πρέπει

$$|\beta + e^{-j\omega}| = |1 - \alpha e^{-j\omega}| \quad (16.308)$$

$$1 + \beta^2 + 2\beta \cos(\omega) = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega) \quad (16.309)$$

η οποία ισχύει μόνο για $\beta = -\alpha$.

16.6.2 Συστήματα Ελαχίστης Φάσης

Αφού λοιπόν μελετήσαμε τα all-pass συστήματα, ας επανέλθουμε στο πρότερο πρόβλημα της μελέτης της απόκρισης πλάτους μέσω των πόλων και των μηδενικών του συστήματος $M(z) = |H(z)|^2$. Βρήκαμε στην Παράγραφο 16.6 ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συναρτήσεων μεταφοράς $M(z)$ και $H(z)$, τουναντίον, υπάρχουν άπειρα συστήματα $H(z)$ με ίδια απόκριση πλάτους αλλά διαφορετική απόκριση φάσης που ικανοποιούν τις προδιαγραφές του συστήματος $M(z)$. Η κατάσταση γίνεται κάπως πιο “βατή” αν ξέρουμε τον αριθμό των πόλων και των μηδενικών του συστήματος, καθώς τότε οι πιθανές συναρτήσεις μεταφοράς $H(z)$ γίνονται πεπερασμένοι πλήθους.

Έστω ότι θεωρούμε ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς που έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο, δεν έχουν κάποιο περιορισμό λόγω της ευστάθειας ή της αιτιατότητας. Σε αρκετες εφαρμογές, χρειαζομαστε ένα σύστημα που να είναι ευσταθές και αιτιατό, αλλά να έχει ευσταθές και αιτιατό *αντίστροφο* σύστημα, $H_i(z)$. Αυτό απαιτεί, μια και τα μηδενικά του συστήματος $H(z)$ γίνονται πόλοι του αντιστρόφου, $H_i(z)$, να είναι και τα μηδενικά του συστήματος $H(z)$ εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Ένα τέτοιο σύστημα λοιπόν, που έχει και πόλους και μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, λέγεται **σύστημα ελάχιστης φάσης - minimum phase system**. Παρ’ ότι το όνομά του δεν προέρχεται από την κατανομή πόλων και μηδενικών, θα δούμε μερικές ιδιότητες της απόκρισης φάσης του που κάνουν πιο κατανοητή την ονομασία του.

16.6.3 Παραγοντοποίηση Συστημάτων σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

Ένα οποιοδήποτε σύστημα $H(z)$ μπορεί πάντα να παραγοντοποιηθεί ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, και ενός all-pass συστήματος, $H_{ap}(z)$:

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) \quad (16.310)$$

Για αυτήν την παραγοντοποίηση ισχύει ότι

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})| \quad (16.311)$$

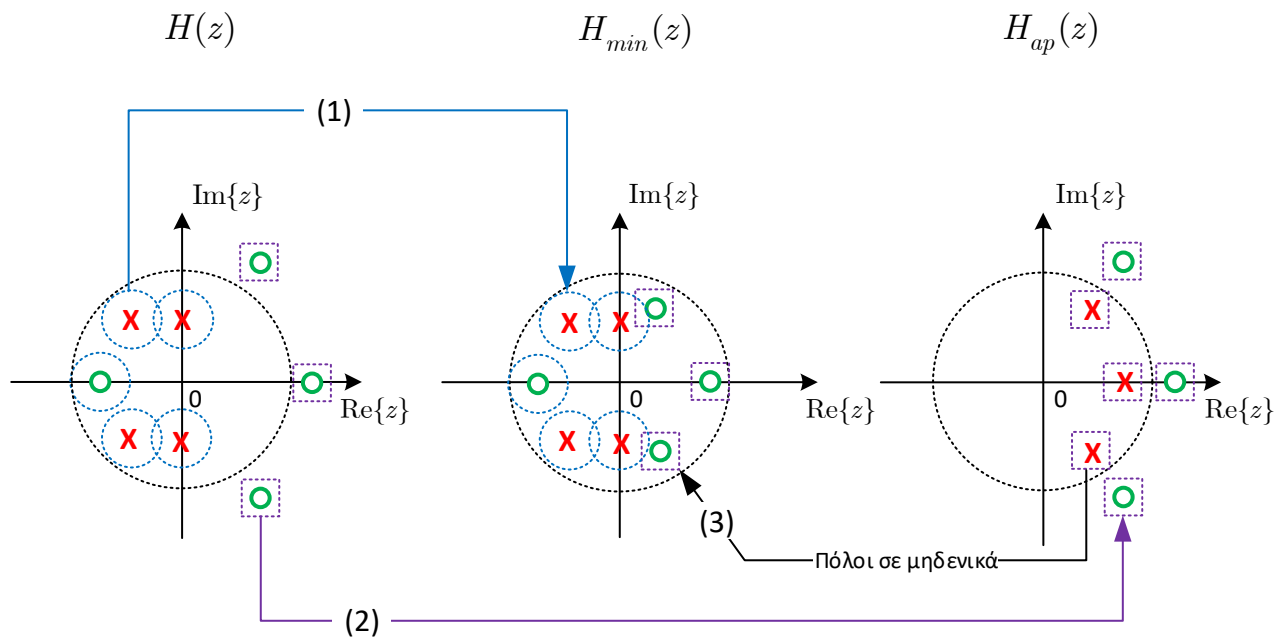
$$\angle[H(e^{j\omega})] = \angle[H_{min}(e^{j\omega})] + \angle[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (16.312)$$

Άρα βλέπουμε ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την ίδια απόκριση πλάτους με το μη-ελάχιστης φάσης σύστημα! Η διαδικασία παραγοντοποίησης έχει ως εξής:

Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.
2. Το all-pass συστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτρίζει το καταλλήλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.
3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

Σχηματικά, η παραγοντοποίηση σε ελάχιστης φάσης και all-pass φαίνεται στο Σχήμα 16.29, ενώ οι αριθμοί-βήματα πάνω σε κάθε βέλος αναλύονται στο παραπάνω πλαίσιο.



Σχήμα 16.29: Διάσπαση ευσταθούς και αιτιατού συστήματος $H(z)$ σε Ελάχιστης Φάσης και all-pass.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα που θα ξεκαθαρίσουν την παραπάνω διαδικασία.

Παράδειγμα 16.25:

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

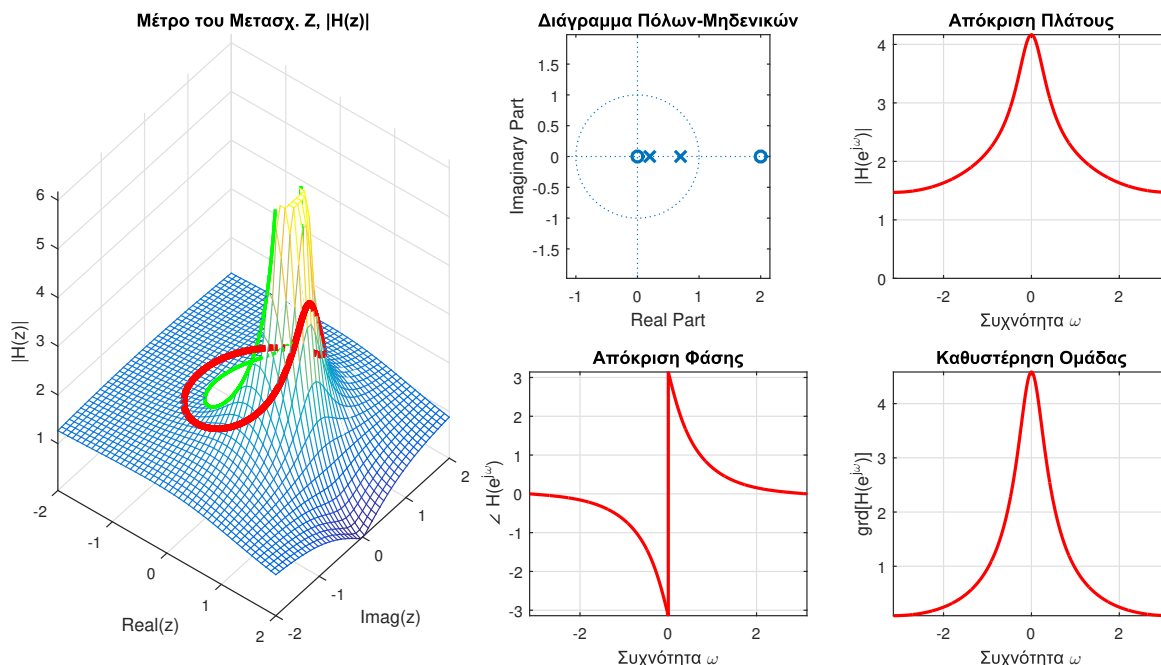
$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (16.313)$$

της οποίας τα χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχήμα 16.30.

Λύση:

Προφανώς τα μηδενικά του βρίσκονται⁴ στις θέσεις $z = 2$ και $z = 0$, ενώ οι πόλοι στις θέσεις $z = 0.2$ και $z = 0.7$.

⁴Πρέπει πλέον να μπορείτε να το βλέπετε χωρίς πράξεις!

Σχήμα 16.30: Σύστημα $H(z)$ Παραδείγματος 16.25.

Το μηδενικό στη θέση $z = 2$ είναι αυτό που κάνει το σύστημά μας μη-ελάχιστης φάσης. Αν το μετατρέψουμε στο συζυγές αμοιβαίο του εντός του μοναδιαίου κύκλου, το οποίο είναι το $z = 1/2$, θα έχουμε το σύστημα ελάχιστης φάσης ως

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (16.314)$$

Τώρα, για να αντικατοπτρίσουμε το μηδενικό στη θέση $z = 0.5$ πάλι έξω από το μοναδιαίο κύκλο στη θέση $z = 2$, χρησιμοποιούμε το all-pass σύστημα

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.315)$$

Όμως το παραπάνω all-pass σύστημα δεν είναι μοναδιαίου πλάτους, γιατί δεν είναι στην επιθυμητή μορφή, η οποία είναι

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (16.316)$$

Παραγοντοποιώντας κατάλληλα τον αριθμητή, έχουμε

$$H_{ap}(z) = -2 \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.317)$$

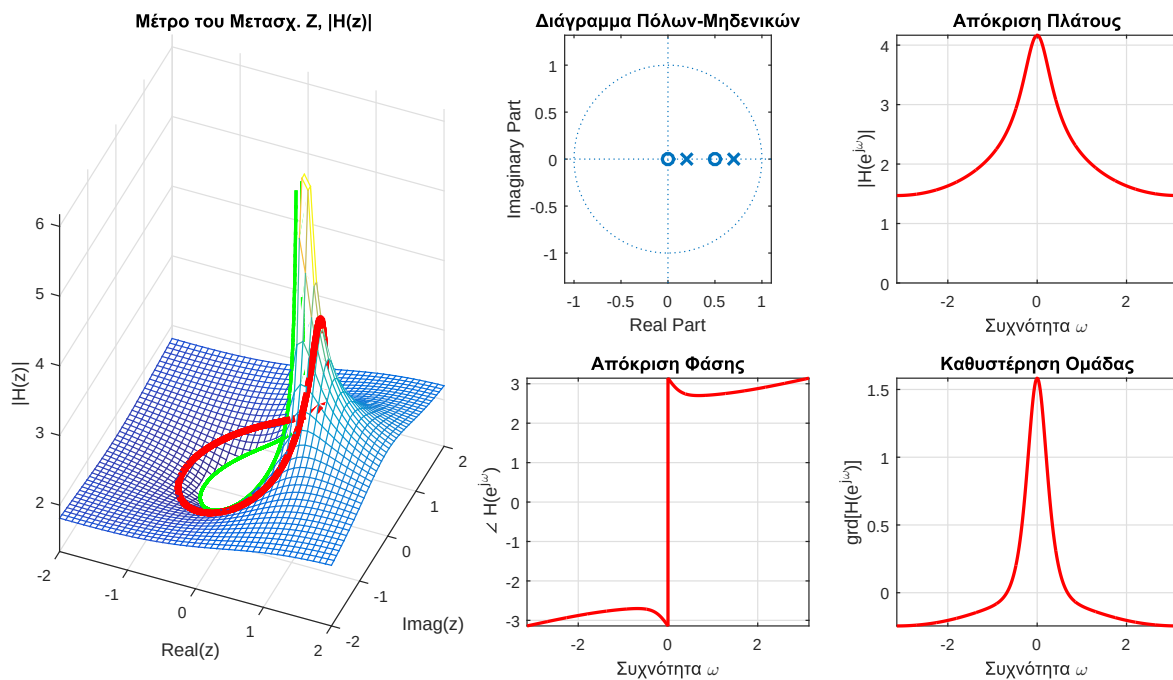
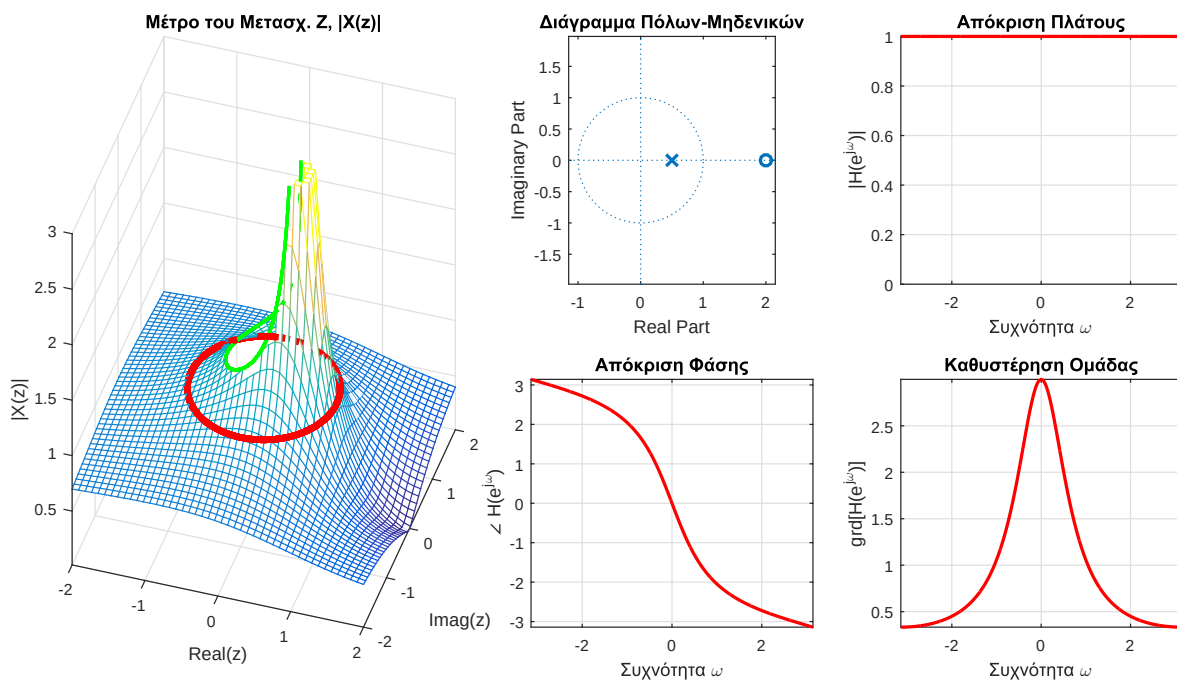
Άρα το all-pass σύστημα έχει μέτρο 2. Μεταφέροντας τη σταθερά -2 στο σύστημα ελάχιστης φάσης ώστε να μετατρέψουμε το all-pass σε μοναδιαίου πλάτους, θα έχουμε τελικά

$$H_{min}(z) = \frac{z^{-1} - 2}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (16.318)$$

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.319)$$

Παρατηρήστε πως το γινόμενο τους μας δίνει την αρχική συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Η παραγοντοποίηση φαίνεται στα Σχήματα 16.31, 16.32.

Παρατηρήστε ότι η απόκριση πλάτους, $|H(e^{j\omega})|$, του αρχικού συστήματος $H(z)$ είναι ίδια με την απόκριση πλάτους, $|H_{min}(e^{j\omega})|$, του συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$. Φυσικά, η απόκριση πλάτους του all-pass συστήματος είναι μοναδιαία, όπως αναμενόταν. Προσέξτε επίσης την καθυστέρηση ομάδας. Η καθυστέρηση ομάδας

Σχήμα 16.31: Σύστημα $H_{min}(z)$ Παραδείγματος 16.25.Σχήμα 16.32: Σύστημα $H_{ap}(z)$ Παραδείγματος 16.25

του συστήματος ελάχιστης φάσης είναι μικρότερη από την καθυστέρηση ομάδας του αρχικού συστήματος. Επίσης, προσέξτε ότι η καθυστέρηση ομάδας του αιτιατού και ευσταθούς all-pass συστήματος είναι θετική, όπως είχαμε δει νωρίτερα. Κρατήστε αυτές τις παρατηρήσεις, θα τις χρειαστούμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 16.26:

Έστω δυο ευσταθή και αιτιατά συστήματα

$$H_1(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (16.320)$$

$$H_2(z) = \frac{(1 + \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.321)$$

Παραγοντοποιήστε τα σε δυο συστήματα ελάχιστης φάσης και all-pass.

Λύση:

Η πρώτη συνάρτηση μεταφοράς, $H_1(z)$, έχει έναν πόλο εντός μοναδιαίου κύκλου, στη θέση $z = 0.5$ αλλά ένα μηδενικό στη θέση $z = -3$. Πρέπει να βρούμε το κατάλληλο all-pass σύστημα που θα πάρει αυτό το μηδενικό και θα έχει επίσης έναν πόλο στη συζυγή αμοιβαία θέση. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = 3 \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (16.322)$$

Οπότε το σύστημα ελάχιστης φάσης θα είναι

$$H_{min}(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (16.323)$$

και αν φέρουμε τη σταθερά 3 στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (16.324)$$

$$H_{min}(z) = 3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (16.325)$$

Για το $H_2(z)$ έχει δυο μιγαδικά μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου και έναν πραγματικό πόλο εντός του. Τα δυο μηδενικά θα είναι μέρος του all-pass συστήματος ενώ ο πόλος του minimum phase συστήματος. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 + \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (16.326)$$

$$= \frac{9}{4} \frac{(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (16.327)$$

Στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε τον πόλο του αρχικού συστήματος και τα μηδενικά που προσθέσαμε στο all-pass στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις:

$$H_{min}(z) = \frac{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.328)$$

και αν φέρουμε τη σταθερά 9/4 στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε τελικά

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (16.329)$$

$$H_{min}(z) = \frac{9}{4} \frac{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.330)$$

Παράδειγμα 16.27:

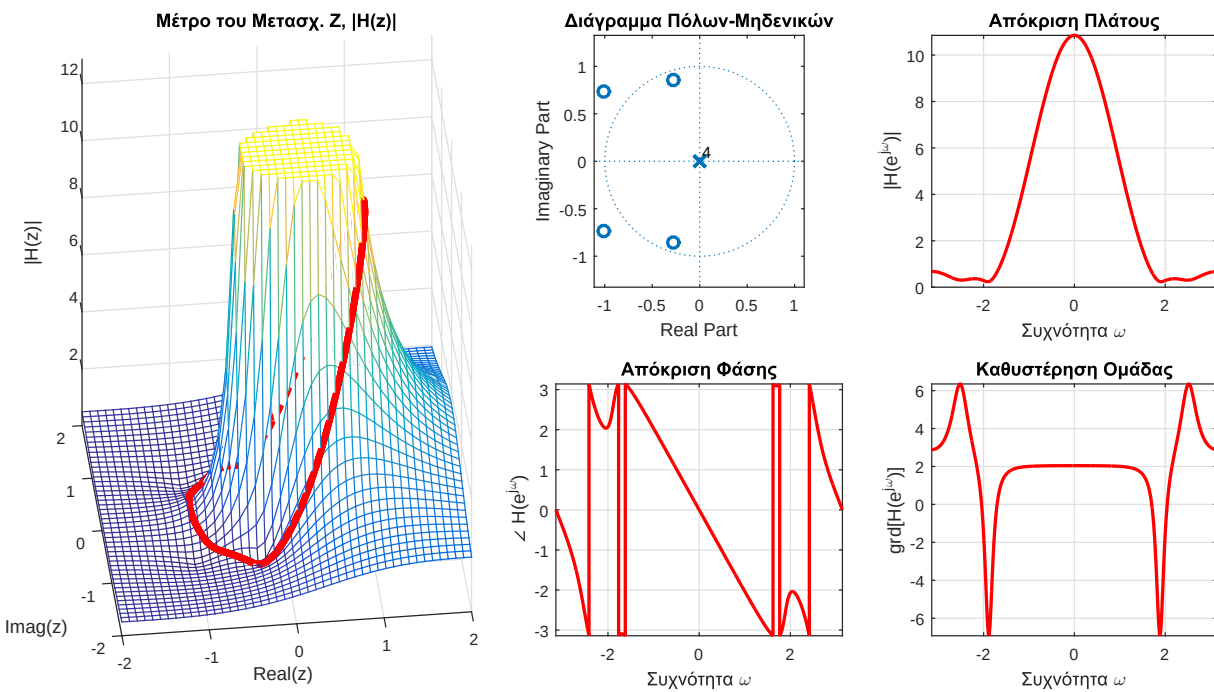
Έστω το σύστημα

$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (16.331)$$

το οποίο και απεικονίζεται στο Σχήμα 16.33. Γράψτε το σε μορφή γινομένου ενός συστήματος ελάχιστης φάσης κι ενός συστήματος all-pass.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι αυτό το σύστημα έχει 4 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο και 4 πόλους στο $z = 0$.



Σχήμα 16.33: Σύστημα $H(z)$ Παραδείγματος 16.27.

Προφανώς το minimum phase σύστημα θα κρατήσει τους 4 πόλους, καθώς και τα $z = 0.9e^{j0.6\pi}$, $z = 0.9e^{-j0.6\pi}$ μηδενικά που βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου. Το all-pass θα πάρει τα δυο μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου, $z = 1.25e^{j0.8\pi}$ και $z = 1.25e^{-j0.8\pi}$, και θα πρέπει να έχει και πόλους στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις.

Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (16.332)$$

$$= (1.25)^2 \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (16.333)$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει επιπλέον δυο μηδενικά για να ακυρωθούν οι πόλοι του $H_{ap}(z)$, οπότε

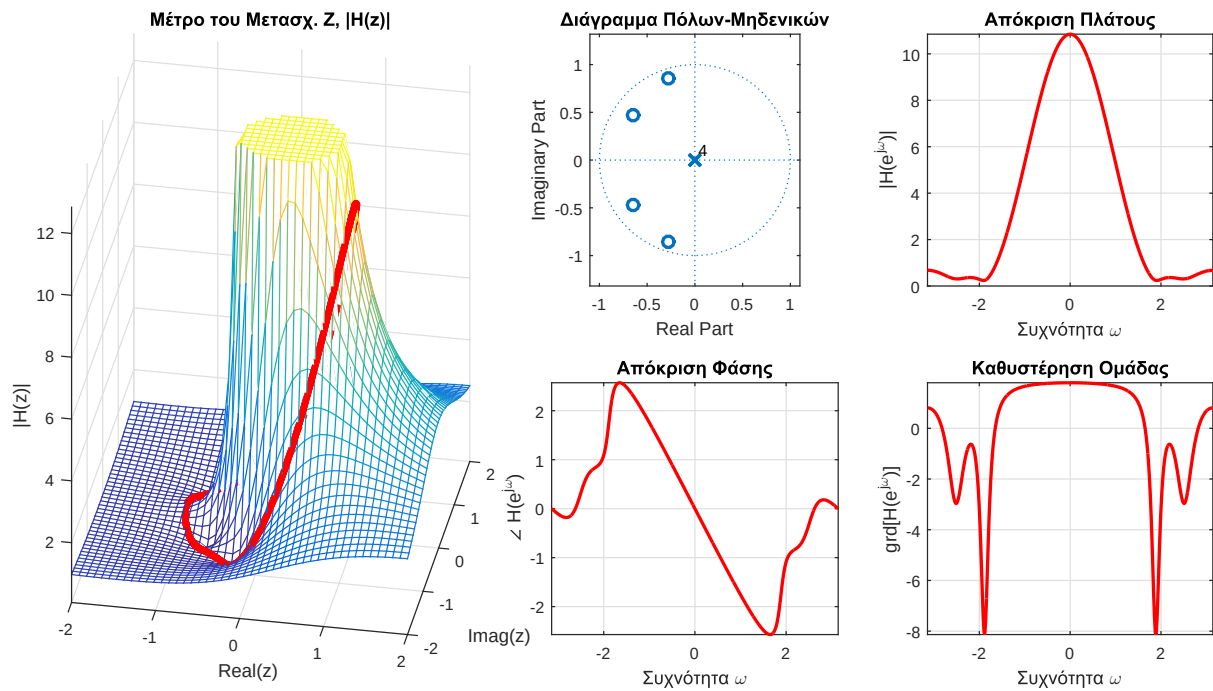
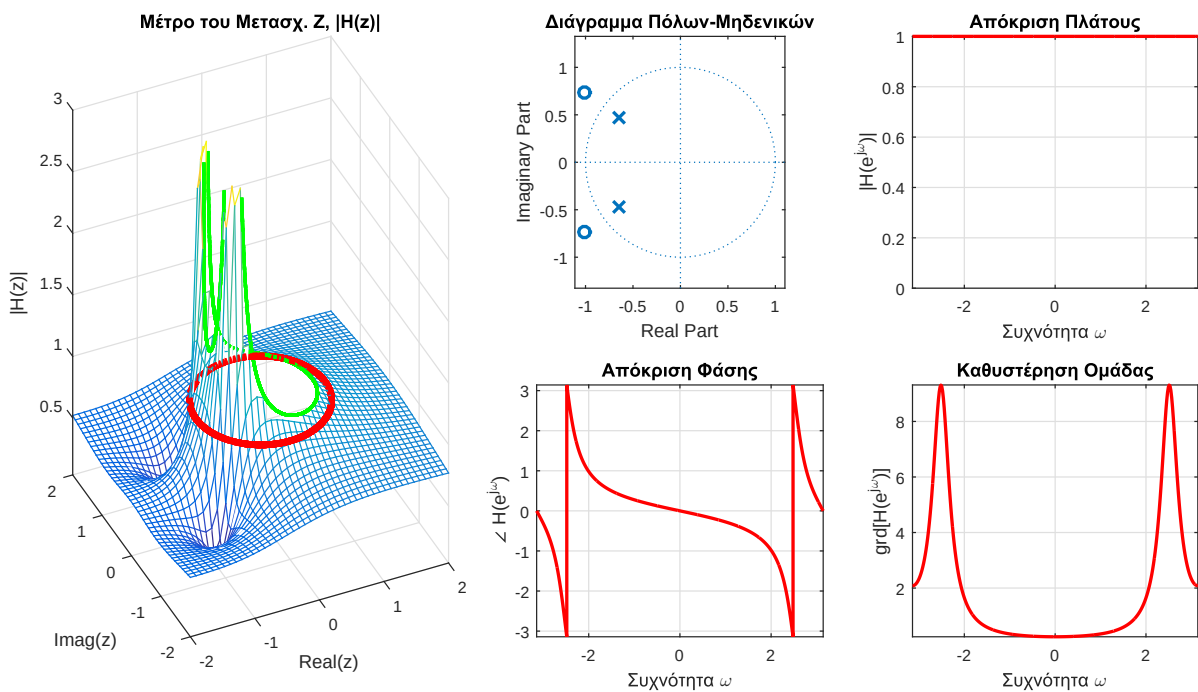
$$H_{min}(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (16.334)$$

και φέρνοντας τη σταθερά $(1.25)^2$ στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα είναι

$$H_{min}(z) = (1.25)^2 (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (16.335)$$

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (16.336)$$

Η παραγοντοποίηση φαίνεται στα Σχήματα 16.34, 16.35.

Σχήμα 16.34: Σύστημα $H_{min}(z)$ Παραδείγματος 16.27.Σχήμα 16.35: Σύστημα $H_{ap}(z)$ Παραδείγματος 16.27.

Παρατηρήστε ξανά: η απόκριση πλάτους, $|H(e^{j\omega})|$, του αρχικού συστήματος $H(z)$ είναι ίδια με την απόκριση πλάτους, $|H_{min}(e^{j\omega})|$, του συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, ενώ η απόκριση πλάτους του all-pass συστήματος είναι μοναδιαία, όπως αναμενόταν. Η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος ελάχιστης φάσης είναι μικρότερη από την καθυστέρηση ομάδας του αρχικού συστήματος. Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας του αιτιατού και ευσταθούς all-pass συστήματος είναι θετική, όπως είχαμε δει νωρίτερα.

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί αν η παραγοντοποίηση – όπως τη δείξαμε νωρίτερα – είναι ο μοναδικός δρόμος για την εύρεση του συστήματος ελάχιστης φάσης. Σε πολλές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει μόνο αυτό, και θα θέλαμε να το βρούμε άμεσα. Αν προσέξετε τη διαδικασία που εκτελέστηκε σε όλα τα παραδείγματα, αυτό που ουσιαστικά κάναμε ήταν να “καθρεπτίσουμε” τα μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου του αρχικού συστήματος στα αντίστοιχα συζυγή αμοιβαία τους. Όμως έχουμε ήδη δει ότι για να μην επηρεάσει την απόκριση πλάτους μια τέτοια αλλαγή, πρέπει ο όρος $1 - bz^{-1}$, με $b = re^{j\theta}$, $|r| > 1$, που αντιπροσωπεύει ένα μηδενικό εκτός μοναδιαίου κύκλου να αντικατασταθεί από τον όρο $z^{-1} - b^*$, ο οποίος περιγράφει ένα μηδενικό εντός μοναδιαίου κύκλου. Θυμηθείτε ότι

$$|1 \pm bz^{-1}|_{z=e^{j\omega}} = |z^{-1} \pm b^*|_{z=e^{j\omega}} \quad (16.337)$$

Έτσι, η εύρεση του συστήματος ελάχιστης φάσης μπορεί να γίνει χωρίς παραγοντοποίηση ως εξής:

Εύρεση Συστήματος Ελάχιστης Φάσης από ένα Σύστημα $H(z)$

Για ένα δεδομένο ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$ με M μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου, δηλ.

$$H(z) = Q(z) \prod_{k=1}^M (1 - r_k e^{j\theta_k} z^{-1}), \quad |r_k| > 1 \quad \forall k \quad (16.338)$$

τότε το σύστημα ελάχιστης φάσης δίνεται ως

$$H_{min}(z) = Q(z) \prod_{k=1}^M (z^{-1} - r_k e^{-j\theta_k}), \quad |r_k| > 1 \quad \forall k \quad (16.339)$$

με $Q(z)$ μια ρητή συνάρτηση του z που περιλαμβάνει πόλους και μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου.

Ας το δούμε σε ένα τελευταίο παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.28:

Ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})} \quad (16.340)$$

Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο παραπάνω σύστημα.

Λύση:

Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 3jz^{-1})(1 - 3jz^{-1})}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (16.341)$$

Αναγνωρίζουμε τα δυο μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου, $z = \pm 3j$, στους όρους $(1 \mp 3jz^{-1})$. Μεταφέροντας τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, θα έχουμε

$$H_{min}(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(z^{-1} - 3j)(z^{-1} + 3j)}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (16.342)$$

$$= (-3j)(3j) \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (16.343)$$

$$= 9 \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (16.344)$$

$$= \frac{(1 - 0.8z^{-1})(9 - z^{-2})}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (16.345)$$

Αναφερόμαστε συνεχώς στα συστήματα ελάχιστης φάσης ως αυτά που είναι ευσταθή και αιτιατά και που έχουν όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλ. έχουν ευσταθή και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Η επιλογή του ονόματός τους προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους, και παρ' ότι δεν είναι προφανές, έχει άμεση σχέση με τον ορισμό που μόλις δώσαμε. ■

Ας δούμε αυτήν την ιδιότητα, μαζί με άλλες δυο πολύ σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων ελάχιστης φάσης.

1. Δείξαμε μόλις πριν λίγο ότι ένα οποιοδήποτε σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) \quad (16.346)$$

Άρα η απόκριση φάσης του συστήματος θα είναι

$$\angle[H(e^{j\omega})] = \angle[H_{min}(e^{j\omega})] + \angle[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (16.347)$$

Ξέρουμε όμως ότι η απόκριση φάσης ενός all-pass συστήματος είναι αρνητική για κάθε $\omega \in [0, \pi]$. Άρα

$$\angle[H(e^{j\omega})] \leq \angle[H_{min}(e^{j\omega})] \quad (16.348)$$

Έτσι, η “ανάκλαση” των μηδενικών του $H_{min}(z)$ από εντός σε εκτός του μοναδιαίου κύκλου στις αμοιβές συζυγείς θέσεις πάντα μειώνει την απόκριση φάσης ή αυξάνει την αρνητική της φάσης, η οποία ονομάζεται καθυστέρηση φάσης - *phase lag*⁵. Άρα το αιτιατό και ευσταθές σύστημα που έχει την απόκριση πλάτους $|H_{min}(e^{j\omega})|$ και όλα τα μηδενικά (και φυσικά τους πόλους) εντός μοναδιαίου κύκλου, έχει τη μικρότερη καθυστέρηση φάσης (για $0 \leq \omega \leq \pi$) από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους⁶.

2. Από όλα τα συστήματα που έχουν την ίδια απόκριση πλάτους, τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας. Ας το δειξουμε. Εστω δυο συστήματα με το ίδιο φάσμα πλάτους μετασχ. Fourier. Το ένα είναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, και το άλλο όχι, $H(z)$. Η καθυστέρηση ομάδας για το $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (16.349)$$

λόγω της παραγοντοποίησης που συζητήσαμε παραπάνω. Επειδή όταν μιλήσαμε για all-pass συστήματα, είπαμε ότι έχουν μη αρνητική καθυστέρηση ομάδας, $\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \geq 0$, αυτό σημαίνει ότι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] \geq \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] \quad (16.350)$$

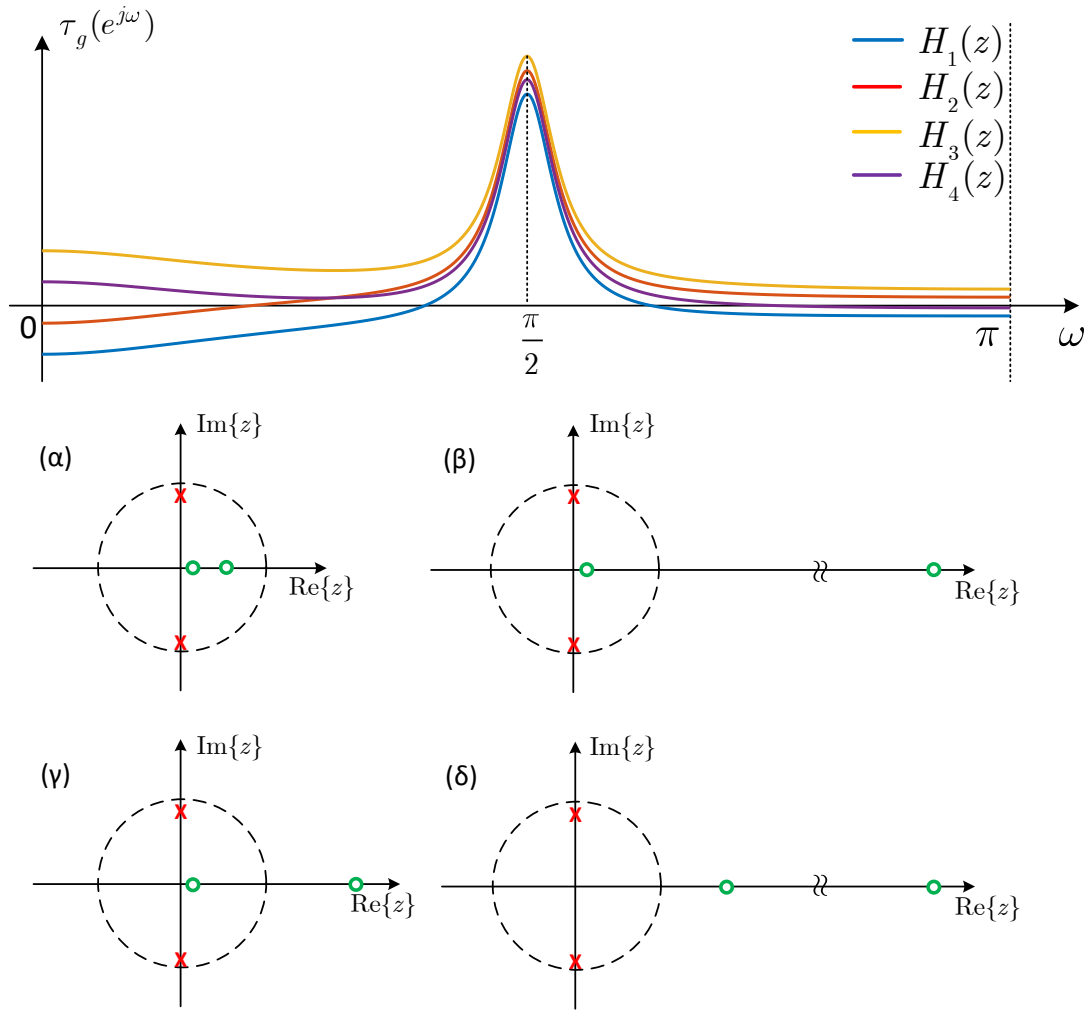
Άρα ξανά, από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους, το σύστημα ελάχιστης φάσης είναι αυτό που έχει την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας. Ένα εξίσου καλό όνομα για αυτά τα συστήματα θα ήταν “ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας - minimum group delay systems”, αλλά σπάνια χρησιμοποιείται αυτή η ορολογία. Δείτε το Σχήμα 16.36. Βλέπετε 4 συστήματα, με τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών τους, και την καθυστέρηση ομάδας τους. Αναγνωρίζετε το σύστημα ελάχιστης φάσης ως αυτό με το διάγραμμα πόλων-μηδενικών (α). Αυτό το σύστημα αντιστοιχεί στην μπλέ καμπύλη καθυστέρησης ομάδας, δηλ. στο σύστημα $H_1(z)$. Παρατηρήστε ότι για αυτό το σύστημα, η καθυστέρηση ομάδας του είναι μικρότερη από κάθε άλλη καμπύλη. Σε ποιά συστήματα αντιστοιχούν όμως οι υπόλοιπες καμπύλες καθυστέρησης ομάδας; Για να δημιουργήσουμε το Σχήμα 16.36 ξεκινήσαμε από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{8}z^{-1})}{(1 + 0.81z^{-2})} \quad (16.351)$$

η οποία έχει πόλους και μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου, άρα αντιστοιχεί σε σύστημα ελάχιστης φάσης. Στη συνέχεια, για να διατηρήσουμε την απόκριση πλάτους σταθερή, αντικαταστήσαμε κάθε φορά ένα από τα μηδενικά της μορφής $(1 - cz^{-1})$ στη μορφή $(z^{-1} - c)$. Με αυτόν τον τρόπο, το κάθε μηδενικό αντικαταστάθηκε

⁵Μην τη συγχέετε με την καθυστέρηση φάσης $-\theta(\omega)/\omega$ που είδαμε όταν μελετούσαμε την καθυστέρηση ομάδας στην Ενότητα 14.4.2.

⁶Ίσως η ονομασία “συστήματα ελάχιστης καθυστέρησης φάσης” να είναι η πιο κατάλληλη, αλλά ιστορικά έχει επικρατήσει να τα λέμε απλά συστήματα ελάχιστης φάσης.



Σχήμα 16.36: Διαγράμματα πόλων-μηδενικών και καθυστέρηση ομάδας για 4 διαφορετικά συστήματα.

από το συζυγές αμοιβαίο του (συγκεκριμένα, από το αντίστροφό του, μια και τα μηδενικά στο παράδειγμα αυτό είναι πραγματικά) αλλά χωρίς να μεταβληθεί η απόκριση πλάτους του συστήματος. Εύκολα μπορείτε να υποθέσετε ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H_3(z)$ στο Σχήμα 16.36 αντιστοιχεί σε ένα σύστημα **μέγιστης φάσης** (διάγραμμα πόλων-μηδενικών (δ)), όπου και τα δυο μηδενικά βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου, δηλ. η συνάρτηση μεταφοράς του έχει τη μορφή

$$H_3(z) = \frac{(z^{-1} - \frac{1}{2})(z^{-1} - \frac{1}{8})}{(1 + 0.81z^{-2})} \quad (16.352)$$

3. Μπορούμε να δείξουμε ότι **τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν ελάχιστη καθυστέρηση ενέργειας από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους**. Αυτό σημαίνει ότι αν $h_{min}[n]$ είναι η κρουστική απόκριση ενός συστήματος ελάχιστης φάσης, και $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση ενός άλλου αιτιατού συστήματος με την ίδια απόκριση πλάτους, $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$, τότε

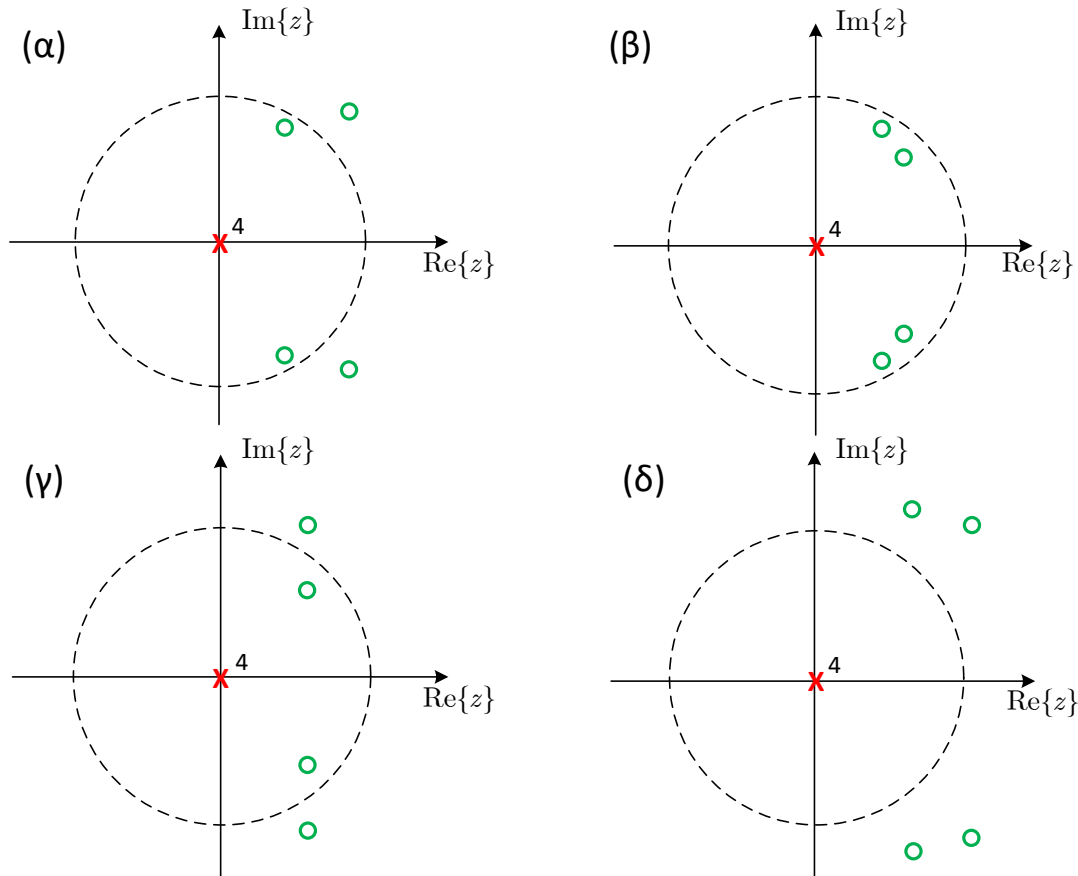
$$\sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2 \quad (16.353)$$

για κάθε $n \geq 0$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για τα συστήματα ελάχιστης φάσης, η ενέργεια της κρουστικής απόκρισης $h_{min}[n]$ είναι συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της (δηλ. η μερική ενέργεια ως και το n -οστό δείγμα έχει μεγαλύτερη τιμή στο σύστημα ελάχιστης φάσης από τις αντίστοιχες μερικές ενέργειες των υπολοίπων συστημάτων με την ίδια απόκριση πλάτους), ενώ για οποιοδήποτε άλλο σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, η ενέργεια της κρουστικής απόκρισης είναι κατανομημένη διαφορετικά. Προσοχή:

η παραπάνω σχέση μιλά για την κατανομή της ενέργειας, όχι για την τιμή της. Σε όλα τα συστήματα που έχουν την ίδια απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, ισχύει ότι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |h_{\min}[k]|^2 \quad (16.354)$$

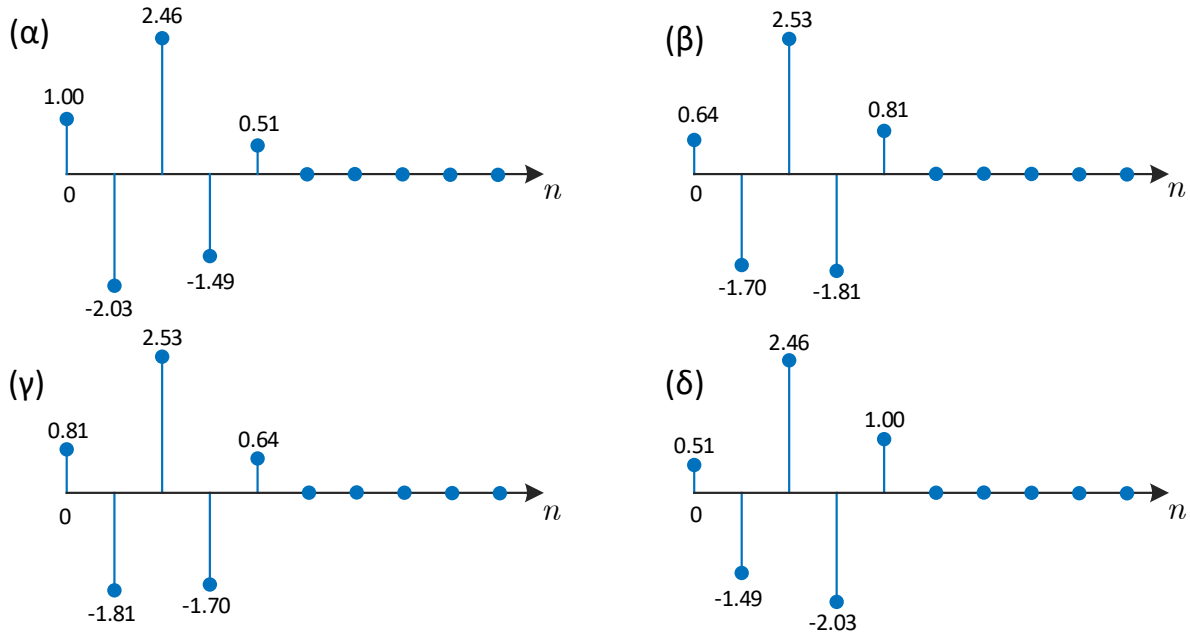
από το θεώρημα του Parseval. Έτσι, ένα τρίτο όνομα για αυτά τα συστήματα θα ήταν “ελάχιστης καθυστέρησης ενέργειας - minimum energy delay systems”. Δείτε, για παράδειγμα το Σχήμα 16.37. Μπορείτε φυσικά



Σχήμα 16.37: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών τεσσάρων συστημάτων με ίδια απόκριση πλάτους. Τα μηδενικά είναι τέσσερις συζυγείς συνδυασμοί των $0.8e^{\pm j\pi/4}$, $0.9e^{\pm j\pi/6}$.

να αναγνωρίσετε το σύστημα ελάχιστης φάσης (β). Δείτε τώρα την κρουστική απόκριση καθενός από αυτά στο Σχήμα 16.38. Σύμφωνα με τη Σχέση (16.353), το σύστημα ελάχιστης φάσης πρέπει να είναι εκείνο με την ενέργειά του καταμετρημένη πιο κοντά στο $n = 0$ από τα υπόλοιπα συστήματα. Από αυτά, το Σχήμα 16.38(α) ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, που είναι πράγματι η κρουστική απόκριση του συστήματος ελάχιστης φάσης του Σχήματος 16.37(β). Για του λόγου το αληθές, η μερική ενέργεια του συστήματος ελάχιστης φάσης σε σχέση με τα υπόλοιπα συστήματα δίνεται από τον Πίνακα 16.1. Είναι εμφανές ότι το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει μεγαλύτερη μερική ενέργεια από τα υπόλοιπα, με τις ενέργειες τους να πλησιάζουν μεταξύ τους όσο αυξάνουμε το πλήθος των δειγμάτων που συμπεριλαμβάνουμε στον υπολογισμό τους, και φυσικά η συνολική ενέργεια για όλα τα συστήματα είναι η ίδια ($E = 13.71$ στο συγκεκριμένο παράδειγμα).

Ένα τελευταίο στοιχείο σχετικά με τα συστήματα ελάχιστης φάσης είναι ότι αν μας δοθεί ένα σύστημα $M(z) = H(z)H^*(1/z^*) \Rightarrow M(z)|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})|^2$, και γνωρίζουμε ότι περιγράφει ένα σύστημα ελάχιστης φάσης, τότε το σύστημα $H(z)$ μπορεί να οριστεί μοναδικά από το $M(z)$ και φυσικά θα αποτελείται από εκείνο το σύστημα που έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά του $M(z)$ που βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Έτσι, ένα σύστημα ελάχιστης φάσης ορίζεται μοναδικά από την απόκριση πλάτους του, $|H(e^{j\omega})|$, όπως ήδη γνωρίζουμε, και αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$. Πώς;



Σχήμα 16.38: Κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με ίδια απόκριση πλάτους του Σχήματος 16.37.

Μερική ενέργεια συστημάτων				
	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n = 0$	1.00	0.41	0.65	0.27
$n = 1$	5.12	3.32	3.95	2.49
$n = 2$	11.21	9.76	10.39	8.58
$n = 3$	13.44	13.05	13.30	12.71
$n = 4$	13.71	13.71	13.71	13.71

Πίνακας 16.1: Μερική Ενέργεια συστημάτων Σχήματος 16.38.

Έστω ότι έχουμε την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$. Βρίσκουμε το σύστημα $|H(e^{j\omega})|^2$, που είναι συνάρτηση (μπορεί δηλ. να γραφεί πάντα ως τέτοια) του $\cos(k\omega)$. Μετα, αναλύουμε το $\cos(k\omega)$ με τις σχέσεις του Euler και αντικαθιστούμε με $\frac{1}{2}(z^k + z^{-k})$, λόγω αναλυτικής συνέχειας [121]. Τότε

$$G(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (16.355)$$

Τέλος, το σύστημα ελάχιστης φάσης σχηματίζεται από τους πόλους και τα μηδενικά του $G(z)$ που βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.29:

Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης $H(z)$ απόκριση πλάτους στο τετράγωνο ως

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{2} \cos(\omega) \quad (16.356)$$

Λύση:

Εκφραζουμε το $\cos(\omega)$ ως άθροισμα εκθετικών

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}e^{j\omega} - \frac{1}{4}e^{-j\omega} \quad (16.357)$$

και με αντικατάσταση του $e^{j\omega}$ με z και του $e^{-j\omega}$ με z^{-1} , θα έχουμε

$$G(z) = H(z)H(z^{-1}) = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-1} = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{4}z\right) \quad (16.358)$$

Έτσι, το σύστημα ελάχιστης φάσης είναι το $H(z) = 1 - \frac{1}{4}z^{-1}$.

Κλείνοντας την Παράγραφο, ας καταγράψουμε ορισμένες παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις

(α') Επιμένουμε συνεχώς να αναφερόμαστε σε εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν ΓΧΑ (ή μη) συστήματα. Οι συναρτήσεις μεταφοράς τέτοιων συστημάτων έχουν ρητή μορφή και αυτό είναι ιδιαίτερα βοηθητικό, τόσο στην υλοποίηση όσο και στη θεωρητική μελέτη. Όμως υπάρχουν και ΓΧΑ συστήματα που δεν περιγράφονται από ρητές συναρτήσεις μεταφοράς. Για παράδειγμα, το σύστημα με χροστική απόκριση $h[n] = u[n]/n$ έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = -\log(z)$ (επιχειρήστε να το δείξετε!), η οποία όχι μόνο δεν είναι ρητή αλλά κι εντελώς μη πρακτική στην υλοποίηση!

(β') Στη συζήτησή μας για την ευστάθεια ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι πόλοι του πρέπει να βρίσκονται *εντός* του μοναδιαίου κύκλου. Τι συμβαίνει αν ένας πόλος βρίσκεται *επάνω* στο μοναδιαίο κύκλο; Είναι τότε το σύστημα ευσταθές; Η απάντηση είναι *όχι*, και εύκολα μπορείτε να την επιβεβαιώσετε με ένα αντιπαράδειγμα: μια χροστική απόκριση με πόλο στο μοναδιαίο κύκλο είναι η

$$h[n] = u[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (16.359)$$

με τον πόλο της να βρίσκεται στο $z = 1$. Μια απολύτως φραγμένη είσοδος είναι η $x[n] = h[n] = u[n]$. Εύκολα μπορείτε να βρείτε ότι η έξοδος είναι $y[n] = (n+1)u[n]$, η οποία δεν είναι απολύτως φραγμένη^α. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν ο πόλος βρίσκεται οπουδήποτε επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

(γ') Ίσως παρατηρήσατε ότι, σε κάποια *αιτιατά* συστήματα που απεικονίστηκαν στις προηγούμενες σελίδες, η καθυστέρηση ομάδας ήταν *αρνητική*! Πώς είναι δυνατόν ένα αιτιατό σύστημα να έχει αρνητική καθυστέρηση ομάδας; Δεν αντιβαίνει αυτό στην αιτιατότητα του συστήματος, αφού ερμηνεύσαμε την καθυστέρηση ομάδας ως την καθυστέρηση – σε δείγματα – της περιβάλλουσας ενός σήματος στενής ζώνης στην έξοδο του συστήματος; Πράγματι, η παρατήρηση αυτή είναι μεγάλη σπαζοκεφαλιά ☹!

(δ') Πολύ δημοφιλής στην πράξη είναι τόσο οι συναρτήσεις μεταφοράς που αποτελούνται μόνο από μηδενικά, μόνο από πόλους, αλλά και μεικτές. Οι πρώτες ονομάζονται all-zero συστήματα, οι δεύτερες all-pole συστήματα, και οι τελευταίες pole-zero συστήματα. Τα pole-zero συστήματα δίνουν συνήθως υψηλότερη ακρίβεια στις διεργασίες που χρησιμοποιούνται, αλλά ο υπολογισμός των παραμέτρων τους δεν είναι απλός. Αντίθετα, all-zero και all-pole συστήματα έχουν μεγαλύτερη ευελιξία, γρηγορότερους αλγόριθμους υπολογισμού, και ικανοποιητική ακρίβεια. Μάλιστα, τα all-zero συστήματα μπορούν – αν σχεδιαστούν κατάλληλα – να έχουν μια σπουδαία ιδιότητα: αυτή της *γραμμικής φάσης*, που θα μελετήσουμε αμέσως μετά!

^αΤο αναμένετε αυτό, έτσι δεν είναι; Η χροστική απόκριση δεν είναι απολύτως αθροίστημη!

16.7 Συστήματα Γραμμικής Φάσης

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση όταν η συχνотική απόκρισή του είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\alpha\omega} \quad (16.360)$$

με α πραγματικός αριθμός. Έτσι, καταλαβαίνετε ότι τα συστήματα γραμμικής φάσης έχουν σταθερή καθυστέρηση ομάδας:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\phi(\omega) = -\frac{d}{d\omega}(-\alpha\omega) = \alpha \quad (16.361)$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι συχνότητες καθυστερούν στην έξοδο κατά τον ίδιο αριθμό δειγμάτων, χωρίς να “ανακατεύονται” μεταξύ τους. Αυτή η ιδιότητα μας είναι αρκετά επιθυμητή. Σε πολλές εφαρμογές, μας ενδιαφέρει να μπορούμε να σχεδιάζουμε συστήματα που έχουν την περίφημη *γενικευμένη γραμμική φάση*. Ένα σύστημα έχει γενικευμένη γραμμική φάση αν η συχνотική απόκρισή του είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)} \quad (16.362)$$

με $A(e^{j\omega})$ μια πραγματική συνάρτηση του ω , και β μια σταθερά. Συχνά, ο όρος γραμμική φάση χρησιμοποιείται για να δηλώσει συστήματα που έχουν είτε γραμμική είτε γενικευμένη γραμμική φάση.

Μας ενδιαφέρουν, όπως ξέρετε, ιδιαίτερα τα αιτιατά συστήματα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Ας συζητήσουμε για σήματα που έχουν γενικευμένη γραμμική φάση, στην προσπάθειά μας να βρούμε τι ιδιότητες έχουν αυτά. Από την ιδιότητα του μετασχ. Fourier, έχουμε

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \quad (16.363)$$

για n_0 ακέραιο, και

$$x[n] \text{ άρτιο} \longleftrightarrow \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} \quad (16.364)$$

$$x[n] \text{ περιττό} \longleftrightarrow j \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} \quad (16.365)$$

Παρατηρήστε από το τελευταίο ζεύγος ιδιοτήτων ότι τα άρτια ή περιττά συμμετρικά σήματα έχουν μηδενική ή σταθερή φάση. Σύμφωνα με τη Σχέση (16.363), μια μετατόπιση κατά $n_0 \in \mathbb{Z}$ θα προσθέσει μια γραμμική φάση στην υπάρχουσα μηδενική ή σταθερή. Άρα μια ικανή συνθήκη για γραμμική φάση είναι η ύπαρξη μιας συμμετρίας ως προς κάποιο δείγμα n_0 στο χρόνο, όπως για παράδειγμα το σύστημα με χροστική απόκριση $h[n] = a^{|n|}$, με $|a| < 1$, που είναι συμμετρικό γύρω από το $n = 0$. Όμως η αιτιατότητα μας αποκλείει τα συμμετρικά συστήματα άπειρης χροστικής απόκρισης. Άρα η χροστική απόκριση $h[n]$ αιτιατών συστημάτων γραμμικής φάσης πρέπει να είναι πεπερασμένης διάρκειας (να είναι δηλαδή FIR σύστημα)⁷. Αυτό σημαίνει ότι τα συστήματα αυτά δεν έχουν πόλους στο z -επίπεδο, εκτός από τη θέση $z = 0$. Για ένα FIR σύστημα διάρκειας $M + 1$ με πραγματική χροστική απόκριση $h[n]$, μια ικανή συνθήκη⁸ για να έχει αυτό γενικευμένη γραμμική φάση είναι να έχει συμμετρική χροστική απόκριση $h[n]$, δηλ.

$$h[n] = h[M - n] \quad (16.366)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, $\alpha = M/2$ και $\beta = 0$ ή π . Μια άλλη ικανή συνθήκη είναι το $h[n]$ να είναι αντισυμμετρικό

$$h[n] = -h[M - n] \quad (16.367)$$

και τότε έχουμε $\alpha = M/2$ και $\beta = \pi/2$ ή $3\pi/2$.

Τα συστήματα γραμμικής φάσης μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις κατηγορίες (Τύπους), ανάλογα με το αν η χροστική τους απόκριση $h[n]$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική, και αν το M είναι άρτιο ή περιττό (προσέξτε, το M δεν είναι η διάρκεια του σήματος - αυτή είναι $M + 1$). Κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες έχει συγκεκριμένους περιορισμούς όσον αφορά τις θέσεις των μηδενικών (μια και πόλους έχουμε μόνο στο $z = 0$) στη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, και τα οποία μηδενικά επιβάλλουν περιορισμούς στην απόκριση πλάτους. Ας τα δούμε ένα-ένα, ξεχωριστά⁹.

16.7.1 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου I έχει συμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (16.368)$$

και το M είναι άρτιο. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που είναι ακέραιος αριθμός. Η συχνотική απόκριση ενός Τύπου I συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega/2} \sum_{k=0}^{M/2} a_k \cos(k\omega) \quad (16.369)$$

με

$$a_k = 2h \left[\frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, M/2 \quad (16.370)$$

$$a_0 = h \left[\frac{M}{2} \right] \quad (16.371)$$

⁷ Στην εργασία [122] αποδείχθηκε ότι υπάρχουν αιτιατά συστήματα άπειρης χροστικής απόκρισης με γραμμική φάση, τα οποία όμως δεν έχουν ρητή συνάρτηση μεταφοράς, και ως εκ τούτου δεν περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών.

⁸ Αλλά όχι και αναγκαία.

⁹ Για κάθε Τύπο συστήματος γραμμικής φάσης, υποθέτουμε ότι έχει πραγματικό $h[n]$ και ότι το $h[0]$ είναι το πρώτο μη μηδενικό δείγμα του $h[n]$.

16.7.2 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου II

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου II έχει συμμετρική χρονική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (16.372)$$

και το M είναι περιττό. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που ΔΕΝ είναι ακέραιος αριθμός. Η συχνотική απόκριση ενός Τύπου I συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \quad (16.373)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2 \quad (16.374)$$

16.7.3 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου III έχει αντισυμμετρική χρονική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (16.375)$$

και το M είναι άρτιο. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που είναι ακέραιος αριθμός. Η συχνотική απόκριση ενός Τύπου III συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{M/2} c_k \sin(k\omega) = e^{-j(M\omega/2 - \pi/2)} \sum_{k=1}^{M/2} c_k \sin(k\omega) \quad (16.376)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, M/2 \quad (16.377)$$

16.7.4 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντισυμμετρική χρονική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (16.378)$$

και το M είναι περιττό. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που ΔΕΝ είναι ακέραιος αριθμός. Η συχνотική απόκριση ενός Τύπου IV συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) = e^{-j(M\omega/2 - \pi/2)} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \quad (16.379)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2 \quad (16.380)$$

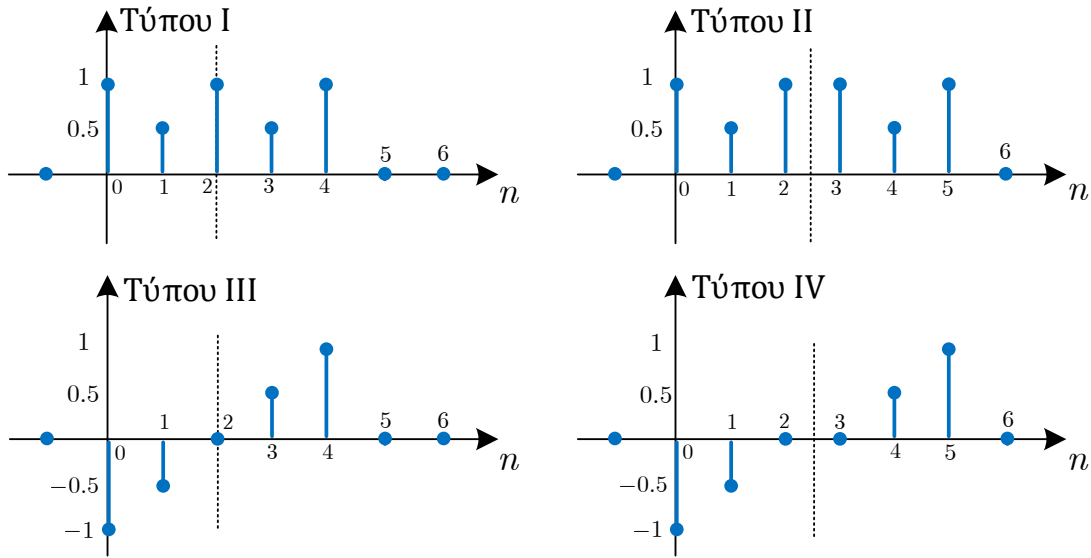
Συνοπτικά, παραδείγματα των παραπάνω συστημάτων φαίνονται στο Σχήμα 16.39.

16.7.5 Η Φάση στα Συστήματα Τύπου I, II, III, IV

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι κάθε σύστημα γραμμικής φάσης γράφεται στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} \sum p_k f_k(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} A(e^{j\omega}) \quad (16.381)$$

όπου p_k οι εκάστοτε συντελεστές a_k, b_k, c_k, d_k , και $f_k(e^{j\omega})$ η τριγωνομετρική συνάρτηση του k . Αυτά τα αθροίσματα είναι πραγματικές συναρτήσεις του ω , και τα συμβολίζουμε με $A(e^{j\omega})$, ενώ τα ονομάζουμε ψευδοπλάτη. Η απόκριση φάσης των συστημάτων για $0 \leq \omega \leq \pi$ ορίζεται από το μιγαδικό εκθετικό όρο που βρίσκεται έξω από το άθροισμα, εκτός από την περίπτωση που το ψευδοπλάτος $A(e^{j\omega})$ είναι αρνητικό σε κάποιο διάστημα. Τότε, στη φάση του



Σχήμα 16.39: Τύποι Συστημάτων Γραμμικής Φάσης.

μιγαδικού εκθετικού προστίθεται μια φάση $\theta = \pi$. Άρα γενικά η απόκριση φάσης των συστημάτων γραμμικής φάσης για $0 \leq \omega \leq \pi$ δίνεται ως

$$\phi(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega M/2 & , \text{ για Τύπου I, II και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\omega M/2 + \pi & , \text{ για Τύπου I, II και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\omega M/2 + \pi/2 & , \text{ για Τύπου III, IV και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\omega M/2 + \pi/2 + \pi & , \text{ για Τύπου III, IV και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases} \quad (16.382)$$

16.7.6 Ο Μετασχ. Z Συστημάτων Γραμμικής Φάσης

Οι συμμετρίες της χρονικής απόκρισης ενός συστήματος γραμμικής φάσης που είδατε παραπάνω θέτουν κάποιους περιορισμούς στη θέση των μηδενικών στο χώρο του Z. Για τα συστήματα Τύπου I ή II, ισχύει

$$h[n] = h[M - n] \longleftrightarrow H(z) = z^{-M} H(z^{-1}) \quad (16.383)$$

Όμοια, για συστήματα Τύπου III ή IV, ισχύει

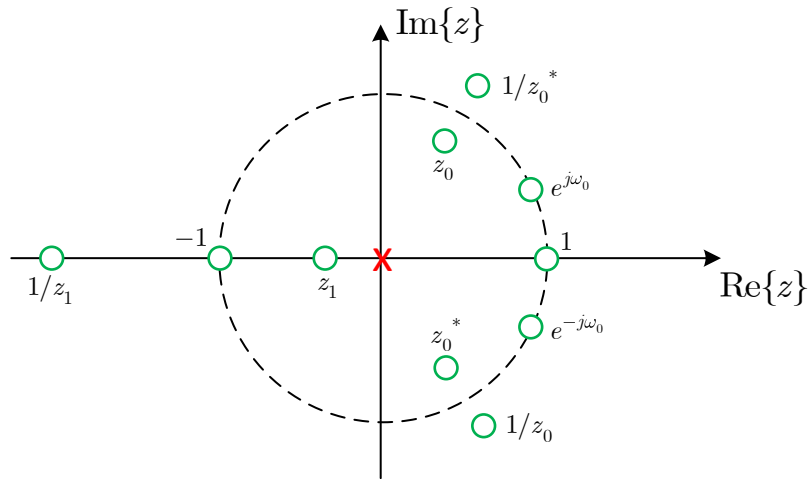
$$h[n] = -h[M - n] \longleftrightarrow H(z) = -z^{-M} H(z^{-1}) \quad (16.384)$$

Και στις δυο περιπτώσεις, αν το $H(z)$ είναι μηδέν στη θέση $z = z_0$, τότε το $H(z)$ πρέπει να είναι μηδέν και στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$. Άρα, τα μηδενικά του $H(z)$ έρχονται σε ζεύγη, που το ένα είναι εντός και το άλλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, σε αμοιβαίες¹⁰ θέσεις. **Αμοιβαίο** ονομάζεται το ζεύγος $(z_0, 1/z_0)$. Επιπλέον, αν το $h[n]$ είναι πραγματικό, τα μιγαδικά μηδενικά έρχονται επίσης σε συζυγή ζεύγη. Έτσι, καταλαβαίνετε ότι έχουμε τους εξής περιορισμούς στις θέσεις των μηδενικών:

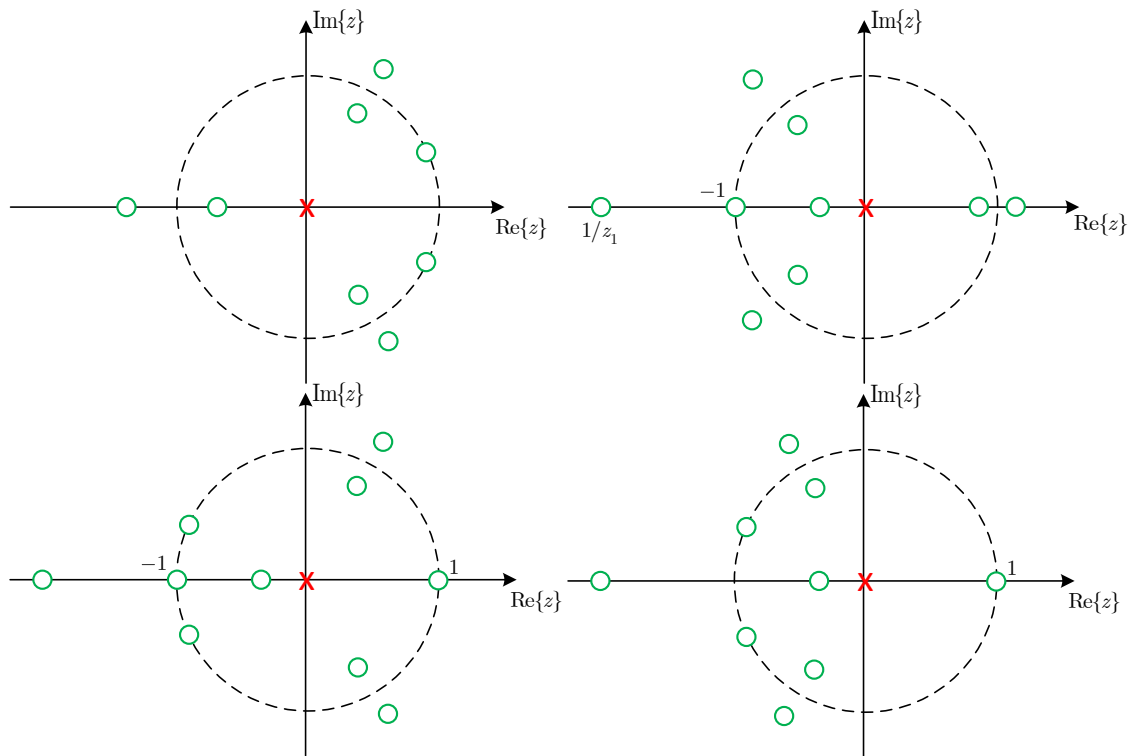
1. Το $H(z)$ μπορεί να έχει ένα ή περισσότερα μηδενικά στη θέση $z = \pm 1$. Επιβεβαιώστε το από τις παραπάνω εξισώσεις. Θα επιμείνουμε σε αυτό στη συνέχεια.
2. Το $H(z)$ μπορεί να έχει συζυγή μιγαδικά μηδενικά πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, στις θέσεις $z = e^{\pm j\omega_k}$ ή αμοιβαία μηδενικά στον πραγματικό άξονα, στις θέσεις $z = a$ και $z = 1/a$.
3. Αν το σύστημα είναι πραγματικό, το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μηδενικών στις θέσεις $z = r_k e^{\pm j\omega_k}$ και $z = \frac{1}{r_k} e^{\pm j\omega_k}$. Κάθε ζεύγος της ομάδας είναι συζυγές, συζυγές αμοιβαίο, ή αμοιβαίο ζεύγος μηδενικών.

Αυτούς τους περιορισμούς τους βλέπετε στο Σχήμα 16.40. Οι θέσεις $z = 1$ και $z = -1$ αξίζουν ιδιαίτερης μνείας.

¹⁰Όχι συζυγείς αμοιβαίες!



Σχήμα 16.40: Περιορισμοί μηδενικών για συστήματα γραμμικής φάσης.



Σχήμα 16.41: Διαγράμματα πόλων-μηδενικών Συστημάτων Γραμμικής Φάσης Τύπου I, Τύπου II, Τύπου III, Τύπου IV.

Αν υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς στη θέση $z = -1$, για ένα Τύπου II σύστημα, θα έχουμε

$$H(-1) = (-1)^M H(-1) \quad (16.385)$$

Επειδή το M είναι περιττό, συνεπάγεται ότι

$$H(-1) = -H(-1) \quad (16.386)$$

που ισχύει μόνο αν $H(-1) = 0$. Άρα ένα Τύπου II σύστημα πρέπει να έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = -1$. Παρομοια, αν υπολογίσουμε το $H(z)$ στη θέση $z = -1$ για ένα Τύπου III σύστημα γραμμικής φάσης, θα έχουμε

$$H(-1) = -(-1)^M H(-1) \quad (16.387)$$

και επειδή το M είναι άρτιο, πρέπει να υπάρχει ένα μηδενικό στη θέση $z = -1$. Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς υπολογισμένη στη θέση $z = -1$ είναι ίση με τη συχνοτική απόκριση για $\omega = \pi$, τότε

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = 0 \quad (16.388)$$

για Τύπου II και III συστήματα γραμμικής φάσης.

Για Τύπου III και IV συστήματα, αν κάνουμε το ίδιο για τη θέση $z = 1$, βρίσκουμε ότι

$$H(1) = -H(1) \quad (16.389)$$

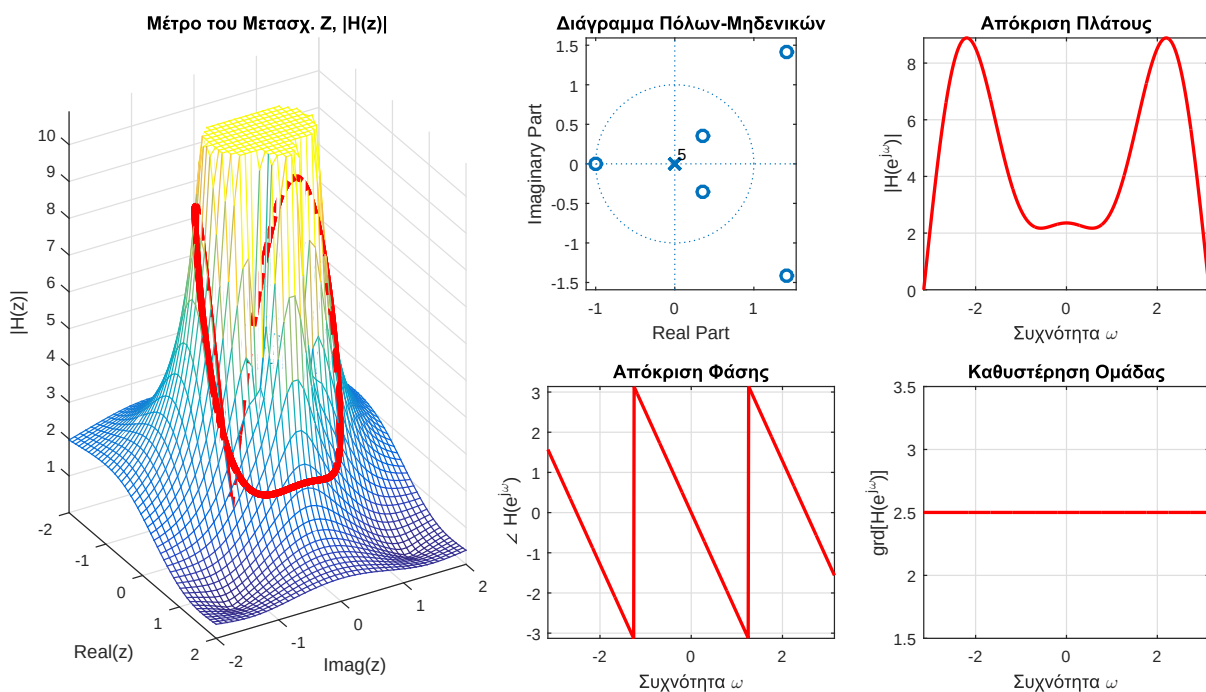
το οποίο ισχύει μόνον αν $H(z) = 0$ για $z = 1$. Άρα, Τύπου III και IV συστήματα γραμμικής φάσης πρέπει να έχουν ένα μηδενικό στη θέση $z = 1$, άρα

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (16.390)$$

για Τύπου III και IV συστήματα γραμμικής φάσης.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο Σχήμα 16.41, όπου φαίνονται οι τέσσερις Τύποι συστημάτων γραμμικής φάσης, και οι θέσεις των μηδενικών τους.

Ένα παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης Τύπου II φαίνεται στο Σχήμα 16.42 κι ένα γραμμικής φάσης Τύπου



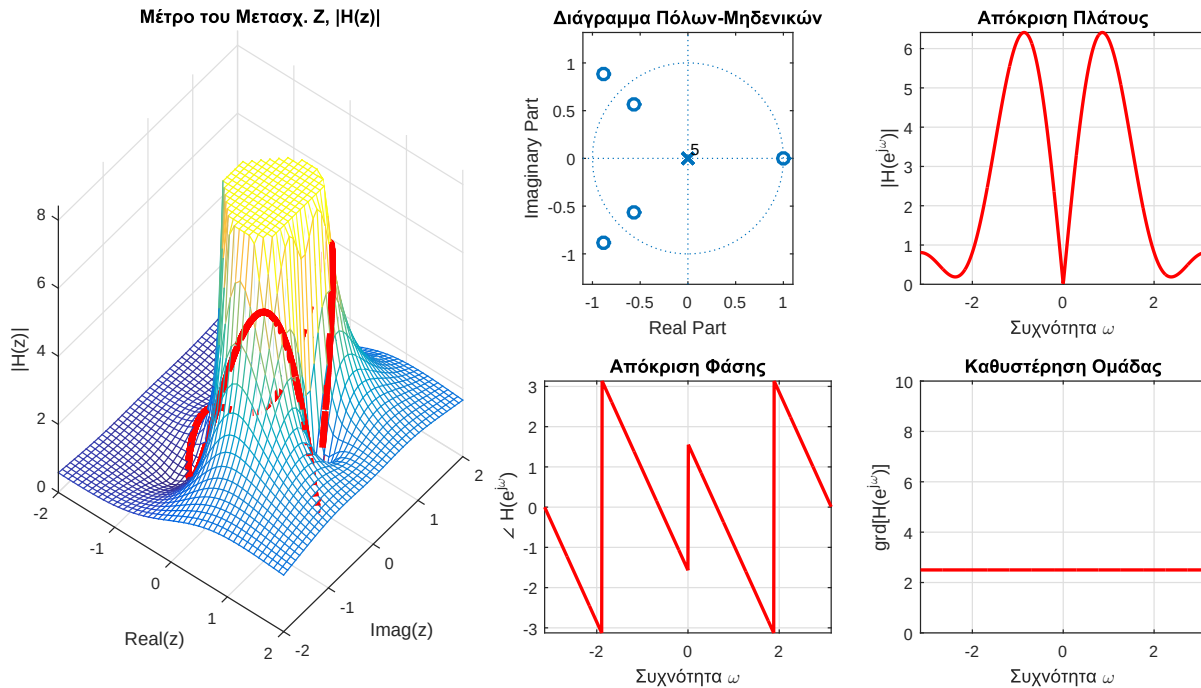
Σχήμα 16.42: Παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης Τύπου II.

IV φαίνεται στο Σχήμα 16.43. Παρατηρήστε τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, καθώς και την καθυστέρηση ομάδας και στα δυο συστήματα.

16.7.7 Σχέση Συστημάτων Γραμμικής Φάσης με Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

Η προηγούμενη κουβέντα κατέδειξε ότι όλα τα FIR συστήματα γραμμικής φάσης με πραγματική χροστική απόκριση έχουν μηδενικά είτε επάνω στο μοναδιαίο κύκλο είτε σε συζυγή αμοιβαίες θέσεις. Έτσι, μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι οποιοδήποτε FIR σύστημα γραμμικής φάσης, $H_{lin}(z)$, μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων,

- ενός όρου ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$



Σχήμα 16.43: Παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης Τύπου IV.

- ενός όρου μέγιστης φάσης¹¹, $H_{max}(z)$
- ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, $H_{uc}(z)$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z)H_{uc}(z)H_{max}(z) \quad (16.391)$$

όπου

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1})z^{-M_i} \quad (16.392)$$

όπου M_i είναι ο αριθμός των μηδενικών του $H_{min}(z)$. Στη Σχέση (16.391), το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει όλα τα M_i μηδενικά του μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, και το $H_{uc}(z)$ έχει όλα τα M_o μηδενικά του επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Το σύστημα μέγιστης φάσης, $H_{max}(z)$, έχει όλα τα M_i μηδενικά του εκτός μοναδιαίου κύκλου. Από τη Σχέση (16.392), καταλαβαίνουμε ότι τα μηδενικά του συστήματος μέγιστης φάσης είναι τα αμοιβαία των M_i μηδενικών του συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$. Έτσι, η τάξη του συστήματος $H_{lin}(z)$ είναι $2M_i + M_o$.

Πιο γενικά, η παραπάνω Σχέση (16.391) μπορεί να γραφεί ως

$$H_{lin}(z) = \prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o/2} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*) \quad (16.393)$$

με $|c_k| < 1$. Άρα το $H_{max}(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*) \quad (16.394)$$

$$= \prod_{k=1}^{M_i/2} z^{-2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z) \quad (16.395)$$

$$= z^{-M_i} \prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z) \quad (16.396)$$

¹¹Ένα σύστημα μέγιστης φάσης έχει τους πόλους εντός μοναδιαίου κύκλου, αλλά όλα τα μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

$$= z^{-M_i} H_{min}(z^{-1}) \quad (16.397)$$

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 16.30:

Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})} \quad (16.398)$$

Γράψτε το σε μορφή

$$H(z) = H_{min}(z)H_{lin}(z) \quad (16.399)$$

Λύση:

Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $z = \pm 0.8$, $z = 0$ ενώ τα μηδενικά στις θέσεις $z = 0.5$, $z = \pm 2j$. Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει τους τρεις πόλους που βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, καθώς και το μηδενικό στη θέση $z = -0.5$. Το σύστημα γραμμικής φάσης θα έχει τα μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 2j$. Υποχρεωτικά όμως, θα έχει μηδενικά και στις θέσεις $z = \pm j/2$, καθώς και 4 πόλους στη θέση $z = 0$. Άρα το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει υποχρεωτικά δυο πόλους στις θέσεις $z = \pm j/2$ για να ακυρώσει την επιρροή των δυο μηδενικών στις θέσεις $z = \pm j/2$ του συστήματος γραμμικής φάσης. Επίσης, θα έχει και τρία μηδενικά στη θέση $z = 0$, ώστε να ακυρώνει την επιρροή των τριών πόλων του συστήματος γραμμικής φάσης. Άρα εν τέλει

$$H_{min}(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})(1 - \frac{j}{2}z^{-1})} \quad (16.400)$$

και

$$H_{lin}(z) = \left(1 + \frac{j}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{j}{2}z^{-1}\right) (1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1}) \quad (16.401)$$

Παράδειγμα 16.31:

Έστω το σύστημα ελάχιστης φάσης, που είδαμε νωρίτερα,

$$H_{min}(z) = (1.25)^2 (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \times \\ \times (1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (16.402)$$

Γράψτε το ως παράγοντα ενός γινομένου με ένα σύστημα μέγιστης φάσης, που συνολικά δίνει ένα σύστημα γραμμικής φάσης.

Λύση:

Το σύστημα μέγιστης φάσης που θα μας δώσει ένα σύστημα γραμμικής φάσης κατά την παραγοντοποίηση βρίσκεται από

$$H_{max}(z) = z^{-4} H_{min}(z^{-1}) \quad (16.403)$$

$$= z^{-4} (1.25)^2 (e^{j0.8\pi} e^{-j0.8\pi}) (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z)(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z) \times \quad (16.404)$$

$$\times (1 - 0.8e^{j0.8\pi}z)(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z) \quad (16.405)$$

$$= (1.25)^2 (e^{j0.8\pi} e^{-j0.8\pi}) (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi})(z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi}) \times \quad (16.406)$$

$$\times (z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi}) \quad (16.407)$$

$$= (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi})(z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi})(1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1} - 1)(1.25e^{j0.8\pi}z^{-1} - 1) \quad (16.408)$$

$$= (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi})(z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}) \quad (16.409)$$

$$= (0.9)^2 (1 - 1.11e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.11e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}) \quad (16.410)$$

Οπότε το ένα σύστημα γραμμικής φάσης με παράγοντες τα παραπάνω συστήματα γράφεται ως

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z)H_{max}(z) \quad (16.411)$$

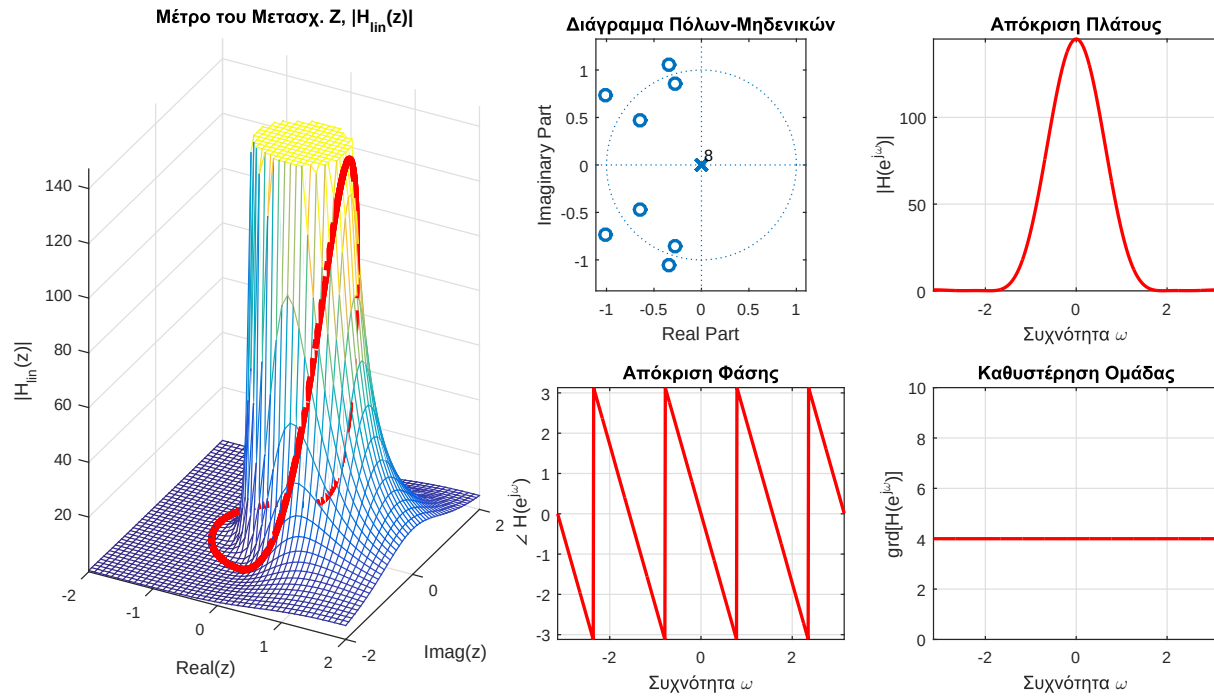
$$= (1.125)^2 (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \times \quad (16.412)$$

$$\times (1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}) \times \quad (16.413)$$

$$\times (1 - 1.11e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.11e^{j0.6\pi}z^{-1}) \times \quad (16.414)$$

$$\times (1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}) \quad (16.415)$$

Τα χαρακτηριστικά του συστήματος γραμμικής φάσης που προκύπτει φαίνονται στο Σχήμα 16.44.



Σχήμα 16.44: Σύστημα Γραμμικής Φάσης που προκύπτει από παραγοντοποίηση ενός συστήματος ελαχίστης και ενός μέγιστης φάσης.

Άρα

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = H_{min}(e^{j\omega})H_{max}(e^{j\omega}) \quad (16.416)$$

και

$$|H_{lin}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{max}(e^{j\omega})| = 2|H_{min}(e^{j\omega})| \quad (16.417)$$

αφού τα συστήματα μέγιστης και ελάχιστης φάσης έχουν την ίδια απόκριση πλάτους.

Επίσης,

$$\angle H_{lin}(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{max}(e^{j\omega}) \quad (16.418)$$

και λόγω της Σχέσης (16.392), έχουμε

$$\angle H_{max}(e^{j\omega}) = -4\omega - \angle H_{min}(e^{j\omega}) \quad (16.419)$$

και άρα

$$\angle H_{lin}(e^{j\omega}) = -4\omega \quad (16.420)$$

Τέλος, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι ίση με

$$\text{grd}[H_{lin}(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega}) = 4 \quad (16.421)$$

όπως αναμενόταν.

Ας διατυπώσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις σε όλα όσα έχουμε πει.

■

Παρατηρήσεις

- (α') Στην αρχή της παραγράφου αναπτύξαμε διαισθητικά τα χαρακτηριστικά που αρκεί να έχει ένα αιτιατό σύστημα για να είναι γραμμικής φάσης μέχρι να καταλήξουμε στα FIR συστήματα. Για μια πιο αυστηρή προσέγγιση, μπορείτε να δείτε την Παράγραφο 5.7 του [118].
- (β') Τα συστήματα γραμμικής φάσης που γνωρίσαμε είχαν άρτια ή περιττή συμμετρία είτε γύρω από κάποιο δείγμα είτε γύρω από ένα “ψευδοδείγμα” - αν και αδόκιμος ο όρος - που βρισκόταν ακριβώς ανάμεσα σε δυο δείγματα. Έτσι, η κλίση της απόκρισης φάσης ήταν πάντα ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{2}$ - ελέγξτε όλα τα παραδείγματα που είδαμε. Ας εξετάσουμε λίγο περισσότερο τη γραμμική φάση. Θεωρήστε το απλό σύστημα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-ja\omega}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (16.422)$$

Προφανώς ένα τέτοιο σύστημα έχει γραμμική φάση, όμως ποιά είναι η δομή του στο πεδίο του χρόνου; Παρουσιάζει κάποια συμμετρία, κι αν ναι, που βρίσκεται αυτή; Ας απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο τα πράγματα, θεωρώντας το σύστημα

$$H(e^{j\omega}) = e^{-ja\omega} \quad (16.423)$$

Καταλαβαίνετε ότι αν $a \in \mathbb{Z}$, τότε από γνωστές ιδιότητες έχουμε

$$h[n] = \delta[n - a] \quad (16.424)$$

Όμως αν $a \in \mathbb{R}$, η παραπάνω σχέση δεν ισχύει. Τι μπορούμε να κάνουμε τότε; Ας χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ja\omega} e^{j\omega n} d\omega \quad (16.425)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-a)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(n-a)} e^{j\omega(n-a)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \quad (16.426)$$

$$= \frac{1}{j2\pi(n-a)} (e^{j\pi(n-a)} - e^{-j\pi(n-a)}) = \frac{\sin(\pi(n-a))}{\pi(n-a)} \quad (16.427)$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι αν $a \in \mathbb{Z}$, τότε $h[n] = \delta[n - a]$, το οποίο έχει γραμμική φάση. Στην περίπτωση που $a \in \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα αν σκεφτούμε ότι το σύστημα αυτό έχει προέλθει από δειγματοληψία ενός συστήματος συνεχούς χρόνου $h(t)$. Το σύστημα αυτό μπορεί να βρεθεί αν θέσουμε $n = t/T_s$, με T_s την περίοδο δειγματοληψίας. Τότε θα είναι

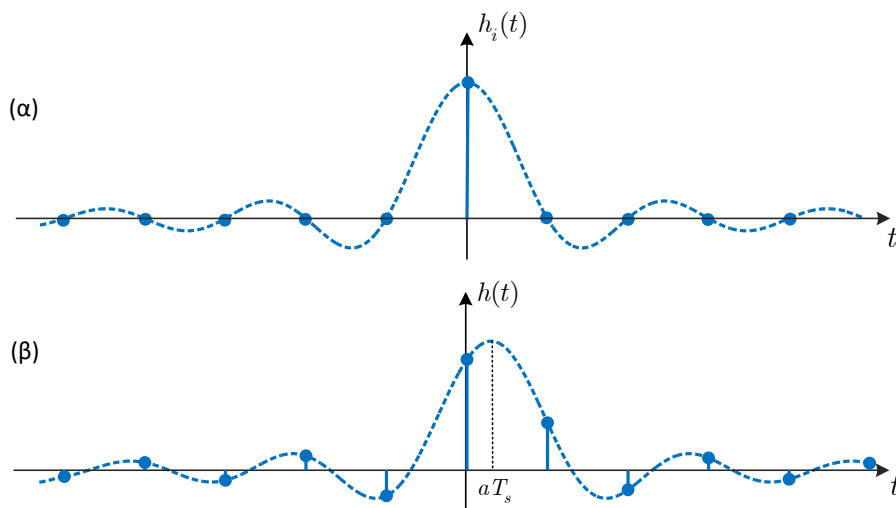
$$h(t) = \frac{\sin(\pi(t/T_s - a))}{\pi(t/T_s - a)} = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - a\right) = \text{sinc}\left(\frac{t - aT_s}{T_s}\right) \quad (16.428)$$

Παρατηρήστε ότι η παράμετρος a ορίζει τη μετατόπιση σε πολλαπλάσια της T_s του σήματος

$$h_i(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (16.429)$$

Το παραπάνω σήμα και η δειγματοληψία του ανά T_s δευτερόλεπτα φαίνονται στο Σχήμα 16.45(α). Το σήμα $h(t)$ για μια τυχαία τιμή του a και η δειγματοληψία του φαίνονται στο Σχήμα 16.45(β). Βλέπετε ότι το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από τη δειγματοληψία έχει γραμμική φάση αλλά δεν έχει τις γνωστές συμμετρίες που είδαμε νωρίτερα - πρόκειται βέβαια για ένα IIR σύστημα.

- (γ') Από την προηγούμενη παρατήρηση πρέπει να τονιστεί ότι το σύστημα διακριτού χρόνου $h[n]$ μπορεί ή όχι να προέρχεται από δειγματοληψία ενός συστήματος συνεχούς χρόνου. Παρ' όλο που η ερμηνεία έγινε με βάση το συνεχές χρόνο, αυτό δεν είναι απαραίτητο να ισχύει στην πραγματικότητα. Το σύστημα της Σχέσης (16.423) λέγεται ότι έχει χρονική μετατόπιση a δειγμάτων, ακόμα κι αν αυτός ο αριθμός δεν είναι ακέραιος. Άρα μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ένα σύστημα μπορεί να είναι γραμμικής φάσης ακόμα κι αν δεν παρουσιάζει κάποιοι είδους συμμετρία - όμως τότε είναι IIR και - το χειρότερο - δεν είναι αιτιατό.



Σχήμα 16.45: (α) Σύστημα γραμμικής φάσης με $a \in \mathbb{Z}$, (β) Σύστημα γραμμικής φάσης με $a \in \mathbb{R}$.

(δ') Είπαμε νωρίτερα ότι δεν υπάρχει αιτιατό IIR σύστημα με γραμμική φάση. Όμως προσέξτε ότι

$$h[n] = u[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (16.430)$$

Εκτιμήστε τη φάση $\phi(e^{j\omega})$ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ. για $z = e^{j\omega}$. Παρατηρήστε ότι είναι γραμμική! Ποιό είναι το πρόβλημα εδώ; Η ευστάθεια του συστήματος! Το σύστημα έχει έναν πόλο επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, και ως εκ τούτου είναι ασταθές!!

(ε') Η κατηγοριοποίηση των συστημάτων γραμμικής φάσης σε Τύπους έγινε με βάση την ύπαρξη απλών μη-δενικών στο μιγαδικό επίπεδο. Τα πράγματα αλλάζουν ελαφρώς όταν επιτρέψετε την ύπαρξη πολλαπλών μηδενικών στην ίδια θέση του μιγαδικού επιπέδου. Δείτε την Άσκηση 16.44.

16.8 Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Ως τώρα έχουμε συναντήσει τρεις διαφορετικές περιγραφές ενός ΓΧΑ συστήματος:

- την εξίσωση διαφορών εισόδου-εξόδου (με σταθερούς συντελεστές) του
- την κρουστική απόκρισή του $h[n]$
- τη συνάρτηση μεταφοράς του $H(z)$

Και οι τρεις αυτές περιγραφές είναι θεωρητικά ισοδύναμες. Όταν όμως υλοποιούμε στην πράξη τέτοια συστήματα, δηλ. με αναλογικά ή ψηφιακά κυκλώματα, η εξίσωση διαφορών ή η συνάρτηση μεταφοράς πρέπει να μετατραπεί σε έναν αλγόριθμο ή σε μια δομή που να μπορεί να πραγματοποιηθεί με την υπάρχουσα τεχνολογία. Όπως θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο, βασικοί δομικοί λίθοι που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις δομές είναι οι βασικές πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού με μια σταθερά, και της καθυστέρησης (αποθήκευσης στη μνήμη).

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (16.431)$$

Η κρουστική απόκριση του παραπάνω συστήματος δίνεται εύκολα (πλέον ☺) ως:

$$h[n] = b_0 a^n u[n] + b_1 a^{n-1} u[n-1] \quad (16.432)$$

και η πρώτη τάξης εξίσωση διαφορών δίνεται ως

$$y[n] - a y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \quad (16.433)$$

Αν θέλουμε να υλοποιήσουμε αυτό το σύστημα, η πράξη της συνέλιξης δε θα ήταν βολική, γιατί η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι άπειρη σε διάρκεια, οπότε θα χρειαζόμασταν άπειρες θέσεις μνήμης για να αποθηκεύσουμε την κρουστική απόκριση ή το αποτέλεσμα της συνέλιξης.

Όμως μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση διαφορών ως

$$y[n] = ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1] \quad (16.434)$$

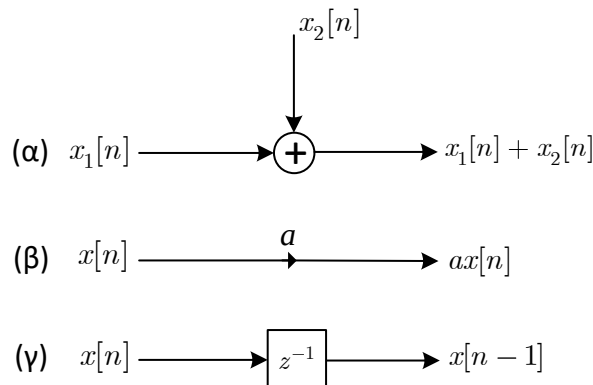
η οποία μας δίνει τη βάση ενός αναδρομικού αλγορίθμου για τον υπολογισμό της εξόδου οποιαδήποτε χρονική στιγμή n , συναρτήσει της προηγούμενης εξόδου $y[n-1]$ και των εισόδων $x[n]$ και $x[n-1]$. Όπως γνωρίζετε, αν θεωρήσουμε συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα (δηλ. αν $x[n] = 0$, $n < 0$, τότε $y[n] = 0$, $n < 0$) και χρησιμοποιήσουμε τη Σχέση (16.434) ως αναδρομική εξίσωση για τον υπολογισμό της εξόδου, το σύστημα θα είναι τότε γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο. Μπορούμε να γενικεύσουμε το πρόβλημά μας σε συστήματα N τάξης, αλλά είτε το παραπάνω σύστημα είτε η γενίκευσή του σε N τάξη δεν αποτελούν το μοναδικό αλγόριθμο υπολογισμού ενός συστήματος. Θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές επιλογές για την υλοποίηση ενός συστήματος που έχει μια δεδομένη εξίσωση διαφορών. Η διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις επιλογές συναντώνται

1. στο πλήθος των πράξεων
2. στο πλήθος των θέσεων μνήμης (καθυστέρηση)
3. σε άλλες παραμέτρους που δεν εξετάζουμε εδώ (ευρωστία στην κβαντοποίηση, κλπ.)

16.8.1 Αναπαράσταση Εξισώσεων Διαφορών με Διάγραμμα

Η υλοποίηση ενός ΓΧΑ συστήματος με χρήση αναδρομικού αλγορίθμου ο οποίος προέρχεται από την εξίσωση διαφορών απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου ή της εξόδου, όπως φαίνεται και στη Σχέση (16.434). Η καθυστέρηση των τιμών μιας ακολουθίας υπονοεί ότι υπάρχει ανάγκη αποθήκευσής τους σε μια μνήμη. Επίσης, πρέπει να έχουμε μηχανισμούς πολλαπλασιασμού τιμών με σταθερές, όπως και μηχανισμούς πρόσθεσης τιμών.

Με βάση τα παραπάνω, τα βασικά δομικά στοιχεία για την υλοποίηση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι οι *αθροιστές*, οι *πολλαπλασιαστές*, και οι *θέσεις μνήμης*. Μια αναπαράστασή τους φαίνεται στο Σχήμα (16.46). Μια μικρή



Σχήμα 16.46: Διαγράμματα για (α) πρόσθεση ακολουθιών, (β) πολλαπλασιασμό ακολουθίας με σταθερά, (γ) μοναδιαία καθυστέρηση.

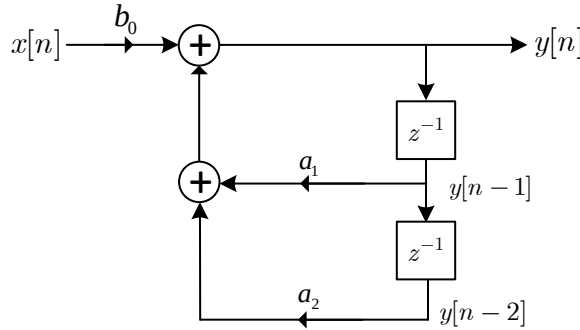
μόνο παρατήρηση για τη μοναδιαία καθυστέρηση, καθώς τα υπόλοιπα διαγράμματα είναι προφανή. Σε ψηφιακές υλοποιήσεις, η καθυστέρηση μπορεί να υλοποιηθεί ως ένας καταχωρητής για κάθε μοναδιαία καθυστέρηση. Σε αναλογικές υλοποιήσεις, η καθυστέρηση μπορεί να υλοποιηθεί ως συσκευή αποθήκευσης φορτίου (όμοια με τους πυκνωτές). Στα διαγράμματα που θα χρησιμοποιήσουμε, θα συμβολίσουμε την καθυστέρηση με τον όρο z^{-1} , όπως στο Σχήμα.

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν τώρα να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα για το σύστημα που περιγράφεται ως

$$y[n] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] = b_0x[n] \quad (16.435)$$

του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς του δίνεται ως

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}} \quad (16.436)$$



Σχήμα 16.47: Παράδειγμα διαγράμματος για την εξίσωση διαφορών της Σχέσης (16.435).

Το διάγραμμα που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 16.47. Όταν το σύστημα υλοποιείται είτε σε έναν υπολογιστή είτε σε ένα chip επεξεργασίας σήματος, δομές όπως αυτές του Σχήματος 16.47 χρησιμοποιούνται σαν βάσεις για το πρόγραμμα που υλοποιεί το σύστημα. Αν το σύστημα υλοποιείται με VLSI τεχνολογία, το διάγραμμα είναι η βάση για τον ορισμό της αρχιτεκτονικής του συστήματος, από πλευράς υλικού. Σε κάθε περίπτωση, τέτοια διαγράμματα δείχνουν ρητά ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί μνήμη για την αποθήκευση μεταβλητών (στην περίπτωση μας, για τα $y[n-1]$, $y[n-2]$). Επίσης, βλέπουμε από το Σχήμα 16.47 ότι η εξόδος $y[n]$ υπολογίζεται δημιουργώντας πρώτα το γινόμενο των $a_1 y[n-1]$ και $a_2 y[n-2]$, μετά προσθετοντάς τα μεταξύ τους, και τέλος, προσθέτοντας το αποτέλεσμα στο $b_0 x[n]$. Άρα, το διάγραμμα αναπαριστά με βολικό τρόπο την πολυπλοκότητα που σχετίζεται με τον αλγόριθμο υπολογισμού, τα βήματα του αλγορίθμου, και το ποσό του υλικού που απαιτείται για την πραγματοποίηση του συστήματος!

Ας γενικεύσουμε το παράδειγμά μας σε μεγαλύτερης τάξης εξίσωση διαφορών, ως

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (16.437)$$

η οποία έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (16.438)$$

Ξαναγράφοντας τη Σχέση (16.437) ως αναδρομικό τύπο υπολογισμού της εξόδου, θα έχουμε

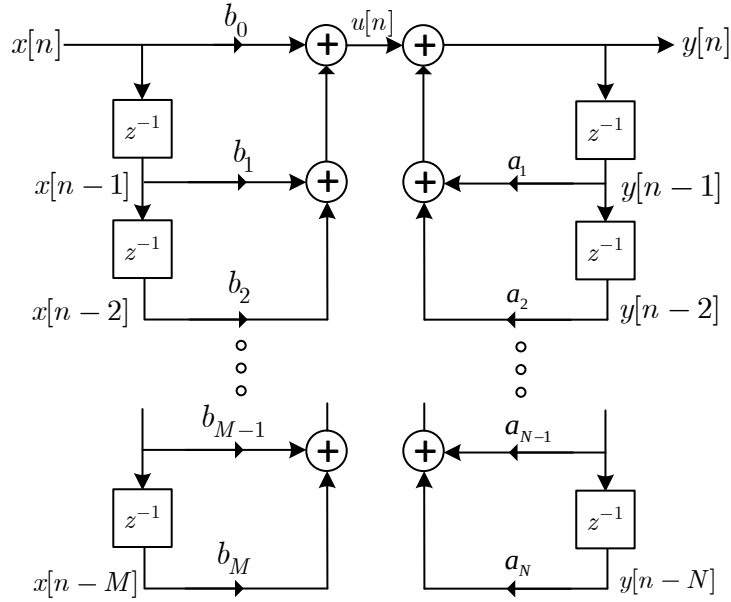
$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (16.439)$$

Το διάγραμμα που αναπαριστά αυτόν τον τρόπο υπολογισμού της εξόδου του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 16.48. Το διάγραμμα του Σχήματος 16.48 είναι μια ρητή απεικόνιση της Σχέσης (16.439). Συγκεκριμένα, αναπαριστά το ζεύγος εξισώσεων διαφορών

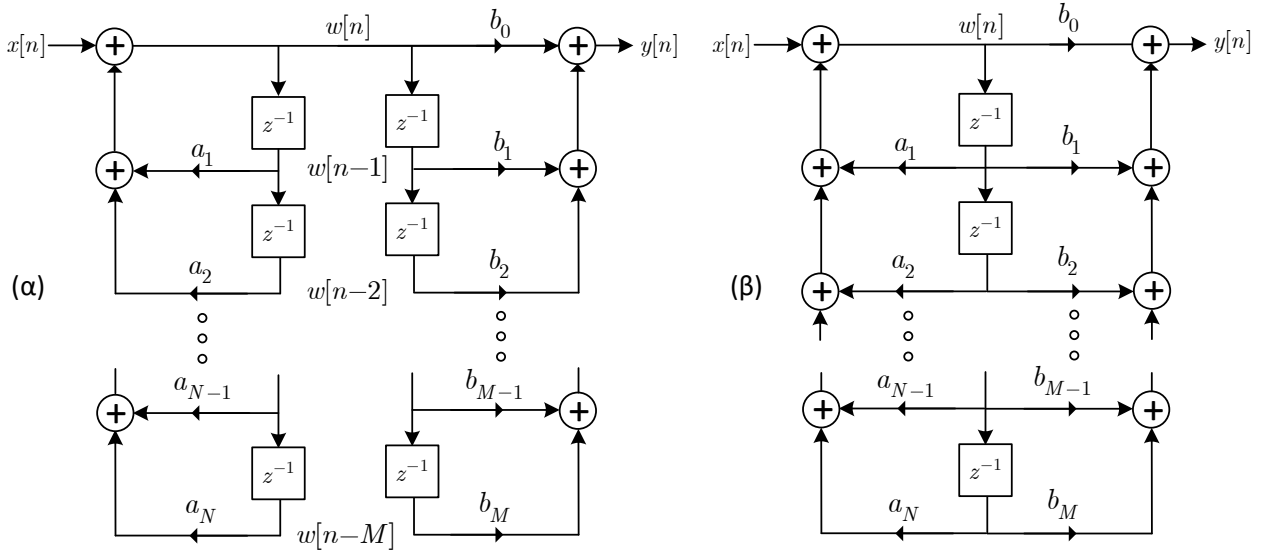
$$v[n] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (16.440)$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n] \quad (16.441)$$

Ένα διάγραμμα μπορεί να αναδιαταχθεί ή και τροποποιηθεί με πολλούς τρόπους χωρίς να μεταβάλλουμε τη συνάρτηση μεταφοράς που αναπαριστά. Κάθε μετατροπή ή αναδιάταξη αναπαριστά μια διαφορετική υλοποίηση του ίδιου συστήματος, δηλ. έναν διαφορετικό υπολογιστικό αλγόριθμο για το ίδιο σύστημα. Για παράδειγμα, το παράδειγμα του Σχήματος 16.48 μπορεί να ιδωθεί ως δυο συστήματα σε σειρά, με το πρώτο να υπολογίζει το $v[n]$ από το $x[n]$, και το δεύτερο να υπολογίζει το $y[n]$ από το $v[n]$. Δεδομένου ότι καθένα από αυτά τα δυο συστήματα είναι ΓΧΑ (θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας για τους καταχωρητές), η σειρά με την οποία βρίσκονται τα δυο συστήματα στο διάγραμμα μπορεί να αλλάξει, χωρίς να επηρεάζει αυτό το συνολικό σύστημα! Αυτή η αναδιάταξη φαίνεται στο Σχήμα 16.49(α). Στο Σχήμα 16.49(α) έχουμε υποθέσει ότι η τάξη αριθμητή και παρονομαστή είναι ίδια ($M = N$). Αν είναι διαφορετική, τότε απλά κάποιοι συντελεστές a_k ή b_l θα απαλειφθούν από το Σχήμα, και οι αντίστοιχοι κλάδοι θα εξαφανιστούν.



Σχήμα 16.48: Παράδειγμα διαγράμματος για την εξίσωση διαφορών της Σχέσης (16.437).



Σχήμα 16.49: Αναδιάταξη διαγράμματος (α) για την εξίσωση διαφορών της Σχέσης (16.437) και (β) ίδιο διάγραμμα με λιγότερες θέσεις μνήμης.

Αν δούμε τα δυο αυτά διαγράμματα με όρους συνάρτησης μεταφοράς, το Σχήμα 16.48 μπορεί να ιδωθεί ως η υλοποίηση του $H(z)$ μέσω της γραφής του ως

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left[\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right] \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} \quad (16.442)$$

ή ισοδύναμα, ως το ζεύγος εξισώσεων

$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{l=0}^M b_l z^{-l} \right) X(z) \quad (16.443)$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left[\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right] V(z) \quad (16.444)$$

Από την άλλη μεριά, το διάγραμμα του Σχήματος 16.49(α) μπορεί να ιδωθεί ως η υλοποίηση του $H(z)$ μέσω της γραφής του ως

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} \left[\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right] \quad (16.445)$$

ή ισοδύναμα, ως το ζεύγος εξισώσεων

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left[\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right] X(z) \quad (16.446)$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{l=0}^M b_l z^{-l} \right) W(z) \quad (16.447)$$

Τα διαγράμματα των Σχημάτων 16.48, 16.49(α) έχουν αρκετές σημαντικές διαφορές, τις οποίες πρέπει να επισημάνουμε. Στο διάγραμμα 16.48 υλοποιούνται πρώτα τα μηδενικά του $H(z)$, δηλ. το υποσύστημα $H_1(z)$, και μετά οι πόλοι, δηλ. το υποσύστημα $H_2(z)$. Στο διάγραμμα 16.49(β) υλοποιούνται πρώτα οι πόλοι του $H(z)$, δηλ. το υποσύστημα $H_2(z)$, και μετά τα μηδενικά, δηλ. το υποσύστημα $H_1(z)$. Θεωρητικά, η σειρά της υλοποίησης δεν επηρεάζει το συνολικό σύστημα. Όμως, όπως θα δούμε, όταν μια εξίσωση διαφορών υλοποιείται με αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας, μπορεί να υπάρξουν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα δυο συστήματα που είναι θεωρητικά ισοδύναμα. Μια ακόμα σημαντική διαφορά είναι ο αριθμός των καθυστερήσεων στα δυο διαγράμματα. Και στα δυο, απαιτούνται συνολικά $N + M$ στοιχεία καθυστέρησης (μνήμη). Όμως, το διάγραμμα του Σχήματος 16.49(α) μπορεί να επανασχεδιαστεί αν προσέξουμε ότι το ίδιο ακριβώς σήμα ($w[n]$) αποθηκεύεται δυο φορές, από μια φορά σε κάθε αλυσίδα υπολογισμών. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πετάξουμε τη μια αλυσίδα, χρησιμοποιώντας μόνο μια αλυσίδα θέσεων μνήμης, κοινή ανάμεσα στις δυο αλυσίδες υπολογισμών. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στο διάγραμμα του Σχήματος 16.49(β). Σε αυτό το διάγραμμα, οι συνολικές καθυστερήσεις (θέσεις μνήμης) είναι λιγότερες από αυτές των δυο προηγούμενων διαγραμμάτων. Για την ακρίβεια, οι θέσεις μνήμης τώρα είναι ο ελάχιστος αριθμός θέσεων μνήμης m που απαιτείται για την υλοποίηση ενός συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ όπως στη Σχέση (16.438), και δίνεται εν γένει από τη σχέση

$$m = \max(N, M) \quad (16.448)$$

Μια υλοποίηση η οποία γίνεται με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων καθυστέρησης αναφέρεται συχνά ως υλοποίηση *κανονικής μορφής* - *canonic form*. Η μη κανονική μορφή υλοποίησης που φαίνεται στο Σχήμα 16.48 αναφέρεται ως υλοποίηση Direct Form I ενός γενικού συστήματος τάξης N , επειδή είναι μια ευθεία (direct) υλοποίηση της εξίσωσης διαφορών. Το διάγραμμα του Σχήματος 16.49(β) αναφέρεται συχνά ως υλοποίηση Direct Form II ή Canonic Direct Form.

Ας δούμε ένα μικρό παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.32:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

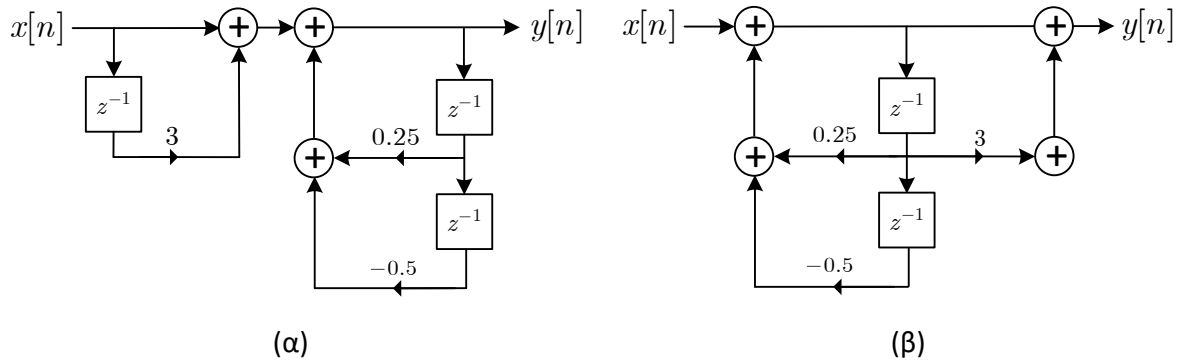
$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \quad (16.449)$$

Σχεδιάστε τις υλοποιήσεις Direct Form I, II.

Λύση:

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με τη Σχέση (16.438), παρατηρούμε ότι $b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Έτσι, το Direct Form I και Direct Form II διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 16.50. Προσέξτε ότι οι συντελεστές του παρονομαστή (πλην της μονάδας του πρώτου συντελεστή) έχουν αντίθετα πρόσημα από αυτά στην συνάρτηση μεταφοράς. Επίσης, προσέξτε ότι η Direct Form II σχεδίαση απαιτεί μόνο δυο καθυστερήσεις, μια λιγότερη από τις τρεις που απαιτεί η υλοποίηση σε Direct Form I.

Αυτή λοιπόν είναι μια όψη: της σχεδίασης των διαγραμμάτων με τους παραπάνω τρόπους και με όσους άλλους θα δούμε στη συνέχεια. Υπάρχει και η άλλη όψη, αυτή της εύρεσης της εξίσωσης διαφορών ενός δεδομένου διαγράμματος – το οποίο μπορεί να είναι από πολύ απλό ως αρκετά πολύπλοκο! Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι όμως πάντα η ίδια:



Σχήμα 16.50: Direct Form I και II για το σύστημα του Παραδείγματος 16.32.

- Τοποθετούμε στην έξοδο κάθε αθροιστή (πλην αυτού που παράγει την έξοδο) μια επιπλέον μεταβλητή.
- Γράφουμε τις εξισώσεις διαφορών που αναπαριστούν κάθε τέτοια μεταβλητή, μαζί με τη μεταβλητή της εξόδου.
- Μεταφέρουμε το σύνολο των εξισώσεων στο χώρο του Z. Οι εξισώσεις διαφορών μετατρέπονται σε απλές αλγεβρικές εξισώσεις.
- Προσπαθούμε να απαλείψουμε όλες τις ενδιάμεσες μεταβλητές που εισάγαμε και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση που σχετίζει την είσοδο $X(z)$ με την έξοδο $Y(z)$.
- Φέρνουμε την εξίσωση πίσω στο χώρο του χρόνου.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.33:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από το Σχήμα 16.51(α). Βρείτε μια εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Λύση:

Κατ' αρχάς αναγνωρίζουμε ότι το διάγραμμα αυτό δεν είναι μια από τις μορφές που έχουμε δει ως τώρα, οπότε δεν μπορούμε να βρούμε την εξίσωση διαφορών με απλή επισκόπηση. Βάζοντας επιπλέον μεταβλητές στο όπου χρειάζεται, καταλήγουμε στο Σχήμα 16.51(β). Οπότε θα είναι

$$y[n] = f[n] + x[n] \quad (16.450)$$

$$g[n] = y[n - 1] + p[n - 1] \quad (16.451)$$

$$p[n] = g[n] + y[n - 2] \quad (16.452)$$

$$w[n] = p[n] + f[n - 1] \quad (16.453)$$

$$f[n] = w[n] + p[n - 1] \quad (16.454)$$

στις οποίες κάνοντας μετασχ. Z, θα έχουμε

$$Y(z) = F(z) + X(z) \quad (16.455)$$

$$G(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-1}P(z) \quad (16.456)$$

$$P(z) = G(z) + z^{-2}Y(z) \quad (16.457)$$

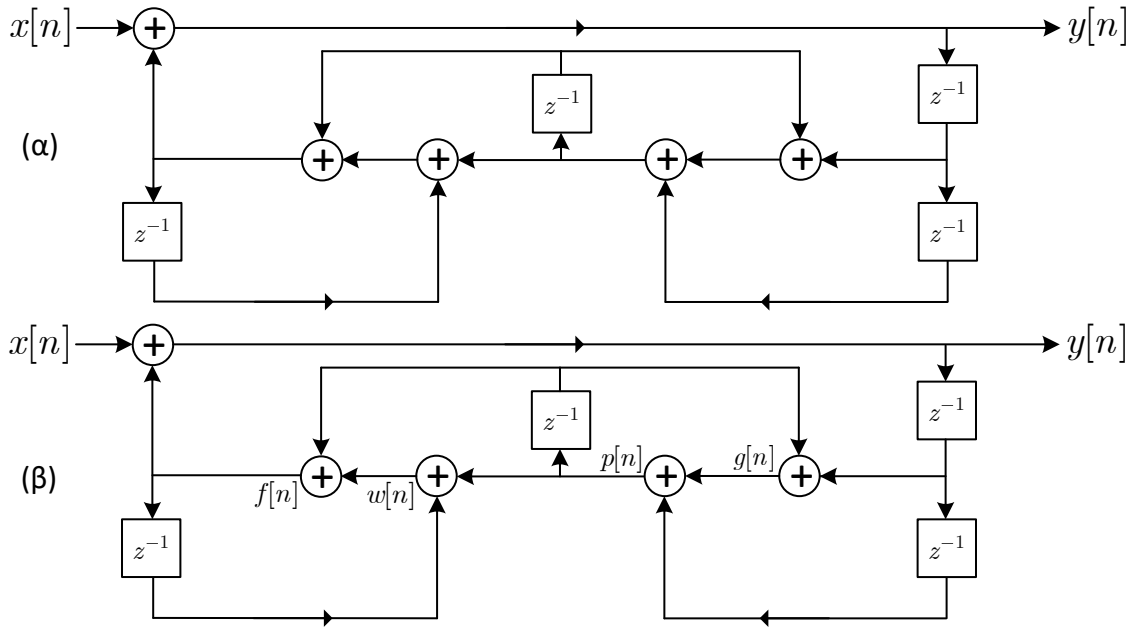
$$W(z) = P(z) + z^{-1}F(z) \quad (16.458)$$

$$F(z) = W(z) + z^{-1}P(z) \quad (16.459)$$

και αντικαθιστώντας, θα έχουμε

$$Y(z) = F(z) + X(z) \quad (16.460)$$

$$G(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-1}(G(z) + z^{-2}Y(z)) = z^{-1}Y(z) + z^{-1}G(z) + z^{-3}Y(z) \quad (16.461)$$



Σχήμα 16.51: Διάγραμμα Παραδείγματος 16.33.

$$= \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}} Y(z) \quad (16.462)$$

$$F(z) = W(z) + z^{-1}P(z) = G(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}F(z) + z^{-1}(G(z) + z^{-2}Y(z)) \quad (16.463)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} (G(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}G(z) + z^{-3}Y(z)) \quad (16.464)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} \left(\frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}} Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1} \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}} Y(z) + z^{-3}Y(z) \right) \quad (16.465)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}} Y(z) \quad (16.466)$$

και άρα τελικά από τη Σχέση (16.460), είναι

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}} Y(z) + X(z) \quad (16.467)$$

$$\frac{1 - 3z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} Y(z) = X(z) \quad (16.468)$$

$$(1 - 3z^{-1} - z^{-2} - z^{-3})Y(z) = (1 - 2z^{-1} + z^{-2})X(z) \quad (16.469)$$

Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$y[n] - 3y[n-1] - y[n-2] - y[n-3] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] \quad (16.470)$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση.

Όπως θα ξέρετε ήδη, τα συστήματα μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες: τα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR), και τα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR). Ας δούμε πόσο διαφορετικά είναι τα διαγράμματα για κάθε κατηγορία.

16.8.2 Βασικές Δομές IIR Συστημάτων

Ας ξεκινήσουμε από τα IIR συστήματα. Θα δούμε εδώ ότι υπάρχουν αρκετά διαφορετικά διαγράμματα που υλοποιούν μια συγκεκριμένη συνάρτηση μεταφοράς. Η κατάλληλη επιλογή διαγράμματος πρέπει να λάβει υπόψη της διάφορα θέματα, όπως η υπολογιστική πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, πολύ επιθυμητές είναι οι δομές με όσο γίνεται λιγότερους πολλαπλασιασμούς και καθυστερήσεις (θέσεις μνήμης). Αυτό ισχύει γιατί ο πολλαπλασιασμός

είναι γενικά χρονοβόρος και κοστίζει σε ψηφιακό υλικό, και γιατί κάθε καθυστέρηση αντιστοιχεί σε έναν καταχωρητή μνήμης. Έτσι, η μείωση στον αριθμό των πολλαπλασιασμών συνεπάγεται αύξηση της ταχύτητας, και η μείωση στον αριθμό καθυστερήσεων συνεπάγεται μείωση στις απαιτήσεις μνήμης.

Οι προδιαγραφές που μπορεί κανείς να θέσει σε μια δομή δεν εξαντλούνται στις παραπάνω, αν και αυτές θα μας απασχολήσουν στο παρόν σύγγραμμα. Παραδείγματος χάριν, σε μοντέρνες υλοποιήσεις υλικού το εμβαδό του chip είναι σημαντική παράμετρος, ενώ η απλότητα και η αριθρωτή υλοποίηση είναι επίσης επιθυμητά στοιχεία. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τέτοιες λεπτομέρειες μπορεί να δει τα [88], [118], [119], [123].

16.8.2.1 Direct Forms

Ήδη έχουμε συζητήσει για τη μορφή ενός Direct Form διαγράμματος, τόσο του Direct Form I όσο και του II. Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (16.471)$$

η οποία ανταποκρίνεται στη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (16.472)$$

Η σχεδίαση των διαγραμμάτων είναι τέτοια ώστε κάθε αθροιστής να έχει το πολύ δυο εισόδους – στην πράξη μπορεί να έχει περισσότερες εισόδους, αλλά όπως είπαμε και νωρίτερα, αυτή η “σύμβαση” των δυο εισόδων έχει ως αποτέλεσμα διαγράμματα που είναι πιο κοντά σε προγράμματα και αρχιτεκτονικές υλοποίησης των υπολογισμών που απαιτούνται για μια εξίσωση διαφορών που αναπαριστά ένα διάγραμμα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.34:

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.75z^{-2}} \quad (16.473)$$

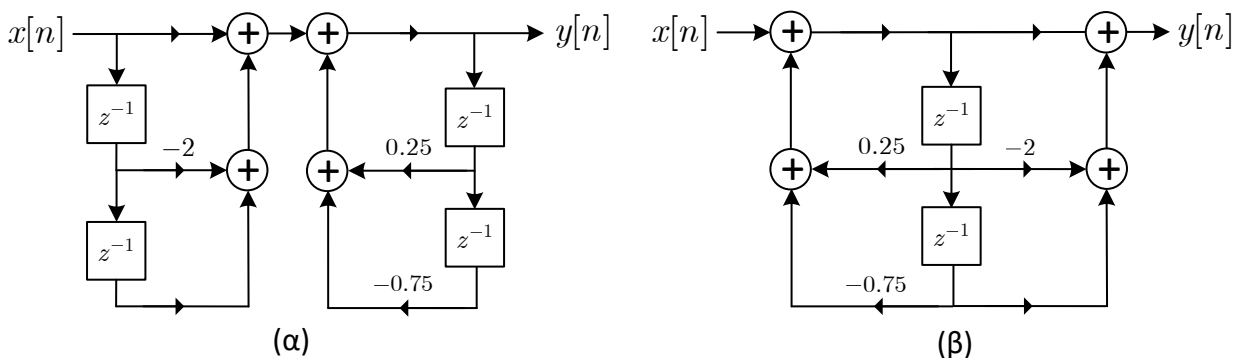
Σχεδιάστε τα διαγράμματα Direct Form I, II.

Λύση:

Μπορούμε να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα Direct Form I, II απευθείας, καθώς η συνάρτηση μεταφοράς είναι γραμμένη σε – σχεδόν – βολική μορφή. Μπορούμε να γράψουμε ξανά τη Σχέση (16.473) ως

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - (0.25z^{-1} - 0.75z^{-2})} \quad (16.474)$$

Έτσι, καταλήγουμε στο Σχήμα 16.52.



Σχήμα 16.52: Direct Form I, II του Παραδείγματος 16.34.

16.8.2.2 Μορφή σε Σειρά - Cascade Form

Τα διαγράμματα Direct Form προέρχονται από την απλή υλοποίηση των πολωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, όπως αυτοί παρουσιάζονται στη συνάρτηση μεταφοράς. Αν όμως παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή, τότε θα έχουμε

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - e_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \quad (16.475)$$

με $M = M_1 + 2M_2$ και $N = N_1 + 2N_2$. Σε αυτήν την έκφραση, οι όροι πρώτης τάξης αναπαριστούν μηδενικά, e_k , και πόλους c_k , στον πραγματικό άξονα. Οι όροι δεύτερης τάξης αναπαριστούν συζυγή ζεύγη μιγαδικών μηδενικών, g_k, g_k^* , και πόλων d_k, d_k^* . Προφανώς η παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς ανταποκρίνεται σε ένα πραγματικό σύστημα. Η γραφή αυτή αναπαριστά μια κατηγορία δομών που περιέχουν σε σειρά όρους πρώτης και δεύτερης τάξης, ως υποσυστήματα. Υπάρχει αρκετή ελευθερία στην επιλογή της σύνθεσης των υποσυστημάτων και στη σειρά με την οποία υλοποιούνται. Στην πράξη βέβαια είναι συχνά επιθυμητή η υλοποίηση σε σειρά με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό υπολογισμών και μνήμης. Μια δομή σε σειρά – που έχει πολλά πλεονεκτήματα – μπορεί να πραγματοποιηθεί συνδυάζοντας ζεύγη πραγματικών όρων και συζυγών μιγαδικών σε όρους δεύτερης τάξης, έτσι ώστε η Σχέση (16.475) να γραφεί ως

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}} \quad (16.476)$$

όπου $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$. Γράφοντας τη συνάρτηση μεταφοράς στη μορφή αυτή, υποθέσαμε ότι $M \leq N$ και ότι οι πραγματικοί πόλοι και τα πραγματικά μηδενικά συνδυάζονται σε ζεύγη. Τα επιμέρους δεύτερης τάξης υποσυστήματα μπορούν να υλοποιηθούν είτε με Direct Form I είτε με Direct Form II, με τη δεύτερη να προτιμάται όταν θέλουμε να είμαστε οικονομικοί σε στοιχεία καθυστέρησης και στοιχεία πολλαπλασιασμού.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.35:

Έστω το σύστημα

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}} \quad (16.477)$$

Υλοποιείστε το παραπάνω σύστημα σε σειρά με χρήση Direct Form I, II διαγραμμάτων.

Λύση:

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{(1 + 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})} \quad (16.478)$$

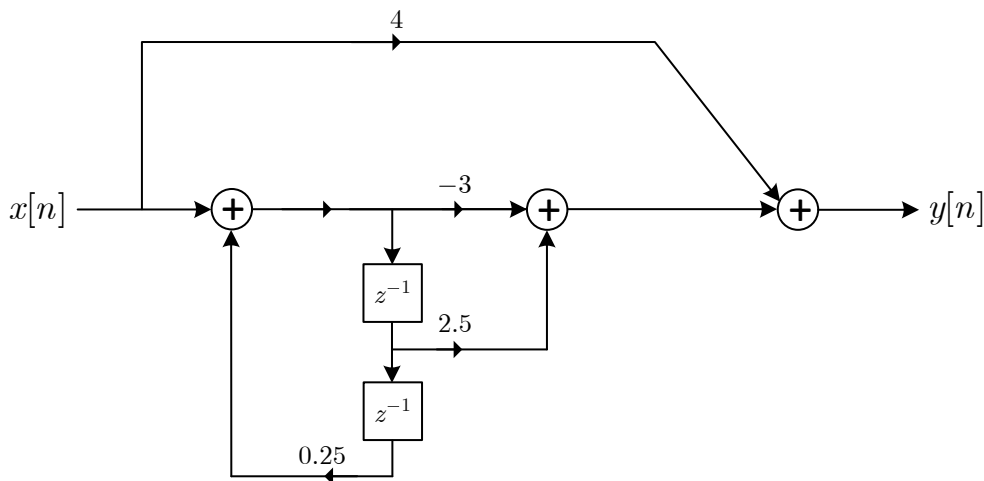
$$= \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} \quad (16.479)$$

Η υλοποίηση σε σειρά με χρήση Direct Form I, II διαγράμματα φαίνεται στο Σχήμα 16.53. ■

Ένας άλλος ορισμός της μορφής σε σειρά είναι ως ακολούθως:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + \hat{b}_{1k}z^{-1} + \hat{b}_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}} \quad (16.480)$$

όπου έχουμε διαιρέσει κάθε όρο του αριθμητή με το b_{0k} , παίρνοντας έτσι νέους συντελεστές $\hat{b}_{ik} = \frac{b_{ik}}{b_{0k}}$, για $i = 1, 2$ και $k = 1, 2, \dots, N_s$. Αυτή η μορφή του $H(z)$ προτείνει μια σχεδίαση σε σειρά με υποσυστήματα δεύτερης τάξης που απαιτούν τέσσερις πολλαπλασιασμούς, με συνολική σταθερά b_0 για όλο το σύστημα. Αυτή η μορφή σε σειρά έχει τον ίδιο αριθμό πολλαπλασιασμών με τις Direct Form δομές.

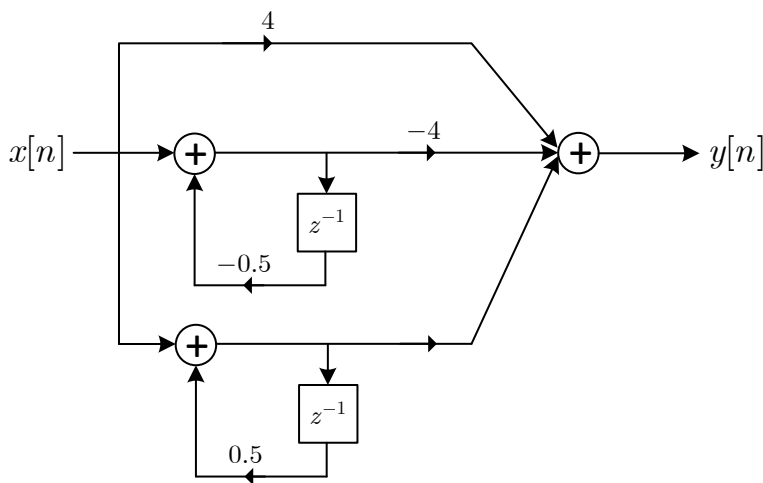


Σχήμα 16.54: Υλοποίηση Parallel Form με δευτεροβάθμιο υποσύστημα Παραδείγματος 16.36.

γραφει ως άθροισμα στοιχείων πρώτης τάξης, δηλ. ως

$$H(z) = 4 + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{4}{1 + 0.5z^{-1}} \quad (16.485)$$

το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί ως παράλληλης μορφής διάγραμμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 16.55.



Σχήμα 16.55: Υλοποίηση Parallel Form με πρωτοβάθμια υποσυστήματα Παραδείγματος 16.36.

16.8.2.4 Ανάστροφη Μορφή - Transposed Form

Έχουμε δει ως τώρα πόσες διαφορετικές υλοποιήσεις μιας δεδομένης εξίσωσης διαφορών υπάρχουν. Στην πραγματικότητα υπάρχουν ακόμα περισσότερες τις οποίες δεν μπορούμε να εξαντλήσουμε εδώ. Όμως ας αναφέρουμε μια ακόμα τέτοια διαδικασία, που ονομάζεται **αναστροφή - reversal**, και μας παρέχει μερικές καλές εναλλακτικές μορφές διαγραμμάτων, με ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Ας μελετήσουμε λοιπόν αυτή τη διαδικασία.

Οι κανόνες για την εύρεση του ανάστρου διαγράμματος (οι οποίοι δεν αποδεικνύονται εδώ, μια και προέρχονται από τη θεωρία γράφων – ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να δει το [124]) είναι οι εξής:

1. Αναστρέφουμε τη φορά όλων των κλάδων του διαγράμματος.
2. Κάθε αθροιστής μετατρέπεται σε διακλαδωτής, και το αντίστροφο.
3. Αλλάζουμε θέση μεταξύ εισόδου και εξόδου.

4. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ξανά, αναστρέφοντας το ώστε να παρουσιάζεται η είσοδος στα αριστερά.

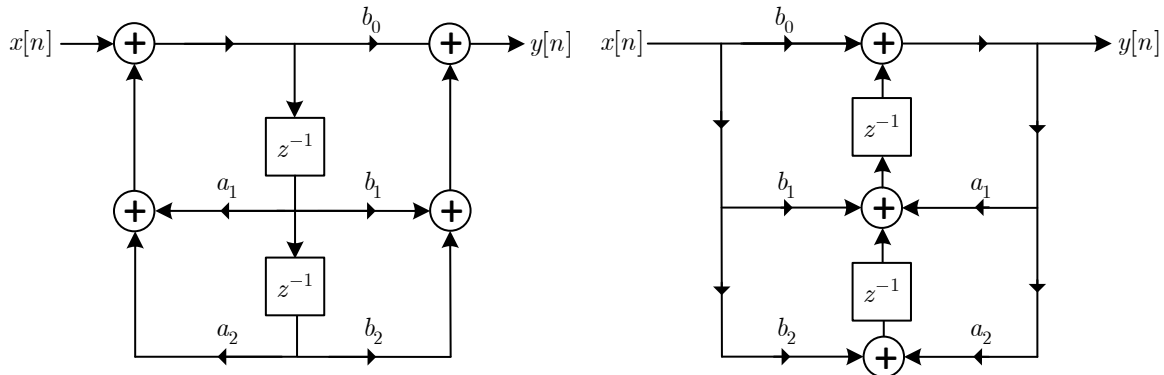
Ας το δούμε στην πράξη σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.37:

Έστω το Direct Form II διάγραμμα του Σχήματος 16.56(α), που αντιστοιχεί σε ένα σύστημα δευτέρας τάξης με πόλους και μηδενικά. Σχεδιάστε την ανάστροφη μορφή του διαγράμματός του.

Λύση:

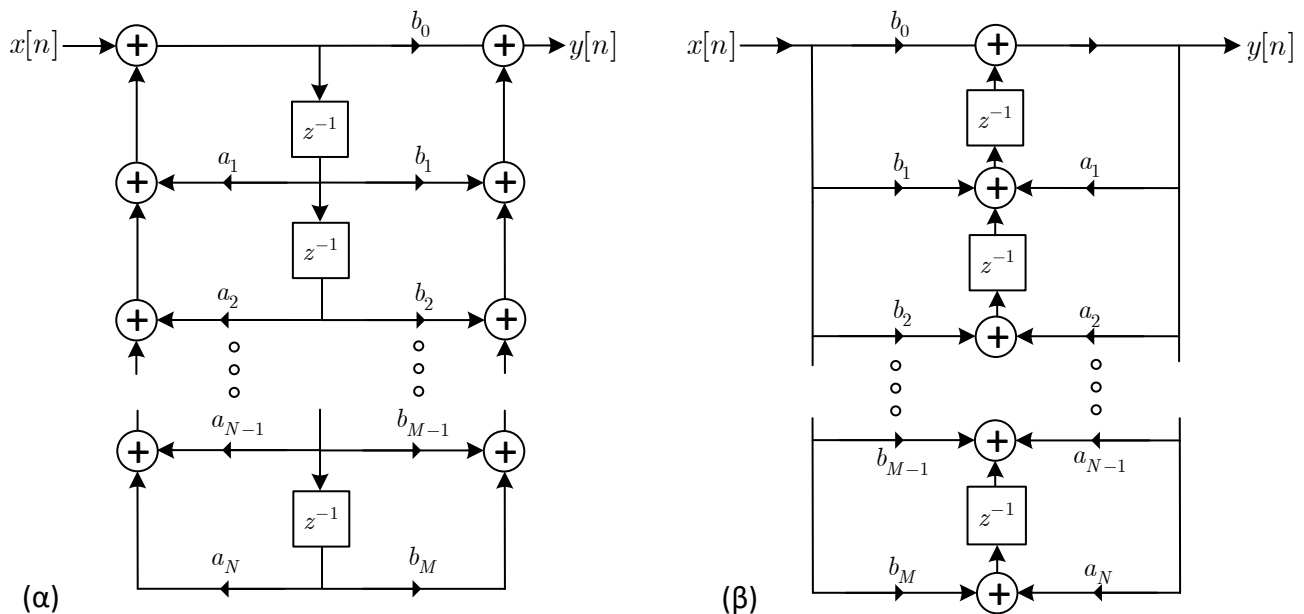
Εφαρμόζοντας τους κανόνες 1 – 4, καταλήγουμε στο ανάστροφο διάγραμμα του Σχήματος 16.56(β). Μπορείτε να



Σχήμα 16.56: (α) Direct Form II και (β) ανάστροφο διάγραμμα Παραδείγματος 16.37.

δείξετε ότι οι εξισώσεις διαφορών των δυο διαγραμμάτων περιγράφουν το ίδιο σύστημα;

Η εφαρμογή των κανόνων για την εύρεση του αναστρέφου διαγράμματος μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε από τα διαγράμματα που συναντήσαμε ως τώρα. Ας γενικεύσουμε αυτήν την εφαρμογή, ξεκινώντας από ένα Direct Form II διάγραμμα, και καταλήγοντας σε μια ανάστροφη δομή. Το Σχήμα 16.57 δείχνει τη μετατροπή αυτή σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Όμοια συμβαίνει και η μετατροπή ενός Direct Form I διαγράμματος σε transposed μορφή. Μπορούμε να



Σχήμα 16.57: (α) Direct Form II και (β) ανάστροφο διάγραμμα.

κάνουμε μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση αν συγκρίνουμε τα δυο διαγράμματα του Σχήματος 16.57. Ενώ στο Direct Form II διάγραμμα, υλοποιούμε πρώτα τους πόλους και μετά τα μηδενικά, βλέπουμε ότι στο transposed διάγραμμα

υλοποιούμε πρώτα τα μηδενικά και μετά τους πόλους, χωρίς την επιπλέον χρήση μνήμης που είχαμε όταν το κάναμε αυτό στη Direct Form I σχεδίαση! Αυτό είναι μερικές φορές σημαντικό όταν υλοποιούμε αυτά τα συστήματα με αναλογικά ή ψηφιακά κυκλώματα.

Τέλος, η αναστροφή διαγράμματος τονίζει ακόμα περισσότερο τη μεγάλη ποικιλία των δομών υλοποίησης που υπάρχει για ένα δεδομένο σύστημα που περιγράφεται από μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς. Η αναστροφή μας παρέχει μια απλή διαδικασία για τη δημιουργία νέων δομών συστημάτων. Τα προβλήματα που προέκυψαν από την υλοποίηση τέτοιων συστημάτων σε μηχανές πεπερασμένης ακρίβειας έδωσαν κίνητρο στους ερευνητές να αναπτύξουν ακόμα περισσότερες κατηγορίες δομών. Αν θέλετε, μπορείτε να ανατρέξετε σε διάφορες πηγές, όπως το [118].

16.8.3 Βασικές Δομές FIR Συστημάτων

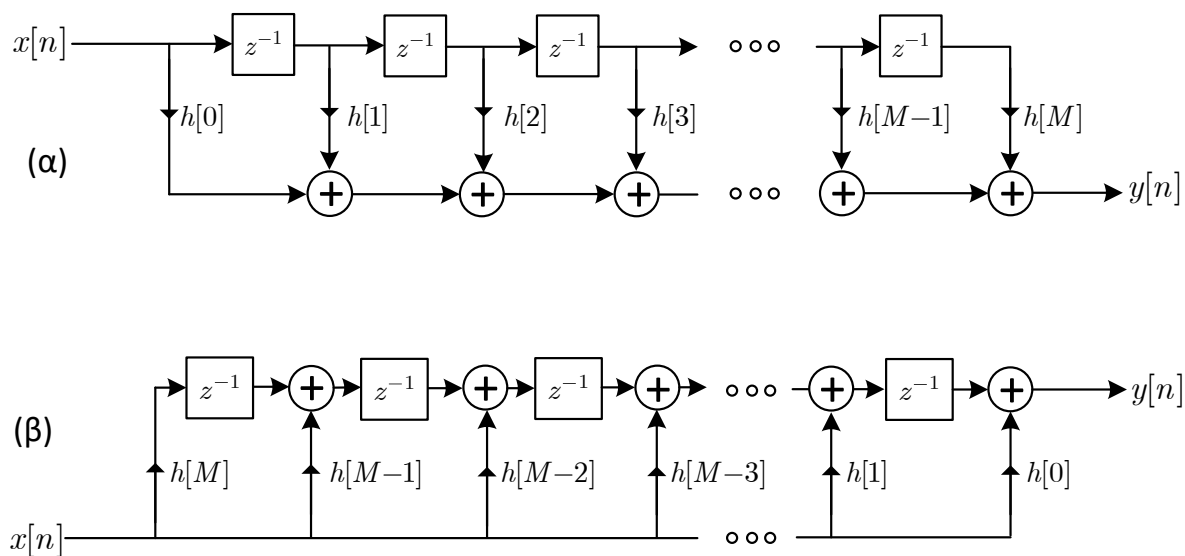
Για τα FIR συστήματα, τα πράγματα είναι σχετικά απλούστερα. Παρ' ότι οι δομές Direct Form, σειριακές, και παράλληλες που συζητήσαμε προηγουμένως αφορούν IIR συστήματα, τα οποία φυσικά περιέχουν τα FIR ως ειδική περίπτωση, υπάρχουν ανεξάρτητες δομές, ειδικά σχεδιασμένες για FIR συστήματα.

16.8.3.1 Direct Forms

Για αιτιατά FIR συστήματα, η συνάρτηση μεταφοράς έχει μόνο μηδενικά, και πόλους μόνο στο $z = 0$. Οπότε η εξίσωση διαφορών γράφεται ως

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (16.486)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι μορφές Direct Form I, II που έχουμε ήδη δει, μετατρέπονται σε μια μόνο Direct Form, αυτή του Σχήματος 16.58(α), η οποία παρουσιάζεται μαζί με την ανάστροφη μορφή της, ακολουθώντας τους κανόνες που περιγράψαμε νωρίτερα. Η Direct Form σχεδίαση λέγεται και Transversal Form.



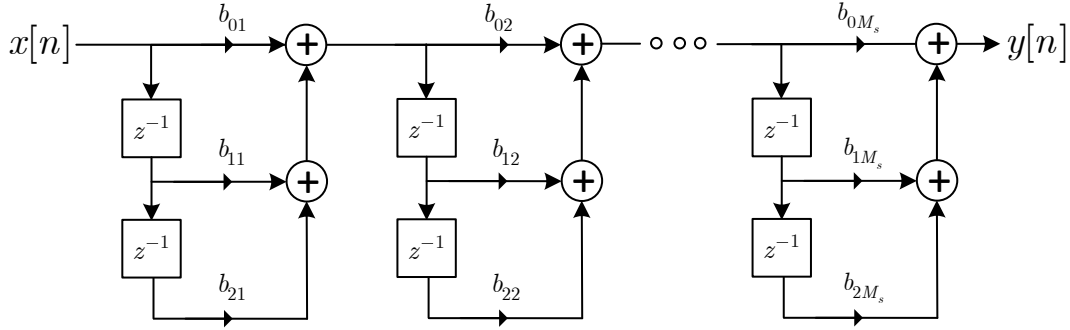
Σχήμα 16.58: (α) Direct Form και (β) ανάστροφο διάγραμμα για ένα FIR σύστημα.

16.8.3.2 Μορφή σε Σειρά - Cascade Form

Η σειριακή μορφή ενός FIR συστήματος προέρχεται από την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου της συνάρτησης μεταφοράς, δηλ.

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}) \quad (16.487)$$

όπου $M_s = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$. Μια γενική αναπαράσταση της μορφής σε σειρά φαίνεται στο Σχήμα 16.59.



Σχήμα 16.59: Μορφή σε σειρά για ένα FIR σύστημα.

16.8.3.3 Δομές για Συστήματα Γραμμικής Φάσης

Μια ειδική κατηγορία FIR συστημάτων είναι αυτά που έχουν γραμμική φάση. Έχουμε δείξει ότι τα συστήματα αυτά ικανοποιούν κάποια συμμετρία, όπως

$$h[M - n] = h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (16.488)$$

για τα Τύπου I, II, ή

$$h[M - n] = -h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (16.489)$$

για τα Τύπου III, IV. Οποιαδήποτε κι αν ισχύει από τις δυο συμμετρίες, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για την υλοποίησή τους μπορεί να μειωθεί σχεδόν στο μισό! Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε ότι το M είναι άρτιος ακέραιος, και αντιστοιχεί σε ένα Τύπου I ή III σύστημα. Τότε:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n - k] \quad (16.490)$$

$$= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n - k] + h[M/2]x[n - M/2] + \sum_{k=M/2+1}^M h[k]x[n - k] \quad (16.491)$$

$$= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n - k] + h[M/2]x[n - M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M - k]x[n - M + k] \quad (16.492)$$

Για Τύπου I συστήματα, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n - k] + x[n - M + k]) + h[M/2]x[n - M/2] \quad (16.493)$$

ενώ για Τύπου III συστήματα, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n - k] + x[n - M + k]) \quad (16.494)$$

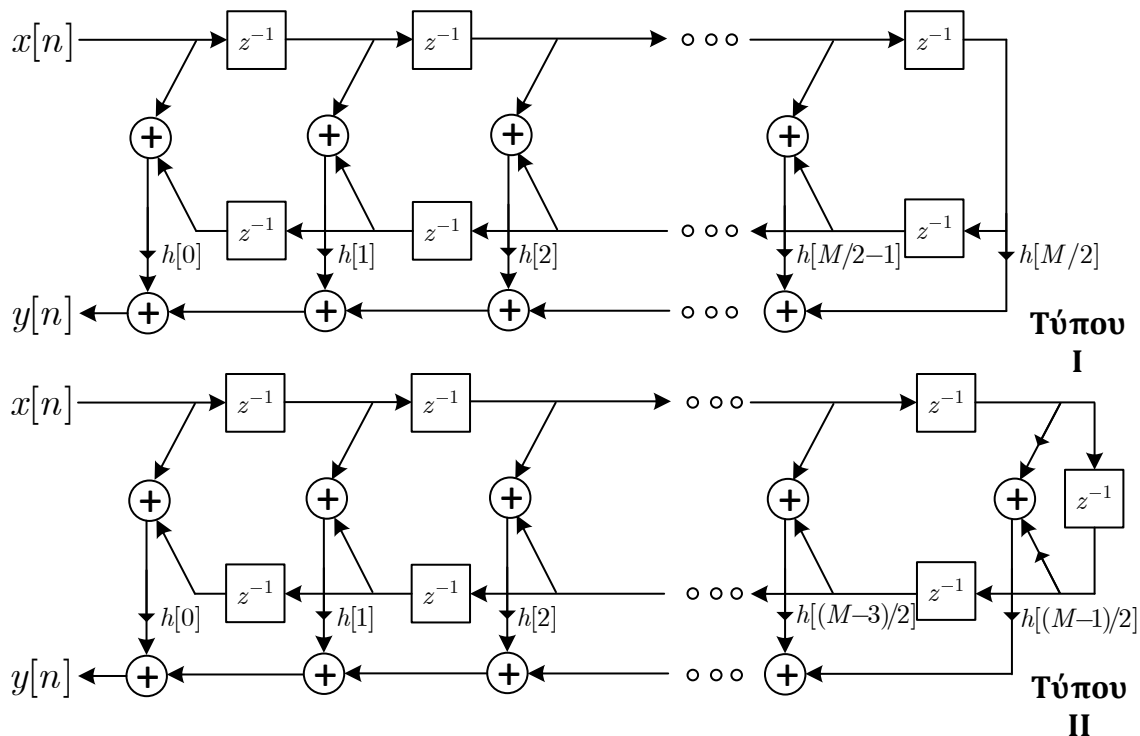
Αν δουλέψουμε αντίστοιχα για τα Τύπου II, IV συστήματα (με M περιττό δηλαδή), θα καταλήξουμε ότι για τα Τύπου II συστήματα, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n - k] + x[n - M + k]) \quad (16.495)$$

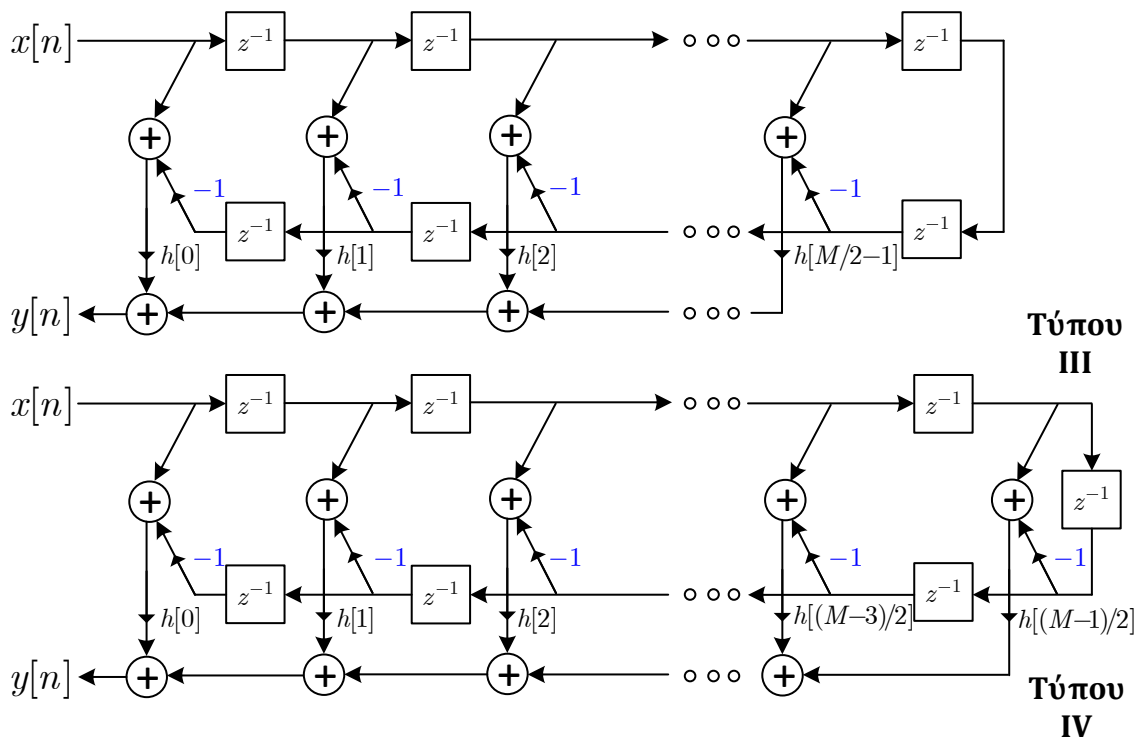
ενώ για τα Τύπου IV, θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n - k] - x[n - M + k]) \quad (16.496)$$

Μπορείτε να αποδείξετε τις παραπάνω σχέσεις στην Άσκηση 16.41. Προσέξτε ότι τα παραπάνω συστήματα έχουν $M/2 + 1$, $M/2$ ή $(M + 1)/2$ πολλαπλασιασμούς, αντί για M πολλαπλασιασμούς που θα είχαν αν τα υλοποιούσαμε



Σχήμα 16.60: Direct Forms για ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου I και II.



Σχήμα 16.61: Direct Forms για ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου III και IV.

σε γενική Direct Form. Τα διαγράμματα των παραπάνω συστημάτων Τύπου I και II φαίνονται στο Σχήμα 16.60, ενώ για τα αντίστοιχα των Τύπων III και IV δείτε το Σχήμα 16.61

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.38:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4] \quad (16.497)$$

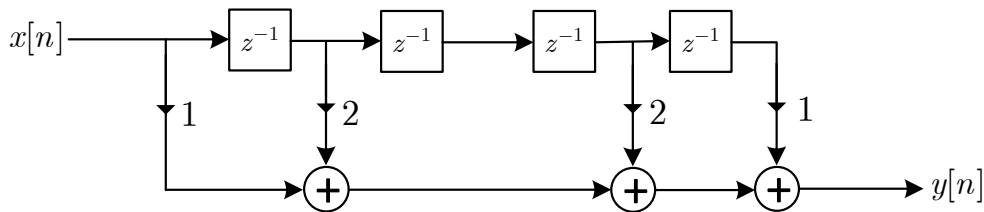
Συζητήστε και σχεδιάστε τη βέλτιστη (από πλευράς οικονομίας πόρων) υλοποίησή του.

Λύση:

Είναι εμφανές ότι το σύστημα είναι FIR και παρουσιάζει συμμετρία γύρω από το δείγμα $n_0 = 2$. Η παράμετρος M ισούται με 4, άρα είναι ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου I. Μια κλασική υλοποίηση Direct Form θα απαιτούσε:

- 2 πολλαπλασιασμούς (εξαιρώντας πολλαπλασιασμούς με τη μονάδα)
- 4 θέσεις μνήμης
- 3 αθροιστές

Δείτε τη στο Σχήμα (16.62). Αν εκμεταλλευτούμε την υλοποίηση που συζητήσαμε σε αυτήν την Παράγραφο, τότε

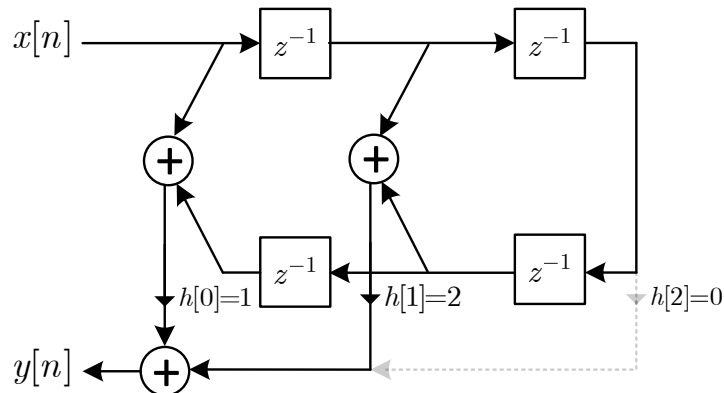


Σχήμα 16.62: Direct Form υλοποίηση για το FIR σύστημα Παραδείγματος 16.38.

μπορούμε να εξοικονομήσουμε πόρους. Η εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα αυτό είναι η

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 2x[n-3] + x[n-4] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[3]x[n-3] + h[4]x[n-4] \quad (16.498)$$

Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 16.63. Παρατηρήστε ότι λόγω του ότι $h[M/2] = h[2] = 0$, ένας από τους



Σχήμα 16.63: Οικονομική υλοποίηση για το FIR σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου I Παραδείγματος 16.38.

κλάδους (σημειωμένος με γκριζο χρώμα) του διαγράμματος μπορεί να παραλειφθεί. Το διάγραμμα αυτό διαθέτει

- 4 θέσεις μνήμης
- 1 πολλαπλασιαστή
- 3 αθροιστές

Έτσι εξοικονομούμε μια πράξη πολλαπλασιασμού σε σχέση με μια Direct Form υλοποίηση!