

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Ένατο Φροντιστήριο

Στις ασκήσεις που ακολουθούν, Θέστε a, b, c, d τα αντίστοιχα ψηφία του ΑΜ σας.

Άσκηση 1

Έστω το *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(z) = \frac{a}{1 - \left(\frac{1}{c+4}\right)z^{-1}} \quad (1)$$

που συνδέεται παράλληλα με το *αντι-αιτιατό* σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H_2(z) = \frac{b+2}{1 - \left(\frac{d+3}{2}\right)z^{-1}} \quad (2)$$

(α') **(5 μ.)** Βρείτε τη συνολική κρουστική απόκριση $h_{tot}[n]$ του συστήματος.

(β') **(10 μ.)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_{tot}(e^{j\omega}) d\omega \quad (3)$$

(γ') **(5 μ.)** Γράψτε μια εξίσωση διαφορών που υλοποιεί το συνολικό σύστημα.

Λύση:

(α') Η παράλληλη σύνδεση οδηγεί σε άθροισμα των συναρτήσεων μεταφοράς (και των κρουστικών αποκρίσεων), δηλ.

$$H_{tot}(z) = H_1(z) + H_2(z) \longleftrightarrow h_{tot}[n] = h_1[n] + h_2[n] \quad (4)$$

Από γνωστά ζεύγη και πίνακες έχουμε

$$H_1(z) = \frac{a}{1 - \left(\frac{1}{c+4}\right)z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{c+4} \longleftrightarrow h_1[n] = a \left(\frac{1}{c+4}\right)^n u[n] \quad (5)$$

$$H_2(z) = \frac{b+2}{1 - \left(\frac{d+3}{2}\right)z^{-1}}, \quad |z| < \frac{d+3}{2} \longleftrightarrow h_2[n] = -(b+2) \left(\frac{d+3}{2}\right)^n u[-n-1] \quad (6)$$

κι έτσι

$$h_{tot}[n] = a \left(\frac{1}{c+4}\right)^n u[n] - (b+2) \left(\frac{d+3}{2}\right)^n u[-n-1] \quad (7)$$

(β') Είναι

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_{tot}(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} H_{tot}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \Big|_{n=0} = 2\pi h_{tot}[0] = 2a\pi \quad (8)$$

(γ) Είναι

$$H_{tot}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1 - \left(\frac{1}{c+4}\right)z^{-1}} + \frac{b+2}{1 - \left(\frac{d+3}{2}\right)z^{-1}} \quad (9)$$

που μετά από πράξεις δίνει

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(a+b+2) - \left(\frac{a(d+3)}{2} + \frac{b+2}{c+4}\right)z^{-1}}{1 - \left(\frac{d+3}{2} + \frac{1}{c+4}\right)z^{-1} + \frac{d+3}{2(c+4)}z^{-2}} \quad (10)$$

Γυρνώντας στο πεδίο του χρόνου

$$y[n] - \left(\frac{d+3}{2} + \frac{1}{c+4}\right)y[n-1] + \frac{d+3}{2(c+4)}y[n-2] = (a+b+2)x[n] - \left(\frac{a(d+3)}{2} + \frac{b+2}{c+4}\right)x[n-1] \quad (11)$$

Άσκηση 2

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ η οποία είναι μη μηδενική μόνο για πέντε (5) διαδοχικά δείγματα στο χρόνο. Η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος είναι η $H(e^{j\omega})$. Έστω δυο σήματα $x[n]$ και $y[n]$ που αποτελούν την είσοδο και την έξοδο του συστήματος. Σας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

i. $\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = a\pi$

ii. Υπάρχει σήμα $g[n]$ με πραγματικό και άρτιο μετασχηματισμό Fourier $G(e^{j\omega})$ ως

$$G(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})e^{j2\omega} \quad (12)$$

iii. $G(e^{j0}) = b+1$, $G(e^{j\pi}) = c+2$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$.

Λύση:

Από την πρώτη σχέση έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = a\pi \iff 2\pi h[0] = a\pi \iff h[0] = \frac{a}{2} \quad (13)$$

Από το γεγονός ότι

$$G(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})e^{j2\omega} \quad (14)$$

μπορούμε να γράψουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})e^{-j2\omega} \quad (15)$$

με $G(e^{j\omega})$ πραγματική και άρτια ως προς ω , και αυτό μας λέει ότι το σύστημα είναι γενικευμένης γραμμικής φάσης. Επίσης αφού το σύστημα έχει 5 διαδοχικά μη μηδενικά δείγματα, το χρονικά τελευταίο δείγμα θα βρίσκεται στη θέση $M = 4$, οπότε το σύστημα είναι γραμμικής φάσης Τύπου I ή III. Από τις δυο τελευταίες σχέσεις καταλαβαίνουμε ότι επειδή $G(e^{j0}) = b+1$, $G(e^{j\pi}) = c+2$ είναι μη μηδενικές, το σύστημα είναι γραμμικής φάσης Τύπου I. Από την εξίσωση του Τύπου I συστήματος γραμμικής φάσης, μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a}{2} + h_1e^{-j\omega} + h_2e^{-j2\omega} + h_1e^{-j3\omega} + \frac{a}{2}e^{-j4\omega} = (h_2 + 2h_1\cos(\omega) + a\cos(2\omega))e^{-j2\omega} \quad (16)$$

δηλ. η $G(e^{j\omega})$ θα είναι

$$G(e^{j\omega}) = h_2 + 2h_1\cos(\omega) + a\cos(2\omega) \quad (17)$$

Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από τις τιμές $G(e^{j0}) = b + 1$, $G(e^{j\pi}) = c + 2$, δηλ. το

$$\begin{cases} h_2 + 2h_1 + a = b + 1 \\ h_2 - 2h_1 + a = c + 2 \end{cases} \quad (18)$$

παίρνουμε κάποιες τιμές h_1, h_2 και από εκεί την κρουστική απόκριση.

Άσκηση 3

Ένα σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{q(z - z^{-1})}{(1 - qz)(1 - qz^{-1})}, \quad |q| < |z| < \frac{1}{|q|}, \quad q \in \mathbb{C} \quad (19)$$

(α) **(15 μ.)** Δείξτε, με χρήση ιδιοτήτων και ζευγών του μετασχ. Ζ, ότι η κρουστική του απόκριση, $h[n]$, δίνεται ως

$$h[n] = q^{-n}u[-n] - q^n u[n] \quad (20)$$

(β) **(5 μ.)** Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε την κρουστική απόκριση με ένα τετραγωνικό παράθυρο $w[n]$, με

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -1 \leq n \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (21)$$

Βρείτε την εξίσωση διαφορών που χαρακτηρίζει το νέο σύστημα $h_w[n]$.

(γ) **(2.5 μ.)** Ποιά απλή πράξη πρέπει να κάνετε στην κρουστική απόκριση $h_w[n]$ που βρήκατε ώστε να προκύψει ένα τρίτο σύστημα, με τον ίδιο αριθμό δειγμάτων, $h_c[n]$, το οποίο να είναι αιτιατό; Γράψτε την εξίσωση διαφορών που περιγράφει το $h_c[n]$.

(δ) **(2.5 μ.)** Είναι το σύστημα $h_c[n]$ ευσταθές; Εξηγήστε.

(ε) **(5 μ.)** Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αιτιατό σύστημα $h_c[n]$ για το σχεδιασμό ενός υψιπερατού (highpass) ή ενός χαμηλοπερατού (lowpass) συστήματος; Εξηγήστε.

Λύση:

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{q(z - z^{-1})}{(1 - qz)(1 - qz^{-1})} = \frac{qz - qz^{-1}}{(1 - qz)(1 - qz^{-1})} \quad (22)$$

$$= \frac{-1 + qz + 1 - qz^{-1}}{(1 - qz)(1 - qz^{-1})} = \frac{-1 + qz}{(1 - qz)(1 - qz^{-1})} + \frac{1 - qz^{-1}}{(1 - qz)(1 - qz^{-1})} \quad (23)$$

$$= -\frac{1}{1 - qz^{-1}} + \frac{1}{1 - qz} \quad (24)$$

με πεδίο σύγκλισης $|q| < |z| < \frac{1}{|q|} \implies \{|z| > |q|\} \cap \{|z| < 1/|q|\}$. Από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$H(z) = \frac{1}{1 - qz} - \frac{1}{1 - qz^{-1}} \longleftrightarrow h[n] = q^{-n}u[-n] - q^n u[n] \quad (25)$$

(β) Ο πολλαπλασιασμός με το τετραγωνικό παράθυρο μας αφήνει με τρία δείγματα της κρουστικής απόκρισης, για $n = -1, n = 0, n = 1$, δηλ.

$$h_w[n] = q\delta[n+1] + 0\delta[n] - q\delta[n-1] = q\delta[n+1] - q\delta[n-1] \quad (26)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών βρίσκεται εύκολα αφού πρόκειται για FIR σύστημα, οπότε

$$y[n] = qx[n+1] - qx[n-1] \quad (27)$$

- (γ) Η απλή πράξη που μετατρέπει σε αιτιατό το παραπάνω σύστημα είναι η συνέλιξη με τη συνάρτηση $\delta[n-1]$, και η κρουστική απόκριση είναι η

$$h_c[n] = q\delta[n] - q\delta[n-2] \quad (28)$$

με εξίσωση διαφορών ως

$$y[n] = qx[n] - qx[n-2] \quad (29)$$

- (δ) Ως σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, ναι, είναι ευσταθές.

- (ε) Το σύστημα με κρουστική απόκριση $h_c[n]$ είναι αντι-συμμετρικό ως προς το δείγμα $n_0 = 1$, και ως πεπερασμένης διάρκειας θα είναι γραμμικής φάσης Τύπου III. Τα συστήματα γραμμικής φάσης Τύπου III έχουν υποχρεωτικά μηδενικά στις θέσεις $\omega = 0, \omega = \pi$. Έτσι, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σχεδιασμό ούτε υπερερατού ούτε χαμηλοπερατού φίλτρου.

Άσκηση 4

Σας δίνεται το ΓΧΑ σύστημα με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{0.45e^{-j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}} \quad (30)$$

- (α) **(2.5 μ.)** Βρείτε μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το παραπάνω σύστημα.
- (β) **(2.5 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος.
- (γ) **(5 μ.)** Δείξτε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ένα γενικευμένο all-pass σύστημα (με σταθερό πλάτος αλλά διάφορο της μονάδας).
- (δ) **(5 μ.)** Αν είσοδος στο παραπάνω σύστημα είναι το σήμα

$$x[n] = a \cos(b\pi n), \quad -\infty < n < +\infty \quad (31)$$

ποιά η έξοδος του συστήματος $y[n]$:

Λύση:

- (α) Θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{0.45e^{-j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}} \quad (32)$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - 1.25e^{-j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}} \quad (33)$$

$$Y(e^{j\omega}) - 0.8e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - 1.25e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) \quad (34)$$

και στο πεδίο του χρόνου θα είναι

$$y[n] - 0.8y[n-1] = x[n] - 1.25x[n-1] \quad (35)$$

- (β) Η κρουστική απόκριση δίνεται εύκολα ως ο αντίστροφος μετασχ. Fourier της απόκρισης σε συχνότητα, δηλ.

$$h[n] = \delta[n] - 0.45(0.8)^{n-1}u[n-1] \quad (36)$$

από γνωστά ζεύγμα μετασχ. Fourier.

(γ) Από τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 1.25e^{-j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}} \quad (37)$$

έχουμε

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1 - 1.25e^{-j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}} \right| \quad (38)$$

$$= 1.25 \left| \frac{0.8e^{j\omega} - 1}{1 - 0.8e^{-j\omega}} \right| \quad (39)$$

$$= 1.25 \left| \frac{1 - 0.8e^{j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}} \right| \quad (40)$$

$$= 1.25 \quad (41)$$

ως ρητή συνάρτηση συζυγών παραστάσεων.

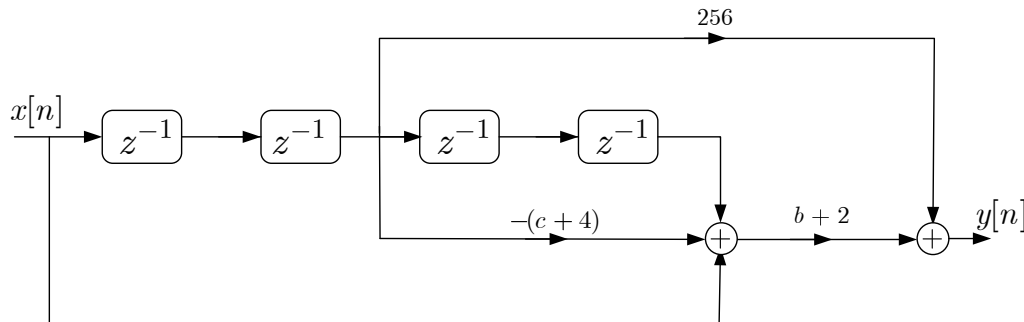
(δ) Γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = a|H(e^{jb\pi})| \cos(b\pi n + \angle H(e^{jb\pi})) \quad (42)$$

και ανάλογα με την τιμή του b θα έχουμε διαφορετική τιμή της απόκρισης φάσης, με την απόκριση πλάτους να είναι σταθερή, αφού πρόκειται για all-pass σύστημα (εξαιρείται η περίπτωση $b = 0$ όπου η έξοδος είναι σταθερή).

Άσκηση 5

Η υλοποίηση του Σχήματος 1 αποτελεί ένα chip επεξεργασίας βίντεο της Texas Instruments. Ο συντελεστής b (που αποτελεί το 2ο ψηφίο του AM σας) ελέγχεται από το χρήστη και καθορίζει την απόκριση πλάτους του συστήματος.



Σχήμα 1: Υλοποίηση chip Άσκησης 5.

(α') (10 μ.) Βρείτε την εξίσωση διαφορών του συστήματος.

(β') (2.5 μ.) Είναι αυτό ένα σύστημα γραμμικής φάσης; Δικαιολογήστε.

(γ') (2.5 μ.) Ποιά είναι η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος αυτού, σε δείγματα;

Λύση:

(α') Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y[n] = (b+2)x[n] + (256 - (b+2)(c+4))x[n-2] + (b+2)x[n-4] \quad (43)$$

(β) Είναι γραμμικής φάσης, αφού η κρουστική του απόκριση είναι

$$h[n] = (b+2)\delta[n] + (256 - (b+2)(c+4))\delta[n-2] + (b+2)\delta[n-4] \quad (44)$$

είναι δηλ. πεπερασμένης διάρκειας και άρτια συμμετρική γύρω από το δείγμα $n_0 = 2$. Μάλιστα, επειδή $h[n] = h[4-n]$, το σύστημα είναι Τύπου I γραμμικής φάσης.

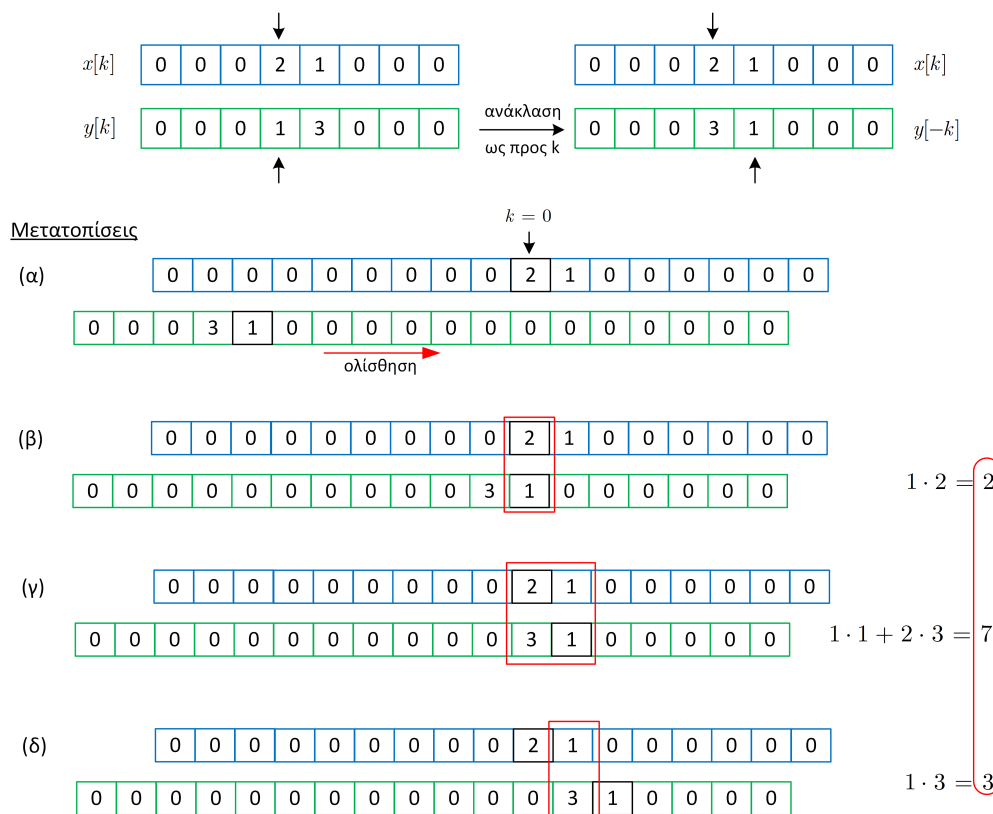
(γ) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι τα Τύπου I συστήματα γραμμικής φάσης έχουν καθυστέρηση ομάδας ίση με $M/2$, όπου M ο χρονικός δείκτης του τελευταίου μη μηδενικού δείγματος. Οπότε στην περίπτωση μας, $M = 4$, οπότε είναι $\tau_g(e^{j\omega}) = M/2 = 2$ δείγματα.

Άσκηση 6

Ουσιαστικά γνωρίζετε την πράξη της συνέλιξης από τη στιγμή που μάθατε να κάνετε πολλαπλασιασμούς διψήφων αριθμών (στο Δημοτικό)! Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός των αριθμών (για παράδειγμα) 21 και 13 μπορεί να βρεθεί κάνοντας συνέλιξη τα ψηφία (!!) τους.

Λύση:

Προφανώς η πράξη δίνει αποτέλεσμα $21 \times 13 = 273$. Πραγματοποιώντας συνέλιξη μεταξύ των ψηφίων με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ταινίας, έχουμε το αποτέλεσμα του Σχήματος 2.



Σχήμα 2: Λύση Άσκησης 6.