

Κεφάλαιο 12

Ανάλυση Σημάτων και Συστημάτων στο Πεδίο του Διακριτού Χρόνου

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε για το πως μπορούμε να μελετάμε συστήματα στο πεδίο του διακριτού χρόνου. Η ανάλυσή μας θα ακολουθήσει την ίδια φιλοσοφία με αυτή του συνεχούς χρόνου (Κεφάλαιο 3).

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τα σήματα και τα συστήματα διακριτού χρόνου. Στο εξής, θα θεωρούμε ότι ένα σύστημα περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου από μια γραμμική **εξίσωση διαφορών** (και όχι διαφορική εξίσωση!) της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (12.1)$$

με a_k, b_l σταθερές.

12.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι λαμβάνετε μια φωτογραφία με την (ασπρόμαυρη, χάριν ευκολίας ☺) φωτογραφική σας μηχανή, όπως στο Σχήμα 12.1. Η ψηφιακή ασπρόμαυρη φωτογραφία δεν είναι τίποτε άλλο από μια διδιάστατη διάταξη από ακέραιες τιμές στο διάστημα $[0, 255]$ (8 bits). Κάθε τέτοια τιμή αποτελεί ένα pixel της εικόνας. Η συγκεκριμένη εικόνα είναι μεγέθους 512×512 pixels. Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε, κάποιο πρόβλημα κατά τη λήψη οδήγησε σε διαταραχή της εικόνας. Η διαταραχή αυτή έχει τη μορφή μαύρων και λευκών pixels και ονομάζεται – για προφανείς λόγους – ως *θόρυβος αλατιού και πιπεριού* (*salt and pepper noise*). Ένα pixel-αλάτι έχει τιμή 255 ενώ ένα pixel-πιπέρι έχει την τιμή 0.

Το πρόβλημα-ερώτημα που τίθεται είναι αν και πώς θα μπορούσαμε να ανακτήσουμε τη φωτογραφία μας; Υπάρχει κάποιο σύστημα που να μπορεί να αφαιρέσει το θόρυβο; Αν σκεφτείτε την εικόνα ως μια “συλλογή” από μονοδιάστατα σήματα (κάθε γραμμή της εικόνας είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου με 512 δείγματα), τότε μπορούμε να επεξεργαστούμε κάθε τέτοιο σήμα ξεχωριστά. Μια πολύ απλή ιδέα θα ήταν να σκεφτούμε το θόρυβο αλατιού και πιπεριού ως απότομες μεταβολές στην, εν γένει, ομαλή ακολουθία τιμών κατά “μήκος” του μονοδιάστατου σήματος. Έτσι, ένα φίλτρο “εξομάλυνσης” θα ήταν κατάλληλο για την περίπτωση. Το περίφημο *κυλιόμενο φίλτρο μέσης τιμής* - *moving average filter* είναι ένα σύστημα που μπορεί να “απαλύνει” τις απότομες μεταβολές που οφείλονται στο θόρυβο, και μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k] \quad (12.2)$$

Φυσικά ένα τέτοιο σύστημα δε λαμβάνει υπ’ όψη του τη διδιάστατη μορφή της εισόδου, μια και στο σύγγραμμα αυτό δεν αντιμετωπίζουμε διδιάστατα σήματα. Αν εφαρμόσουμε λοιπόν το παραπάνω σύστημα θεωρώντας ως είσοδο διαδοχικά τις γραμμές και τις στήλες του, θα πάρουμε το αποτέλεσμα του Σχήματος 12.2. Παρατηρήστε ότι ο θόρυβος είναι λιγότερος απ’ ό,τι πρίν, αλλά η φωτογραφία σας έχει “θολώσει”, δηλ. η ευκρίνειά της έχει χαθεί. Προφανώς το σύστημα της Σχέσης (12.2) δεν είναι το πιο πετυχημένο για το σκοπό που θέλουμε αλλά είναι ένα καλό παράδειγμα ενός πραγματικού συστήματος για μια πραγματική εφαρμογή, το οποίο σύστημα μάλιστα θα μελετήσουμε αργότερα!



Σχήμα 12.1: Φωτογραφία με θόρυβο αλατιού και πιπεριού.



Σχήμα 12.2: Φωτογραφία ως έξοδος από το σύστημα (12.2) εφαρμοζόμενο σε γραμμές και στήλες.

Ένα πιο δημοφιλές (και ικανότερο) σύστημα αφαίρεσης θορύβου αλατιού και πιπεριού είναι το περίφημο σύστημα *αναδρομικής μεσαίας τιμής* - *recursive median filter*, και περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = \text{median}(y[n - N], y[n - N + 1], \dots, y[n - 1], x[n], x[n + 1], \dots, x[n + N - 1], x[n + N]) \quad a, \quad N \in \mathbb{N} \quad (12.3)$$

όπου η συνάρτηση *median* διατάσσει τα ορίσματά της σε αύξουσα σειρά τιμών και επιλέγει ως έξοδο τη μεσαία τιμή σε αυτή τη διάταξη. Το παραπάνω σύστημα δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης δεν είναι και αιτιατό (απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου). Παρατηρήστε επίσης ότι απαιτεί κάποιες αρχικές τιμές της εξόδου, όπως η $y[n - N]$. Αυτό σημαίνει ότι για να εφαρμόσουμε το σύστημα στο pixel στη θέση $n = 0$, στην πρώτη γραμμή της εικόνας, χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-N], y[-N + 1], \dots, y[-1]$, οι οποίες αποτελούν *αρχικές συνθήκες* του συστήματος.

Πριν είμαστε σε θέση να εφαρμόζουμε τέτοια συστήματα πρέπει να είμαστε σε θέση να μπορούμε να προβλέψουμε την έξοδό τους σε απλούστερα, θεωρητικά, αλλά πολύ χρήσιμα (όπως θα δούμε) σήματα. Προς αυτήν την κατεύθυνση λοιπόν θα κινηθούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου.

12.2 Αποκρίσεις Μηδενικής Κατάστασης και Μηδενικής Εισόδου

Ένας εύκολος τρόπος για να υπολογίζουμε την έξοδο από τέτοια συστήματα, δεδομένης μιας συγκεκριμένης εισόδου, είναι η διάσπαση της εξόδου στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης** και στην **απόκριση μηδενικής εισόδου**. Έστω ότι εφαρμόζουμε λοιπόν μια είσοδο $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n = 0$. Η έξοδος του συστήματος είναι το αποτέλεσμα δυο ανεξάρτητων αιτιών:

1. των *αρχικών συνθηκών* του συστήματος, οι οποίες ονομάζονται *κατάσταση του συστήματος*, τη χρονική στιγμή $n = 0$
2. της εισόδου $x[n]$, για $n \geq 0$

Η έξοδος του συστήματος που απορρέει από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος για $n = 0$, θεωρώντας την είσοδο μηδενική ($x[n] = 0$), ονομάζεται **απόκριση μηδενικής εισόδου** - **zero-input response**. Η έξοδος του συστήματος που απορρέει από την παρουσία της μη μηδενικής εισόδου $x[n]$, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, ονομάζεται **απόκριση μηδενικής κατάστασης** - **zero-state response**. Όταν το σύστημα έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες, τότε το σύστημα θεωρείται πως βρίσκεται **σε ηρεμία**. Μπορούμε να εκφράσουμε την ολική έξοδο $y[n]$ του συστήματος ως το άθροισμα των παραπάνω δυο ανεξάρτητων αποκρίσεων ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \quad (12.4)$$

με $y_{zi}[n]$ και $y_{zs}[n]$ την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης αντίστοιχα.

Όπως στα συστήματα συνεχούς χρόνου, θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς ποιός είναι λόγος ύπαρξης αρχικών συνθηκών σε ένα *πραγματικό* σύστημα. Από μαθηματικής πλευράς, οι αρχικές συνθήκες είναι απαραίτητες για την εύρεση μοναδικής λύσης μιας εξίσωσης διαφορών. Όμως ποιά είναι η φυσική σημασία των αρχικών συνθηκών; Σε τι αντιστοιχούν σε πραγματικά συστήματα; Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε το σύστημα

$$y[n] = y[n-1] - x[n-1]x[n+1] \quad (12.5)$$

Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, αλλά και μη αιτιατό, γιατί η χρονική στιγμή n της εξόδου χρειάζεται τη χρονική στιγμή $n+1$ της εισόδου. Για την εφαρμογή του τη χρονική στιγμή $n=0$, χρειαζόμαστε την αρχική τιμή $y[-1]$, καθώς και την τιμή $x[-1]$, οι οποίες μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές. Η τιμή $y[-1]$ αποτελεί *αρχική συνθήκη* του συστήματος, και πρέπει να είναι αποθηκευμένη στη μνήμη (σε κάποιον καταχωρητή ή σε αποθηκευτικό χώρο). Ένα δεύτερο παράδειγμα, πιο οικείο στην επιστήμη Η/Υ, αποτελεί το σύστημα που υλοποιεί την ακολουθία *Fibonacci*:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] \quad (12.6)$$

Παρατηρήστε ότι για την εύρεση του όρου $y[0]$ απαιτούνται οι τιμές $y[-1]$, $y[-2]$, οι οποίες για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχουν τιμές 1 και -1 αντίστοιχα, και αποτελούν τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Ας μελετήσουμε αναλυτικά την έξοδο ενός συστήματος στις επιμέρους συνιστώσες των αρχικών συνθηκών και της εισόδου ξεχωριστά.

12.3 Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

Όπως αναφέραμε ήδη, η απόκριση μηδενικής εισόδου ορίζεται ως η έξοδος ενός συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, άρα και η έξοδος καθορίζεται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Αν και στη συνέχεια δε θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα η απόκριση μηδενικής εισόδου, καθώς θα θεωρούμε τα συστήματά μας σε *αρχική ηρεμία*¹, είναι ενδιαφέρον να δει κανείς τη μορφή και τον τρόπο υπολογισμού της απόκρισης μηδενικής εισόδου. Η μηδενική είσοδος μετατρέπει τη Σχέση (12.1) στην ακόλουθη

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{zi}[n-k] = 0 \quad (12.7)$$

Μπορεί κανείς να δείξει αναλυτικά ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n \quad (12.8)$$

με $\gamma, c \neq 0$ σταθερές. Έχοντας αυτό ως δεδομένο, αντικαθιστούμε στη Σχέση (12.7) και έχουμε

$$\sum_{k=0}^N a_k c\gamma^{(n-k)} = 0 \quad (12.9)$$

$$c\gamma^n \sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0 \quad (12.10)$$

Η μη τετριμμένη λύση της παραπάνω σχέσης δίνεται για

$$\sum_{k=0}^N a_k \gamma^{-k} = 0 \iff a_N \gamma^{-N} + a_{N-1} \gamma^{-N+1} + \dots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0 \quad (12.11)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1} \gamma^{-N+1} + \dots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0 \quad (12.12)$$

$$\gamma^{-N} (a_N + a_{N-1} \gamma + \dots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0 \quad (12.13)$$

¹ Δηλ. με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Άρα η $y_{zi}[n] = c\gamma^n$ είναι λύση της εξίσωσης διαφορών της Σχέσης (12.7) μόνον αν

$$a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N = 0 \quad (12.14)$$

Η παραπάνω ομογενής εξίσωση ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος, και το αντίστοιχο πολυώνυμο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος. Το τελευταίο, θεωρώντας $a_0 = 1$, μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) \cdots (\gamma - \gamma_N) = 0 \quad (12.15)$$

με $\gamma_i, i = 1, \dots, N$, τις ρίζες του πολυωνύμου, οι οποίες ονομάζονται **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος. Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την (12.7):

$$c_1\gamma_1^n, c_2\gamma_2^n, \dots, c_N\gamma_N^n \quad (12.16)$$

με $c_i, i = 1, \dots, N$, σταθερές. Ο προσδιορισμός αυτών των σταθερών εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_{zi}[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + \cdots + c_N\gamma_N^n = \sum_{k=1}^N c_k\gamma_k^n \quad (12.17)$$

για $n \geq 0$. Αν χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας βηματική συνάρτηση, μπορούμε να γράψουμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^N c_k\gamma_k^n u[n] \quad (12.18)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι διακριτές μεταξύ τους. Αν υπάρχουν ρίζες πολλαπλότητας $r \geq 2$ – έστω γ_1 αυτή η ρίζα – τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως

$$(\gamma - \gamma_1)^r (\gamma - \gamma_{r+1}) \cdots (\gamma - \gamma_N) \quad (12.19)$$

και μπορεί ναδειχθεί ότι η απόκριση μηδενικής εξόδου δίνεται από τη σχέση

$$y_{zi}[n] = (c_1 + c_2n + \cdots + c_r n^{r-1}) \gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \cdots + c_N\gamma_N^n \quad (12.20)$$

για $n \geq 0$, και ξανά με χρήση της βηματικής συνάρτησης, έχουμε

$$y_{zi}[n] = ((c_1 + c_2n + \cdots + c_r n^{r-1}) \gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \cdots + c_N\gamma_N^n) u[n] \quad (12.21)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^r c_i n^{i-1} \gamma_1^n + \sum_{k=r+1}^N c_k \gamma_k^n \right) u[n] \quad (12.22)$$

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 12.1:

Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

(α') $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$ με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0$ και $y[-1] = 1$

(β') $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n] + 3x[n-1]$ με αρχικές συνθήκες $y[-1] = 2$ και $y[-2] = -1$

(γ') $y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 2x[n]$ με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1$ και $y[-1] = 0$

Λύση:

(α') Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 \quad (12.23)$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 = (\gamma + 2)(\gamma + 3) = 0 \quad (12.24)$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\gamma = -2, \gamma = -3$, και άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n \quad (12.25)$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Έχουμε

$$y_{zi}[-2] = (c_1(-2)^n + c_2(-3)^n) \Big|_{n=-2} = c_1 \frac{1}{4} + c_2 \frac{1}{9} = 0 \quad (12.26)$$

$$y_{zi}[-1] = (c_1(-2)^n + c_2(-3)^n) \Big|_{n=-1} = -c_1 \frac{1}{2} - c_2 \frac{1}{3} = 1 \quad (12.27)$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει λύσεις

$$c_1 = 4, \quad c_2 = -9 \quad (12.28)$$

Άρα τελική η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = 4(-2)^n - 9(-3)^n \quad (12.29)$$

για $n \geq 0$, ή πιο συνοπτικά, ως

$$y_{zi}[n] = (4(-2)^n - 9(-3)^n)u[n] = ((-2)^{n+2} - (-3)^{n+2})u[n] \quad (12.30)$$

(β') Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 \quad (12.31)$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 = (\gamma + 1)^2 = 0 \quad (12.32)$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\gamma = -1, \gamma = -1$, δηλ. η ρίζα είναι πολλαπλότητας $r = 2$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = (c_1 + c_2 n)(-1)^n \quad (12.33)$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες, δηλ.

$$y_{zi}[-1] = ((c_1 + c_2 n)(-1)^n) \Big|_{n=-1} = -c_1 + c_2 = 2 \quad (12.34)$$

$$y_{zi}[-2] = ((c_1 + c_2 n)(-1)^n) \Big|_{n=-2} = c_1 - 2c_2 = -1 \quad (12.35)$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τελικά

$$c_1 = -3, \quad c_2 = -1 \quad (12.36)$$

Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = (-3 - n)(-1)^n u[n] \quad (12.37)$$

(γ') Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} \quad (12.38)$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = \left(\gamma + \frac{1}{3}\right)\left(\gamma + \frac{1}{4}\right) = 0 \quad (12.39)$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\gamma = -1/3, \gamma = -1/4$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = c_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad (12.40)$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες, δηλ.

$$y_{zi}[-1] = \left(c_1 \left(-\frac{1}{4} \right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \Big|_{n=-1} = -4c_1 - 3c_2 = 0 \quad (12.41)$$

$$y_{zi}[-2] = \left(c_1 \left(-\frac{1}{4} \right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \Big|_{n=-2} = 16c_1 + 9c_2 = 1 \quad (12.42)$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τελικά

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{3} \quad (12.43)$$

Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = \left(\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} \right)^n - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) u[n] \quad (12.44)$$

Παρατηρήσεις

1. Δεν αποδείξαμε αναλυτικά το ότι η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n \quad (12.45)$$

όμως μπορείτε να το σκεφτείτε διαισθητικά: χρειαζόμαστε ένα άθροισμα από μετατοπισμένα σήματα $a_k y_{zi}[n-k]$, $k = 0, \dots, N$, τα οποία όταν αθροιστούν μας δίνουν ακριβώς μηδέν για κάθε n (!) Αυτό σημαίνει ότι τα σήματα αυτά θα πρέπει κατά κάποιο τρόπο να μοιάζουν αρκετά. Ένα σήμα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι πράγματι το $y_{zi}[n] = c\gamma^n$, καθώς $y_{zi}[n-k] = c\gamma^{n-k} = \frac{1}{\gamma^k} c\gamma^n = \frac{1}{\gamma^k} y_{zi}[n]$. Βλέπουμε λοιπόν ότι πράγματι με κατάλληλες επιλογές των σταθερών c, γ είναι εφικτό το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{zi}[n-k] \quad (12.46)$$

να είναι πράγματι ακριβώς μηδέν για κάθε n !

2. Παρατηρήστε ότι ο υπολογισμός της απόκρισης μηδενικής εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες καθώς στην ανάλυσή μας δε χρειαστήκαμε την οποιαδήποτε είσοδο $x[n]$ σε κανένα σημείο: τη θεωρήσαμε μηδενική. Οι δυο αποκρίσεις είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους.
3. Ο ρόλος των αρχικών συνθηκών, πέρα από τον υπολογισμό της απόκρισης μηδενικής εισόδου, μας παρέχει μοναδική λύση για το σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών. Απλά σκεφτείτε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι αυθαίρετες και δείτε ότι καταλήγουμε σε άπειρες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης.
4. Δείξαμε νωρίτερα ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^N c_k \gamma_k^n u[n] \quad (12.47)$$

για απλές χαρακτηριστικές ρίζες γ_k , τις οποίες θεωρούμε πραγματικές χάριν απλότητας^α. Παρατηρήστε ότι αν $|\gamma_k| < 1 \quad \forall k$, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου φθίνει προς το μηδέν, όταν $n \rightarrow +\infty$, καταλήγοντας σε κατάσταση ηρεμίας. Αν $|\gamma_i| > 1$ για ένα τουλάχιστον i , τότε το σύστημα δεν επιστρέφει σε κατάσταση ηρεμίας, διότι

$$c_i \gamma_i^n u[n] \rightarrow +\infty \quad (12.48)$$

και άρα το σύστημα δίνει απόκριση μηδενικής εισόδου που απειρίζεται. Αυτό σημαίνει ότι μια “ακατάλληλη” αρχική συνθήκη του συστήματος μπορεί να οδηγήσει το σύστημα να παράξει έξοδο η οποία απειρίζεται όταν $n \rightarrow +\infty$, χωρίς μάλιστα να παράξουμε καμιά είσοδο σε αυτό!

5. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι η επιστροφή (ή μη) του συστήματος σε κατάσταση ηρεμίας δε γίνεται με οποιονδήποτε τρόπο. Οι Σχέσεις (12.18, 12.22) καθιστούν σαφές ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου έχει συγκεκριμένη μορφή η οποία εξαρτάται από τις χαρακτηριστικές ρίζες.

^αΦυσικά οι χαρακτηριστικές ρίζες μπορούν να είναι μιγαδικές!

12.4 Η κρουστική απόκριση $h[n]$

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα τόσο “θεμελιώδες” σήμα, το οποίο μπορεί χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει ένα οποιοδήποτε άλλο σήμα. Έχουμε δει ότι ένα τέτοιο σήμα είναι η συνάρτηση Δέλτα. Η είσοδος αυτή θα διεγείρει το σύστημα, και θα το αναγκάσει να παράξει κάποια έξοδο. Η έξοδος αυτή πρέπει να “μοιάζει” με την απόκριση μηδενικής εισόδου, αφού η ύπαρξή της οφείλεται σε μια είσοδο που υπάρχει μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ($n = 0$), και μετά χάνεται. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η διέγερση αυτή δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, και η λύση της ομογενούς εξίσωσης για αυτές τις αρχικές συνθήκες θα μας δώσει μια τέτοια έξοδο!

Ας ορίσουμε λοιπόν την **κρουστική απόκριση - impulse response**² $h[n]$ ενός συστήματος ως την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο του παρουσιάζεται η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$, και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες (για $n < 0$). Από τη στιγμή όμως που οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ)!³ Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τελεστή $T[\cdot]$ για το σύστημα, θα είναι

$$h[n] = T[\delta[n]] \quad (12.49)$$

ή εναλλακτικά

$$\delta[n] \longrightarrow h[n] \quad (12.50)$$

Εν αντιθέσει με τα συστήματα συνεχούς χρόνου, η εύρεση της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου είναι αρκετά πιο εύκολη και δημοφιλής, λόγω της φύσεως του χρόνου (διακριτός). Η συζήτηση που ακολουθεί δείχνει πώς η παρουσία της συνάρτησης Δέλτα “γεννά” νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, τις οποίες και αναζητούμε, ώστε το πρόβλημα να αναχθεί στην εύρεση της ομογενούς λύσης της εξίσωσης διαφορών με αρχικές συνθήκες αυτές που “γεννιούνται” από τη συνάρτηση Δέλτα.

Στο εξής, υποθέτουμε ότι η εξίσωση διαφορών που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα είναι της γενικής μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (12.51)$$

με $N > M$.

12.4.1 Σύστημα Εξόδου Πρώτης Τάξης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απλή εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με $N = 1$, $M = 0$, και $b_0 = 1$, της μορφής

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n] \quad (12.52)$$

Η κρουστική απόκριση $h[n]$ βρίσκεται θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας ότι

$$y[-1] = 0 \quad (12.53)$$

δηλ. το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία. Τότε, η εξίσωση διαφορών γράφεται ως

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n] \quad (12.54)$$

Για $n = 0$, έχουμε

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1 \quad (12.55)$$

και άρα

$$h[0] = \frac{1}{a_0} \quad (12.56)$$

όπου υποθέσαμε ότι

$$h[-1] = y[-1] \Big|_{x[n]=\delta[n]} = 0 \quad (12.57)$$

λόγω αρχικής ηρεμίας. Άρα οι αρχικές συνθήκες που “γεννά” η παρουσία της συνάρτησης Δέλτα είναι αυτές των Σχέσεων (12.56, 12.57). Η ομογενής λύση της εξίσωσης διαφορών είναι

$$h[n] = c_1 \gamma^n u[n] \quad (12.58)$$

²Σχεφτείτε το: η απόκριση (έξοδος) σε μια χρούση (ακαριαία διέγερση).

³Δείτε τις Παραγράφους 11.6.2.1 και 11.6.2.2, ενώ στην ακόλουθη Παράγραφο 12.4.6 θα εξηγήσουμε περισσότερα.

με γ η χαρακτηριστική ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a_0\gamma + a_1 = 0 \iff \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$, οπότε

$$h[n] = c_1 \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^n u[n] \quad (12.59)$$

Η Σχέση (12.59) πρέπει να ικανοποιεί τη Σχέση (12.56), οπότε

$$c_1 = h[0] = \frac{1}{a_0} \quad (12.60)$$

Άρα τελικά η κρουστική απόκριση δίνεται ως

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \left(-\frac{a_1}{a_0} \right)^n u[n] \quad (12.61)$$

12.4.2 Σύστημα Εξόδου Δευτέρας Τάξης

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εξίσωση διαφορών είναι δευτέρας τάξης με $N = 2$, $M = 0$, και $b_0 = 1$, δηλ.

$$a_0y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = x[n] \quad (12.62)$$

και θέτοντας $y[n] = h[n]$ και $x[n] = \delta[n]$, έχουμε

$$a_0h[n] + a_1h[n-1] + a_2h[n-2] = \delta[n] \quad (12.63)$$

Υποθέτοντας ξανά συνθήκες αρχικής ηρεμίας, θα έχουμε για $n = 0$ ότι

$$a_2h[-2] + a_1h[-1] + a_0h[0] = \delta[0] = 1 \quad (12.64)$$

$$a_0h[0] = 1 \quad (12.65)$$

$$h[0] = \frac{1}{a_0} \quad (12.66)$$

η οποία και είναι μια αρχική συνθήκη. Όμοια, για $n = 1$ έχουμε

$$a_2h[-1] + a_1h[0] + a_0h[1] = \delta[1] \quad (12.67)$$

$$a_1h[0] + a_0h[1] = 0 \quad (12.68)$$

$$a_1 \frac{1}{a_0} + a_0h[1] = 0 \quad (12.69)$$

$$\frac{a_1}{a_0} + a_0h[1] = 0 \quad (12.70)$$

$$h[1] = -\frac{a_1}{a_0^2} \quad (12.71)$$

Η ομογενής λύση της εξίσωσης διαφορών είναι

$$h[n] = (c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n)u[n] \quad (12.72)$$

με $\gamma_1 \neq \gamma_2$ οι χαρακτηριστικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a_0\gamma^2 + a_1\gamma + a_2 = 0$, οπότε οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται ως

$$c_1 = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{a_1 + a_0\gamma_2}{a_0^2} \quad (12.73)$$

$$c_2 = -\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{a_1 + a_0\gamma_1}{a_0^2} \quad (12.74)$$

Άρα τελικά η κρουστική απόκριση δίνεται ως

$$h[n] = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\frac{a_1 + a_0\gamma_2}{a_0^2} \gamma_1^n - \frac{a_1 + a_0\gamma_1}{a_0^2} \gamma_2^n \right) u[n] \quad (12.75)$$

12.4.3 Σύστημα Εξόδου N -οστής Τάξης

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, μπορούμε να γενικεύσουμε για εξισώσεις διαφορών N -οστής τάξης της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n] \quad (12.76)$$

και να εξάγουμε τις νέες αρχικές συνθήκες με τον επαναληπτικό τρόπο που δείξαμε στις περιπτώσεις $N = 1, 2$. Έτσι, η χρουστική απόκριση $h[n]$ ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τη λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = 0 \quad (12.77)$$

με τις αρχικές συνθήκες που βρίσκουμε.

12.4.4 Συστήματα Οποιασδήποτε Τάξης

Παρ' όλα αυτά, η λύση που βρήκαμε είναι αρκετά περιορισμένη γιατί αφορά συστήματα με τάξη εισόδου $M = 0$ με $b_0 = 1$. Πώς θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε για συστήματα όπου $0 < M < N$ και $b_k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq M$; Η απάντηση είναι τελικά πολύ απλή, αφού το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών έχει την ιδιότητα της γραμμικότητας, οπότε αν η χρουστική απόκριση στο σύστημα

$$\mathbf{S} : \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n] \quad (12.78)$$

είναι $h[n]$, τότε η χρουστική απόκριση στο σύστημα

$$\mathbf{S}_0 : \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = b_0 x[n] \quad (12.79)$$

θα είναι $h_0[n] = b_0 h[n]$. Επίσης, η χρουστική απόκριση του συστήματος

$$\mathbf{S}_L : \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x_l[n] \quad (12.80)$$

θα είναι

$$h_L[n] = \sum_{l=0}^M b_l h_l[n] \quad (12.81)$$

με $h_l[n]$ τις χρουστικές αποκρίσεις του συστήματος στις εισόδους $x_l[n]$. Στην περίπτωση που

$$x_l[n] = x[n-l] \quad (12.82)$$

τότε μπορεί να δειχθεί ότι η χρουστική απόκριση του συστήματος

$$\mathbf{S}_g : \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (12.83)$$

είναι

$$h_g[n] = \sum_{l=0}^M b_l h[n-l] \quad (12.84)$$

με $h[n]$ να είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (12.85)$$

με τις αρχικές συνθήκες που βρίσκονται με τον επαναληπτικό τρόπο που δείξαμε.

Με βάση την παραπάνω συζήτηση, ας διατυπώσουμε μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις

1. Υποθέσαμε στη συζήτησή μας ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης διαφορών είναι απλές. Στην περίπτωση που δεν είναι, ακολουθούμε τη μέθοδο που περιγράφηκε στην παράγραφο περί εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου. Για παράδειγμα, αν η χαρακτηριστική ρίζα είναι διπλή, η λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης θα είναι της μορφής

$$h[n] = \frac{1}{a_0} n \gamma^n u[n] \quad (12.86)$$

2. Η γενικότερη μορφή της κρουστικής απόκρισης για κάθε δυνατή τιμή των M, N είναι η εξής:

$$h_g[n] = \sum_{k=0}^{M-N} \alpha_k \delta[n-k] + f\{\gamma_k^n, n^r \gamma_k^n\} \quad (12.87)$$

με α_k σταθερούς συντελεστές και $f\{\gamma_k^n, n^r \gamma_k^n\}$ ξανά μια συνάρτηση που περιλαμβάνει όρους της ομογενούς λύσης, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Θα δούμε ένα απλό παράδειγμα τέτοιας μορφής.

3. Παρ' όλο που παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης, στη συνέχεια του βιβλίου θα βασιστούμε περισσότερο στις μεθόδους της συχνότητας, καθώς είναι αρκετά απλούστερες για οσοδήποτε μεγάλη τάξη εξίσωσης διαφορών.

Μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε τον τρόπο εύρεσης της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος οσοδήποτε μεγάλης τάξης.

Εύρεση Κρουστικής Απόκρισης από Εξίσωση Διαφορών

Για μια εξίσωση διαφορών της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (12.88)$$

η κρουστική απόκριση $h_g[n]$ δίνεται από την παρακάτω διαδικασία:

1. Θεωρούμε νέες αρχικές συνθήκες τις

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{a_0} \\ h[1] &= -\frac{a_1}{a_0^2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (12.89)$$

ως $h[N-1]$, τις οποίες βρίσκουμε αναδρομικά'.

2. Βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές ρίζες γ_k μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$a_N + a_{N-1}\gamma + \dots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N = 0 \quad (12.90)$$

της ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = 0 \quad (12.91)$$

3. Αν οι ρίζες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_g[n] = \sum_{l=0}^M b_l h[n-l] \quad (12.92)$$

με $h[n]$ να είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = 0 \quad (12.93)$$

η οποία έχει τη μορφή

$$h[n] = \sum_{k=1}^N c_k \gamma_k^n u[n] \quad (12.94)$$

με τους συντελεστές c_k να βρίσκονται μέσω των παραπάνω αρχικών συνθηκών.

4. Αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα γ_i τάξης r , τότε η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_g[n] = \sum_{l=0}^M b_l h[n] \quad (12.95)$$

με $h[n]$ να είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^N a_k h[n-k] = 0 \quad (12.96)$$

η οποία έχει τη μορφή

$$h[n] = \sum_{k=r+1, k \neq i}^N c_k \gamma_k^n u[n] + \sum_{l=1}^r c_l n^{l-1} \gamma_i^n u[n] \quad (12.97)$$

με τους συντελεστές c_k, c_l να βρίσκονται μέσω των παραπάνω αρχικών συνθηκών.

^a Η χρήση κλειστού τύπου για τις αρχικές συνθήκες δεν είναι βολική, σε αντίθεση με την περίπτωση του συνεχούς χρόνου, που όλες οι νέες αρχικές συνθήκες ήταν μηδενικές πλην μιας.

12.4.5 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας ολοκληρώσει τη συζήτηση για την απόκριση μηδενικής εισόδου και την κρουστική απόκριση, ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] \quad (12.98)$$

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από απλούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n] \quad (12.99)$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = 0 \quad (12.100)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης διαφορών είναι

$$\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0 \quad (12.101)$$

το οποίο γράφεται ως

$$\left(\gamma + \frac{1}{3}\right)\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (12.102)$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = -\frac{1}{3}$ και $\gamma = -\frac{1}{2}$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.103)$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες.

$$h[0] + \frac{5}{6}h[-1] + \frac{1}{6}h[-2] = \delta[0] = 1 \quad (12.104)$$

$$h[1] + \frac{5}{6}h[0] + \frac{1}{6}h[-1] = \delta[1] = 0 \quad (12.105)$$

το οποίο δίνει

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (12.106)$$

$$-\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{6} = 0 \quad (12.107)$$

οπότε είναι

$$c_1 = -2 \quad (12.108)$$

$$c_2 = 3 \quad (12.109)$$

και άρα η κρουστική απόκριση είναι ίση με την ομογενή λύση, δηλ.

$$h_g[n] = h[n] = (-2) \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (12.110)$$

Παράδειγμα 12.3:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] \quad (12.111)$$

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ξανά $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + \frac{2}{3}h[n-1] + \frac{1}{9}h[n-2] = \delta[n] \quad (12.112)$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + \frac{2}{3}h[n-1] + \frac{1}{9}h[n-2] = 0 \quad (12.113)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης διαφορών είναι

$$\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{9} = 0 \quad (12.114)$$

το οποίο γράφεται ως

$$\left(\gamma + \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \quad (12.115)$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -\frac{1}{3}$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = (c_0 + c_1 n)\gamma^n = (c_0 + c_1 n) \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.116)$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_0, c_1 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h[0] + \frac{2}{3}h[-1] + \frac{1}{9}h[-2] = \delta[0] = 1 \quad (12.117)$$

$$h[1] + \frac{2}{3}h[0] + \frac{1}{9}h[-1] = \delta[1] = 0 \quad (12.118)$$

$$(12.119)$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$h[0] = 1 = c_0 \quad (12.120)$$

$$h[1] = -\frac{2}{3} = -(c_0 + c_1) \left(\frac{1}{3}\right) \quad (12.121)$$

Λύνοντας το σύστημα, έχουμε

$$c_0 = 1 \quad (12.122)$$

$$c_1 = 1 \quad (12.123)$$

Άρα η ομογενής λύση είναι

$$h[n] = (1+n) \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (12.124)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι τελικά

$$h_g[n] = h[n] + 2h[n-1] \quad (12.125)$$

$$= (1+n) \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2(1+(n-1)) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (12.126)$$

$$= (1-5n) \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (12.127)$$

Παράδειγμα 12.4:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n-1] \quad (12.128)$$

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή έχουμε πάλι $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + 2h[n-1] + h[n-2] = \delta[n] \quad (12.129)$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + 2h[n-1] + h[n-2] = 0 \quad (12.130)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης διαφορών είναι

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 = 0 \quad (12.131)$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\gamma + 1)(\gamma + 1) = 0 \quad (12.132)$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = (c_0 + c_1 n)(-1)^n = (c_0 + c_1 n)(-1)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.133)$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_0, c_1 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h[0] + 2h[-1] + h[-2] = h[0] = \delta[0] = 1 \quad (12.134)$$

$$h[1] + 2h[0] + h[-1] = h[1] + 2 = \delta[1] = 0 \quad (12.135)$$

τα οποία μας δίνουν το σύστημα

$$c_0 = 1 \quad (12.136)$$

$$(c_0 + c_1)(-1) = -2 \quad (12.137)$$

το οποίο έχει λύση

$$c_0 = 1 \quad (12.138)$$

$$c_1 = 1 \quad (12.139)$$

Άρα

$$h[n] = (1 + n)(-1)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.140)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$h_g[n] = h[n - 1] = n(-1)^{n-1}u[n - 1] \quad (12.141)$$

Παράδειγμα 12.5:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 5y[n - 1] + 6y[n - 2] = x[n] + x[n - 1] + x[n - 2] \quad (12.142)$$

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M = N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους και από συναρτήσεις Δέλτα. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + 5h[n - 1] + 6h[n - 2] = \delta[n] \quad (12.143)$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + 5h[n - 1] + 6h[n - 2] = 0 \quad (12.144)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης διαφορών είναι

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \quad (12.145)$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\gamma + 2)(\gamma + 3) = 0 \quad (12.146)$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = -2$ και $\gamma_2 = -3$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.147)$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h[0] + 5h[-1] + 6h[-2] = h[0] = \delta[0] = 1 \quad (12.148)$$

$$h[1] + 5h[0] + 6h[-1] = h[1] + 5 = \delta[1] = 0 \quad (12.149)$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (12.150)$$

$$-2c_1 - 3c_2 = -5 \quad (12.151)$$

το οποίο δίνει $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ και άρα η ομογενής λύση είναι

$$h[n] = -2(-2)^n u[n] + 3(-3)^n u[n] = ((-2)^{n+1} - (-3)^{n+1}) u[n] \quad (12.152)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$h_g[n] = h[n] + h[n - 1] + h[n - 2] \quad (12.153)$$

$$= ((-2)^{n+1} - (-3)^{n+1}) u[n] \quad (12.154)$$

$$+ ((-2)^n - (-3)^n) u[n - 1] \quad (12.155)$$

$$+ ((-2)^{n-1} - (-3)^{n-1}) u[n - 2] \quad (12.156)$$

$$= \delta[n] - \frac{3}{2}(-2)^n u[n - 1] + \frac{7}{3}(-3)^n u[n - 1] \quad (12.157)$$

12.4.6 ΓΧΑ Συστήματα και Εξισώσεις Διαφορών

Στη συζήτησή μας σε προηγούμενο κεφάλαιο, είχαμε επισημάνει ότι μας ενδιαφέρουν πολύ τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Ένα ερώτημα που πρέπει να ξεκαθαριστεί είναι το εξής: *Πότε ένα σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο;*

Χρησιμοποιώντας την έννοια της γραμμικότητας, μπορούμε να πούμε τα εξής: για κάποια είσοδο $x_1[n]$, το σύστημα θα δίνει έξοδο

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = y_{zi}[n] + y_{1zs}[n] \quad (12.158)$$

και για είσοδο $x_2[n]$ θα είναι

$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = y_{zi}[n] + y_{2zs}[n] \quad (12.159)$$

αφού η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν εξαρτάται από την είσοδο! Τέλος, για μια γραμμική είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow y_{zi}[n] + y_{3zs}[n] \quad (12.160)$$

με $y_{3zs}[n]$ την απόκριση μηδενικής κατάστασης όταν η είσοδος είναι η $ax_1[n] + bx_2[n]$, η οποία εξαρτάται από την είσοδο και είναι γραμμική, όπως έχουμε δείξει στην Παράγραφο 11.6.2.1.

Άρα για να είναι γραμμικό ένα σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών, πρέπει η απόκριση μηδενικής εισόδου να είναι μηδενική, ή με άλλα λόγια, **οι αρχικές συνθήκες του συστήματος να είναι μηδενικές.**

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση 12.25) ότι αν η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδενική, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Δεν είναι δύσκολο να το επιβεβαιώσουμε διαισθητικά: η χρονική αμεταβλητότητα σημαίνει ότι αν το σήμα εισόδου καθυστερήσει κατά n_0 , η έξοδος θα είναι ένα σήμα όμοιο σε μορφή με το σήμα εξόδου για είσοδο $x[n]$, αλλά καθυστερημένο κατά τον ίδιο χρόνο n_0 . Όμως η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν εξαρτάται από την είσοδο, και άρα έχει την ίδια μορφή ανεξαρτήτως καθυστέρησης της εισόδου.

Τέλος, η ίδια η κρουστική απόκριση ορίζεται όπως έχουμε συζητήσει μόνο για γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Για παράδειγμα, ένα μη γραμμικό σύστημα δε θα ικανοποιούσε την ιδιότητα της ομογένειας, οπότε η κρουστική απόκριση δε θα ήταν μοναδική, ενώ η χρονική μεταβλητότητα θα μας έδινε μια διδιάστατη κρουστική απόκριση, αφού για κάθε καθυστέρηση εισόδου $\delta[n - n_0]$, θα είχαμε διαφορετική κρουστική απόκριση $h_{n_0}[n] = h[n_0, n]$. Στη συζήτησή μας για την κρουστική απόκριση εμμέσως υποθέσαμε ότι το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο.

Άρα μπορούμε να συνοψίσουμε ότι

Εξισώσεις Διαφορών και ΓΧΑ Συστήματα

Ένα σύστημα που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (12.161)$$

είναι Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο αν οι αρχικές συνθήκες του είναι μηδενικές, δηλ.

$$y[-1] = 0 \quad (12.162)$$

$$y[-2] = 0 \quad (12.163)$$

$$y[-3] = 0 \quad (12.164)$$

$$\vdots \quad (12.165)$$

$$y[-N] = 0 \quad (12.166)$$

12.5 Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Ας εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας στην εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μηδενικών αρχικών συνθηκών, δηλ. στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$.

Δεδομένης της ποικιλίας των εισόδων που μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα σύστημα, θα θέλαμε έναν ενιαίο και ομοιόμορφο τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής κατάστασης. Ενώ στα συστήματα συνεχούς χρόνου, ορίσαμε τη συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου στην προσπάθειά μας, τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά στο διακριτό χρόνο.

Είδαμε μόλις ότι η έξοδος ενός συστήματος σε ένα δείγμα-είσοδο που ορίζεται μονάχα για μια χρονική στιγμή, όπως η $\delta[n]$, ονομάζεται *κρουστική απόκριση* $h[n]$. Επειδή τα συστήματα που συζητάμε είναι γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα, αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα εισόδου ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα, τότε η έξοδος θα μπορούσε να υπολογιστεί πολύ εύκολα, ως άθροισμα κρουστικών αποκρίσεων. Ευτυχώς η διαδικασία είναι πολύ απλούστερη από την αντίστοιχη του συνεχούς χρόνου, αφού η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου είναι πολύ εύκολα διαχειρίσιμη.

Έχουμε ήδη πει ότι ένα οποιοδήποτε διακριτό σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (12.167)$$

Η έξοδος ενός συστήματος για την παραπάνω είσοδο θα είναι

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} \quad (12.168)$$

με την τελευταία ισότητα να ισχύει λόγω γραμμικότητας. Όπως είπαμε και νωρίτερα, επειδή οι τιμές $x[k]$ είναι αριθμοί, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} \quad (12.169)$$

Η χρονική αμεταβλητότητα υποδηλώνει ότι αν ορίσουμε ότι η απόκριση του συστήματος, $h_k[n]$, σε μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $n = k$, δηλ.

$$h_k[n] = T\{\delta[n-k]\} \quad (12.170)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$h_k[n] = h[n-k] \quad (12.171)$$

είναι δηλαδή μια απλή μετατόπιση της κρουστικής απόκρισης! Έτσι,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \quad (12.172)$$

Συνοψίζοντας, αφού το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, θα έχουμε τα ακόλουθα ζεύγη εισόδου-εξόδου:

$$(α) \text{ κρουστική απόκριση: } \delta[n] \longrightarrow h[n] \quad (12.173)$$

$$(β) \text{ χρον. αμεταβλητότητα: } \delta[n-k] \longrightarrow h[n-k] \quad (12.174)$$

$$(γ) \text{ γραμμικότητα/ομογένεια: } x[k]\delta[n-k] \longrightarrow x[k]h[n-k] \quad (12.175)$$

$$(δ) \text{ γραμμικότητα/αθροιστικότητα: } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (12.176)$$

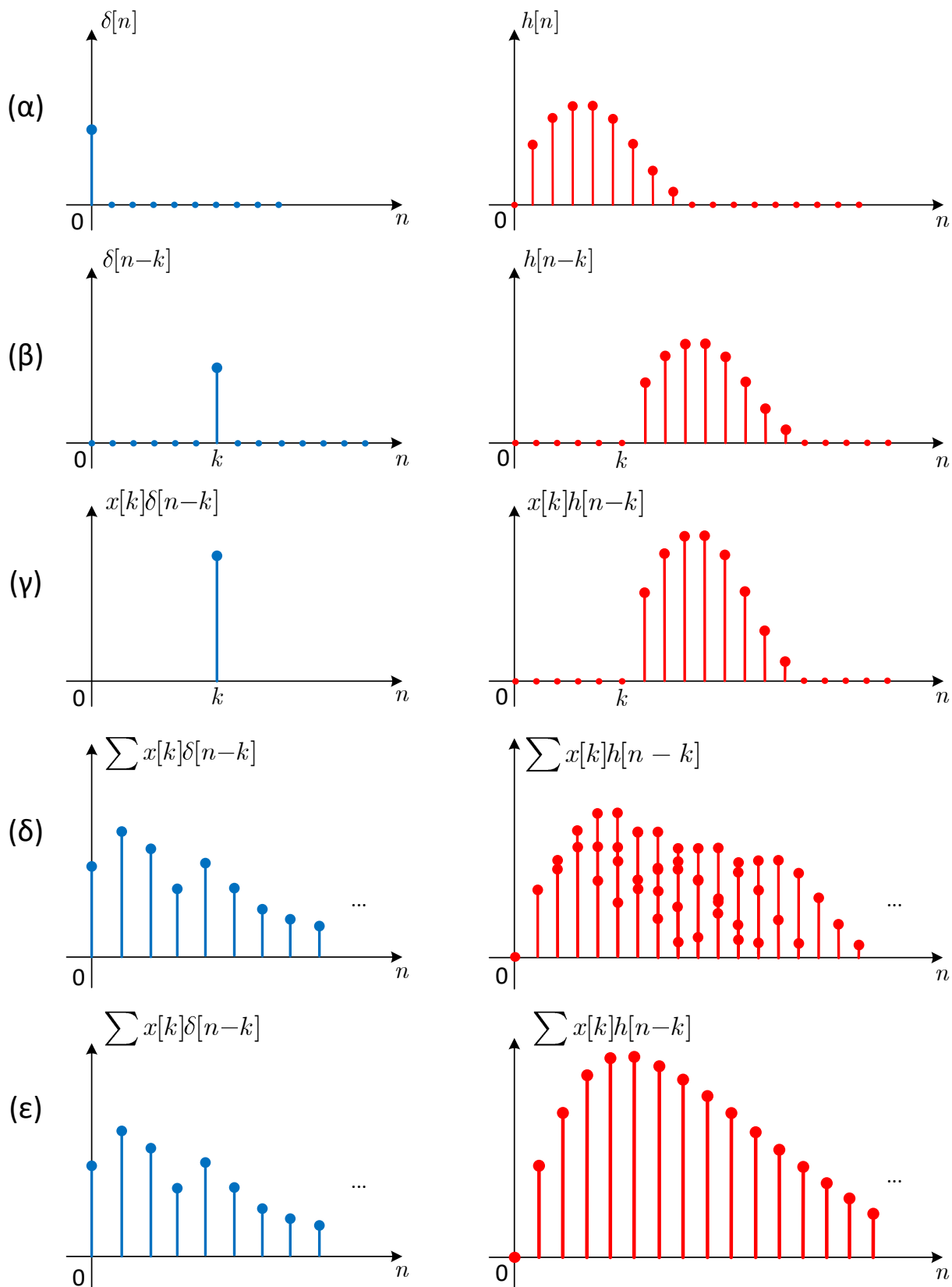
$$(ε) \text{ είσοδος: } x[n] = x[n] * \delta[n] \longrightarrow \text{απόκριση μηδεν. κατάσταση: } y[n] = x[n] * h[n] \quad (12.177)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι: εφαρμόζοντας τις απλές ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων που γνωρίζουμε επάνω στην αναπαράσταση ενός σήματος εισόδου ως συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα, η απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ αναπαρίσταται ως η **συνέλιξη της εισόδου $x[n]$ με την κρουστική απόκριση του συστήματος $h[n]$** ! Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n] \quad (12.178)$$

Μια σχηματική αναπαράσταση της παραπάνω διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 12.3. Συγκρίνετε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω με αυτήν της Παραγράφου 4.5.1, και δείτε πόσο πιο εύκολα βρήκαμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης στο πεδίο του διακριτού χρόνου.

Η γνώση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ μπορεί να μας δώσει την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο!



Σχήμα 12.3: Σχηματική παραγωγή της πράξης της συνέλιξης που αναφέρονται στις Σχέσεις (12.173-12.177).

12.6 Συνέλιξη

Η πράξη της συνέλιξης είναι θεμελιώδους σημασίας, λόγω του ότι εμφανίζεται συχνά στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, και στα μαθηματικά, οπότε της αξίζει ξεχωριστή και εκτενής αναφορά. Αμέσως παρακάτω, θα την εξετάσουμε ως γενικότερη πράξη, χωρίς να τη συνδέουμε απαραίτητα με την είσοδο και την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος.

Προτού μελετήσουμε αναλυτικά το άθροισμα της συνέλιξης, ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες με βάση τον ορισμό της.

12.6.1 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η πράξη της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 12.1.

Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]), \quad a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$
Συνάρτηση Δέλτα	$x[n - n_1] * \delta[n - n_2] = x[n - n_1 - n_2]$

Πίνακας 12.1: Ιδιότητες συνέλιξης Διακριτού Χρόνου

Ακολουθούν οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων, με αποκλειστική χρήση του ορισμού.

12.6.1.1 Ομογένεια

Έχουμε

$$(ax[n]) * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ax[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]ay[n-k] = x[n] * (ay[n]) \quad (12.179)$$

και

$$x[n] * (ay[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]ay[n-k] = a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = a(x[n] * y[n]) \quad (12.180)$$

12.6.1.2 Αντιμεταθετικότητα

Θέτοντας $m = n - k$ στον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n-m]y[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m]y[m] = y[n] * x[n] \quad (12.181)$$

12.6.1.3 Προσεταιριστικότητα

Είναι

$$(x[n] * y[n]) * z[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x[k] * y[k])z[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]y[k-l] \right) z[n-k] \quad (12.182)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k-l]z[n-k] \right) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m]z[n-m-l] \right) \quad (12.183)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l](y[n-l] * z[n-l]) = x[n] * (y[n] * z[n]) \quad (12.184)$$

όπου στη Σχέση (12.183) θέσαμε $m = k - l$.

12.6.1.4 Επιμεριστικότητα

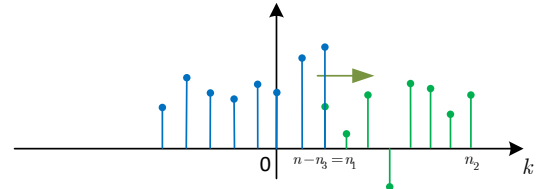
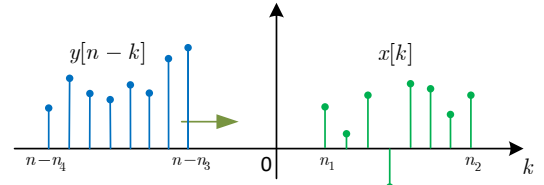
Είναι

$$x[n] * (y[n] + z[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k](y[n-k] + z[n-k]) \quad (12.185)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x[k]y[n-k] + x[k]z[n-k]) \quad (12.186)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z[n-k] \quad (12.187)$$

$$= x[n] * y[n] + x[n] * z[n] \quad (12.188)$$



12.6.1.5 Γραμμικότητα

Είναι

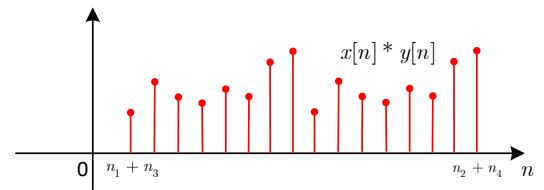
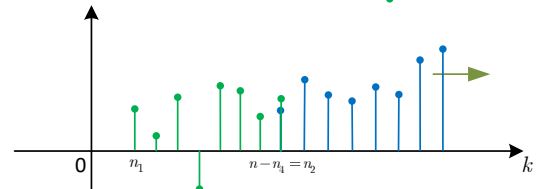
$$z[n] = x[n] * y[n] \quad (12.189)$$

$$= (ax_1[n] + bx_2[n]) * y[n] \quad (12.190)$$

$$= ax_1[n] * y[n] + bx_2[n] * y[n] \quad (12.191)$$

$$= a(x_1[n] * y[n]) + b(x_2[n] * y[n]) \quad (12.192)$$

$$= az_1[n] + bz_2[n] \quad (12.193)$$



με

$$z_1[n] = x_1[n] * y[n] \quad (12.194)$$

$$z_2[n] = x_2[n] * y[n] \quad (12.195)$$

Σχήμα 12.4: Γραφική απόδειξη της ιδιότητας του εύρους.

λόγω των ιδιοτήτων της ομογένειας και της επιμεριστικότητας.

12.6.1.6 Εύρος

Η απόδειξη της ιδιότητας του εύρους φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 12.4. Στο άθροισμα της συνέλιξης, το σήμα $y[n]$ χρησιμοποιείται ως $y[n-k]$, με μεταβλητή το k . Άρα υπόκειται σε πράξεις αντιστροφής χρόνου και μετατόπισης. Ως εκ τούτου, το σήμα θα είναι μη μηδενικό στο $\llbracket n-n_4, n-n_3 \rrbracket$. Στη διαδικασία της συνέλιξης, το γινόμενο $x[k]y[n-k]$ είναι μη μηδενικό για $n-n_3 \geq n_1$ και $n-n_4 \leq n_2$, δηλ. στο διάστημα $\llbracket n_1+n_3, n_2+n_4 \rrbracket$.

12.6.1.7 Ουδέτερο στοιχείο

Είναι

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] \quad (12.196)$$

από την ανάλυση ενός σήματος σε άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα.

12.6.1.8 Συνάρτηση Δέλτα

Είναι

$$x[n - n_1] * \delta[n - n_2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k - n_1] \delta[n - k - n_2] = x[k - n_1] \Big|_{k=n-n_2} = x[n - n_1 - n_2] \quad (12.197)$$

αφού η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n - k - n_2]$ είναι μοναδιαία για $k = n - n_2$. ■

Η συνέλιξη είναι διαβόητη ως μια πράξη αρκετά περίπλοκη και δύσκολη, και σε πρώτη επαφή αποθαρρύνει τον αναγνώστη. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη της άθροισης εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *ανάκλαση και μετατόπιση*.

12.6.2 Η συνέλιξη διακριτού χρόνου αναλυτικά

Εδώ θα επικεντρωθούμε στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n - k] \quad (12.198)$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το άθροισμα έχει ως μεταβλητή το k και όχι το n - το n θεωρείται σταθερό μέσα στο άθροισμα. Έπειτα, το άθροισμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το $x[k]$ και το $y[n - k]$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *χρονική αντιστροφή και χρονική μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y[n] \rightarrow y[k] \rightarrow y[-k] \rightarrow y[-k + n] = y[n - k] \quad (12.199)$$

Οπότε ουσιαστικά το σήμα που χρησιμοποιείται στο άθροισμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση* ως προς n . Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x[k]$ και αθροίζεται ως προς n .

12.6.3 Γραφική λύση

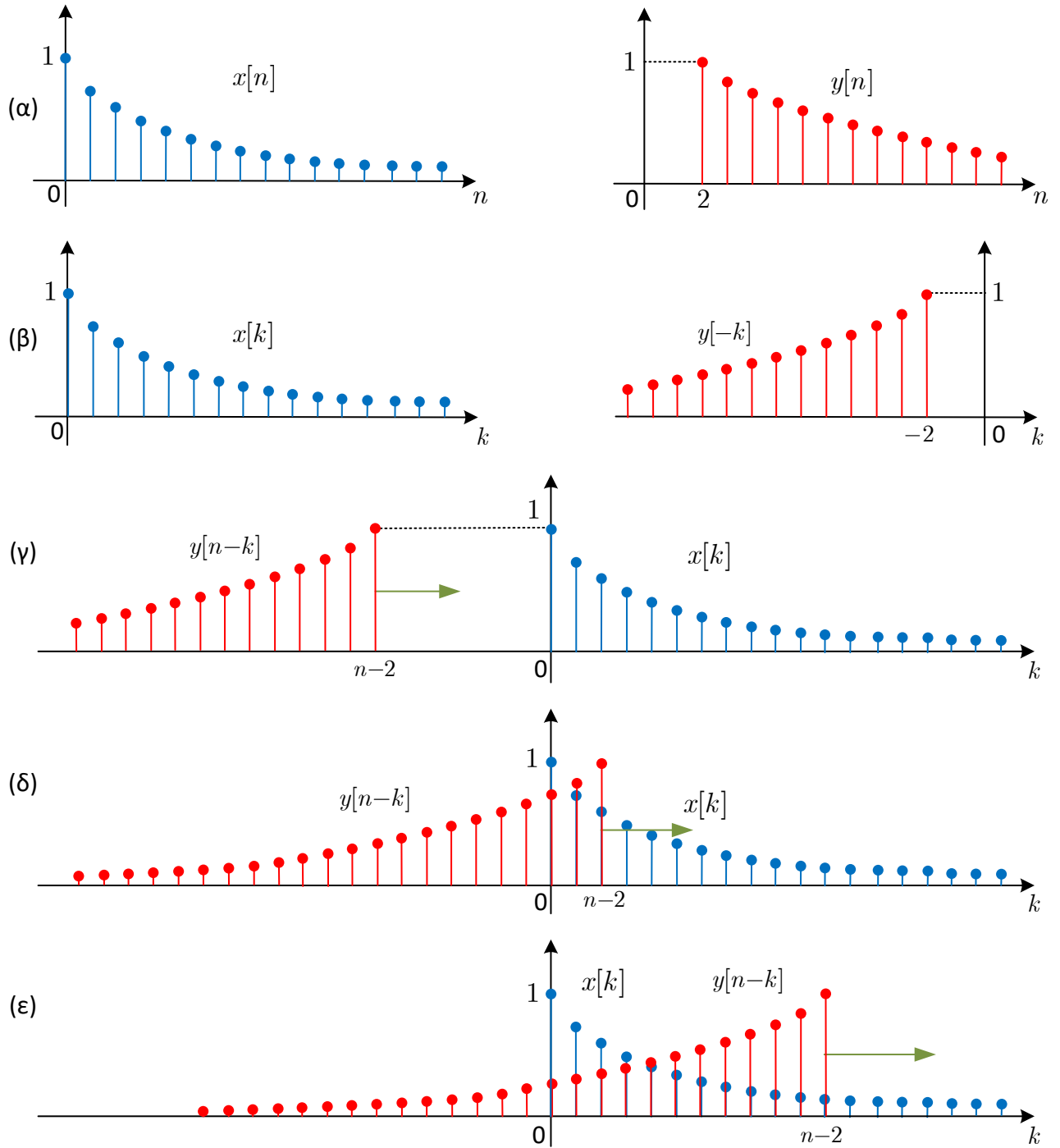
Συχνά προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, λόγω οπτικής ευκολίας, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 12.5. Ας πούμε ότι εδώ έχουμε τα σήματα $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$ και $y[n] = \beta^{n-2} u[n - 2]$, $|\beta| < 1$.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην περίπτωση (α) του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα αντιστρέψουμε χρονικά σύμφωνα με τον ορισμό.
- Στην περίπτωση (β), έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n , όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης. Το σήμα $y[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n . Θυμίζουμε ότι ο δείκτης n λογίζεται ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του σήματος $y[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.
- Στην περίπτωση (γ), παίρνουμε το σήμα $y[n - k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “ολισθαίνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το σήμα $x[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (περιπτώσεις (δ-ε)), βλέπετε ότι συναντά κάποια στιγμή το σήμα $x[k]$. Τότε έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Αυτό συμβαίνει σε διακριτές χρονικές στιγμές, δηλ. όταν το δεξί άκρο του σήματος $y[n - k]$ συναντά το αριστερό άκρο του σήματος $x[k]$ κι ύστερα, δηλ. όταν

$$n - 2 \geq 0 \implies n \geq 2 \quad (12.200)$$

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $n - 2$, εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων, ως

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=0}^{n-2} x[k]y[n - k] = \sum_{k=0}^{n-2} a^k \beta^{n-k-2} \quad (12.201)$$



Σχήμα 12.5: Γραφική απεικόνιση της συνέλιξης διακριτού χρόνου.

$$= \beta^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^k = \beta^{n-2} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{n-1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} \quad (12.202)$$

$$= \frac{\beta}{\beta - \alpha} \left(\beta^{n-2} - \frac{\alpha^{n-1}}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) \quad (12.203)$$

για $n \geq 2$.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο n εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

$$c_{xy}[n] = 0, \quad n < 2 \quad (12.204)$$

- Οπότε συγκεντρωτικά θα είναι:

$$c_{xy}[n] = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}), & n \geq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.205)$$

ή ισοδυναμια

$$c_{xy}[n] = \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) u[n-2] \quad (12.206)$$

12.6.4 Αλγεβρικοί τρόποι

Ας δούμε ότι ο αλγεβρικός τρόπος μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη αλγεβρικά με δυο τρόπους $(x[n] * y[n], y[n] * x[n])$.

Θα είναι:

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \beta^{n-k-2} u[n-k-2] \quad (12.207)$$

$$= \beta^{n-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \beta^{-k} u[k] u[n-k-2] \quad (12.208)$$

Ξέρουμε ότι

$$u[k] = 1, \quad k \geq 0 \quad (12.209)$$

και

$$u[n-k-2] = 1, \quad k \leq n-2 \quad (12.210)$$

Οπότε

$$u[k]u[n-k-2] = 1, \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad (12.211)$$

Έτσι, το άθροισμα της συνέλιξης γράφεται ως

$$c_{xy}[n] = \beta^{n-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \beta^{-k} u[k] u[n-k-2] = \beta^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \alpha^k \beta^{-k} \quad (12.212)$$

$$= \beta^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^{n-2} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} \quad (12.213)$$

$$= \frac{\beta}{\beta - \alpha} \left(\beta^{n-2} - \frac{\alpha^{n-2}}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) \quad (12.214)$$

για $0 \leq n-2 \implies n \geq 2$. Άρα

$$c_{xy}[n] = \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) u[n-2] \quad (12.215)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης.

Λόγω της αντιμεταθετικότητας της πράξης της συνέλιξης, πρέπει να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζοντας τη συνέλιξη $c_{yx}[n]$:

$$c_{yx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^{k-2} u[k-2] \alpha^{n-k} u[n-k] \quad (12.216)$$

$$= \alpha^n \beta^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^k u[k-2] \alpha^{-k} u[n-k] \quad (12.217)$$

$$= \alpha^n \beta^{-2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k u[k-2] u[n-k] \quad (12.218)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$u[k-2] = 1, \quad k \geq 2 \quad (12.219)$$

και

$$u[n-k] = 1, \quad k \leq n \quad (12.220)$$

οπότε

$$u[k-2]u[n-k] = 1, \quad 2 \leq k \leq n \quad (12.221)$$

Άρα θα έχουμε

$$c_{yx}[n] = \alpha^n \beta^{-2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k u[k-2]u[n-k] = \alpha^n \beta^{-2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \quad (12.222)$$

$$= \alpha^n \beta^{-2} \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) \quad (12.223)$$

για $n \geq 2$. Άρα συνολικά

$$c_{yx}[n] = \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) u[n-2] \quad (12.224)$$

που είναι ξανά το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης αλλά και την προηγούμενη αλγεβρική μέθοδο.

Συνοψίζοντας:

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k , και “σύρουμε” το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα “συνυπάρχουν”, δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις...

Παρατηρήσεις

1. Όπως βλέπετε, το πιο σημαντικό πράγμα είναι να μπορείτε να υπολογίσετε το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του αθροίσματος, όσον αφορά τη γραφική λύση.
2. Προτιμούμε να “μεταβάλλουμε” το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.
3. Θυμηθείτε την ιδιότητα του εύρους: για πεπερασμένης διάρκειας σήματα, αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $\llbracket a, b \rrbracket$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $\llbracket c, d \rrbracket$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $\llbracket a+c, b+d \rrbracket$. Είναι χρήσιμη παρατήρηση για να μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας.
4. Ο τρόπος που προτιμά ο καθένας για την επίλυση της συνέλιξης εξαρτάται από τον/την ίδιο/α. Συνήθως, στο διακριτό χρόνο προτιμούμε κάποια αλγεβρική μέθοδο, ενώ στο συνεχή χρόνο είναι σύνηθες να βλέπουμε γραφικές λύσεις - φυσικά αυτό δεν είναι δεσμευτικό.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα, λιγότερο εποπτικό και περισσότερο πρακτικό.

Παράδειγμα 12.6:

Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n] - u[n - N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.225)$$

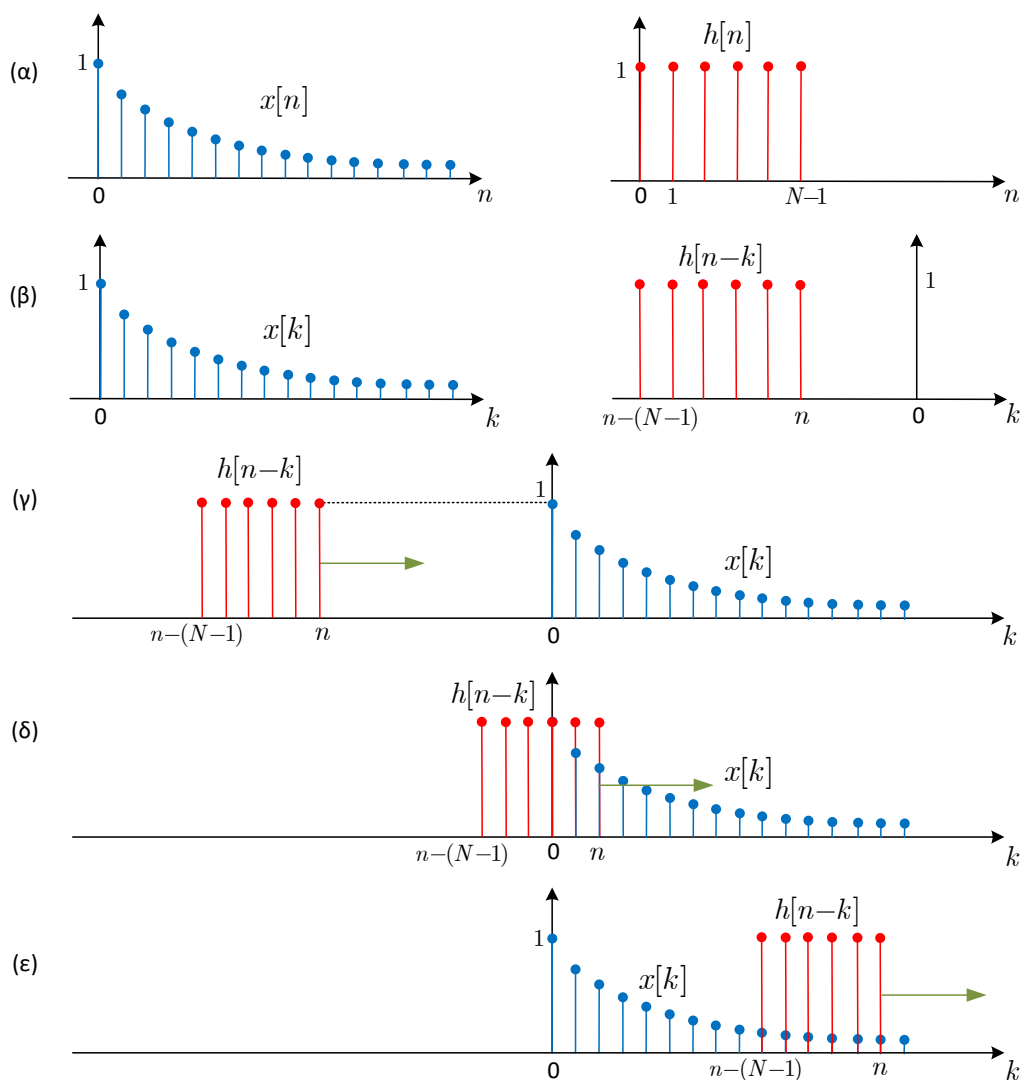
Η είσοδος είναι

$$x[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (12.226)$$

Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.

Λύση:

Αρχικά, ας σχεδιάσουμε τα σήματα $x[n]$ και $h[n - k]$ ως συναρτήσεις του k . Δείτε το Σχήμα 12.6.



Σχήμα 12.6: Σήματα $x[n]$ και $h[n - k]$ και υπολογισμός συνέλιξης.

- Παρατηρήστε ότι όλες οι αρνητικές τιμές του n δε δίνουν γινόμενο των δυο σημάτων (δηλ. δίνουν γινόμενο

ίσο με μηδέν - Σχήμα 12.6(γ)). Άρα έχουμε ότι

$$y[n] = 0, \quad n < 0 \quad (12.227)$$

- Στο Σχήμα 12.6(δ), το σήμα $h[n-k]$ έχει πλησιάσει περισσότερο το σήμα $x[k]$, και συγκεκριμένα αναπαριστάται η θέση των δυο σημάτων όταν $n \geq 0$ (δηλ. το δεξί “άκρο” του σήματος $h[n-k]$ έχει επικάλυψη με το σήμα $x[k]$) και $n - N + 1 \leq 0$ (δηλ. όταν το αριστερό “άκρο” του σήματος $h[n-k]$ δεν έχει συναντήσει το σήμα $x[k]$). Αυτές οι δυο συνθήκες μπορούν να ενωθούν στην εξής μια,

$$0 \leq n \leq N - 1 \quad (12.228)$$

Για αυτό το διάστημα, βλέπουμε στο Σχήμα ότι

$$x[k]h[n-k] = a^k, \quad 0 \leq k \leq n \quad (12.229)$$

αφού τα δείγματα που θα αθροιστούν δίνουν γινόμενο μόνο στο $0 \leq k \leq n$, κι αυτό συμβαίνει όταν $0 \leq n \leq N - 1$. Άρα έχουμε ότι

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (12.230)$$

- Τέλος, στο Σχήμα 12.6(ε), ολόκληρο το σήμα $h[n-k]$ έχει επικάλυψη με το $x[k]$, που αυτό συμβαίνει όταν $0 < n - N + 1 \Leftrightarrow n > N - 1$. Όμοια με πριν,

$$x[k]h[n-k] = a^k, \quad n - N + 1 \leq k \leq n \quad (12.231)$$

και άρα

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^n a^k = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1 - a} = a^{n-N+1} \left(\frac{1 - a^N}{1 - a} \right), \quad n > N - 1 \quad (12.232)$$

Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα σε μια συνάρτηση, έχουμε ότι το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ a^{n-N+1} \left(\frac{1 - a^N}{1 - a} \right), & n > N - 1 \end{cases} \quad (12.233)$$

Εξασκηθείτε στη συνέλιξη υπολογίζοντας αλγεβρικά - χωρίς σχήμα - το παραπάνω πρόβλημα! ☺

Παράδειγμα 12.7:

Έστω το σήμα

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \quad (12.234)$$

Βρείτε τη συνέλιξη με τον εαυτό του.

Λύση:
Θα έχουμε

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k] \quad (12.235)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^n u[k] u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k] u[n-k] \quad (12.236)$$

Όμως

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (12.237)$$

και

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \iff k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.238)$$

και άρα

$$u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.239)$$

Άρα η συνέλιξη γράφεται ως

$$c[n] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=0}^n 1 = a^n(n+1) \quad (12.240)$$

για $n \geq 0$. Προφανώς, $c[n] = 0$, $n < 0$. Άρα τελικά

$$c[n] = \begin{cases} a^n(n+1), & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.241)$$

ή αλλιώς

$$c[n] = a^n(n+1)u[n] \quad (12.242)$$

Πολλές φορές όμως η συνέλιξη εμπλέκει δυο σήματα που είναι και τα δυο πεπερασμένης διάρκειας (μερικά δείγματα το καθένα), οπότε η χρήση του ορισμού δεν είναι τόσο βολική. Θα δούμε τώρα μια άλλη μέθοδο η οποία ονομάζεται μέθοδος της ολισθαίνουσας ταινίας - *sliding tape method*, και ταιριάζει πολύ σε τέτοια προβλήματα.

12.6.5 Μέθοδος Ολισθαίνουσας Ταινίας

Έστω δυο σήματα πεπερασμένης διάρκειας, όπως τα

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 0.5\delta[n-2] \quad (12.243)$$

$$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] \quad (12.244)$$

και αναζητούμε το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους. Θα προσομοιώσουμε τη διαδικασία ανάκλασης και μετατόπισης που δείξαμε στη γραφική λύση, αλλά όχι πλέον σε γραφήματα αλλά σε σειρές από “κελιά” που το καθένα παριστάνει μια συνάρτηση Δέλτα και φέρει την τιμή του πλάτους της. Δείτε το Σχήμα 12.7, όπου αρχικά αναπαριστούμε τις τιμές των συναρτήσεων Δέλτα που αποτελούν τα σήματά μας ως τιμές σε διαδοχικά κελιά. Το μαύρο βελάκι σημειώνει το δείγμα που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $n = 0$. Έχουμε ήδη συμβολίσει στο σχήμα μας τα σήματά μας ως προς τη μεταβλητή k . Η πρώτη κίνηση που πρέπει να κάνουμε είναι - κατά τα ήδη γνωστά - η χρονική αντιστροφή του ενός σήματος, έστω του $y[k]$. Στη συνέχεια πρέπει να μετατοπίσουμε το σήμα $y[k]$ κατά n , πράγμα που φαίνεται στο Σχήμα 12.7(α), όπου οι δυο ταινίες έχουν τοποθετηθεί η μια κάτω από την άλλη - ουσιαστικά προσομοιώνουν την αναπαράσταση των σημάτων σε κοινό άξονα k , όπως είδαμε στη γραφική λύση. Για την απλούστερη αναπαράσταση της διαδικασίας, οι τιμές της συνάρτησης Δέλτα που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή $k = 0$ σημειώνονται με μαύρο κελί.

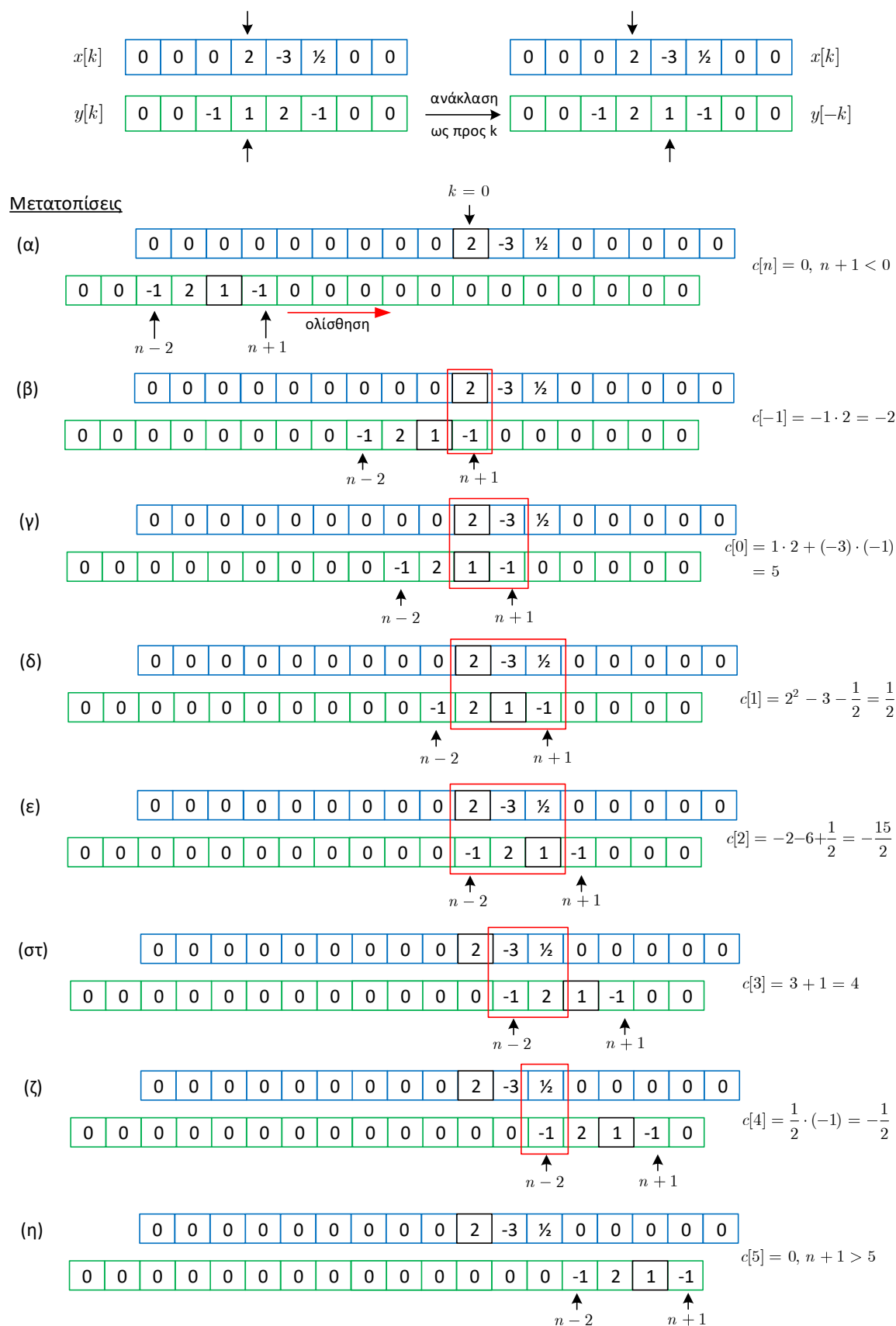
Παρατηρήστε ότι ξεκινάμε να ολισθαίνουμε την ταινία του $y[n-k]$ από το $-\infty$, ένα δείγμα τη φορά προς τα δεξιά, ως ότου έρθουμε σε μια θέση όπως στο Σχήμα 12.7(α). Είναι εμφανές ότι το γινόμενο $x[k]y[n-k]$ είναι μηδενικό - πολλαπλασιάζετε τα επιμέρους κελιά για να το διαπιστώσετε. Το γινόμενο παραμένει μηδενικό ως ότου $n+1 = 0$, στο Σχήμα 12.7(β). Τότε λαμβάνουμε την τιμή της συνέλιξης τη χρονική στιγμή $n = -1$, και η οποία είναι

$$c[-1] = x[0]y[-1-0] = -1 \times 2 = -2 \quad (12.245)$$

και η οποία προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τα επιμέρους κελιά. Ολισθαίνουμε κατά ένα δείγμα την ταινία του σήματος $y[n-k]$, καταλήγοντας στη θέση του Σχήματος 12.7(γ). Πολλαπλασιάζοντας τα επιμέρους κελιά και αθροίζοντας τα αποτελέσματα, λαμβάνουμε την τιμή $n = 0$ της συνέλιξης. Άρα

$$c[0] = x[0]y[0] + x[1]y[1] = 1 \times 2 + (-3) \times (-1) = 5 \quad (12.246)$$

Συνεχίζουμε τη διαδικασία αυτή στα Σχήματα 12.7(δ,ε,στ,ζ), όπου και λαμβάνουμε τις τιμές της συνέλιξης για $n = 1$ ως $n = 4$, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο - πολλαπλασιάζοντας και αθροίζοντας τα επιμέρους γινόμενα. Καταλήγουμε



Σχήμα 12.7: Μέθοδος ολισθαίνουσας ταινίας για τον υπολογισμό της συνέλιξης.

στο τέλος στη θέση του Σχήματος 12.7(η), όπου πλέον το γινόμενο των επιμέρους τιμών είναι ξανά μηδενικό, και παραμένει τέτοιο για κάθε $n > 4$.

Έτσι, το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ -2, & n = -1 \\ 5, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \\ -\frac{15}{2}, & n = 2 \\ 4, & n = 3 \\ -\frac{1}{2}, & n = 4 \\ 0, & n > 4 \end{cases} \quad (12.247)$$

ή εναλλακτικά

$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4] \quad (12.248)$$

Πώς μπορούμε να γνωρίζουμε αν το παραπάνω είναι σωστό, τουλάχιστον όσον αφορά τη διάρκεια του σήματος⁴; Θυμηθείτε κατ' αρχάς την ιδιότητα του εύρους συνέλιξης: αν ένα σήμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ και ένα δεύτερο σήμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $\llbracket n_3, n_4 \rrbracket$, τότε η συνέλιξή τους θα είναι μη μηδενική στο διάστημα $\llbracket n_1 + n_3, n_2 + n_4 \rrbracket$. Στο παράδειγμά μας, έχουμε $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ και $\llbracket n_3, n_4 \rrbracket = \llbracket -1, 2 \rrbracket$, οπότε για τη συνέλιξή τους θα είναι $\llbracket n_{c1}, n_{c2} \rrbracket = \llbracket -1, 4 \rrbracket$, που συμφωνεί ακριβώς στα δείγματα που βρήκαμε.

12.6.6 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 12.2. Ο πίνακας αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους και μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

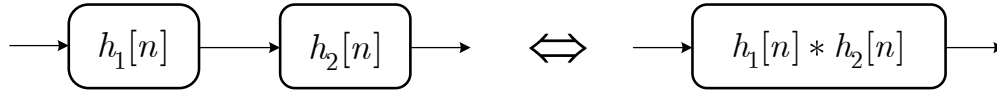
Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης διακριτού χρόνου		
$x[n]$	$y[n]$	$x[n] * y[n]$
$x[n]$	$\delta[n-k]$	$x[n-k]$
$a^n u[n]$	$u[n]$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n]$
$u[n]$	$u[n]$	$(n+1)u[n]$
$a_1^n u[n]$	$a_2^n u[n]$	$\frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{a_1-a_2} u[n], \quad a_1 \neq a_2$
$a_1^n u[n]$	$a_2^n u[-n-1]$	$\frac{a_1}{a_2-a_1} a_1^n u[n] + \frac{a_2}{a_2-a_1} a_2^n u[-n-1], \quad a_2 > a_1 $
$na_1^n u[n]$	$a_2^n u[n]$	$\frac{a_1 a_2}{(a_1-a_2)^2} \left(a_2^n - a_1^n + \frac{a_1-a_2}{a_2} na_1^n \right) u[n], \quad a_1 \neq a_2$
$nu[n]$	$nu[n]$	$\frac{1}{6} n(n+1)(n-1)u[n]$
$a^n u[n]$	$a^n u[n]$	$(n+1)a^n u[n]$
$a^n u[n]$	$nu[n]$	$\left[\frac{a(a^n-1)+n(1-a)}{(1-a)^2} \right] u[n]$

Πίνακας 12.2: Πίνακας συνέλιξεων σημάτων διακριτού χρόνου.

⁴Τα υπόλοιπα είναι θέμα πράξεων ☺.

12.7 Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων

Ας δούμε μερικές διατάξεις συστημάτων που συναντώνται συχνά στην πράξη, και τις οποίες μπορούμε να απλοποιήσουμε. Στο Σχήμα 12.8, φαίνονται δυο συστήματα σε σειρά. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y[n]$,

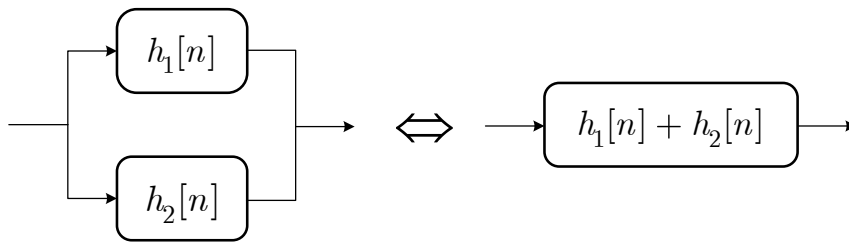


Σχήμα 12.8: Συστήματα σε σειρά και ισοδύναμη διάταξη.

είναι:

$$y[n] = (x_1[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x_1[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \quad (12.249)$$

λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη διάταξη που



Σχήμα 12.9: Παράλληλα συστήματα και ισοδύναμη διάταξη.

φαίνεται το ίδιο σχήμα.

Στο Σχήμα 12.9, φαίνονται δυο συστήματα σε παραλληλία. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y[n]$, είναι:

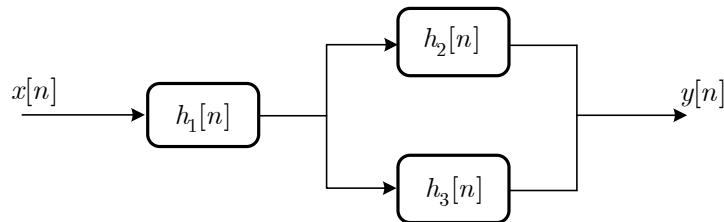
$$y[n] = (x_1[n] * h_1[n]) + (x_1[n] * h_2[n]) = x_1[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \quad (12.250)$$

λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη διάταξη που φαίνεται το ίδιο σχήμα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 12.8:

Έστω η διάταξη συστημάτων του Σχήματος 12.10.



Σχήμα 12.10: Σύστημα Παραδείγματος 12.8.

Υπολογίστε τις συνολικές κρουστικές αποκρίσεις αν οι επιμέρους κρουστικές αποκρίσεις δίνονται ως

- | | |
|--|--|
| (α') i. $h_1[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n+1]$ | (β') i. $h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$ |
| ii. $h_2[n] = u[n-2]$ | ii. $h_2[n] = nu[n]$ |
| iii. $h_3[n] = -u[n-3]$ | iii. $h_3[n] = u[n]$ |

Λύση:

(α') Το συνολικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n+1] * (u[n-2] - u[n-3]) \quad (12.251)$$

Παρατηρούμε ότι

$$u[n-2] - u[n-3] = \delta[n-2] \quad (12.252)$$

κι έτσι

$$h[n] = h_1[n] * \delta[n-2] = h_1[n-2] = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} u[n-1] \quad (12.253)$$

(β') Το συνολικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] * (nu[n] + \delta[n]) \quad (12.254)$$

Παρατηρούμε ότι

$$nu[n] + u[n] = (n+1)u[n] \quad (12.255)$$

κι έτσι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] * (n+1)u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k+1)u[k] \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k-1] \quad (12.256)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} u[k] u[n-k-1] \quad (12.257)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\sum_{k=0}^{n-1} k2^k + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \right] \quad (12.258)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[(n-1)2^{n+1} - n2^n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-2^n) \right] = (n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 1 \quad (12.259)$$

μετά από μερικές πράξεις. Άρα συνολικά

$$h[n] = (n-1)u[n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] \quad (12.260)$$

12.8 Συνολική Απόκριση Συστήματος

Έχουμε πλέον αναλυτικές μαθηματικές εκφράσεις για την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης ενός ΓΧΑ συστήματος. Έτσι, η συνολική απόκριση (έξοδος) $y[n]$ ενός ΓΧΑ συστήματος παρουσία εισόδου $x[n]$ είναι

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^n + x[n] * h_g[n] \quad (12.261)$$

με $h_g[n]$ την χρονική απόκριση του συστήματος, γ_i τις (απλές) χαρακτηριστικές ρίζες (ή φυσικές συχνότητες) του συστήματος, και c_i σταθεροί συντελεστές, όπως αυτά ορίστηκαν στην Παράγραφο 12.12.1. Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που συνοψίζει όλα όσα έχουμε δει ως τώρα.

Παράδειγμα 12.8:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] \quad (12.262)$$

με αρχικές συνθήκες $y[0] = 1$, $y[-1] = 0$. Βρείτε τη συνολική απόκριση του συστήματος αν η είσοδος είναι $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Λύση:

Ας βρούμε πρώτα την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}[n]$. Η ομογενής εξίσωση είναι

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 0 \quad (12.263)$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\gamma^2 + 3\gamma + 2 = 0 \iff (\gamma + 1)(\gamma + 2) = 0 \quad (12.264)$$

Η ομογενής λύση θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n = c_1 (-1)^n + c_2 (-2)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.265)$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 , θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες, οπότε

$$y_{zi}[0] = c_1 + c_2 = 1 \quad (12.266)$$

$$y_{zi}[-1] = -c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 0 \quad (12.267)$$

Οπότε $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, και έτσι η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι

$$y_{zi}[n] = -(-1)^n - 2(-2)^n u[n] = (-1)^{n+1} u[n] + (-2)^{n+1} u[n] \quad (12.268)$$

Η κρουστική απόκριση βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης

$$h[n] + 3h[n-1] + 2h[n-2] = \delta[n] \quad (12.269)$$

Βρήκαμε νωρίτερα τις χαρακτηριστικές ρίζες, και άρα η ομογενής λύση είναι της μορφής

$$h[n] = d_1 (-1)^n + d_2 (-2)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.270)$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες αρχικές συνθήκες που δημιουργούνται από την παρουσία της συνάρτησης Δέλτα, οπότε έχουμε

$$h[0] + 3h[-1] + 2h[-2] = \delta[0] \iff h[0] = 1 \iff d_1 + d_2 = 1 \quad (12.271)$$

$$h[1] + 3h[0] + 2h[-1] = \delta[1] \iff h[1] + 3 = 0 \iff -d_1 - 2d_2 = -3 \quad (12.272)$$

και έτσι βρίσκουμε ότι $d_1 = -1$, $d_2 = 2$, οπότε η ομογενής λύση είναι

$$h[n] = (-1)^{n+1} u[n] - (-2)^{n+1} u[n] \quad (12.273)$$

Η κρουστική απόκριση είναι τελικά

$$h_g[n] = h[n] = [(-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}] u[n] \quad (12.274)$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ θα είναι

$$y_{zs}[n] = h_g[n] * x[n] \quad (12.275)$$

$$= ((-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}) u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (12.276)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1 + 2(-2)^n}{3} \right] + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1 + 4(-4)^n}{5} \right] \quad (12.277)$$

Οπότε τελικά, η συνολική απόκριση του συστήματος όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ είναι

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = (-1)^{n+1} u[n] + (-2)^{n+1} u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1 + 2(-2)^n}{3} \right] + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1 + 4(-4)^n}{5} \right] \quad (12.278)$$

Όπως ήταν εμφανές στο παράδειγμα, είναι ιδιαίτερα κοπιαστικό - αν και εύκολο - να βρει κανείς τη συνολική απόκριση (δηλ. την έξοδο) ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Άλλες μέθοδοι που θα δούμε

σύντομα θα μας δώσουν ευκολότερους τρόπους υπολογισμού της εξόδου.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι η εξής: ο διαχωρισμός σε απόκριση μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου δεν είναι ο μοναδικός που μπορεί να γίνει. Ένας ακόμα διαχωρισμός είναι αυτός της **φυσικής απόκρισης** - **natural response** $y_n[n]$ και της **εξαναγκασμένης απόκρισης** - **forced response** $y_f[n]$. Η φυσική και η εξαναγκασμένη απόκριση μπορούν να βρεθούν απ' ευθείας από τη συνολική απόκριση, με τον απλό διαχωρισμό των όρων που περιλαμβάνονται στην απόκριση μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Όλοι οι όροι που περιέχουν φυσικές συχνότητες ανήκουν στην φυσική απόκριση, ενώ όλες οι υπόλοιπες ανήκουν στην εξαναγκασμένη απόκριση.

Για παράδειγμα, έστω ένα σύστημα με συνολική απόκριση

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \quad (12.279)$$

$$= ((-2)^n u[n] + 2(-4)^n u[n]) + (5(-2)^n u[n] + 2(-3)^n u[n] - (-4)^n u[n]) \quad (12.280)$$

με

$$y_{zi}[n] = ((-2)^n u[n] + 2(-4)^n u[n]) \quad (12.281)$$

$$y_{zs}[n] = (5(-2)^n u[n] + 2(-3)^n u[n] - (-4)^n u[n]) \quad (12.282)$$

Βλέπουμε ότι οι φυσικές συχνότητες του συστήματος είναι $\gamma_i = -2, -4$, απλά ελέγχοντας την $y_{zi}[n]$. Όμως τέτοιες συχνότητες υπάρχουν και στην απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$. Αν βάλουμε μαζί τους όρους που περιέχουν φυσικές συχνότητες του συστήματος και μαζί όλους τους άλλους, θα έχουμε

$$y[n] = ((-2)^n u[n] + 2(-4)^n u[n]) + (5(-2)^n u[n] + 2(-3)^n u[n] - (-4)^n u[n]) \quad (12.283)$$

$$= (6(-2)^n u[n] + (-4)^n u[n]) + 2(-3)^n u[n] \quad (12.284)$$

$$= y_n[n] + y_f[n] \quad (12.285)$$

με

$$y_n[n] = 6(-2)^n u[n] + (-4)^n u[n] \quad (12.286)$$

$$y_f[n] = 2(-3)^n u[n] \quad (12.287)$$

Παρατηρήστε ότι η φυσική απόκριση έχει τους ίδιους όρους με την απόκριση μηδενικής εισόδου - μόνο οι σταθερές αλλάζουν. Αντίθετα, η εξαναγκασμένη απόκριση δεν έχει ιδιαίτερη σχέση με την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Φυσικά, ο τρόπος εύρεσης της συνολικής απόκρισης ως άθροισμα της φυσικής και της εξαναγκασμένης απόκρισης δεν περνά αναγκαστικά μέσα από τη γνώση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Η φυσική και η εξαναγκασμένη απόκριση μπορούν να βρεθούν κατ' ευθείαν από την εξίσωση διαφορών του συστήματος. Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι απλούστερη από αυτή που έχουμε δει ως τώρα στις αποκρίσεις μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Ας τη δούμε.

12.9 Φυσική και Εξαναγκασμένη Απόκριση

Η εύρεση της φυσικής απόκρισης είναι εύκολη, αφού αυτή αποτελείται μόνο από όρους που περιέχουν φυσικές συχνότητες, άρα θα πρέπει να αποτελεί λύση του ομογενούς συστήματος. Όμως, έχουμε δει ότι η λύση ενός τέτοιου συστήματος απαιτεί κάποιες αρχικές συνθήκες. Θα μπορούσε κανείς να προτείνει τις αρχικές συνθήκες της εξόδου για $n < 0$. Όμως αυτές οι αρχικές συνθήκες εφαρμόζονται μόνο στην απόκριση μηδενικής εισόδου. Στις αποκρίσεις που συζητάμε, δεν μπορεί να γίνει διαχωρισμός της μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης. Άρα οι συνθήκες που θέλουμε πρέπει να αφορούν όλη την έξοδο, δηλ. την $y[n]$ η οποία ορίζεται για $n \geq 0$, οπότε οι συνθήκες που θέλουμε πρέπει να θεωρηθούν στο $n \geq 0$.

Η εύρεση της εξαναγκασμένης απόκρισης είναι επίσης εύκολη. Η εξαναγκασμένη απόκριση μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικός συνδυασμός διαφόρων μορφών της εισόδου $x[n]$. Ο Πίνακας 12.3 παρουσιάζει κάποιες συνήθεις μορφές εισόδων, και την αντίστοιχη εξαναγκασμένη απόκριση. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα, η εξαναγκασμένη απόκριση για είσοδο $x[n] = C\delta[n]$ είναι μηδενική, και έτσι η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι μόνο η $y_n[n]$. Όπως έχουμε ήδη δει, για ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών, η κρουστική απόκριση $h[n]$ μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας την εξίσωση διαφορών για $x[n] = \delta[n]$, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες στο σύστημά μας.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Εξαναγκασμένη Απόκριση για διάφορες μορφές εισόδου	
Όροι του $x[n]$	Εξαναγκασμένη Απόκριση $y_x[n]$
C	C_1
Cn	$C_1n + C_2$
Ca^n	C_1a^n
$C \cos(\omega_0 n)$	$C_1 \cos(\omega_0 n) + C_2 \sin(\omega_0 n)$
$C \sin(\omega_0 n)$	$C_1 \cos(\omega_0 n) + C_2 \sin(\omega_0 n)$
$Ca^n \cos(\omega_0 n)$	$C_1 a^n \cos(\omega_0 n) + C_2 a^n \sin(\omega_0 n)$
$C\delta[n]$	0

Πίνακας 12.3: Εξαναγκασμένες Αποκρίσεις σε Εξισώσεις Διαφορών για διάφορες μορφές εισόδου.

Παράδειγμα 12.9:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = 6x[n-1] \quad (12.288)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο

$$x[n] = (n+1)u[n] \quad (12.289)$$

δεδομένων αρχικών συνθηκών $y[0] = 2$ και $y[1] = 0$.

Λύση:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 = (\gamma + 2)(\gamma + 3) \quad (12.290)$$

Άρα η φυσική απόκριση θα είναι της μορφής

$$y_n[n] = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n, \quad n \geq 0 \quad (12.291)$$

με c_1, c_2 σταθερές που πρέπει να βρούμε, αλλά αφού υπολογίσουμε τη συνολική απόκριση. Βάσει του Πίνακα 12.3, η εξαναγκασμένη απόκριση θα είναι της μορφής

$$y_f[n] = (C_1n + C_0) \quad (12.292)$$

και

$$y_f[n-1] = (C_1(n-1) + C_0) = C_1n - C_1 + C_0, \quad (12.293)$$

$$y_f[n-2] = (C_1(n-2) + C_0) = C_1n - 2C_1 + C_0, \quad (12.294)$$

Όμοια

$$6x[n-1] = 6((n-1) + 1)u[n] = 6nu[n] \quad (12.295)$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση διαφορών, έχουμε

$$(C_1n + C_0) + 5(C_1n - C_1 + C_0) + 6(C_1n - 2C_1 + C_0) = 6n \quad (12.296)$$

$$12C_1n + C_0 - 5C_1 + 5C_0 - 12C_1 + 6C_0 = 6n \quad (12.297)$$

$$12C_1n - 17C_1 + 12C_0 = 6n \quad (12.298)$$

που μας δίνει το σύστημα

$$12C_1 = 6 \quad (12.299)$$

$$-17C_1 + 12C_0 = 0 \quad (12.300)$$

$$(12.301)$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_0 = \frac{17}{24} \quad (12.302)$$

Άρα η εξαναγκασμένη απόκριση είναι

$$y_{fr}[n] = \frac{1}{2}n + \frac{17}{24}, \quad n \geq 0 \quad (12.303)$$

Η συνολική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y[n] = y_f[n] + y_n[n] = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{2}n + \frac{17}{24}, \quad n \geq 0 \quad (12.304)$$

Από τις αρχικές συνθήκες $y[0] = 2$ και $y[1] = 0$, θα έχουμε

$$c_1 + c_2 + \frac{17}{24} = 2 \quad (12.305)$$

$$-2c_1 - 3c_2 + \frac{1}{2} + \frac{17}{24} = 0 \quad (12.306)$$

που μας δίνει τιμές

$$c_1 = \frac{8}{3}, \quad c_2 = -\frac{11}{8} \quad (12.307)$$

Άρα η συνολική απόκριση είναι

$$y[n] = y_{fr}[n] + y_{nr}[n] = \frac{8}{3}(-2)^n u[n] - \frac{11}{8}(-3)^n u[n] + \frac{1}{2}nu[n] + \frac{17}{24}u[n] \quad (12.308)$$

12.10 Αναδρομικές και Μη Αναδρομικές Εξισώσεις Διαφορών

Σε μερικές περιπτώσεις, μπορεί να είναι χρήσιμο να εκφράσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών με όρους των προηγούμενων τιμών της εισόδου και της εξόδου. Έστω το σύστημα

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (12.309)$$

Το παραπάνω σύστημα, για $M = 0$, $N = 1$, μπορεί να γραφεί ως

$$a_0 y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] \quad (12.310)$$

ή αλλιώς

$$y[n] = \frac{a_1}{a_0} y[n-1] + \frac{b_0}{a_0} x[n] \quad (12.311)$$

Η γενική μορφή τέτοιων εξισώσεων διαφορών δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{l=0}^M B_l x[n-l] - \sum_{k=1}^N A_k y[n-k] \quad (12.312)$$

όπου

$$A_k = \frac{a_k}{a_0} \quad (12.313)$$

$$B_l = \frac{b_l}{b_0} \quad (12.314)$$

με $k = 1, \dots, N$ και $l = 0, \dots, M$, είναι κανονικοποιημένες ως προς a_0 σταθερές που ορίζουν το σύστημα. Αν $a_k = 0$, για κάθε k , τότε η εξίσωση λέγεται **μη αναδρομική**, διαφορετικά λέγεται **αναδρομική**.

Όμως για να μπορούμε να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις, χρειαζόμαστε κάποιες τιμές, οι περίφημες *αρχικές συνθήκες*. Για παράδειγμα, για μια είσοδο $x[n]$ που ξεκινάει τη χρονική στιγμή $n = 0$ (δηλ. είναι μηδενική για $n \leq -1$), η λύση στη Σχέση (12.312) τη στιγμή $n = 0$ εξαρτάται από τις τιμές εξόδου $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$. Έτσι, βλέπετε ότι αυτές οι αρχικές συνθήκες πρέπει να καθοριστούν πρώτα πριν λύσουμε την εξίσωση για $n \geq 0$, όπως έχει συμβεί ήδη στα παραδείγματά μας. Όπως ήδη γνωρίζετε, όταν οι αρχικές συνθήκες αυτές είναι όλες μηδεν, τότε λέμε ότι το σύστημα είναι *σε αρχική ηρεμία*.

12.11 Συστήματα Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης

Για μη αναδρομικά συστήματα, η εξίσωση διαφορών δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (12.315)$$

και η έξοδος, όπως βλέπετε, είναι απλά το άθροισμα των τιμών της εισόδου, με συντελεστές b_k . Ως αποτέλεσμα, αφού η εξίσωση είναι γραμμένη με τη μορφή συνέλιξης, η κρουστική απόκριση βρίσκεται αντικαθιστώντας το $x[n]$ με το $\delta[n]$, και είναι απλά

$$h[n] = \sum_{l=0}^M b_l \delta[n-l] \quad (12.316)$$

Έτσι, η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και το σύστημα λέγεται Σύστημα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (**Finite Impulse Response System - FIR**). Σε αντίθετη περίπτωση, η κρουστική απόκριση είναι, εν γενει, άπειρη σε διάρκεια, και το σύστημα λέγεται Σύστημα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (**Infinite Impulse Response - IIR**).

12.12 Ευστάθεια Συστήματος

Ας αναφερθούμε τώρα αναλυτικότερα σε μια έννοια η οποία είναι πολύ σημαντική, αυτή της *ευστάθειας* ενός ΓΧΑ συστήματος. Συζητήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο (και υπενθυμίζουμε εδώ) ότι ένα σύστημα λέγεται **Bounded Input - Bounded Output (BIBO) ευσταθές** αν

$$|x[n]| < M_x \implies |y[n]| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathbb{R}_+ \quad (12.317)$$

Αυτή όμως η έξοδος $y[n]$ αποτελείται από δυο συνιστώσες, όπως είδαμε:

1. Την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}[n]$.
2. Την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}[n]$.

Ας δούμε πότε η καθεμιά είναι απολύτως φραγμένη.

12.12.1 Ευστάθεια Απόκρισης Μηδενικής Εισόδου

Εξ ορισμού, η απόκριση μηδενικής εισόδου παράγεται για $x[n] = 0$, οπότε προφανώς η είσοδος είναι φραγμένη. Η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται από τη σχέση

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^N c_k \gamma_k^n u[n] \quad (12.318)$$

αν οι χαρακτηριστικές ρίζες γ_k είναι διακριτές. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι η απόκριση αυτή είναι απολύτως φραγμένη μόνον αν το $y_{zi}[n] \not\rightarrow \infty$ όταν $n \rightarrow \infty$. Ας δούμε πότε συμβαίνει αυτό, διακρίνοντας δυο περιπτώσεις.

- Αν οι ρίζες γ_k είναι πραγματικές, τότε για να είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου απολύτως φραγμένη θα πρέπει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^n = 0, \quad \forall k \quad (12.319)$$

Αυτό όμως συμβαίνει μόνον όταν

$$0 < |\gamma_k| < 1, \quad \forall k \quad (12.320)$$

- Αν οι ρίζες γ_k είναι μιγαδικές, τότε για να είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου απολύτως φραγμένη θα πρέπει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^n = 0, \quad \forall k \quad (12.321)$$

Αυτό όμως συμβαίνει μόνον όταν

$$|\gamma_k| < 1, \quad \forall k \quad (12.322)$$

Ας το δείξουμε αναλυτικά, μια και αυτό το όριο θα το συναντήσουμε ξανά αρκετές φορές στη συνέχεια.

Έστω λοιπόν ότι $\gamma = a + jb = re^{j\phi}$, και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (re^{j\phi})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n e^{jn\phi} \quad (12.323)$$

Ο όρος $r^n e^{jn\phi}$ έχει μέτρο r^n , ενώ η φάση $e^{jn\phi}$ είναι πάντοτε απολύτως φραγμένη συνάρτηση του n^5 . Οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n e^{jn\phi} = \begin{cases} 0, & 0 < r < 1 \\ \infty, & r > 1 \end{cases} \quad (12.324)$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γενικευτεί για δυο οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f[n], g[n]$, για τις οποίες ισχύει ότι αν $|f[n]| < M_f$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} g[n] = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} f[n]g[n] = 0$. Περιγράφοντας αυτή τη σχέση, το όριο του γινομένου δυο συναρτήσεων $f[n]g[n]$ όταν $n \rightarrow \infty$ είναι μηδέν, αν η μια είναι απολύτως φραγμένη και η άλλη τείνει στο μηδέν όταν $n \rightarrow \infty$.

- Στην ειδική περίπτωση που $\gamma = e^{jb}$ ή $\gamma = \pm 1$, τότε ο όρος γ^n διατηρεί το μοναδιαίο μέτρο του όταν $n \rightarrow \infty$, χωρίς να αυξάνει ή να φθίνει. Από τις σχέσεις του Euler, έχουμε

$$e^{jbn} = \cos(bn) + j \sin(bn) \quad (12.325)$$

που σημαίνει ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου θα διατηρεί μια ταλάντωση επ' άπειρον, χωρίς αυτή να φθίνει ή να αυξάνει. Άρα αν στο σύνολο των χαρακτηριστικών ριζών υπάρχει μια τουλάχιστον απλή καθαρά φανταστική ρίζα, τότε το σύστημα είναι *οριακά ευσταθές*.

Ας δούμε πως – και αν – διαφοροποιούνται τα πράγματα όταν οι ρίζες έχουν κάποια πολλαπλότητα r . Υπενθυμίζεται ότι τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται ως

$$y_{zi}[n] = ((c_1 + c_2 n + \dots + c_r n^{r-1})\gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \dots + c_N\gamma_N^n) u[n] \quad (12.326)$$

Για τα εκθετικά που φέρουν τις απλές ρίζες $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_N$, η κατάσταση δεν αλλάζει σε σχέση με την ανάλυση που μόλις κάναμε. Τα εκθετικά όμως που φέρουν τη ρίζα πολλαπλότητας r , γ_1 , φέρουν ως παράγοντα έναν όρο n^k , με $k = 0, \dots, r-1$. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί κανείς να δείξει με όμοιο με πριν τρόπο, ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \gamma^n = 0 \quad (12.327)$$

μόνον αν $0 < |\gamma| < 1$. Αυτό σημαίνει ότι η ίδια συνθήκη ευστάθειας απαιτείται παρουσία πολλαπλής ρίζας για την απόκριση μηδενικής εισόδου. Τι συμβαίνει αν η πολλαπλή ρίζα είναι φανταστική: $\gamma = e^{jb}$;

Συνοψίζοντας:

Ευστάθεια Απόκρισης Μηδενικής Εισόδου

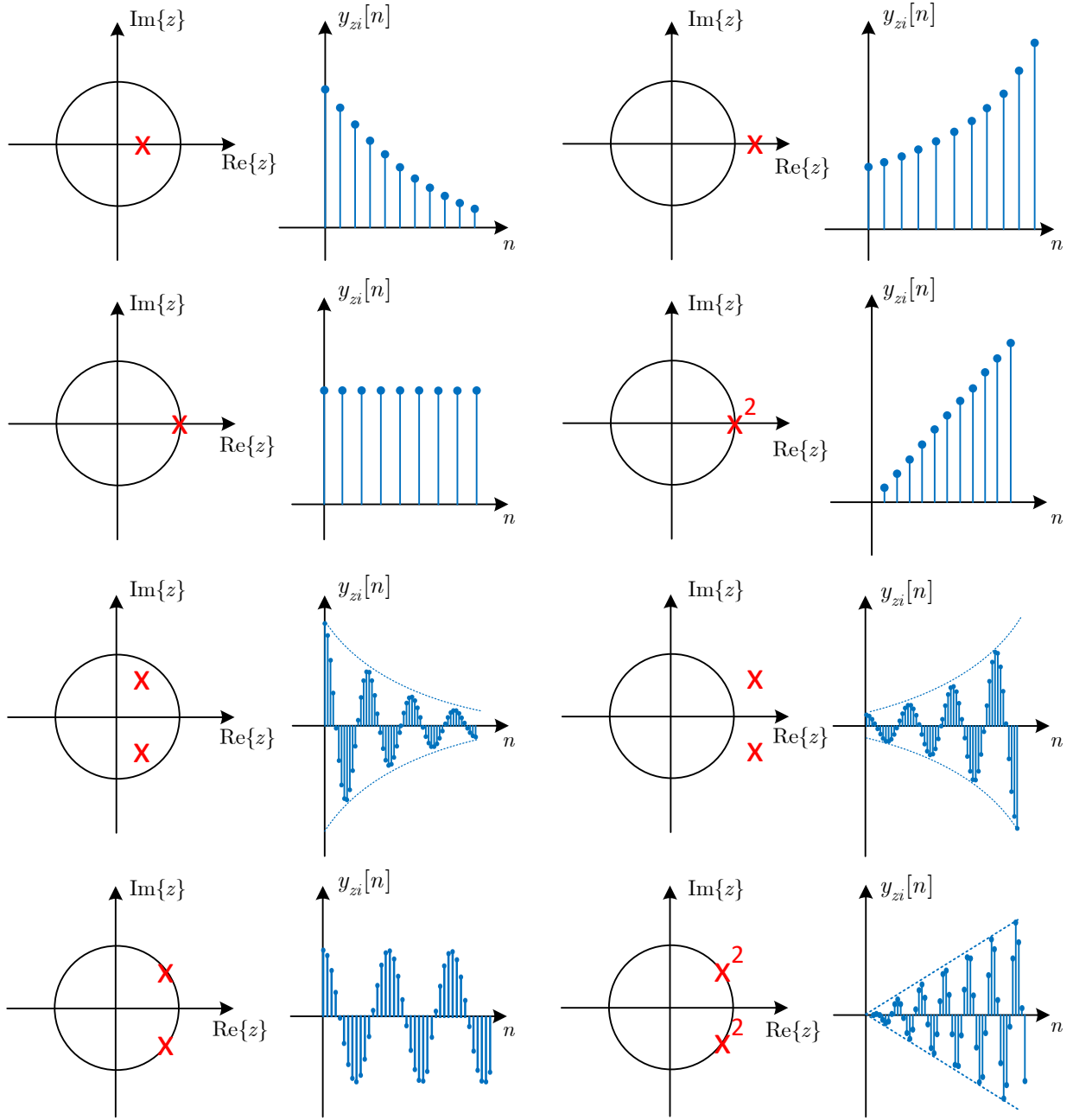
Ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου είναι ευσταθές αν

1. όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας
2. αν υπάρχουν φανταστικές χαρακτηριστικές ρίζες απλής τάξης (οριακή ευστάθεια), και όλες έχουν μοναδιαίο μέτρο
3. αν υπάρχει και χαρακτηριστική ρίζα στο μοναδιαίο κύκλο, τότε αυτή είναι απλή. Η ευστάθεια αυτή ονομάζεται *οριακή ευστάθεια*.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, η απόκριση είναι ασταθής.

Σχηματικά, η απόκριση μηδενικής εισόδου πραγματικών συστημάτων για διάφορες θέσεις των χαρακτηριστικών ριζών φαίνεται στο Σχήμα 12.11.

⁵Το φράγμα του είναι η μονάδα.



Σχήμα 12.11: Θέσεις χαρακτηριστικών ριζών και μορφή απόκρισης μηδενικής εισόδου.

12.12.2 Ευστάθεια Απόκρισης Μηδενικής Κατάστασης

Αντίστοιχα, για την απόκριση μηδενικής κατάστασης, όπου η είσοδος είναι μη μηδενική και απολύτως φραγμένη

$$|x[n]| < M_x < +\infty \quad (12.328)$$

αλλά οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η ευστάθεια συνεπάγεται αν

$$|y[n]| = |x[n] * h[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| \quad (12.329)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]| |h[n-k]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty \quad (12.330)$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνον όταν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty \quad (12.331)$$

ή ισοδύναμα αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλ.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (12.332)$$

Επειδή η κρουστική απόκριση $h[n]$ αποτελείται από όρους που εμφανίζονται στην απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$h[n] = f\{\gamma_k^n, n^k \gamma_k^n\} \quad (12.333)$$

η Σχέση (12.332) ικανοποιείται μόνον αν

$$|\gamma_k| < 1, \quad \forall \gamma_k \in \mathbb{C} \quad (12.334)$$

όπως είδαμε στην Παράγραφο 12.12.1. Άρα:

Ευστάθεια Συστήματος

Η ευστάθεια ενός συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τις *χαρακτηριστικές ρίζες* του συστήματος, οι οποίες πρέπει να είναι απολύτως μικρότερες της μονάδας.

και ειδικότερα,

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Η ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την κρουστική του απόκριση $h[n]$, η οποία πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμη.

Ας συζητήσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις επάνω στο ζήτημα της ευσταθείας.

Παρατηρήσεις

1. Σε ένα ευσταθές σύστημα, μια απολύτως φραγμένη είσοδος παράγει πάντα μια απολύτως φραγμένη έξοδο. Όμως, μπορεί κανείς να δείξει ότι σε ένα ασταθές ή οριακά ευσταθές σύστημα, η έξοδός του είναι μη απολύτως φραγμένη, ακόμα κι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη!
2. Ένα ασταθές σύστημα δεν έχει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, μια και κάθε σύστημα που κατασκευάζουμε πρέπει να είναι ευσταθές^α. Σε κάποιες περιπτώσεις όμως μπορούν να προκύψουν ασταθή συστήματα στην πράξη, γι' αυτό και τα μελετάμε: για να μπορέσουμε να τα “σταθεροποιήσουμε”.
3. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσετε ότι - σε αντίθεση με το συνεχή χρόνο - η παρουσία συναρτήσεων Δέλτα στην έξοδο δεν καθιστά το σύστημα ασταθές. Θυμηθείτε ότι ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές μπορεί να παρουσιάσει (γενικευμένες) συναρτήσεις Δέλτα (ή και παραγώγους της) στην έξοδο του για μια φραγμένη είσοδο. Κάτι τέτοιο καθιστά το σύστημα (BIBO-) ασταθές. Αυτό δε συμβαίνει στο διακριτό χρόνο αφού η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου είναι ένα καλώς ορισμένο σήμα (ακολουθία) και ως εκ τούτου φραγμένο.

^αΕντάξει, ίσως όχι πάντα ☹: https://en.wikipedia.org/wiki/Grumman_X-29

12.13 Αιτιατότητα Συστήματος

Συστήματα που πρέπει να λειτουργήσουν σε πραγματικό χρόνο είναι απαραίτητο να ικανοποιούν την ιδιότητα της αιτιατότητας. Όμως πολλά συστήματα διακριτού χρόνου δεν είναι αιτιατά καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν

off-line, σε έναν υπολογιστή όπου η είσοδος είναι αποθηκευμένη εξ' ολοκλήρου. Εν γένει όμως, ένα αιτιατό σύστημα δεν πρέπει να αποκρίνεται αν δε διεγείρεται, ή με άλλα λόγια, δεν πρέπει να παράγει έξοδο αν δεν του παρασχεθεί μια είσοδος. Προφανώς ένα σύστημα που η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μη μηδενική δεν μπορεί ούτε ΓΧΑ ούτε αιτιατό. Για παράδειγμα, ένα σύστημα με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες θα έχει παράξει απόκριση μηδενικής εισόδου πριν του εφαρμόσουμε, π.χ., μια εκθετική συνάρτηση τη χρονική στιγμή $n = n_0$ (δηλ. την $a^n u[n - n_0]$).

Ας επικεντρωθούμε τότε στην αιτιατότητα ενός ΓΧΑ συστήματος. Σε ένα ΓΧΑ σύστημα, για δυο εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ παράγονται δυο έξοδοι $y_1[n]$ και $y_2[n]$, τότε αυτό είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \quad \forall n < n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n] \quad \forall n < n_0 \quad (12.335)$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις συνθήκες αιτιατότητας για ένα σύστημα ως εξής:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

Ένα σύστημα είναι αιτιατό αν βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**, δηλ.

$$\text{αν } x[n] = 0, \quad n < n_0 \quad (12.336)$$

$$\text{τότε } y[n] = 0, \quad n < n_0 \quad (12.337)$$

και για όσους/ες έχουν περάσει από το Κεφάλαιο 4 σας θυμίζει τη φράση “no input, no output”. ☺

Συνοψίζοντας, για έναν σύστημα που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

Αιτιατά ΓΧΑ Συστήματα και Εξισώσεις Διαφορών

- Η έξοδος για μια δεδομένη είσοδο δεν είναι μοναδική. Απαιτούνται επιπλέον πληροφορίες για τη μοναδικότητά της, όπως η απουσία ή παρουσία αρχικών συνθηκών.
- Αν οι αρχικές συνθήκες δίνονται σε μορφή N τιμών της εξόδου σε χρονικές στιγμές πριν την εφαρμογή της εισόδου, οι διάφορες τιμές της εξόδου βρίσκονται με αναδρομικό τρόπο, αναδιατάσσοντας κατάλληλα την εξίσωση διαφορών του συστήματος.
- Οι ιδιότητες της γραμμικότητας, χρονικής αμεταβλητότητας, και αιτιατότητας εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Αν οι αρχικές συνθήκες συνιστούν συνθήκες αρχικής ηρεμίας, τότε το σύστημα θα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και θα έχει μοναδική λύση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η είσοδος εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n = n_0 > 0$, όπως για παράδειγμα η είσοδος $x[n] = \delta[n - n_0]$, $n_0 > 0$, υποθέτοντας ξανά συνθήκες αρχικής ηρεμίας, τότε $y[n] = 0$, $n < n_0$. Επιπλέον, προσέξτε ότι αν $n_0 \leq -1$, η αρχική ηρεμία του συστήματος υπονοεί ότι $y[-1] \neq 0$. Δηλαδή, αρχική ηρεμία δεν σημαίνει πάντα ότι

$$y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0 \quad (12.338)$$

Όμως σημαίνει πάντα ότι

$$y[n_0 - 1] = y[n_0 - 2] = \dots = y[n_0 - N] = 0 \quad (12.339)$$

αν $x[n] = 0$, $n < n_0$. Η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με την προηγούμενη όταν η είσοδος εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $n = n_0$.

Μπορούμε άραγε για ένα ΓΧΑ σύστημα να βρούμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, όπως κάναμε για την ευστάθεια; Η απάντηση είναι ναι! Σκεφτείτε ότι αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και εμφανιστεί στην είσοδό του η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου, τότε γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Η είσοδος όμως εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$, και δεν υπήρξε πιο πριν. Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h[n] = 0$, $n < 0$.

Θυμηθείτε ότι αιτιατότητα σημαίνει πως η έξοδος ενός συστήματος εξαρτάται μόνο από παρελθοντικές (μέχρι και την τρέχουσα) τιμές της εισόδου. Πώς λοιπόν η σχέση που αναφέραμε συνδέεται με αυτήν την εξάρτηση εξόδου-εισόδου; Ας θεωρήσουμε μια κρουστική απόκριση $h[n]$ που δεν ικανοποιεί την προαναφερόμενη συνθήκη, δηλ.

$$h[n] \neq 0, \quad n < 0 \quad (12.340)$$

και ένα σήμα εισόδου $x[n]$. Ας υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ για μια τυχαία χρονική στιγμή $n = n_0$ μέσω του ολοκληρώματος της συνέλιξης:

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n_0 - k] \quad (12.341)$$

Μπορούμε να χωρίσουμε το άθροισμα σε δυο μέρη,

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n_0} x[k]h[n_0 - k] + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} x[k]h[n_0 + 1 - k] \quad (12.342)$$

Είναι εμφανές ότι το δεύτερο άθροισμα περιλαμβάνει χρονικές στιγμές της εισόδου μεγαλύτερες του n_0 , δηλ. $k \geq n_0 + 1$, και θα πρέπει να είναι ίσο με μηδέν για ένα αιτιατό σύστημα, καθώς ο υπολογισμός της εξόδου $y[n_0]$ δεν μπορεί να εξαρτάται από το $x[k]$, με $k \geq n_0 + 1$. Για αυτές τις χρονικές στιγμές, η κρουστική απόκριση λαμβάνει ως όρισμα την ποσότητα $n_0 + 1 - k$ που είναι αρνητική, δηλ. αντιστοιχεί σε αρνητικές χρονικές στιγμές. Αν η κρουστική απόκριση είναι μηδενική για αρνητικές χρονικές στιγμές, τότε το δεύτερο άθροισμα της Σχέσης (12.342) είναι μηδέν.

Οπότε:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος και Κρουστική Απόκριση

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (12.343)$$

12.14 Η βηματική απόκριση $s[n]$

Πολλές φορές, ο απ' ευθείας υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης είναι δύσκολος. Η **βηματική απόκριση** $s[n]$ ενός συστήματος δεν είναι άλλη από την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η βηματική συνάρτηση $u[n]$. Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n - k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (12.344)$$

και

$$s[n - 1] = h[n] * u[n - 1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n - 1 - k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] = \left(\sum_{k=-\infty}^n h[k] \right) - h[n] \quad (12.345)$$

Άρα μπορούμε από τις Σχέσεις (12.344, 12.345) να εξάγουμε ότι

$$s[n] - s[n - 1] = h[n] \quad (12.346)$$

δηλ. η διακριτή παράγωγος της βηματικής απόκρισης μας δίνει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του ΓΧΑ συστήματος. Ας δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 12.10:

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = (n + 1)\alpha^n u[n] \quad (12.347)$$

με $|a| < 1$. Δείξτε ότι η βηματική απόκριση του παραπάνω συστήματος είναι

$$s[n] = \left[\frac{1}{(1 - \alpha)^2} - \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \alpha^n - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} (n + 2)\alpha^n \right] u[n] \quad (12.348)$$

Λύση:
Έχουμε

$$s[n] = h[n] * u[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^n (k+1)\alpha^k, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (12.349)$$

Γνωρίζοντας ότι

$$\sum_{k=0}^N (k+1)\alpha^k = \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{N+1} \alpha^k = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1 - \alpha^{N+2}}{1 - \alpha} \right], \quad (12.350)$$

τότε έχουμε

$$s[n] = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1 - \alpha^{n+2}}{1 - \alpha} \right) \quad (12.351)$$

$$= \frac{(1 - \alpha^{n+2})'(1 - \alpha) - (1 - \alpha)'(1 - \alpha^{n+2})}{(1 - \alpha)^2} \quad (12.352)$$

$$= \frac{-(n+2)\alpha^{n+1}(1 - \alpha) + (1 - \alpha^{n+2})}{(1 - \alpha)^2} \quad (12.353)$$

$$= \frac{1}{(1 - \alpha)^2} - \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \alpha^n - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} (n+2)\alpha^n, \quad n \geq 0 \quad (12.354)$$

Άρα

$$s[n] = \left[\frac{1}{(1 - \alpha)^2} - \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \alpha^n - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} (n+2)\alpha^n \right] u[n] \quad (12.355)$$