

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Μας δίνεται το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \frac{n}{5}, & -5 \leq n \leq -1 \\ 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1)$$

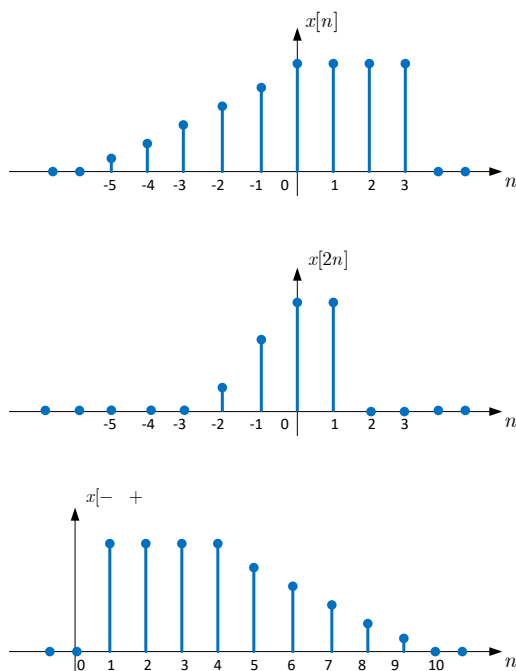
(α) Τα σήματα που ζητούνται είναι τα

$$x[2n] = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{5}, & -5 \leq 2n \leq -1 \\ 1, & 0 \leq 2n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1 + \frac{2n}{5}, & -2 \leq n \leq -1 \\ 1, & 0 \leq n \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2)$$

και

$$x[-n+4] = \begin{cases} 1 + \frac{-n+4}{5}, & -5 \leq -n+4 \leq -1 \\ 1, & 0 \leq -n+4 \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{9-n}{5}, & -9 \leq -n \leq -5 \\ 1, & -4 \leq -n \leq -1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{9-n}{5}, & 5 \leq n \leq 9 \\ 1, & 1 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3)$$

και φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχήμα Ασκήσης 1.

(β') Μια γραφή μπορεί να είναι η

$$x[n] = \sum_{k=-4}^{-1} \left(1 + \frac{k}{5}\right) \delta[n-k] + (u[n] - u[n-4]) \quad (4)$$

Άσκηση 2.

(α') Θα είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx^2[n] = \sum_{n=-3}^3 nx^2[n] = -3(3)^2 + -2(2)^2 + \dots + 2(2^2) + 3(3^2) = 0 \quad (5)$$

και

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = 3^2 + 2^2 + \dots + 2^2 + 3^2 \neq 0 \quad (6)$$

άρα όλο το κλάσμα ισούται με μηδέν.

(β') Για τα σήματα $x[n-1]$ και $x[n-2]$, ο παρονομαστής του κέντρου βάρους θα είναι ο ίδιος, το άθροισμα των δειγμάτων με το καθένα στο τετράγωνο. Ο αριθμητής, για $y[n] = x[n-n_0]$, θα είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ny^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(x^2[n-n_0]) \quad (7)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (m+n_0)(x^2[m]) \quad (8)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m(x^2[m]) + n_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^2[m] \quad (9)$$

Έτσι παρατηρούμε ότι το κέντρο βάρους θα είναι

$$CG_y = CG_x + n_0 \quad (10)$$

οπότε

$$CG_{x[n-1]} = 1 \quad (11)$$

και

$$CG_{x[n-2]} = 2 \quad (12)$$

(γ') Παρατηρούμε ότι

$$x[0] = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \quad (13)$$

και

$$x[n] = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 1 \quad (14)$$

Οπότε

$$\sum_n x^2[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \quad (15)$$

και

$$\sum_n nx^2[n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{9}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{9}{4} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{(1 - \frac{1}{4})^2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} = 1. \quad (16)$$

Τελικά

$$CG = \frac{1}{1} = 1 \quad (17)$$

Άσκηση 3.

- i. Το σύστημα δεν είναι γραμμικό γιατί δεν είναι ομογενές, αφού για το ζεύγος

$$x[n] \longrightarrow y[n] = n \cos(x[n]) \quad (18)$$

έχουμε

$$cx[n] \longrightarrow y_c[n] = n \cos(cx[n]) \neq cy[n] \quad (19)$$

Το σύστημα δεν είναι ευσταθές αφού αν

$$|x[n]| < B_x \in \mathbb{R}_+ \quad (20)$$

τότε

$$|y[n]| = |n \cos(x[n])| = |n| |\cos(x[n])| \leq |n| \rightarrow \infty \quad (21)$$

αν $n \rightarrow +\infty$. Επίσης, το σύστημα είναι αιτιατό αφού ο υπολογισμός της εξόδου δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου. Επιπλέον, το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό, αφού αν

$$x[n-k] \longrightarrow y_d[n] = n \cos(x[n-k]) \quad (22)$$

τότε

$$y[n-k] = (n-k) \cos(x[n-k]) \neq y_d[n] \quad (23)$$

- ii. Το σύστημα είναι γραμμικό γιατί είναι ομογενές και αθροιστικό. Αν

$$x_i[n] \longrightarrow y_i[n] = 3x_i[n^2], \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

έχουμε

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow y_{1,2}[n] = 3(ax_1[n^2] + bx_2[n^2]) = a(3x_1[n^2]) + b(3x_2[n^2]) = ay_1[n] + by_2[n] \quad (25)$$

Το σύστημα είναι ευσταθές αφού αν

$$|x[n]| < B_x \in \mathbb{R}_+ \quad (26)$$

τότε

$$|y[n]| = |3x[n^2]| = 3|x[n^2]| < 3B_x \quad (27)$$

Επίσης, το σύστημα δεν είναι αιτιατό αφού ο υπολογισμός της εξόδου εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου (π.χ. $y[2] = 3x[4]$). Επιπλέον, το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό, αφού αν

$$x[n-k] \longrightarrow y_d[n] = 3x[n^2-k] \quad (28)$$

τότε

$$y[n-k] = 3x[(n-k)^2] \neq y_d[n] \quad (29)$$

- iii. Το σύστημα είναι γραμμικό γιατί είναι ομογενές και αθροιστικό. Αν

$$x_i[n] \longrightarrow y_i[n] = x_i[n]u[n-1], \quad i = 1, 2 \quad (30)$$

έχουμε

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow y_{1,2}[n] = ax_1[n]u[n-1] + bx_2[n]u[n-1] = ay_1[n] + by_2[n] \quad (31)$$

Το σύστημα είναι ευσταθές αφού αν

$$|x[n]| < B_x \in \mathbb{R}_+ \quad (32)$$

τότε

$$|y[n]| = |x[n]u[n-1]| = |x[n]||u[n-1]| < |x[n]| < B_x \quad (33)$$

Επίσης, το σύστημα είναι αιτιατό αφού ο υπολογισμός της εξόδου δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου. Επιπλέον, το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό, αφού αν

$$x[n-k] \longrightarrow y_d[n] = x[n-k]u[n-1] \quad (34)$$

τότε

$$y[n-k] = x[n-k]u[n-1-k] \neq y_d[n] \quad (35)$$

Άσκηση 4.

Έχουμε

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k]u[-k] \quad (36)$$

Όμως

$$u[n-k] = 1, \quad k \leq n \quad (37)$$

και

$$u[-k] = 1, \quad k \leq 0 \quad (38)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $n \leq -1$: Θα είναι

$$c_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k]u[-k] \quad (39)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \quad (40)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{2^n}{1 - \frac{1}{2}} \quad (41)$$

$$= 2 \quad (42)$$

άρα

$$c_1[n] = 2u[-n-1] \quad (43)$$

- $n \geq 0$: Θα είναι

$$c_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k]u[-k] \quad (44)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \quad (45)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \quad (46)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (47)$$

άρα

$$c_2[n] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (48)$$

Συνολικά λοιπόν

$$c_{xy}[n] = 2u[-n-1] + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (49)$$

Άσκηση 5.

(α) Για την απόκριση μηδενικής εισόδου χρειαζόμαστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\gamma - \frac{1}{4} \quad (50)$$

με ρίζα $\gamma = \frac{1}{4}$. Η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = c \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (51)$$

Από την αρχική συνθήκη $y[-1] = 2$, παίρνουμε

$$y_{zi}[-1] = 4c = 2 \iff c = \frac{1}{2} \quad (52)$$

Οπότε

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (53)$$

(β) Η κρουστική απόκριση για το σύστημα

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] \quad (54)$$

θα είναι της μορφής

$$h_o[n] = d \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (55)$$

Από την ψευδοαρχική συνθήκη $h_o[0] = 1$ παίρνουμε

$$h_o[0] = d = 1 \quad (56)$$

κι έτσι

$$h_o[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (57)$$

Οπότε για το αρχικό σύστημα της εκφώνησης

$$h[n] = -2h_o[n] = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (58)$$

(γ) Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k u[k-1](-2) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k] \quad (59)$$

$$= -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k u[k-1]u[n-k] \quad (60)$$

$$= -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (61)$$

$$= -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \quad (62)$$

$$= -6 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 6 \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad (63)$$

$$= -4 \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (64)$$

για $1 \leq k \leq n$, δηλ.

$$y_{zs}[n] = 4 \left(\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) u[n-1] \quad (65)$$