

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Από το θεώρημα αρχικής τιμής γνωρίζουμε ότι

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (1)$$

αν ο μετασχ. $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση του z και το $x[n]$ αιτιατό. Άρα

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{-1}}{1 + z^{-2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0 \quad (2)$$

Άσκηση 2.

Από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο πόλοι και δυο μηδενικά, με τα τελευταία να είναι στο μηδέν. Ξέρουμε ότι κάθε όρος της μορφής

$$1 - az^{-1} \quad (3)$$

συνεισφέρει έναν πόλο στο $z = a$ και ένα μηδενικό στο $z = 0$. Άρα

$$H(z) = C \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \quad (4)$$

ή εναλλακτικά

$$H(z) = C \frac{z^2}{(z - 2)(z - 3)} \quad (5)$$

Ζητείται να ισχύει ότι

$$H(1) = 1 \iff \frac{C}{(1 - 2)(1 - 3)} = 1 \iff C = 2 \quad (6)$$

οπότε

$$H(z) = \frac{2}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \quad (7)$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε κατ' ευθείαν σε μερικά κλάσματα, καθώς ο αριθμητής είναι σταθερό πολυώνυμο και ο παρονομαστής δευτεροβάθμιος. Έτσι,

$$H(z) = \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 - 3z^{-1}} \quad (8)$$

με

$$A = H(z)(1 - 2z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1/2} = \frac{2}{1 - 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1/2} = -4 \quad (9)$$

$$B = H(z)(1 - 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1/3} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1/3} = 6 \quad (10)$$

Αναλόγως του πεδίου σύγκλισης

- $|z| > 3$
- $|z| < 2$
- $2 < |z| < 3$

όπως αυτό καθορίζεται από τους δυο πόλους, κι από τους έτοιμους πίνακες ζευγών μετασχ. Ζ έχουμε

- $h[n] = ((-4)2^n + 6 \cdot 3^n)u[n]$
- $h[n] = 4 \cdot 2^n u[-n-1] - 6 \cdot 3^n u[-n-1]$
- $h[n] = (-4)2^n u[n] - 6 \cdot 3^n u[-n-1]$

αντίστοιχα.

Άσκηση 3.

- Το διάγραμμα (a) έχει δυο πόλους κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, υπό γωνία κοντά στο $\pm\pi/4$. Τα όποια μηδενικά βρίσκονται στο άπειρο. Υποψήφιες αποκρίσεις πλάτους είναι οι (i, iv), με σωστή την iv, καθώς η (i) μηδενίζεται για $\omega = 0$, αλλά δεν υπάρχει μηδενικό στο $z = 1$ στο διάγραμμα.
- Το διάγραμμα (b) αντιστοιχεί στην απόκριση πλάτους (i), για το λόγο που αναφέρεται στην προηγούμενη απάντηση.
- Το διάγραμμα (c) έχει πόλους υπό γωνίες περίπου $\pm\pi/6$, $\pm 2\pi/3$, κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, και ένα μηδενικό κοντά στο $z = 1$. Το διάγραμμα (v) έχει αυτά τα χαρακτηριστικά.
- Το διάγραμμα (d) έχει μηδενικά πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, 5 τον αριθμό, υπό διάφορες γωνίες. Υποψήφιες οι αποκρίσεις πλάτους (ii, iii). Είναι γνωστό FIR φίλτρο που έχουμε δει στη θεωρία, άρα αντιστοιχεί στην (iii).
- Το διάγραμμα (e) αντιστοιχεί στην εναπομείνουσα απόκριση πλάτους (ii).

Άσκηση 4.

(α) Αν έχουμε μόνο την κρουστική του απόκριση: συνθήκη ευστάθειας αποτελεί η σχέση

$$\sum_n |h[n]| < +\infty \quad (11)$$

δηλ. η κρουστική απόκριση να είναι απολύτως αθροίσιμη. Για την αιτιατότητα, συνθήκη αποτελεί η σχέση

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (12)$$

Αν ισχύουν και τα δυο, είναι ευσταθές και αιτιατό.

(β) Αν έχουμε μόνο τη συνάρτηση μεταφοράς του και το πεδίο σύγκλισης: συνθήκη ευστάθειας αποτελεί η συμπερίληψη του μοναδιαίου κύκλου στο πεδίο σύγκλισης. Συνθήκη αιτιατότητας αποτελεί ένα “εξωστρεφές” πεδίο σύγκλισης χωρίς πόλους στο άπειρο, της μορφής $|z| > |a|$, $a \in \mathbb{C}$. Αν ισχύουν και τα δυο, τότε είναι ευσταθές και αιτιατό.

(γ) Αν έχουμε μόνο την εξίσωση διαφορών του: συνθήκη ευστάθειας αποτελεί το να είναι όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες της εξίσωσης διαφορών απολύτως μικρότερες της μονάδας: $|\lambda_i| < 1$, $\forall i$. Συνθήκη αιτιατότητας αποτελεί η αρχική ηρεμία του συστήματος (μηδενικές αρχικές συνθήκες). Αν ισχύουν και τα δυο, τότε είναι ευσταθές και αιτιατό.

(δ) Αν έχουμε μόνο το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του: συνθήκη ευστάθειας αποτελεί η απουσία πόλου στο μοναδιαίο κύκλο ($|z| = 1$), αν αυτός συμπεριλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Αν δε συμπεριλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, τότε δεν είναι ευσταθές ανεξαρτήτως θέσεων πόλων. Συνθήκη αιτιατότητας αποτελεί η απουσία πόλων στο άπειρο, αν το πεδίο σύγκλισης είναι “εξωστρεφές”. Αν είναι “εσωστρεφές”, το σύστημα δεν είναι αιτιατό.

Βλέπετε ότι η απλή γνώση πόλων-μηδενικών δεν είναι αρκετή για την μονοσήμαντη εύρεση της ευστάθειας ή/και της αιτιατότητας, σε αντίθεση με τις άλλες περιπτώσεις.

Άσκηση 5.

Η εξίσωση ταυτότητας που μας δίνεται για το συνολικό σύστημα εκφράζεται στο χώρο του Z ως

$$H_1(z)H_2(z)H_3(z) = 1 \quad \forall z \in R_1 \cap R_2 \cap R_3 \quad (13)$$

αν $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \neq \emptyset$. Για καθένα από τα συστήματα

$$H_1(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{2}{5} \quad (14)$$

$$H_2(z) = A \frac{1 + az^{-1}}{1 + bz^{-1}}, \quad R_2 \quad (15)$$

$$H_3(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad |z| > 0 \quad (16)$$

Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (13)

$$H_1(z)H_2(z)H_3(z) = 1 \iff H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)H_3(z)} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}} = 2 \frac{1 - \frac{2}{5}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17)$$

Συγκρίνοντας με το δοθέν $H_2(z)$, παίρνουμε

$$A = 2 \quad (18)$$

$$b = \frac{1}{2} \quad (19)$$

$$a = -\frac{2}{5} \quad (20)$$

Άσκηση 6.

Για το πρώτο σύστημα, έχουμε το ζεύγος εισόδου - εξόδου

$$u[n] \longrightarrow s[n] \longleftrightarrow U(z) = S(z) \quad (21)$$

δηλ.

$$S(z) = H_1(z)U(z) \iff H_1(z) = \frac{S(z)}{U(z)} = \frac{\frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{\frac{2-z^{-1}-1+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} \quad (22)$$

που εν τέλει μας δίνει

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \longleftrightarrow h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (23)$$

Στη συνέχεια

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \iff H_2(z) = \frac{H(z)}{H_1(z)} = \frac{\frac{1+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (24)$$

δηλ.

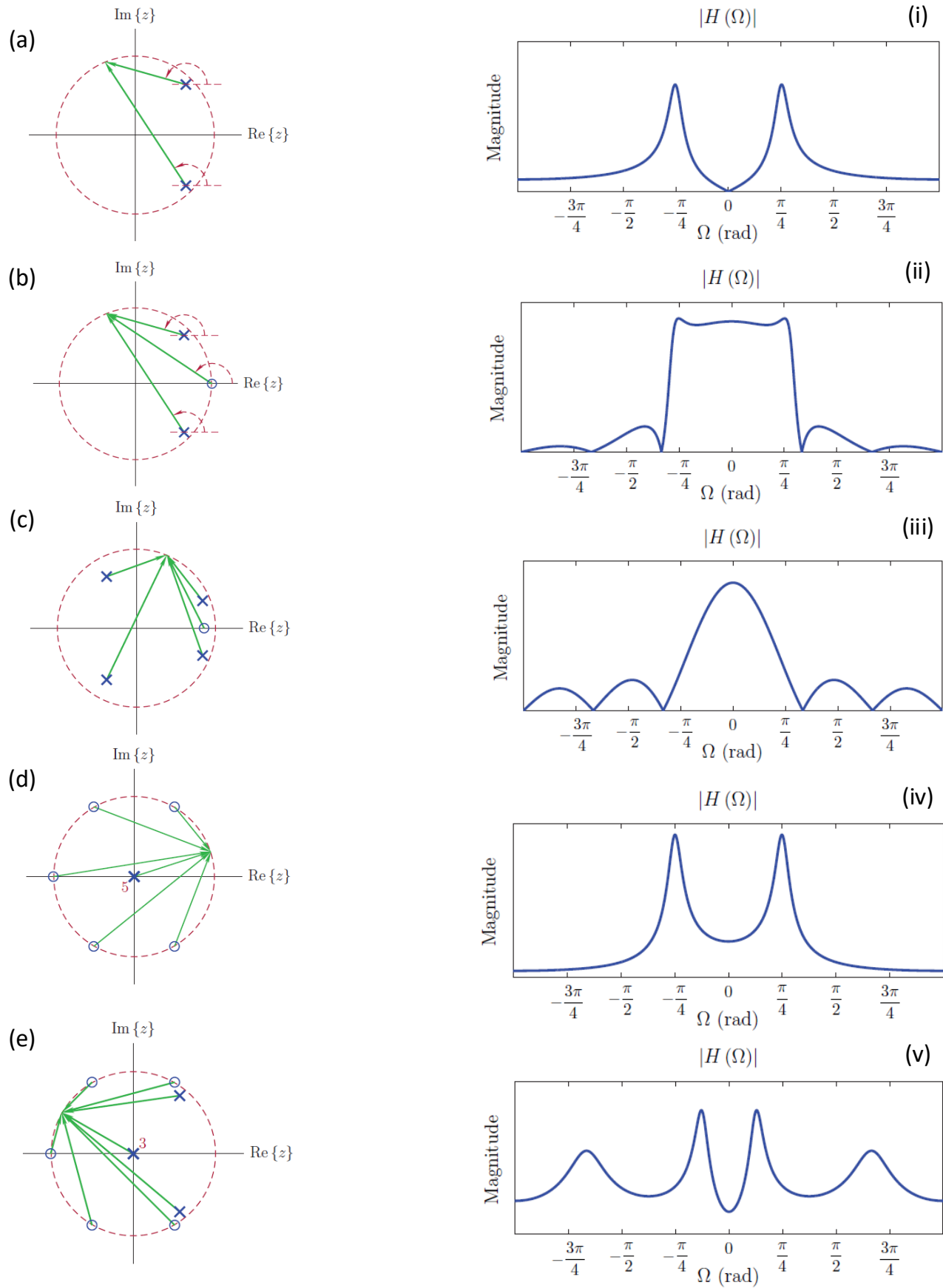
$$H_2(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (25)$$

Δεν μπορούμε να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα το παραπάνω, μπορούμε όμως να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα. Τότε θα πάρουμε

$$H_2(z) = -1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (26)$$

Από γνωστά ζεύγη

$$h_2[n] = -\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (27)$$



Σχήμα 1: Σχήμα Ασκήσης 3.