

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Η κρουστική απόκριση μπορεί να βρεθεί αν $x[n] = \delta[n]$, δηλ.

$$h[n] = \frac{1}{6}\delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{3}\delta[n-4] + \frac{1}{6}\delta[n-6] \quad (1)$$

(β) Η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας, άρα το σύστημα είναι ευσταθές (είναι απολύτως αθρο-
ίσιμη).

(γ) Θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-j2\omega} + \frac{1}{3}e^{-j4\omega} + \frac{1}{6}e^{-j6\omega} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{6}(1 + e^{-j6\omega}) + \frac{1}{3}(e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{6}e^{-j3\omega}(e^{j3\omega} + e^{-j3\omega}) + \frac{1}{3}e^{-j3\omega}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{3}e^{-j3\omega}(\cos(3\omega) + 2\cos(\omega)) \quad (5)$$

(δ) Η απόκριση πλάτους και φάσης δίνονται ως

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3}|\cos(3\omega) + 2\cos(\omega)| \quad (6)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -3\omega + \angle(\cos(3\omega) + 2\cos(\omega)) \quad (7)$$

Βάζοντας ενδεικτικά κάποιες τιμές στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ για τη συνάρτηση αθροίσματος συνημιτόνων, όπως

$$\omega = -\pi \implies \cos(-3\pi) + 2\cos(-\pi) = -3 \quad (8)$$

$$\omega = -3\pi/4 \implies \cos(-9\pi/4) + 2\cos(-3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9)$$

$$\omega = -\pi/2 \implies \cos(-3\pi/2) + 2\cos(-\pi/2) = 0 \quad (10)$$

$$\omega = -\pi/4 \implies \cos(-3\pi/4) + 2\cos(-\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (11)$$

$$\omega = 0 \implies \cos(0) + 2\cos(0) = 3 \quad (12)$$

$$\omega = \pi/4 \implies \cos(3\pi/4) + 2\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (13)$$

$$\omega = \pi/2 \implies \cos(3\pi/2) + 2\cos(\pi/2) = 0 \quad (14)$$

$$\omega = 3\pi/4 \implies \cos(9\pi/4) + 2\cos(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (15)$$

$$\omega = \pi \implies \cos(3\pi) + 2\cos(\pi) = -3 \quad (16)$$

ενώ μπορούμε να βρούμε τα σημεία μηδενισμού της, ως

$$\cos(3\omega) + 2\cos(\omega) = 0 \quad (17)$$

$$4\cos^3(\omega) - 3\cos(\omega) + 2\cos(\omega) = 0 \quad (18)$$

$$4\cos^3(\omega) - \cos(\omega) = 0 \quad (19)$$

$$\cos(\omega)(4\cos^2(\omega) - 1) = 0 \quad (20)$$

$$\cos(\omega) = 0 \text{ ή } \cos^2(\omega) = \frac{1}{4} \quad (21)$$

$$\omega = \pm\pi/2 \text{ ή } \cos(\omega) = \pm\frac{1}{2} \quad (22)$$

$$\omega = \pm\pi/2 \text{ ή } \omega = \pm\pi/3 \text{ ή } \omega = \pm2\pi/3 \quad (23)$$

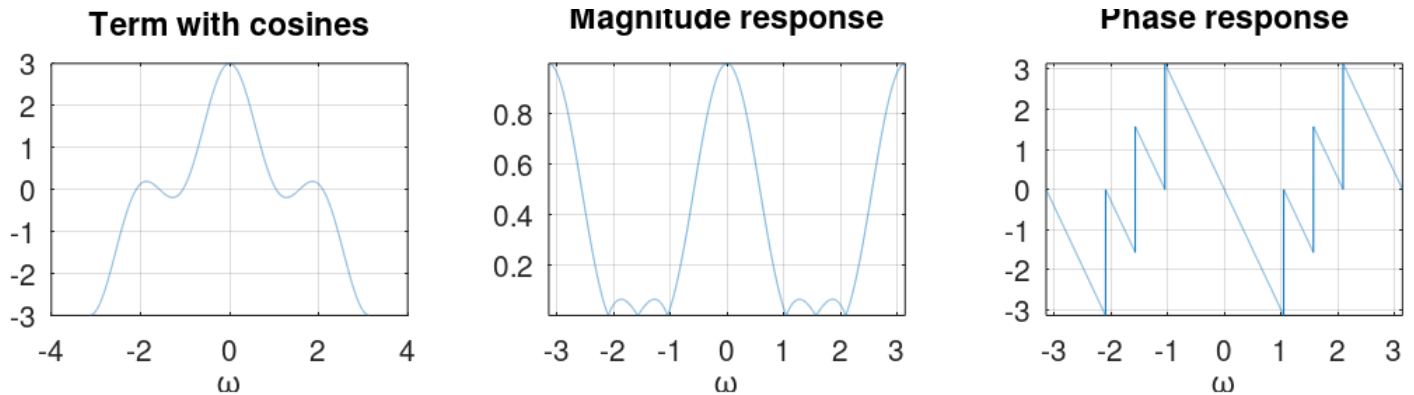
Έρα με βάση αυτά τα διαστήματα και τις παραπάνω τιμές συμπεραίνουμε ότι

$$\angle(\cos(3\omega) + 2\cos(\omega)) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \pi/3 \\ \pi, & \pi/3 < \omega < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \omega < 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 < \omega < \pi \end{cases} \quad (24)$$

με τα αντίθετα πρόσημα για τις τιμές της συνάρτησης αυτής στον αρνητικό ημιάξονα του ω . Η συνολική φάση στο $[0, \pi]$ θα είναι λοιπόν

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -3\omega - \pi, & -\pi < \omega < -2\pi/3 \\ -3\omega, & -2\pi/3 < \omega < -\pi/2 \\ -3\omega - \pi, & -\pi/2 < \omega < -\pi/3 \\ -3\omega, & -\pi/3 < \omega < \pi/3 \\ -3\omega + \pi, & \pi/3 < \omega < \pi/2 \\ -3\omega, & \pi/2 < \omega < 2\pi/3 \\ -3\omega + \pi, & 2\pi/3 < \omega < \pi \end{cases} \quad (25)$$

Με βάση όλα τα παραπάνω, ο όρος αθροίσματος συνημιτόνων, η απόκριση πλάτους και η απόκριση φάσης φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχήμα Ασκήσης 1.

Άσκηση 2.

(α') Είναι

$$X(e^{j0}) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 2 \quad (26)$$

(β) Είναι

$$X(e^{j\pi}) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](-1)^n = -2 \quad (27)$$

(γ) Είναι

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \Big|_{n=0} = 2\pi x[0] = 4\pi \quad (28)$$

Άσκηση 3.

Ξέρουμε ότι για περιοδική είσοδο στη μορφή ημιτονοειδούς άπειρης διάρκειας της μορφής

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (29)$$

η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})) \quad (30)$$

Με $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$, θα έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (31)$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{|1 - a \cos(\omega) + ja \sin(\omega)|} \quad (32)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos(\omega))^2 + a^2 \sin^2(\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}} \quad (33)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \quad (34)$$

με

$$H_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \quad (35)$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\frac{a \sin(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \quad (36)$$

Για $\omega = \pi/2$, που είναι η συχνότητα της εισόδου, θα έχουμε

$$|H(e^{j\pi/2})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (37)$$

$$\angle H(e^{j\pi/2}) = \tan^{-1}(-a) = -\tan^{-1}(a) \quad (38)$$

Έτσι, η έξοδος του συστήματος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \cos\left(\frac{\pi n}{2} - \tan^{-1}(a)\right) \quad (39)$$

Άσκηση 4.

Για κάθε στοιχείο αναλύουμε τι μπορούμε να πάρουμε.

- Θα είναι

$$H(e^{j0}) = 1 \iff \frac{b_0}{1 + a_1} = 1 \iff b_0 = 1 + a_1 \quad (40)$$

- Επίσης

$$\left| H(e^{j\pi/2}) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff |H(e^{j\pi/2})|^2 = \frac{1}{2} \quad (41)$$

που μας δίνει, χρησιμοποιώντας επίσης ότι $b_0 = 1 + a_1$,

$$\left| \frac{1 + a_1}{1 - ja_1} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (42)$$

$$\frac{1 + 2a_1 + a_1^2}{1 + a_1^2} = \frac{1}{2} \quad (43)$$

$$2 + 4a_1 + 2a_1^2 = 1 + a_1^2 \quad (44)$$

$$1 + 4a_1 + a_1^2 = 0 \quad (45)$$

$$a_1 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \quad (46)$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} \quad (47)$$

$$= -2 \pm \sqrt{3} \quad (48)$$

Οπότε

$$a_1 = -2 \pm \sqrt{3} \quad (49)$$

και

$$b_0 = -1 \pm \sqrt{3} \quad (50)$$

με τα άνω πρόσημα να δίνουν ένα ζεύγος λύσεων και τα κάτω πρόσημα ένα δεύτερο ζεύγος.

Άσκηση 5.

Εφαρμόζοντας τριγωνομετρικές ταυτότητες και τη σχέση του Euler, παίρνουμε

$$H(e^{j\omega}) = (1 + \cos \omega)^2 \cdot \frac{1 + e^{j\omega}}{2} \quad (51)$$

$$= \frac{1}{8} (2 + e^{j\omega} + e^{-j\omega})^2 (1 + e^{j\omega}) \quad (52)$$

$$= \frac{1}{8} e^{j3\omega} + \frac{5}{8} e^{j2\omega} + \frac{5}{4} e^{j\omega} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}. \quad (53)$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$h[n] = \frac{1}{8} \delta[n + 3] + \frac{5}{8} \delta[n + 2] + \frac{5}{4} \delta[n + 1] + \frac{5}{4} \delta[n] + \frac{5}{8} \delta[n - 1] + \frac{1}{8} \delta[n - 2] \quad (54)$$

Όμως

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = h[0] \iff \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi h[0] \quad (55)$$

και άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi h[0] = 2\pi \frac{5}{4} = \frac{5\pi}{2} \quad (56)$$