Κεφάλαιο 11

Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ως τώρα, τα σήματα και συστήματα που μελετήσαμε ήταν όλα συνεχούς χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο, ξεκινάμε τη μελέτη μας σχετικά με την επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου αναπτύσσοντας πρώτα τις ιδέες του *σήματος διακριτού χρόνου* και του *συστήματος διακριτού χρόνου*. Θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα που σχετίζονται με την αναπαράσταση σημάτων, πράξεις με σήματα, ιδιότητες σημάτων, ιδιότητες συστημάτων και ταξινόμηση αυτών, ακριβώς ανάλογα με όσα έχουμε ήδη συζητήσει για το συνεχή χρόνο. Θα δείτε τις αρκετές ομοιότητες που υπάρχουν με το χειρισμό σημάτων και συστημάτων συνεχούς χρόνου αλλά και τις θεμελιώδεις διαφορές τους.

Τα σήματα διακριτού χρόνου ουσιαστικά βρίσκονται ένα βήμα πριν τα *ψηφιακά σήματα*, τα οποία έχουν διακριτές τιμές τόσο στο χρόνο όσο και στο πλάτος τους. Αντίθετα, τα σήματα διακριτού χρόνου λαμβάνουν συνεχείς τιμές στο πλάτος τους. Πολλές φορές η σχετική βιβλιογραφία τιτλοφορείται *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*, αντί του ίσως σωστότερου *Επεξεργασία Σήματος Διακριτού Χρόνου*. Σίγουρα έχετε ακούσει για τα πλεονεκτήματα των ψηφιακών συστημάτων. Αυτά μπορούν να συνοψισθούν στα παρακάτω:

1. Τα ψηφιακά συστήματα έχουν μεγαλύτερη σταθερότητα και ευρωστία, ενώ είναι πιο ευέλικτα (τα χαρακτηριστικά τους μπορούν εύκολα να αλλάξουν).

2. Στον "ψηφιακό" χώρο μπορεί να πραγματοποιηθεί μεγαλύτερη ποικιλία συστημάτων.

3. Τα ψηφιακά σήματα μπορούν να αποθηκευτούν εύκολα σε ένα αποθηκευτικό μέσο χωρίς αλλοίωση της ποιότητάς τους.

4. Για την επεξεργασία ψηφιακών σημάτων έχουν αναπτυχθεί πιο εξελιγμένοι αλγόριθμοι.

5. Τα ψηφιακά συστήματα μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, παρέχοντας χαμηλή κατανάλωση ισχύος.

Ελπίζοντας ότι πειστήκατε για τη χρησιμότητά τους, ας προχωρήσουμε. ☺

11.1 Σήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα *σήμα διακριτού χρόνου* είναι μια διατεταγμένη ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών τιμών. Τα στοιχεία της ακολουθίας ονομάζονται *δείγματα*. Έτσι, ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μια συνάρτηση της ακέραιας μεταβλητής n, με $-\infty < n < +\infty$, που συμβολίζεται ως $x[n]$ – εν αντιθέσει με σήματα συνεχούς χρόνου εξαρτώμενα από την πραγματική μεταβλητή t, με $-\infty < t < +\infty$, που φυσικά συμβολίζονται ως $x(t)$. Το σήμα διακριτού χρόνου δεν ορίζεται για μη ακέραιες τιμές του n. Έτσι, ένα πραγματικό σήμα $x[n]$ αναπαρίσταται συνήθως με τρείς τρόπους:

- είτε με μια εξίσωση με ανεξάρτητη μεταβλητή το δείκτη n, όπως π.χ.

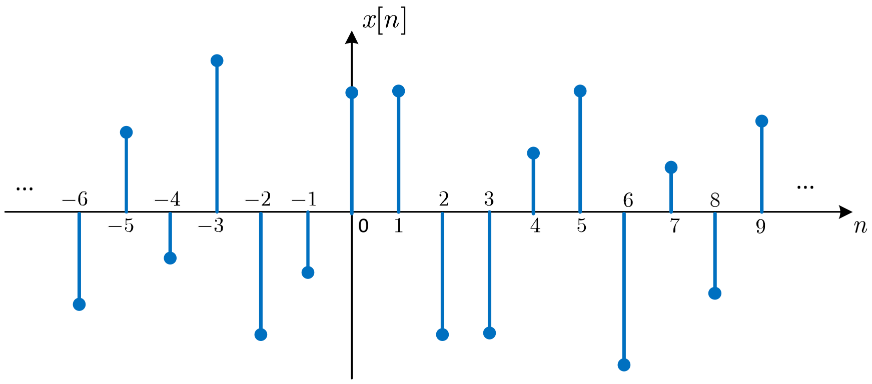
$$x[n] = \cos(\pi n) - n^2 + 2n \tag{11.1}$$

- είτε απαριθμώντας (κάποια) από τα δείγματα του σήματος, όπως π.χ.

$$x[n] = \{\cdots, -2, 1, 0, -1, \boxed{1}, 4, -3, -1, 1, \cdots\} \tag{11.2}$$

  με το σημειωμένο δείγμα να αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $n = 0$

- είτε γραφικά, οπως στο Σχημα 11.1.



Σχήμα 11.1: *Σήμα Διακριτού Χρόνου.*

Τα σήματα διακριτού χρόνου συχνά προέρχονται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, όπως η φωνή, η μουσική, ή άλλου είδους χρονοσειρές. Για παράδειγμα, ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = \frac{1}{T_s}$ Hz, και παράγει ένα δειγματοληπτημένο σήμα $x[n]$, που σχετίζεται με το $x_a(t)$ ως

$$x[n] = x_a(nT_s), \ \ n \in \mathbb{Z} \tag{11.3}$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 11.1:

Δειγματοληπτήστε το σήμα $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ με ρυθμό δειγματοληψίας f_s Hz και δείξτε ότι το σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n) \tag{11.4}$$

με $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}$.

(α′) Ποιό σήμα συνεχούς χρόνου ανακατασκευάζεται από το σήμα $x[n]$ αν $\omega_0 = \frac{3\pi}{5}$ και $f_s = 1000$ Hz;

(β′) Ποιό σήμα συνεχούς χρόνου ανακατασκευάζεται από το σήμα $x[n]$ αν $\omega_0 = \frac{3\pi}{5}$ και $f_s = 2000$ Hz;

(γ′) Ποιό σήμα συνεχούς χρόνου ανακατασκευάζεται από το σήμα $x[n]$ αν $\omega_0 = \frac{3\pi}{5}$ και $f_s = 500$ Hz;

Λύση:
Η δειγματοληψία αντιστοιχεί σε κατακερματισμό του άξονα του χρόνου ανά $T_s = 1/f_s$ χρονικές στιγμές. Έτσι, ο συνεχής άξονας του χρόνου μετατρέπεται σε $nT_s = n/f_s$, $n \in \mathbb{Z}$ διακριτές χρονικές στιγμές. Άρα

$$x[n] = A\cos(2\pi f_0 n T_s) = A\cos\left(\frac{2\pi f_0 n}{f_s}\right) = A\cos(\omega_0 n) \tag{11.5}$$

με $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}$.

(α′) Θα πρέπει $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s} \iff \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi f_0}{1000} \iff f_0 = 300$ Hz. Άρα το σήμα συνεχούς χρόνου είναι το

$$x(t) = A\cos(2\pi 300 t) \tag{11.6}$$

(β′) Θα πρέπει $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s} \iff \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi f_0}{2000} \iff f_0 = 600$ Hz. Άρα το σήμα συνεχούς χρόνου είναι το

$$x(t) = A\cos(2\pi 600 t) \tag{11.7}$$

(γ′) Θα πρέπει $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s} \iff \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi f_0}{500} \iff f_0 = 150$ Hz. Άρα το σήμα συνεχούς χρόνου είναι το

$$x(t) = A\cos(2\pi 150 t) \tag{11.8}$$

Παρατηρούμε ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου, ως μια ακολουθία αριθμών, *δεν* έχει μονοσήμαντη αντιστοίχιση σε ένα σήμα συνεχούς χρόνου, αλλά η ανακατασκευή εξαρτάται από τη συχνότητα δειγματοληψίας – όπως ήδη γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο 10.

■

Όμως, υπάρχουν και σήματα που δε ''γεννήθηκαν'' κατ΄ αυτόν τον τρόπο, δηλ. μέσω δειγματοληψίας. Κάποια σήματα υφίστανται εξ΄ αρχής στο διακριτό χρόνο, όπως για παράδειγμα τα ετήσια στατιστικά πληθυσμών, το πλήθος των δρομολογίων ενός λεωφορείου ανά ημέρα, το πλήθος των τευχών ενός περιοδικού που πωλήθηκε ανά ημέρα, κλπ. Σε κάθε περίπτωση, θα καθιστούμε σαφές πότε ένα σήμα πρόερχεται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου και πότε ορίζεται εξ΄ αρχής στο διακριτό χρόνο – ειδάλλως, θα είναι εμφανές από τα συμφραζόμενα.

Εν γένει, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να είναι πραγματικό αλλά και μιγαδικό, και μάλιστα υπάρχουν πολλές σημαντικές εφαρμογές, όπως οι ψηφιακές επικοινωνίες, όπου τα μιγαδικά σήματα έρχονται στο προσκήνιο πολύ εύκολα. Ένα μιγαδικό σήμα μπορει να εκφραστεί είτε ως άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους

$$z[n] = a[n] + jb[n] = \mathrm{Re}\{z[n]\} + j\,\mathrm{Im}\{z[n]\} \tag{11.9}$$

είτε σε πολική μορφή, με όρους πλάτους και φάσης ως

$$z[n] = |z[n]|e^{j\sphericalangle z[n]} = |z[n]|e^{j\sphericalangle\{z[n]\}} \tag{11.10}$$

όπου $j = \sqrt{-1}$. Το πλάτος δίνεται από την έκφραση

$$|z[n]| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{z[n]\} + \mathrm{Im}^2\{z[n]\}} \tag{11.11}$$

ενώ η φάση από τη σχέση

$$\sphericalangle z[n] = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{z[n]\}}{\mathrm{Re}\{z[n]\}} \tag{11.12}$$

η οποία εκφράζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ σύμφωνα με τη Σχέση (1.36).

Αν $z[n]$ είναι μιγαδικό σήμα, το συζυγές του είναι το σήμα $z^*[n]$, και μπορει να υπολογιστεί απλά αλλάζοντας το πρόσημο του φανταστικού μέρους του $z[n]$:

$$z^*[n] = \mathrm{Re}\{z[n]\} - j\,\mathrm{Im}\{z[n]\} = |z[n]|e^{-j\sphericalangle\{z[n]\}} \tag{11.13}$$

όπως ξέρουμε πολύ καλά από τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και συναρτήσεων. Ασφαλώς, εμάς θα μας απασχολήσουν κυρίως πραγματικά σήματα στο πεδίο του διακριτού χρόνου, αλλά όπως και στο συνεχή χρόνο, θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά το μιγαδικό χώρο προς διευκόλυνσή μας όπου απαιτείται! ☺

11.1.1 Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να είναι είτε περιοδικό είτε απεριοδικό. Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν, για κάποιο θετικό *ακέραιο* N_0, ισχύει οτι

$$x[n] = x[n + N_0] \tag{11.14}$$

για κάθε n. Η *περιοδος*, που συμβολίζεται ως N_0, ειναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί τη Σχέση (11.14). Αν η σχέση αυτή δεν ικανοποιείται για κανένα ακέραιο N_0, το σήμα λέγεται απεριοδικό.

Αν $x_1[n]$ είναι ένα περιοδικό σημα με περίοδο N_1 και $x_2[n]$ ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N_2, τότε το άθροισμα

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \tag{11.15}$$

θα είναι περιοδικό και η περιοδός του θα είναι η

$$N_0 = \frac{N_1 N_2}{\text{Μ.Κ.Δ}\{N_1, N_2\}} \tag{11.16}$$

όπου Μ.Κ.Δ$\{N_1, N_2\}$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των N_1, N_2, αν αυτός υπάρχει. Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$N_0 = \text{Ε.Κ.Π}\{N_1, N_2\} \tag{11.17}$$

όπου Ε.Κ.Π$\{N_1, N_2\}$ είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των N_1, N_2, αν αυτό υπάρχει. Όμοια ισχύει και για το γινόμενο, δηλ. το σημα

$$x[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{11.18}$$

θα είναι περιοδικό με (πιθανή) περίοδο N_0 που δίνεται από τη Σχέση (11.16), αν και η πραγματική (μικρότερη) περιοδος μπορεί να είναι μικρότερη.

Δεδομένης μιας πεπερασμένης διάρκειας ακολουθίας $x[n]$, ένα περιοδικό σήμα μπορει πάντα να δημιουργηθεί ''αντιγράφοντας'' το $x[n]$ ανά N_0 δείγματα, δηλ.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN_0] \tag{11.19}$$

όπου N ένας θετικός ακέραιος. Σε αυτήν την περιπτωση, το σήμα $y[n]$ είναι περιοδικό με περιοδο N_0.

11.1.1.1 Ημίτονα Διακριτού Χρόνου

Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με περιοδικά σήματα, οπότε είναι καλό να αναφέρουμε ότι υπάρχει μια ''ιδιαιτερότητα'' στα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου, που τα ξεχωρίζει από αυτά που έχουμε δει στο συνεχή χρόνο. Μια καλή αφορμή για να καταδείξουμε αυτές τις ''ιδιαιτερότητες'' αποτελούν τα γνωστά μας ημίτονα. Θυμάστε ότι στο συνεχή χρόνο, ένα ημίτονο συχνότητας $\omega_0 = 2\pi f_0$ είναι πάντα περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 1/f_0$. Στο διακριτό χρόνο όμως, ένα ημίτονο $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό *μόνον αν* η περίοδός του, N, είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Ας κάνουμε πιο ξεκάθαρα τα πράγματα...

Αν ένα ημίτονο διακριτού χρόνου $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N_0, τότε ικανοποιεί τη σχέση

$$\cos(\omega_0 n) = \cos(\omega_0(n + N_0)) = \cos(\omega_0 n + \omega_0 N_0) \tag{11.20}$$

Αυτό η σχέση ισχύει μόνον αν η ποσότητα $\omega_0 N_0$ είναι ακέραια πολλαπλάσια του 2π. Δηλαδή

$$\omega_0 N_0 = 2\pi m, \ \ m \in \mathbb{Z} \tag{11.21}$$

ή αλλιώς

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N_0} \tag{11.22}$$

Επειδή τα m και N_0 είναι θετικοί ακέραιοι, η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το ημίτονο που συζητάμε είναι περιοδικό μόνον αν ο αριθμός

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \tag{11.23}$$

είναι ρητός (δηλ. γράφεται ως πηλίκο δυο ακεραίων). Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε την περίοδο από τη σχέση

$$N_0 = m\frac{2\pi}{\omega_0}, \ \ m \in \mathbb{Z} \tag{11.24}$$

αλλά πρέπει να διαλέξουμε το *μικρότερο* δυνατό θετικό m που θα κάνει τον αριθμό

$$m\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{11.25}$$

ακέραιο. Για παράδειγμα, αν

$$\omega_0 = \frac{4\pi}{13} \tag{11.26}$$

τότε ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος m που κάνει τον αριθμό

$$m\frac{2\pi}{\omega_0} = m\frac{13}{2} \tag{11.27}$$

ακέραιο είναι προφανώς $m = 2$. Για $m = 2$, η περίοδος είναι $N_0 = 13$ δείγματα.

Η ίδια ακριβώς συζήτηση γίνεται για οποιοδήποτε πιθανώς περιοδικό σήμα, όπως για παράδειγμα το αγαπημένο μας $e^{j\omega_0 n}$ που είδαμε νωρίτερα, αφού αποτελείται από ένα άθροισμα πιθανώς περιοδικών σημάτων συχνότητας ω_0, τα $\cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$.

Παράδειγμα 11.2:

Βρείτε την περίοδο N_0 - αν υπάρχει - των παρακάτω σημάτων.

(α΄) $x[n] = e^{j(\pi n/6+\pi/3)}$

(β΄) $x[n] = e^{j3\pi n/4}$

(γ΄) $x[n] = e^{j\sqrt{2}\pi n/8}$

(δ΄) $x[n] = \dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$

(ε΄) $x[n] = e^{-j\pi n/10} + e^{-jn/3}$

(ϛ΄) $x[n] = e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}$

Λύση:

(α΄) Είναι

$$x[n] = e^{j(\pi n/6+\pi/3)}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\pi/6}k = 12k \xrightarrow{k=1} N_0 = 12 \tag{11.28}$$

(β΄) Είναι

$$x[n] = e^{j3\pi n/4}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{3\pi/4}k = \frac{8}{3}k \xrightarrow{k=3} N_0 = 8 \tag{11.29}$$

(γ΄) Είναι

$$x[n] = e^{j\sqrt{2}\pi n/8}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}\pi}{8}}k = \frac{16}{\sqrt{2}}k \tag{11.30}$$

Δεν υπάρχει $N_0 \in \mathbb{Z}$, άρα δεν είναι περιοδικό.

(δ΄) Είναι

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n} \tag{11.31}$$

Για το $\sin(\pi n/4), N_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8k \xrightarrow{k=1} N_0 = 8$. Όμως η συνάρτηση $y[n] = \frac{1}{\pi n}$ δεν είναι περιοδική, άρα το γινόμενο δεν είναι περιοδικό.

(ε΄) Είναι

$$x[n] = e^{-j\pi n/10} + e^{-jn/3}\ ,\ N_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}k = 20k \xrightarrow{k=1} N_1 = 20 \text{ αλλά } N_2 = \frac{2\pi}{1/3}k = 6\pi k \tag{11.32}$$

Δεν υπάρχει $N_2 \in \mathbb{Z}$, άρα το άθροισμα δεν είναι περιοδικό.

(ϛ΄) Είναι

$$x[n] = e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi n/2} = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}k = 4k \xrightarrow{k=1} N_0 = 4 \tag{11.33}$$

11.1.1.2 Μιγαδικές Εκθετικές Συναρτήσεις Διακριτού Χρόνου

Πολύ δημοφιλείς στην ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου είναι οι περίφημες μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις διακριτού χρόνου. Φυσικά εξακολουθούν να ισχύουν οι σχέσεις του Euler και για τα μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου.[1] Το μιγαδικό εκθετικό σήμα $x_d[n] = e^{j\omega_0 n}$ έχει επίσης μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με το αντίστοιχο του συνεχούς χρόνου, $x_a(t) = e^{j\omega_0 t}$. Αυτή η ιδιαιτερότητα είναι ότι το σήμα $x_d[n]$ είναι *πάντα* περιοδικό στο *χώρο της συχνότητας* με περίοδο 2π, γιατί

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \tag{11.37}$$

αφού

$$e^{j2\pi n} = 1,\ \ \forall n \in \mathbb{Z} \tag{11.38}$$

[1] Είμαι σίγουρος ότι πλέον τις ξέρετε απ΄ έξω, αλλά τις υπενθυμίζουμε ☺

$$\cos(\theta[n]) = \frac{e^{j\theta[n]} + e^{-j\theta[n]}}{2} \tag{11.34}$$

$$\sin(\theta[n]) = \frac{e^{j\theta[n]} - e^{-j\theta[n]}}{2j} \tag{11.35}$$

(11.36)

Αυτό σημαίνει ότι για να καταλάβουμε – αργότερα – πώς συμπεριφέρεται μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση αυτής της μορφής στο χώρο της συχνότητας, αρκεί να την παρατηρήσουμε σε διάστημα μιας περιόδου 2π, αφού εκτός αυτής επαναλαμβάνεται. Συνήθως προτιμούμε το διάστημα $(-\pi, \pi]$. Αυτή η περιοδικότητα στο χώρο της συχνότητας μας λέει πρακτικά ότι οι συχνότητες ω_0 και $\omega_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι ουσιαστικά ίδιες - όχι φυσικά ως τιμές αλλά ως συχνότητες ταλάντωσης του σήματος διακριτού χρόνου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με όσα γνωρίζετε από τη διαίσθησή σας και το συνεχή χρόνο, ότι δηλαδή όσο αυξάνουμε τη συχνότητα, τόσο πιο γρήγορα ταλαντώνεται ένα ημιτονοειδές σήμα. Για παράδειγμα, το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{11.39}$$

ταλαντώνεται όλο και πιο γρήγορα όσο αυξάνουμε τη συχνότητα f_0. Για ένα ημίτονο διακριτού χρόνου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n) \tag{11.40}$$

όσο αυξάνουμε τη συχνότητα ω_0 από το $\omega_0 = 0$ ως το $\omega_0 = \pi$, τότε πράγματι οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο γρήγορες. Όμως, όταν αυξήσουμε το ω_0 από $\omega_0 = \pi$ ως $\omega_0 = 2\pi$, τότε οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο αργές! Το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται και μετά το $\omega_0 = 2\pi$, ξεκινώντας από γρήγορες ταλαντώσεις γύρω από το 2π, φτάνοντας σε πιο αργές γύρω από το 3π, και ξανά σε πιο γρήγορες γύρω από το $\omega_0 = 4\pi$. Αντίστοιχα, στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, οι γρήγορες ταλαντώσεις γίνονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι πιο αργές (προφανώς) γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$. Για ένα οπτικό παράδειγμα, δείτε το Σχήμα 11.2.

Εν γένει λοιπόν, οι συχνότητες κοντά στη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi k$, για $k \in \mathbb{Z}$, αναφέρονται ως ***χαμηλές συχνότητες***, ενώ οι αντίστοιχες κοντά στη συχνότητα $\omega_0 = \pi + 2\pi k$, για $k \in \mathbb{Z}$, λέγονται ***υψηλές συχνότητες***. Αυτό είναι συνεπές με ό,τι είδαμε στο δειγματοληπτημένο φάσμα στο Κεφάλαιο 10: το φάσμα βασικής ζώνης επαναλαμβάνεται ανά kf_s, $k \in \mathbb{Z}$, οπότε οι συχνότητες γύρω από $f = 0, \pm f_s, \pm 2f_s, \cdots$ είναι οι χαμηλές συχνότητες του σήματος βασικής ζώνης, ενώ οι συχνότητες γύρω από $f = \pm f_s/2, \pm 3f_s/2, \cdots$ είναι οι υψηλές συχνότητες του σήματος βασικής ζώνης.

11.1.2 Συμμετρικές Ακολουθίες

Ένα σήμα διακριτού χρόνου συχνά έχει μερικές μορφές συμμετρίας που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε. Δυο ειδών συμμετρίες μας είναι ενδιαφέρουσες, οι οποίες αναφέρονται και στην Παράγραφο 1.7.

Ένα πραγματικό σήμα λέγεται ότι είναι *άρτιο* αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = x[-n] \tag{11.41}$$

ενώ ένα σήμα λέγεται ότι είναι *περιττό* αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = -x[-n] \tag{11.42}$$

Κάθε σήμα $x[n]$ μπορει να γραφεί ως το άθροισμα του άρτιου μέρους του, $x_e[n]$, και του περιττού μέρους του, $x_o[n]$, ως

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{11.43}$$

με

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \tag{11.44}$$

και

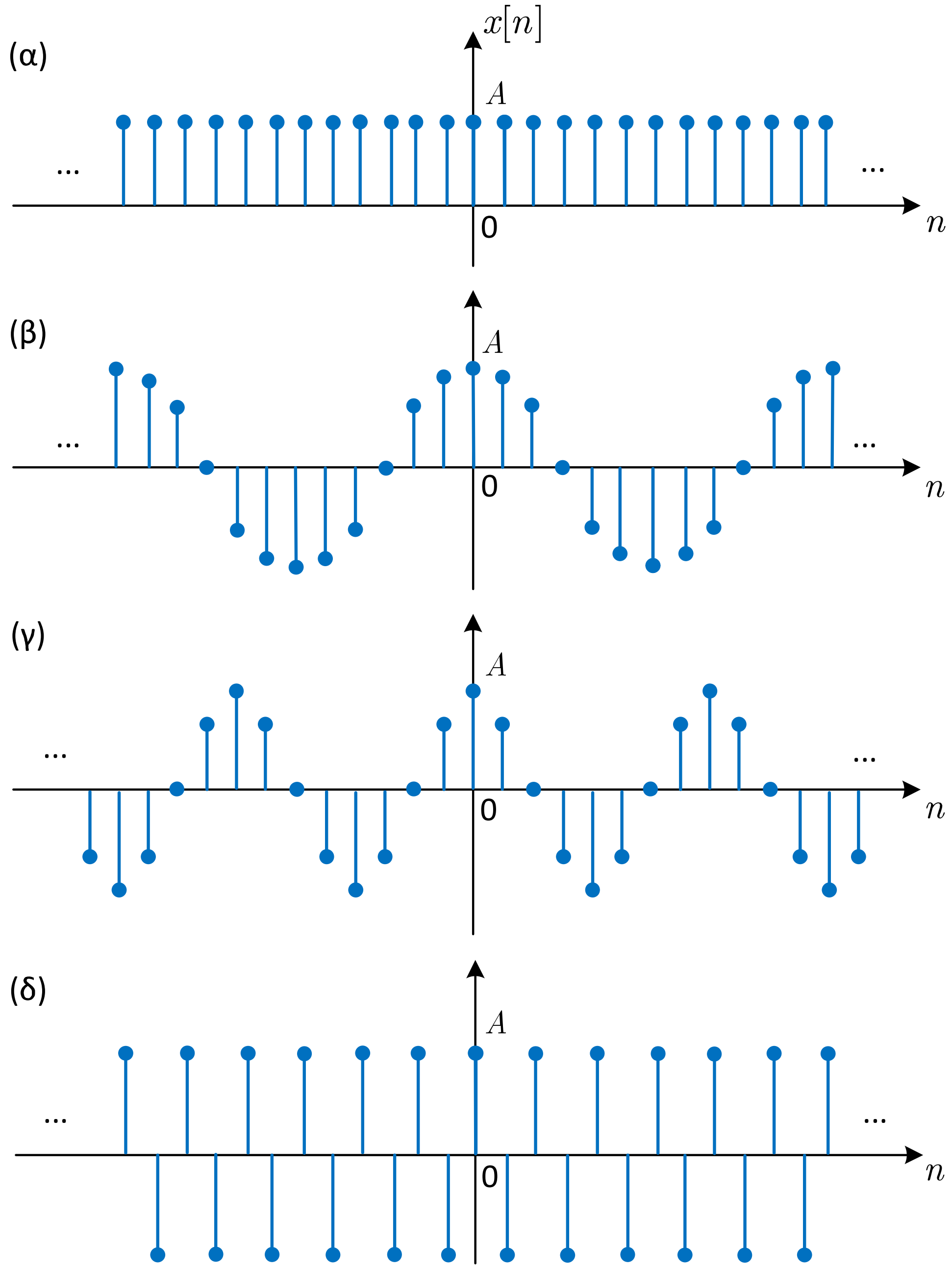
$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \tag{11.45}$$

Για μιγαδικά σήματα, οι συμμετρίες είναι ελαφρά διαφορετικές. Ένα μιγαδικό σημα λέγεται ότι είναι *συζυγές συμμετρικό* (ή αλλιώς *ερμητιανό*) αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = x^*[-n] \tag{11.46}$$

και λέγεται *συζυγές αντισυμμετρικό* αν, για κάθε n, ισχύει

$$x[n] = -x^*[-n] \tag{11.47}$$



Σχήμα 11.2: *Το σήμα $A\cos(\omega_0 n)$ για διάφορες τιμές του ω_0: όσο το ω_0 αυξάνεται από το μηδέν προς το π (σχήματα (α) $\rightarrow$ (δ)), τόσο γρηγορότερα ταλαντώνεται το σήμα. Όσο το ω_0 αυξάνεται από το π προς το 2π (σχήματα (δ) $\rightarrow$ (α)), τόσο πιο αργές γίνονται οι ταλαντώσεις του.*

11.2 Μετασχηματισμοί Σημάτων

Συχνά, θέλουμε να τροποποιήσουμε τα σήματα μέσω του δείκτη τους, n. Δηλ. θέλουμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής

$$y[n] = x[f[n]] \tag{11.48}$$

με $f[n]$ μια συνάρτηση του n. Όπως και στο συνεχή χρόνο, οι πιο συχνοί μετασχηματισμοί περιλαμβάνουν την χρονική *ολίσθηση*, την *αντιστροφή*, και την *κλιμάκωση*[2]. Ας τις δούμε αναλυτικά.

[2] Τις οποίες γνωρίζετε ήδη από το συνεχή χρόνο.

11.2.1 Χρονική Ολίσθηση

Η ολίσθηση ορίζεται ως ο μετασχηματισμός της μορφής

$$f[n] = n - n_0 \tag{11.49}$$

με $n_0 \in \mathbb{Z}$. Αν $y[n] = x[n - n_0]$ με $n_0 > 0$, το σήμα $x[n]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά n_0 δείγματα (η πράξη αναφέρεται ως καθυστέρηση), ενώ μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά n_0 δειγματα, αν $n_0 < 0$ (η πράξη αναφέρεται ως προήγηση-προπόρευση).

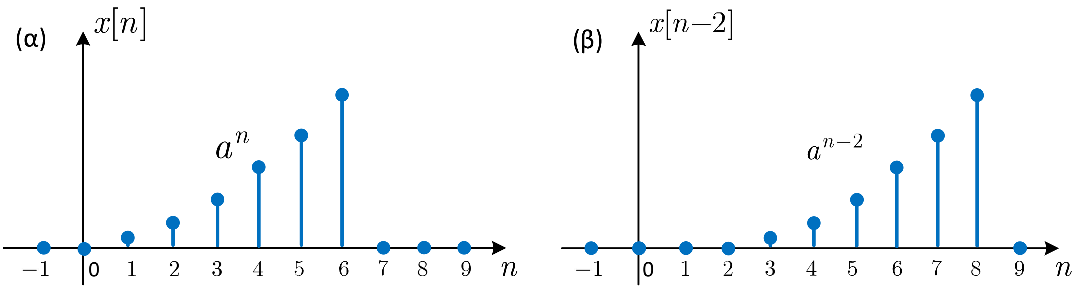
Παράδειγμα 11.3:

Έστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 1 \le n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.50}$$

με $a > 1$. Περιγράψτε το σήμα που προκύπτει από την καθυστέρηση του σήματος κατά $n_0 = 2$ δείγματα.

Λύση:
Το δεδομένο σήμα καθώς και το καθυστερημένο κατά $n_0 = 2$ δείγματα φαίνονται στο Σχήμα 11.3. Το σήμα $x[n-2]$



Σχήμα 11.3: *(α) Σήμα $x[n]$, (β) Καθυστέρηση στο χρόνο κατά $n_0 = 2$ δείγματα.*

ορίζεται ως

$$x[n-2] = \begin{cases} a^{n-2}, & 1 \le n-2 \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} a^{n-2}, & 3 \le n \le 8 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.51}$$

11.2.2 Χρονική Αντιστροφή

Η αντιστροφή ορίζεται ως ο μετασχηματισμός

$$f[n] = -n \tag{11.52}$$

και είναι απλά η ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

Παράδειγμα 11.4:

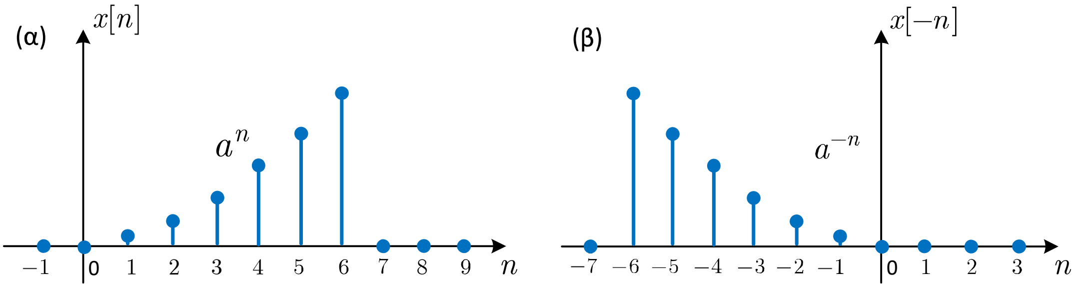
Έστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 1 \le n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.53}$$

με $a > 1$. Περιγράψτε το σήμα που προκύπτει από την ανάκλασή του ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

Λύση:
Τα σήματα $x[n]$, $x[-n]$ φαίνονται στο Σχήμα 11.4. Το σήμα $x[-n]$ ορίζεται ως

$$x[-n] = \begin{cases} a^{-n}, & 1 \le -n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} a^{-n}, & -6 \le n \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.54}$$



Σχήμα 11.4: *(α) Σήμα $x[n]$, (β) Σήμα $x[-n]$.*

11.2.3 Χρονική Κλιμάκωση

Η κλιμάκωση στο χρόνο ορίζεται ως

$$f[n] = Mn \quad \text{ή} \quad f[n] = n/N \tag{11.55}$$

όπου M, N είναι θετικοί ακέραιοι. Στην πρώτη περιπτωση, το σήμα $x[Mn]$ σχηματίζεται παίρνοντας κάθε M-οστο δείγμα από το σήμα $x[n]$. Αυτή η πράξη λέγεται *υποδειγματοληψία - downsampling*. Με $f[n] = n/N$, το σήμα $y[n] = x[f[n]]$ ορίζεται ως

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.56}$$

Η πράξη αυτή ειναι γνωστη ως *υπερδειγματοληψία - upsampling*.

Παράδειγμα 11.5:

Έστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 1 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.57}$$

με $a > 1$. Περιγράψτε το σήμα που προκύπτει από την κλιμάκωσή του κατά $M = 2$ και $M = 1/4$.

Λύση:
Τα σήματα $x[n]$, $x[2n]$, και $x[n/4]$ φαίνονται στο Σχήμα 11.5. Το σήμα $x[2n]$ ορίζεται ως

$$x[2n] = \begin{cases} a^{2n}, & 1 \leq 2n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} a^{2n}, & 1 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.58}$$

ενώ το σήμα $x[n/4]$ ορίζεται ως

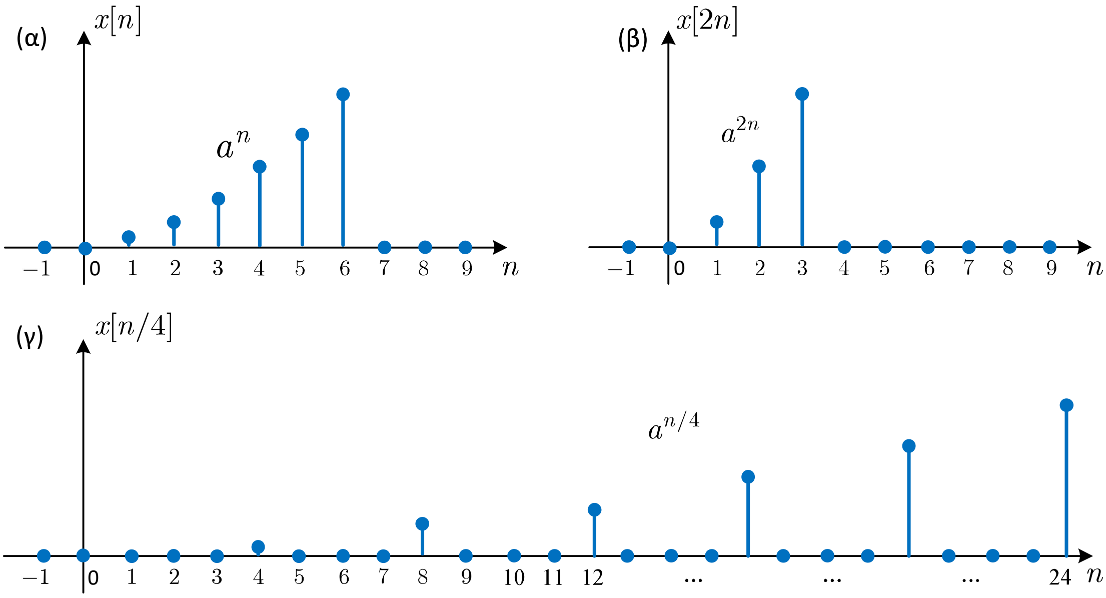
$$x[n/4] = \begin{cases} a^{n/4}, & n = 4, 8, 12, 16, 20, 24 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.59}$$

■

Σημειώστε ότι οι παραπάνω πράξεις εξαρτώνται από τη σειρά που θα τις εφαρμόσετε. Για παράδειγμα, για το μετασχηματισμό $x[Mn - n_0]$, πρέπει πρώτα να μετατοπίσετε το σήμα $x[n]$ κατά n_0 δεξιά - και να λάβετε το $x[n - n_0]$ - και στη συνέχεια να κλιμακώσετε το σήμα $x[n - n_0]$ κατά M - και να λάβετε το $x[Mn - n_0]$.

11.3 Μερικά Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων

Αν και τα περισσότερα σήματα που συναντάμε στην πράξη ή στην καθημερινότητά μας μοιάζουν πολύπλοκες συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχουν τρία απλά αλλά πολύ σημαντικά σήματα διακριτού χρόνου που χρησιμοποιούνται



Σχήμα 11.5: *(α) Σήμα $x[n]$, (β) Σήμα $x[2n]$, (γ) Σήμα $x[n/4]$.*

πολύ συχνά στην περιγραφή και αναπαράσταση πιο περίπλοκων σημάτων.

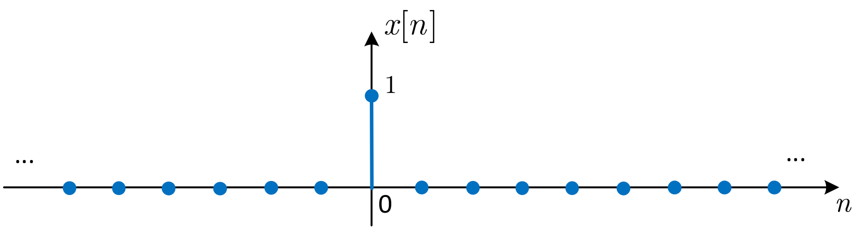
Αυτά τα σήματα είναι (i) η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου, (ii) η βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου, και (iii) η εκθετική συνάρτηση διακριτού χρόνου.

11.3.1 Η Συνάρτηση Δέλτα Διακριτού Χρόνου

Η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου, που συμβολίζεται με $\delta[n]$, ορίζεται ως

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.60}$$

και παιζει τον ίδιο ρολο στην επεξεργασία σήματος διακριτού χρόνου με τη συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα $\delta(t)$ που γνωρίζετε από το συνεχή χρόνο, με τη διαφορά ότι εδώ είναι σημαντικά πιο απλή στη χρήση και στον ορισμό της[3]. Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 11.6.



Σχήμα 11.6: *Η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου.*

[3]Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου, $\delta(t)$, είναι κατανομή - ή αλλιώς γενικευμένη συνάρτηση - και ορίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$\delta(t) = 0, \;\; t \neq 0, \tag{11.61}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{11.62}$$

11.3.2 Η Βηματική Συνάρτηση Διακριτού Χρόνου

Η βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου, που συμβολίζεται με $u[n]$, ορίζεται ως

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.63}$$

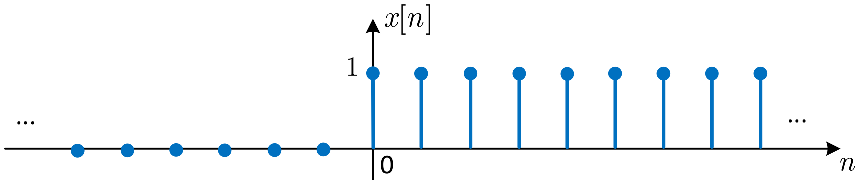
και σχετίζεται με τη συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου ως

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \tag{11.64}$$

αλλά και ως

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \tag{11.65}$$

Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 11.7. Όμοια, η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου μπορει να γραφεί ως η



Σχήμα 11.7: *Η βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου.*

διαφορά δυο βηματικών συναρτήσεων που διαφέρουν κατά ένα δείγμα:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{11.66}$$

Παρατηρήστε ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι ανάλογες με αυτές που συναντήσαμε για τη βηματική συνάρτηση και συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου. Ας τις δούμε μαζί, δίπλα-δίπλα, στον Πίνακα 11.1! Παρατηρήστε ότι, στην ουσία, "λένε την ίδια ιστορία"!

Βηματική και συνάρτηση Δέλτα στους δυο χρόνους

Ιδιότητα	**Συνεχής χρόνος**	**Διακριτός χρόνος**
Δειγματοληψία I	$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$	$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$
Δειγματοληψία II	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n] = x[0]$
Παράγωγος	$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$	$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$
Ολοκλήρωση	$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$	$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

Πίνακας 11.1: *Ιδιότητες βηματικής και συνάρτησης Δέλτα στο συνεχή και διακριτό χρόνο.*

11.3.3 Η Εκθετική Συνάρτηση Διακριτού Χρόνου

Τέλος, η εκθετική συνάρτηση ορίζεται ως

$$x[n] = a^n \tag{11.67}$$

όπου a ένας μιγαδικός αριθμός. Γενικότερα, μας ενδιαφέρουν εκθετικές συναρτήσεις του τύπου

$$x[n] = Aa^n \tag{11.68}$$

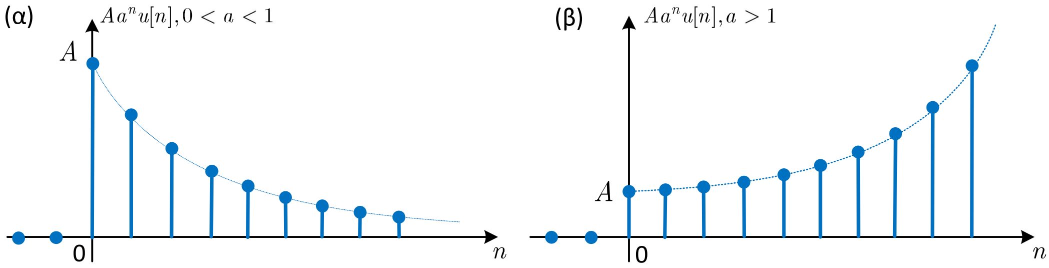
με A, a μιγαδικά (εν γένει). Τότε, αναλύοντας τα A, a σε πολική μορφή, θα έχουμε

$$A = |A|e^{j\phi_A} \quad \text{και } a^n = |a|^n e^{j\phi_a n} \tag{11.69}$$

έχουμε

$$x[n] = Aa^n = |A|e^{j\phi_A}|a|^n e^{j\phi_a n} = |A||a|^n e^{j(\phi_A+\phi_a)} \tag{11.70}$$

Στο Σχήμα 11.8 φαίνονται δυο πραγματικά εκθετικά σήματα για $0 < a < 1$ και $a > 1$, αντίστοιχα. Επίσης, ιδιαίτερου

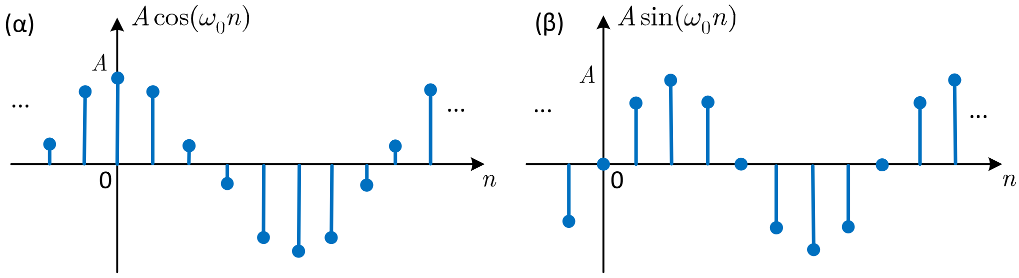


Σχήμα 11.8: *Εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου για (α)* $0 < a < 1$ *και (β)* $a > 1$.

ενδιαφέροντος είναι τα μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$Ae^{j\omega_0 n} = A\cos(\omega_0 n) + jA\sin(\omega_0 n), \quad A > 0 \tag{11.71}$$

με ω_0 πραγματικό αριθμό εκφρασμένο σε radians, ο οποίος δεν είναι άλλος από τη συχνότητα του σήματος. Σχηματικά, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος φαίνονται στο Σχήμα 11.9. Όπως θα δούμε σύντομα, οι



Σχήμα 11.9: *(α) Πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου* $e^{j\omega_0 n}$.

μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι πολύ χρήσιμες στην ανάλυση Fourier των σημάτων διακριτού χρόνου – όσο χρήσιμα ήταν τα αντίστοιχα συνεχή μιγαδικά εκθετικά στην ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου ☺. Αν συνδυάσουμε τη Σχέση (11.71) και τη Σχέση (11.70) για πραγματικό a, θα έχουμε

$$x[n] = Aa^n e^{j\omega_0 n} = |A|a^n e^{j(\omega_0 n+\phi_A)} = |A|a^n\cos(\omega_0 n + \phi_A) + j|A|a^n\sin(\omega_0 n + \phi_A) \tag{11.72}$$

Αυτή η ακολουθία ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος αν $|a| > 1$, ή με φθίνον πλάτος αν $|a| < 1$. Για $|a| = 1$, το σήμα αποτελείται από απλά ημίτονα και συνημίτονα σταθερού πλάτους.

Ακριβώς ανάλογα λοιπόν με το συνεχή χρόνο, ορίζουμε την ποσότητα ω_0 ως τη *συχνότητα* του μιγαδικού εκθετικού σήματος και την ποσότητα ϕ_A ως *αρχική φάση* ή *φάση μετατόπισης* του σήματος.

11.4 Ανάλυση Σήματος

Η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου $\delta[n]$ μπορει να χρησιμοποιηθεί για να αναλύσει ένα σήμα σε ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα με κατάλληλους συντελεστές και μετατοπίσεις ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \tag{11.73}$$

όπου κάθε όρος, $x[k]\delta[n-k]$, του αθροίσματος είναι μια συνάρτηση Δέλτα που έχει πλάτος $x[k]$ τη χρονική στιγμή $n = k$ και ισούται με μηδέν όλες τις άλλες χρονικές στιγμές. Με άλλα λόγια, **ένα οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων Δέλτα!**

Παράδειγμα 11.6:

Εκφράστε το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.74}$$

ώς ένα άρθοισμα κατάλληλα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα.

Λύση:
Θα έχουμε ότι

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \tag{11.75}$$

Έχει ενδιαφέρον ότι μπορούμε να γράψουμε πιο ‘‘σύνθετα’’ την παραπάνω απλή παράσταση αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{11.76}$$

έχουμε

$$x[n] = u[n] - u[n-1] + 2(u[n-1] - u[n-2]) + 3(u[n-2] - u[n-3]) \tag{11.77}$$

που δίνει

$$x[n] = u[n] + u[n-1] + u[n-2] - 3u[n-3] \tag{11.78}$$

■

Βλέπετε ότι παρόλο που το σήμα είναι ένα άθροισμα βηματικών (δηλ. άπειρων σε διάρκεια) συναρτήσεων, είναι τελικά πεπερασμένης διάρκειας καθώς τμήματα των βηματικών συναρτήσεων αλληλοακυρώνονται πλήρως.

11.5 Ενέργεια και Μέση Ισχύς Σήματος Διακριτού Χρόνου

Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό όπως στο συνεχή χρόνο, η *ενέργεια* ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \tag{11.79}$$

Για να έχει νόημα αυτή η μετρική θα πρέπει, όπως φαντάζεστε, να μην απειρίζεται ή μηδενίζεται. Μια αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι ότι το πλάτος του σήματος πρέπει να φθίνει στο μηδέν όσο $n \to \pm\infty$. Φυσικά, οποιοδήποτε σήμα πεπερασμένης διάρκειας είναι σήμα ενέργειας (ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη). Ένα σήμα που η ενέργειά του είναι πεπερασμένη ($0 < E < +\infty$) λέγεται *σήμα ενέργειας*.

Σε περιπτώσεις όπου το πλάτος του σήματος δε φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$, χρειαζόμαστε μια εναλλακτική μετρική, καθώς η ενέργεια θα απειρίζεται. Αυτή δεν είναι άλλη από την *μέση ισχύ* του σήματος, που ορίζεται ως

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \tag{11.80}$$

ενώ για περιοδικά σήματα με περίοδο N_0 γίνεται ως

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 \tag{11.81}$$

Αν η μέση ισχύς P_x είναι πεπερασμένη και μη μηδενική ($0 < P_x < \infty$), τότε το σήμα λέγεται *σήμα ισχύος*. Αναγνωρίζετε ότι η μέση ισχύς αποτελεί κι εδώ τη χρονική μέση τιμή της ενέργειας, όμοια με τα σήματα συνεχούς χρόνου. Και οι ομοιότητες δε σταματούν εδώ! ☺ Όπως και στο συνεχή χρόνο, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να είναι είτε σήμα ενέργειας είτε σήμα ισχύος, αλλά όχι και τα δυο ταυτόχρονα. Επίσης, μπορεί να μην είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος (όπως π.χ. το $x[n] = 2^n u[n]$ ή το $x[n] = n$).

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού τόσο της ενέργειας όσο και της ισχύος ενός σήματος.

Παράδειγμα 11.7:

Έστω το σήμα

$$x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] \tag{11.82}$$

Υπολογίστε την ενέργειά του.

Λύση:
Είναι

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} u^2[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \tag{11.83}$$

Με αλλαγή μεταβλητής, $k \leftarrow (-n)$, έχουμε

$$E = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \tag{11.84}$$

με χρήση του Πίνακα 1.4.

Παράδειγμα 11.8:

Έστω το σήμα

$$x[n] = u[n] \tag{11.85}$$

Υπολογίστε τη μέση ισχύ του.

Λύση:
Είναι

$$P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u^2[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u[n] \tag{11.86}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1}(N-0+1) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}} = \frac{1}{2} \tag{11.87}$$

ξανά με χρήση του Πίνακα 1.4.

■

Μπορούμε λοιπόν να παρουσιάσουμε κάποιους ευρεστικούς κανόνες για να χρησιμοποιούμε πρώτα είτε τη μια είτε την άλλη μετρική.

Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

- Σήμα ενέργειας:
  - Το πλάτος και η διάρκεια του σήματος είναι πεπερασμένα.
  - Αν το πλάτος είναι πεπερασμένο αλλά όχι και η διάρκεια, τότε αναγκαία συνθήκη είναι το σήμα $x[n] \to 0$ όταν $|n| \to \infty$. Η συνθήκη αυτή όμως δεν είναι και ικανή.
- Σήμα ισχύος:
  - Εμφανίζει περιοδικότητα με περίοδο N_0 και *απολύτως φραγμένο* πλάτος, δηλ.

$$|x[n]| < M_x, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ και } M_x \in \mathbb{R}_+ \tag{11.88}$$

  - Δεν εμφανίζει περιοδικότητα, αλλά η διάρκεια του σήματος είναι άπειρη με το πλάτος του να είναι *απολύτως φραγμένο*.

11.6 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Όπως είδαμε και στο συνεχή χρόνο, ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι, θεωρητικά, ένας μαθηματικός τελεστής ή μια αντιστοίχιση που μετασχηματίζει ένα σήμα (την είσοδο) σε ένα άλλο σήμα (την έξοδο), μέσω ενός καθορισμένου συνόλου από πράξεις. Η σημειογραφεία $T\{\cdot\}$ χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει εν γένει τους τελεστές που αποτελούν ένα σύστημα, δηλ.

$$y[n] = T\{x[n]\} \tag{11.89}$$

Οι ιδιότητες εισόδου-εξόδου ενός συστήματος μπορούν να καθοριστούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί, για παράδειγμα, να εκφραστει ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.90}$$

ή

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \tag{11.91}$$

Είναι επίσης δυνατόν να περιγραφει ένα σύστημα με αλγοριθμικούς όρους, που αποτελείται από εντολές ή πράξεις που εφαρμόζονται σε ενα σήμα εισόδου, όπως οι

$$y_1[n] = \frac{1}{2}y_1[n-1] + \frac{1}{4}x[n] \tag{11.92}$$

$$y_2[n] = \frac{1}{4}y_2[n-1] + \frac{1}{2}x[n] \tag{11.93}$$

$$y_3[n] = \frac{4}{10}y_3[n-1] + \frac{1}{2}x[n] \tag{11.94}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] + y_3[n] \tag{11.95}$$

Θα μπορούσε εδώ κάποιος να αναρωτηθεί αν τα συστήματα διακριτού χρόνου ορίζονται κατ΄ ευθείαν στο διακριτό χρόνο ή μπορούν να προέλθουν από κάποιου είδους ‘‘δειγματοληψία’’ συστημάτων συνεχούς χρόνου – τα τελευταία περιγράφονται, όπως γνωρίζετε ήδη, από *διαφορικές* εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Αυτή είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα και χρήσιμη διαισθητικά ερώτηση, αξίζει λοιπόν μιας σύντομης απάντησης.

11.6.1 Σχέση Συστημάτων Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

Είναι προφανές ότι κάποια φυσικά συστήματα ορίζονται απ΄ ευθείας στο διακριτό χρόνο. Ένα πολύ δημοφιλές παράδειγμα είναι ο τραπεζικός λογαριασμός σας: έστω ότι κάθε μήνα n καταθέτετε $x[n]$ χρήματα σε αυτόν. Αν η τράπεζα σας δίνει μηνιαίως 1% τόκο στις τρέχουσες καταθέσεις σας, τότε στο τέλος κάθε μήνα θα έχετε $y[n]$ χρήματα στο λογαριασμό σας. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = \left(1 + \frac{1}{100}\right) y[n-1] + x[n] \tag{11.96}$$

με $y[0] = 0$. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η περίφημη ακολουθία Fibonacci, της οποίας κάθε στοιχείο F_n, με $n > 2$, αποτελείται από το άθροισμα των προηγούμενων δυο στοιχείων της. Η ακολουθία αυτή έχει συνήθως τη μορφή

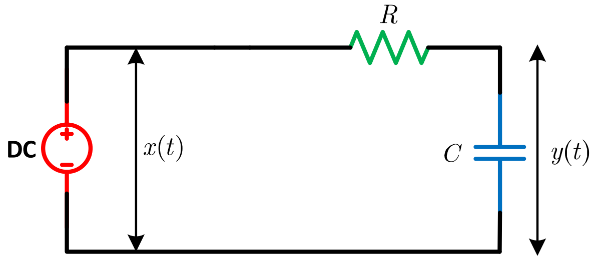
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ με } F_0 = 1,\ F_1 = 1 \tag{11.97}$$

και μπορεί να γραφεί ως σύστημα διακριτού χρόνου ως

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2], \text{ με } y[0] = 1,\ y[1] = 1 \tag{11.98}$$

Τι συμβαίνει όμως με τα συστήματα συνεχούς χρόνου; Θα μπορούσαμε να τα μετατρέψουμε σε διακριτού χρόνου ώστε να τα χρησιμοποιήσουμε για αριθμητικούς υπολογισμούς, δηλ. για να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που τα περιγράφουν με αριθμητικές μεθόδους; Η απάντηση είναι θετική, και υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γίνει κάτι τέτοιο. Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα του κυκλώματος RC που συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 4 και που επαναλαμβάνουμε για ευκολία στο Σχήμα 11.10. Είδαμε στο σχετικό κεφάλαιο ότι το παραπάνω κύκλωμα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{11.99}$$



Σχήμα 11.10: *Κύκλωμα RC.*

Αν θέλαμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση αριθμητικά, με χρήση ενός υπολογιστή[4], θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να τη διακριτοποιήσουμε, μια και ένας υπολογιστής έχει πεπερασμένο αποθηκευτικό χώρο. Μια πολύ απλή (και ως εκ τούτου, με αρκετό σφάλμα) διακριτοποίηση θα ήταν η ακόλουθη: υποθέτουμε ότι κάθε χρονική στιγμή t απέχει από την επόμενή της ένα σταθερό χρονικό διάστημα T. Τότε η παράγωγος ενός σήματος $y(t)$ θα μπορούσε να προσεγγιστεί ως

$$\frac{d}{dt}y(t) \approx \frac{y(t) - y(t-T)}{T} \tag{11.100}$$

και τότε η διαφορική εξίσωση της Σχέσης (11.99) γράφεται ως

$$\frac{y(t) - y(t-T)}{T} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{11.101}$$

Εφόσον έχουμε διακριτές χρονικές στιγμές $t = nT$, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{y(t) - y(t-T)}{T} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{11.102}$$

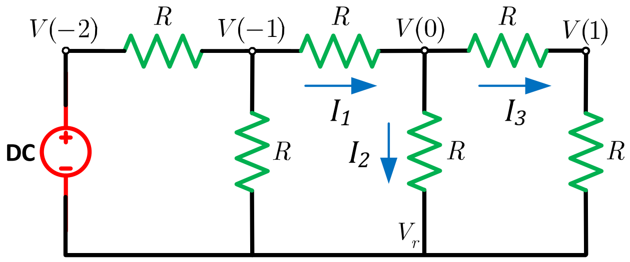
$$\frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} + \frac{1}{RC}y(nT) = \frac{1}{RC}x(nT) \tag{11.103}$$

$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T} + \frac{1}{RC}y[n] = \frac{1}{RC}x[n] \tag{11.104}$$

$$y[n] = \frac{1}{1+\frac{T}{RC}}\Big(y[n-1] + \frac{T}{RC}x[n]\Big) \tag{11.105}$$

και η τελευταία σχέση από τις παραπάνω αποτελεί το σύστημα διακριτού χρόνου που προσεγγίζει το σύστημα συνεχούς χρόνου της Σχέσης (11.99). Φυσικά η ακρίβεια της προσέγγισής μας εξαρτάται από το πόσο μικρό είναι το διάστημα T.

Ίσως το παραπάνω παράδειγμα να οδηγεί τον αναγνώστη στην πεποίθηση ότι η περιγραφή ηλεκτρικών κυκλωμάτων περνά υποχρεωτικά μέσα από το πεδίο του συνεχούς χρόνου. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητα αληθές. Δείτε το Σχήμα 11.11. Το κύκλωμα αντιστατών του Σχήματος (11.11) έχει τέσσερις ενδιαφέροντες κόμβους σημειωμένους με $V(n)$, όπου $V(i)$, $-2 \leq i \leq 1$ η τάση στον $i-$οστό κόμβο. Ας επικεντρωθούμε στον κόμβο με τάση $V(0)$. Καταλαβαίνετε ότι το φορτίο που υπάρχει σε ένα κύκλωμα δεν μεταβάλλεται σε ποσότητα – απλά ρέει στο κύκλωμα. Άρα το ρεύμα I που εισέρχεται σε έναν κόμβο πρέπει να ισούται με το ρεύμα που εξέρχεται από αυτόν.



Σχήμα 11.11: *Κύκλωμα R.*

[4]Αν και στην πραγματικότητα είναι πολύ απλή και γνωρίζετε τη λύση της...

Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται *Αρχή Διατήρησης του Φορτίου* και αποτελεί τον περίφημο *Πρώτο Κανόνα του Kirchhoff* στη μελέτη κυκλωμάτων. Εφαρμόζοντας αυτόν τον κανόνα στον κόμβο $i = 0$, έχουμε

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{11.106}$$

Γνωρίζουμε ότι το ρεύμα που διαρρέει έναν αντιστάτη ισούται με $I = \Delta V/R$, με ΔV την τάση στα άκρα του αντιστάτη και R την αντίσταση του αντιστάτη. Οπότε

$$\frac{\Delta V_1}{R} = \frac{\Delta V_2}{R} + \frac{\Delta V_3}{R} \tag{11.107}$$

$$\frac{V(-1) - V(0)}{R} = \frac{V(0) - V_r}{R} + \frac{V(0) - V(1)}{R} \tag{11.108}$$

$$V(-1) - V(0) = V(0) - V_r + V(0) - V(1) \tag{11.109}$$

$$V(1) = 3V(0) - V(-1) - V_r \tag{11.110}$$

Υποθέτοντας $V_r = 0$, έχουμε

$$V(1) = 3V(0) - V(-1) \tag{11.111}$$

και αν γενικεύσουμε για τον $n-$οστό κόμβο, τότε

$$V[n] = 3V[n-1] - V[n-2] \tag{11.112}$$

η οποία είναι μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το κύκλωμα του Σχήματος 11.11 με όρους τάσεων στους κόμβους του.

11.6.2 Κατηγορίες Συστημάτων

Τα συστηματα διακριτού χρονου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με ιδιότητες που έχουν, όπως ακριβώς αυτά του συνεχούς χρόνου. Οι πιο συνήθεις ιδιότητες που μας ενδιαφερουν είναι η *γραμμικότητα*, η *χρονική αμεταβλητικότητα*, η *αιτιατότητα*, η *δυναμικότητα*, και η *ευστάθεια*. Αυτές οι ιδιότητες, μαζι με μερικές ακόμα, περιγράφονται παρακάτω, μαζί με χαρακτηριστικά παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα.

11.6.2.1 Γραμμικά και μη-γραμμικά Συστηματα

Ένα συστημα λέγεται *γραμμικό* αν είναι (α) αθροιστικό και (β) ομογενές. Ας δούμε αυτές τις δυο ιδιότητες. Ένα σύστημα λέγεται *αθροιστικό* αν ισχύει

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \tag{11.113}$$

για οποιαδήποτε σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$. Ένα σύστημα λέμε ότι είναι *ομογενές* αν η κλιμάκωση της εισόδου με μια σταθερά έχει ως αποτέλεσμα την κλιμάκωση της εξόδου με την ίδια σταθερά. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι αν

$$T\{cx[n]\} = cT\{x[n]\} \tag{11.114}$$

για οποιαδήποτε μιγαδική σταθερά c για κάθε σήμα εισόδου $x[n]$.

Παράδειγμα 11.9:

Ελέγξτε την αθροιστικότητα και την ομογένεια του συστήματος που ορίζεται ως

$$y[n] = \frac{x^2[n]}{x[n-1]} \tag{11.115}$$

Λύση:
Το σύστημα δεν είναι αθροιστικό γιατί

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = \frac{(x_1[n] + x_2[n])^2}{x_1[n-1] + x_2[n-1]} \tag{11.116}$$

που δεν είναι το ίδιο με το

$$T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = \frac{x_1^2[n]}{x_1[n-1]} + \frac{x_2^2[n]}{x_2[n-1]} \tag{11.117}$$

Το σύστημα, όμως, είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος

$$T\{cx[n]\} = \frac{(cx[n])^2}{cx[n-1]} = c\frac{x^2[n]}{x[n-1]} = cT\{x[n]\} \tag{11.118}$$

Από την άλλη μεριά, το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + x^*[n-1] \tag{11.119}$$

είναι αθροιστικό (δείξτε το!) αλλά δεν είναι ομογενές, γιατι

$$T\{cx[n]\} = cx[n] + c^*x^*[n-1] \neq cT\{x[n]\} = cx[n] + cx^*[n-1] \tag{11.120}$$

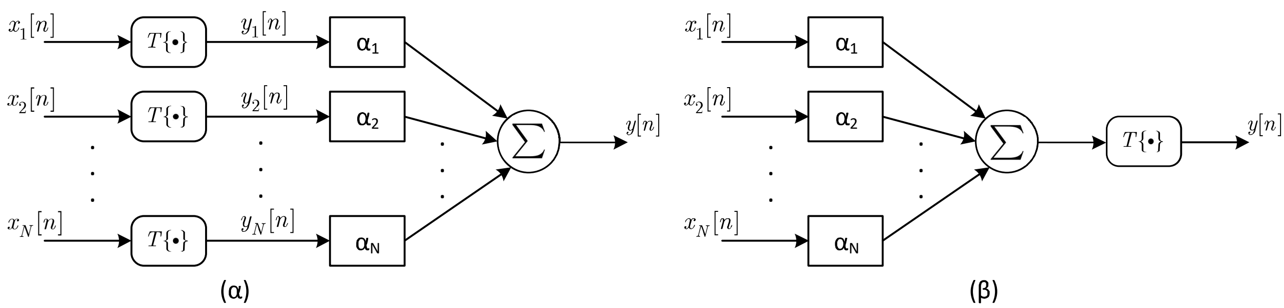
■

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι ένα σύστημα είναι γραμμικό αν

$$T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\} \tag{11.121}$$

για δυο εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ και για δυο οποιεσδήποτε σταθερές a_1, a_2. Η γραμμικότητα είναι μια πολύ σπουδαία ιδιότητα για ένα σύστημα.

Σχηματικά, ένα σύστημα είναι γραμμικό αν οι δυο έξοδοι στα Σχήματα 11.12(α) και (β) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.



Σχήμα 11.12: *Η ιδιότητα της γραμμικότητας συστημάτων.*

Παράδειγμα 11.10:

Το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n] \tag{11.122}$$

είναι γραμμικό. Δείξτε το.

Λύση:
Για είσοδο $a_1x_1[n]$, η έξοδος θα είναι

$$2a_1x_1[n-1] + a_1x_1[n] = a_1y_1[n] \tag{11.123}$$

Για είσοδο $a_2x_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$2a_2x_2[n-1] + a_2x_2[n] = a_2y_2[n] \tag{11.124}$$

Τέλος, για είσοδο

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \tag{11.125}$$

η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned}
y[n] &= 2(a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]) + (a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) && (11.126)\\
&= 2a_1x_1[n-1] + 2a_2x_2[n-1] + a_1x_1[n] + a_2x_2[n] && (11.127)\\
&= 2a_1x_1[n-1] + a_1x_1[n] + 2a_2x_2[n-1] + a_2x_2[n] && (11.128)\\
&= a_1(2x_1[n-1] + x_1[n-1]) + a_2(2x_2[n-1] + x_2[n]) && (11.129)\\
&= a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\} && (11.130)\\
&= a_1y_1[n] + a_2y_2[n] && (11.131)
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 11.11:

Δείξτε ότι τα συστήματα

(α′) $y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$ (β′) $y[n] = x^2[n-2]$ (γ′) $y[n] = \frac{1}{x[n]}, \quad x[n] \neq 0, \forall n$

είναι μη γραμμικά.

Λύση:
Εξασκηθείτε! ☺

■

Η γραμμικότητα απλοποιεί πάρα πολύ την απόκριση ενός συστηματος σε μια δεδομένη είσοδο. Για παράδειγμα, η εξοδος ενός συστηματος για είσοδο όπως η Σχέση (11.73), είναι

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} \tag{11.132}$$

Επειδή οι τιμές $x[k]$ είναι αριθμοί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ομογένειας και να έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} \tag{11.133}$$

Αν ορίσουμε ως $h_k[n]$ την απόκριση του συστήματος σε μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $n = k$, δηλ.

$$h_k[n] = T\{\delta[n-k]\} \tag{11.134}$$

θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \tag{11.135}$$

το οποίο αποτέλεσμα είναι γνωστό και ως *υπέρθεση*.

Μεγάλης σημασίας είναι - όπως θα δούμε στη συνέχεια - τα συστήματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{11.136}$$

με a_k, b_l, σταθερούς συντελεστές. Τέτοια συστήματα είναι γραμμικά και ονομάζονται **εξισώσεις διαφορών**. Είναι σημαντικό να δείξουμε ότι έχουν την ιδιότητα της γραμμικότητας.

Παράδειγμα 11.12:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{11.137}$$

με a_k, b_l, σταθερούς συντελεστές είναι γραμμικό.

Λύση:
Όταν η είσοδος είναι της μορφής $x_1[n]$, τότε η έξοδος γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_1[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x_1[n-l] \tag{11.138}$$

Όταν η είσοδος είναι της μορφής $x_2[n]$, τότε η έξοδος γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_2[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x_2[n-l] \tag{11.139}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με α και β αντίστοιχα, έχουμε

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha y_1[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l \alpha x_1[n-l] \tag{11.140}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \beta y_2[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l \beta x_2[n-l] \tag{11.141}$$

Το άθροισμά τους δίνει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha y_1[n-k] + \sum_{k=0}^{N} a_k \beta y_2[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l \alpha x_1[n-l] + \sum_{l=0}^{M} b_l \beta x_2[n-l] \tag{11.142}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (\alpha y_1[n-k] + \beta y_2[n-k]) = \sum_{l=0}^{M} b_l (\alpha x_1[n-l] + \beta x_2[n-l]) \tag{11.143}$$

Όμως η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από τη Σχέση (11.137) με

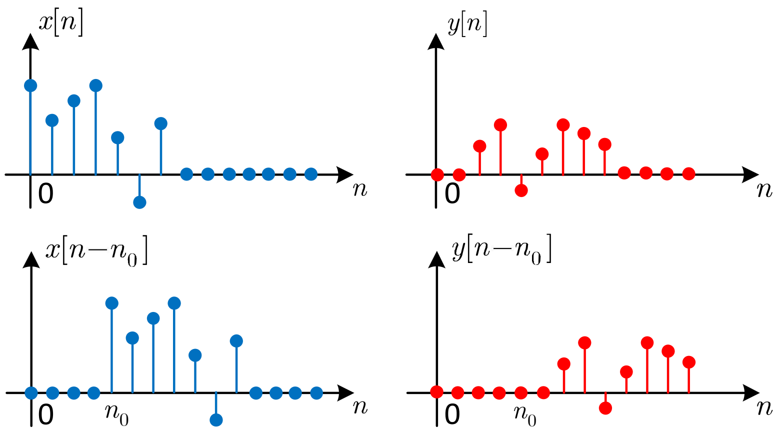
$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \tag{11.144}$$

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \tag{11.145}$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

11.6.2.2 Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβλητά Συστήματα

Ένα σύστημα λέμε οτι ειναι *χρονικά αμετάβλητο* αν μια καθυστέρηση στην είσοδο κατά n_0 δείγματα έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση της εξόδου κατά n_0 δείγματα. Με άλλα λόγια, έστω $y[n]$ η έξοδος ενός συστήματος για μια είσοδο $x[n]$. Το σύστημα λέμε ότι είναι χρονικά αμετάβλητο αν για κάθε καθυστέρηση της εισόδου n_0, η απόκριση στην είσοδο $x[n-n_0]$ ειναι η $y[n-n_0]$. Αντίθετα, ένα χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα αποκρίνεται διαφορετικά σε διαφορετικές καθυστερήσεις της εισόδου.
Το Σχήμα 11.13 απεικονίζει τη χρονική αμεταβλητότητα.



Σχήμα 11.13: *Χρονική Αμεταβλητότητα ως σχέση εισόδου-εξόδου.*

Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα ειναι χρονικά αμετάβλητο, πρέπει να συγκρινουμε τα σήματα $y[n-n_0]$ και $T\{x[n-n_0]\}$. Αν είναι ίδια, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα 11.13:

Δείξτε ότι το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.146}$$

ειναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:
Η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_1[n] = x[n - n_0]$, είναι

$$y_1[n] = T[x[n - n_0]] = x^2[n - n_0] \tag{11.147}$$

Όμως, προφανώς ισχύει ότι $y_1[n] = y[n - n_0]$, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα 11.14:

Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{11.148}$$

και λέγεται *αθροιστής*, είναι χρονικά αμετάβλητο. Ας το δείξουμε.

Λύση:
Έστω η είσοδος $x_1[n] = x[n - n_0]$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε την έξοδο $y_1[n]$ για την είσοδο αυτή, καθώς και το σήμα $y[n - n_0]$. Έχουμε ότι

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k - n_0] \tag{11.149}$$

Με αλλαγή μεταβλητής $m \leftarrow k - n_0$, θα έχουμε

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k - n_0] = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x[m] \tag{11.150}$$

Ας υπολογίσουμε και τη μετατοπισμένη έξοδο $y[n - n_0]$. Είναι

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \tag{11.151}$$

Προφανώς οι Σχέσεις (11.150),(11.151) είναι ισοδύναμες (τα m, k είναι μεταβλητές με τον ίδιο ρόλο και στις δυο σχέσεις). Άρα ισχύει $y_1[n] = y[n - n_0]$ κι έτσι το σύστημα μας είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα 11.15:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$y[n] = nx[n] \tag{11.152}$$

είναι χρονικά μεταβλητό.

Λύση:
Η έξοδος του συστήματος, $y_1[n]$, για είσοδο $x_1[n] = x[n - n_0]$ είναι

$$y_1[n] = nx[n - n_0] \tag{11.153}$$

Όμως, η έξοδος $y[n - n_0]$ ισούται με

$$y[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0] \tag{11.154}$$

που προφανώς είναι διαφορετική από την $y_1[n]$. Άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

■

Ας αποδείξουμε, τέλος, ότι ένα σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

Παράδειγμα 11.16:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{11.155}$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:
Όταν η είσοδος είναι της μορφής $x_1[n] = x[n-n_0]$, τότε η έξοδος είναι

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_1[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-n_0-l] \tag{11.156}$$

Η καθυστερημένη κατά n_0 έξοδος $y[n-n_0]$ ισούται με

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_1[n-n_0-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-n_0-l] \tag{11.157}$$

που προφανώς είναι ίδια με την έξοδο για είσοδο $x_1[n]$, όπως αυτή ορίζεται παραπάνω. Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

11.6.2.3 Δυναμικά και Στατικά Συστήματα

Η πρώτη κατηγορία αφορά το αν ένα σύστημα είναι δυναμικό ή στατικό, δηλ. αν απαιτεί ή όχι μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου. Ένα σύστημα λέμε οτι είναι *χωρίς μνήμη* ή *στατικό* αν η έξοδος σε μια χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι στατικό αν, για κάθε n_0, μπορούμε να βρούμε την τιμή $y[n_0]$ δεδομένης μόνο της τιμής $x[n_0]$.

Παράδειγμα 11.17:

Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.158}$$
$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.159}$$

είναι δυναμικά ή στατικά.

Λύση:
Το σύστημα

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.160}$$

ειναι στατικό γιατι για μια τυχαία χρονική στιγμή $n = n_0$, η έξοδος $y[n_0]$ εξαρτάται μόνο από την τιμή $x[n_0]$. Αντίθετα, το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.161}$$

είναι δυναμικό, γιατι για τον υπολογισμό της τιμής εξόδου $y[n_0]$ χρειαζόμαστε και την τιμή εισόδου $x[n_0-1]$, εκτος απ' την τιμή $x[n_0]$.

11.6.2.4 Αιτιατά και μη-αιτιατά Συστήματα

Όπως και στα συστήματα συνεχούς χρόνου, μια ιδιότητα ιδιαίτερα σημαντική για πραγματικές εφαρμογές είναι η *αιτιατότητα*, η οποία λέει ότι η απόκριση ενός συστήματος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρταται μόνο από τις χρονικές στιγμές *μέχρι και* τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Για ένα αιτιατο σύστημα, οι αλλαγές στην έξοδο δεν μπορεί να προηγούνται από αλλαγές στην είσοδο. Αιτιατά συστήματα μπορούν να είναι πραγματοποιήσιμα σε πραγματικό χρόνο ενώ μη αιτιατά συστήματα μπορούν να πραγματοποιηθούν μόνο off-line, δηλ. με προαποηθηκευμένη είσοδο σε κάποια συσκευή ώστε οι μελλοντικές τιμές της να είναι προσπελάσιμες.

Παράδειγμα 11.18:

Δείξτε ότι το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.162}$$

είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n+1] \tag{11.163}$$

δεν είναι.

Λύση:
Για το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.164}$$

η τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές εισόδου $x[n]$ στις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 - 1$. Αντίθετα, το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n+1] \tag{11.165}$$

δεν είναι αιτιατό, γιατι η έξοδος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται από την τιμή της εισόδου τις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 + 1$.

11.6.2.5 Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου ευσταθές - BIBO-stable*, αν ισχύει ότι για απολύτως φραγμένη είσοδο

$$|x[n]| < B_x \tag{11.166}$$

η έξοδος είναι επίσης απολύτως φραγμένη

$$|y[n]| < B_y \tag{11.167}$$

με B_x, B_y πραγματικούς θετικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 11.19:

Δείξτε ότι ο αθροιστής του Παραδείγματος 11.14 δεν είναι ευσταθές σύστημα.

Λύση:
Αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, $|x[n]| < B_x$, τότε η έξοδος

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{n} |x[k]| < \sum_{k=-\infty}^{n} B_x \to \infty \tag{11.168}$$

όταν $n \to +\infty$. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Παράδειγμα 11.20:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$y[n] = x^2[n] + \sin(x[n]) \tag{11.169}$$

είναι ευσταθές.

Λύση:
Αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = |x^2[n] + \sin(x[n])| \leq |x^2[n]| + |\sin(x[n])| < B_x^2 + 1 \tag{11.170}$$

αφού $|\sin(\theta)| \leq 1$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

■

Συνοψίζοντας λοιπόν όσα μάθαμε σχετικά με τις ιδιότητες των συστημάτων, έχουμε:

Ιδιότητες Συστημάτων

- **Γραμμικότητα:** Αν
$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] \quad (11.171)$$
$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] \quad (11.172)$$
είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιεσδήποτε μιγαδικές ή πραγματικές σταθερές a, b, το
$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow ay_1[n] + by_2[n] \quad (11.173)$$
είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα.
- **Χρονική Αμεταβλητότητα:** Αν
$$x[n] \longrightarrow y[n] \quad (11.174)$$
είναι ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, τότε
$$x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0] \quad (11.175)$$
δηλ. αν η είσοδος καθυστερήσει κατά n_0, τότε η έξοδος θα είναι ίδια με πριν, μόνο που θα είναι κι αυτή καθυστερημένη κατά n_0.
- **Δυναμικότητα:** Δυναμικά συστήματα λέγονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου τους απαιτεί προηγούμενες ή/και επόμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί.
- **Αιτιατότητα:** Αιτιατά συστήματα λέγονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου.
- **Ευστάθεια:** BIBO-ευσταθή λέγονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει:
$$|x[n]| < B_x \Longrightarrow |y[n]| < B_y, \;\; B_x, B_y \in \mathbb{R}_+ \quad (11.176)$$
δηλ. αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ΄ απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ΄ απόλυτη τιμή.

Πριν κλείσουμε το κεφάλαιο, ας αναφέρουμε μερικές παρατηρήσεις για όσα είπαμε.

Παρατηρήσεις

(α΄) Όπως και στο συνεχή χρόνο, ένα σήμα με πλάτος που φθίνει στο μηδέν όσο $|n| \to \infty$ δεν είναι απαραίτητα σήμα ενέργειας. Δείτε ότι παρ΄ όλο που το σήμα
$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{n}}u[n-1] \quad (11.177)$$
φθίνει στο μηδέν όταν $|n| \to \infty$, η ενέργεια του είναι άπειρη, καθώς αποτελεί μια αρμονική σειρά, η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει!

(β΄) Ένα πολύ ενδιαφέρον νέο στοιχείο που βλέπουμε στην αρχή αυτής της διαδρομής μας στο διακριτό χρόνο είναι οι περίφημες *εξισώσεις διαφορών* που μπορούν να περιγράψουν συστήματα – το επόμενο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο αποκλειστικά σε αυτές. Σε αντίθεση με τις διαφορικές εξισώσεις, οι εξισώσεις διαφορών μπορούν εύκολα να ‘‘τρέξουν’’ τόσο προς θετικούς όσο και προς αρνητικούς χρόνους n!

(γ΄) Τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα (ΓΧΑ) συστήματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά και θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με αυτά στη συνέχεια, ξεκινώντας από το επόμενο κεφάλαιο. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι τα μη γραμμικά συστήματα δεν είναι χρήσιμα – το αντίθετο, όπως αποδεικνύει και το πλήθος της σχετικής βιβλιογραφίας ([102], [103], [104], [105], [106], [107], [108]) – αλλά είναι αρκετά πιο δύσκολα στην ανάλυσή τους. Μάλιστα μπορούμε να θεωρήσουμε τα τόσο διάσημα (λόγω της έκρηξης του AI) *νευρωνικά δίκτυα* ώς μεγάλα, υψηλά μη γραμμικά, συστήματα.

(δ΄) Στην αντίστοιχη Παράγραφο περί συστημάτων συνεχούς χρόνου (3.4) αναφέραμε ως παράδειγμα φυσικού χρονικά *μεταβλητού* συστήματος το σύστημα της ανθρώπινης φωνητικής οδού. Σε εφαρμογές ψηφιακής επεξεργασίας φωνής (σύνθεση ομιλίας από κείμενο, αναγνώριση ομιλίας, κλπ) προτιμούμε να αναλύουμε τμηματικά τέτοια σήματα, θεωρώντας ότι τα τμήματα αυτά μοντελοποιούνται από χρονικά *αμετάβλητα* συστήματα - με άλλα λόγια, για μερικά (από 10 ως 100) ms, θεωρούμε ότι η φωνητική οδός δεν αλλάζει σημαντικά. Το ίδιο ισχύει και σε άλλες εφαρμογές όπως η ανάλυση μουσικής.

(ε΄) Ξανά στην Παράγραφο 3.4 αναφερθήκαμε στους τρεις λόγους για τους οποίους έχει νόημα η μελέτη συστημάτων που δεν είναι αιτιατά. Μπορούμε εδώ να αναφέρουμε ένα παράδειγμα από το διακριτό χρόνο: τον τελεστή Teager-Kaiser, ο οποίος ορίζεται ως το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x^2[n] - x[n-1]x[n+1] \tag{11.178}$$

και προέκυψε ως μια πρώτη απόπειρα να εξηγηθούν οι μη γραμμικότητες στο σύστημα παραγωγής ομιλίας που δεν καλύπτονταν από το καθιερωμένο (τότε και τώρα) γραμμικό μοντέλο παραγωγής φωνής. Παρατηρήστε ότι το σύστημα είναι μη γραμμικό και μη αιτιατό, καθώς (α) περιέχει έναν όρο εισόδου στο τετράγωνο, και (β) απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για τον υπολογισμό μιας τιμής της εξόδου. Οι δυο αυτές ιδιότητες δεν το εμπόδισαν καθόλου ☺ να βρει πληθώρα εφαρμογών στην ψηφιακή επεξεργασία φωνής [109], [110], [111], [112], στη βελτίωση ποιότητας ψηφιακής εικόνας [113], και στη θεωρία σημάτων διαμορφωμένων κατά πλάτος και συχνότητα [114], [115], [116]. Δείτε επίσης την πολύ ωραία Άσκηση 11.ΞΞ.