

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Πρώτο Φροντιστήριο

Ασκηση 1.

Χρησιμοποιήστε παραδείγματα για να υποστηρίξετε ότι το γινόμενο ενός δεξιόπλευρου ($x[n] = 0, n < n_0$) και ενός αριστερόπλευρου ($x[n] = 0, n > n_0$) σήματος είναι πάντοτε χρονικά πεπερασμένης διάρκειας ή μηδένικό σήμα.

Λύση:

(α) $x[n] = u[n], y[n] = u[-n] \implies z[n] = \delta[n].$

(β) $x[n] = u[n-3], y[n] = u[-n+5] \implies z[n] \neq 0$ μόνο για $3 \leq n \leq 5.$

(γ) $x[n] = u[n-4], y[n] = u[-n+2] \implies z[n] \equiv 0.$

Ασκηση 2.

Οι N ρίζες της $z^N = 1$ είναι $z_k = e^{j2\pi k/N}, k = 0, \dots, N-1$. Κάθε μια από αυτές μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα που ξεκινά από το μηδέν και καταλήγει στο μιγαδικό z_i .

(α) Ποιο είναι το μέτρο κάθε διανύσματος και η γωνία μεταξύ δυο διαδοχικών διανυσμάτων;

(β) Βρείτε τις ρίζες της $z^N = -1$. Πώς σχετίζονται με τις ρίζες της $z^N = 1$;

Λύση:

(α) Οι N ρίζες της $z^N = 1$ είναι

$$z_k = e^{j\frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

αφού

$$z_k = |z_k|e^{j\theta} \iff z_k^N = |z_k|^N e^{jN\theta} = 1 = e^{j2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

δηλ.

$$|z_k|^N = 1 \iff |z_k| = 1 \text{ και } N\theta = 2\pi k \iff \theta = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

Μέτρο. Για κάθε k , $|z_k| = 1$. Άρα οι ρίζες αυτές βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο.

Γωνιακή απόσταση. Οι φάσεις είναι $\angle z_k = \frac{2\pi k}{N}$. Η γωνιακή απόσταση μεταξύ διαδοχικών ριζών είναι

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}. \quad (4)$$

(β) Έχουμε $-1 = e^{j(\pi+2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$ και παίρνουμε

$$z_k^N = e^{j(\pi+2\pi k)} \iff z_k = e^{j\frac{\pi+2\pi k}{N}} = e^{j\frac{\pi}{N}} e^{j\frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5)$$

και ξανά

$$|z_k|^N = 1 \iff |z_k| = 1 \text{ και } N\theta = 2\pi k + \pi \iff \theta = \frac{2\pi k + \pi}{N} = \frac{2\pi k}{N} + \frac{\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

Οπότε:

- Όλες οι ρίζες έχουν μέτρο 1.
- Είναι *ισαπέχουσες* μεταξύ τους με γωνία μεταξύ τους ίση με $\Delta\theta = 2\pi/N$,
- Προκύπτουν από τις N ρίζες της μονάδας με *περιστροφή* κατά π/N .

Άσκηση 3.

Το άθροισμα ενός απολύτως αθροίσμου σήματος $x[n]$ και των μετατοπισμένων (κατά ακέραια πολλαπλάσια του N) αντιγράφων του ονομάζεται *περιοδική επέκταση* του $x[n]$ με περίοδο N . Δείξτε ότι μια περίοδος της περιοδικής επέκτασης του σήματος $x[n] = \alpha^n u[n]$ με περίοδο N γράφεται ως

$$y[n] = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^N}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (7)$$

Πώς συγκρίνεται το άθροισμα μίας περιόδου του $y[n]$ με το άθροισμα του $x[n]$; Ποια είναι η ισχύς σήματος των $x[n]$ και $y[n]$;

Λύση:

Ο ορισμός περιοδικής επέκτασης με βάση την εκφώνηση θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN], \quad \text{με περίοδο } N. \quad (8)$$

Για

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad (9)$$

με $|\alpha| < 1$ λόγω απόλυτης αθροισσιμότητας, και $0 \leq n \leq N - 1$ ισχύει

$$x[n - kN] = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ \alpha^{n-kN}, & k \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Ας εξηγήσουμε γιατί. Έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{n-kN} u[n - kN]. \quad (11)$$

Στεκόμαστε σε μία βασική περίοδο με $0 \leq n \leq N - 1$. Για κάθε $k > 0$ ισχύει

$$n - kN \leq n - N \leq (N - 1) - N = -1, \quad (12)$$

Έτσι,

$$n - kN < 0, \quad \forall k \geq 1 \quad (13)$$

Όμως επειδή $u[m] = 0$ για $m < 0$, ισχύει

$$u[n - kN] = 0, \quad \forall k > 0 \quad (14)$$

και άρα

$$x[n - kN] = \alpha^{n-kN} u[n - kN] = 0 \quad \text{για κάθε } k > 0, \quad (15)$$

Αυτό σημαίνει ότι στη βασική περίοδο συνεισφέρουν μόνο οι όροι με $k \leq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \alpha^{n-kN}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (16)$$

Έτσι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \alpha^{n-kN} = \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^N)^k = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^N}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (17)$$

και το $y[n]$ επεκτείνεται περιοδικά.

Για το άθροισμα μιας περιόδου,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \frac{1}{1 - \alpha^N} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha^N} \cdot \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (18)$$

Αυτό ισούται με το άθροισμα του $x[n]$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (19)$$

Για την ισχύ σήματος, από τον ορισμό

$$P = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M |x[n]|^2 \quad (20)$$

Για $x[n] = \alpha^n u[n]$,

$$\sum_{n=-M}^M |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^M |\alpha|^{2n} = \frac{1 - |\alpha|^{2(M+1)}}{1 - |\alpha|^2} = C, \quad (21)$$

οπότε

$$P_x = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{C}{2M+1} = 0 \quad (22)$$

Για το περιοδικό σήμα $y[n]$ με περίοδο N , ο ορισμός μπορεί να γραφεί ως

$$P_y = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\alpha|^{2n}}{|1 - \alpha^N|^2} = \frac{1}{|1 - \alpha^N|^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - |\alpha|^{2N}}{1 - |\alpha|^2}. \quad (23)$$

Ασκηση 4.

Οι p -νόρμες μετρούν το “μέγεθος” ενός σήματος. Για σήματα διακριτού χρόνου

$$\|x\|_p = \left(\sum |x|^p \right)^{1/p} \quad (24)$$

όπου $0 < p < \infty$. Για $p = \infty$ ορίζουμε $\|x\|_{\infty} = \max_n |x[n]|$.

(α) Έστω $x[n] = \{3, -j4, 3 + j4\}$. Να βρεθούν $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ και $\|x\|_{\infty}$.

(β) Ποια είναι η σημασία καθεμιάς από αυτές τις νόρμες;

Λύση:

(α) Τα μέτρα των στοιχείων είναι $|3| = 3$, $|-j4| = 4$, $|3 + j4| = 5$.

$$\|x\|_1 = 3 + 4 + 5 = 12 \quad (25)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad (26)$$

$$\|x\|_{\infty} = \max\{3, 4, 5\} = 5 \quad (27)$$

(β) Για καθεμιά έχουμε

- $\|x\|_1$: μετρά το *συνολικό απόλυτο μέγεθος* (άθροισμα απόλυτων τιμών).
- $\|x\|_2$: *Ενέργεια* σήματος (Ευκλείδεια απόσταση). Συνδέεται με τη μέση τετραγωνική τιμή/οφάλαμα.
- $\|x\|_\infty$: *Μέγιστη τιμή*, σημαντική για έλεγχο και περιορισμό πλάτους.

Ασκηση 5.

Μια προσέγγιση για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων διαφορών είναι η αναδρομή. Εξετάστε τη μη γραμμική εξίσωση διαφορών

$$y[n]y[n-1] - 0.5y^2[n-1] = 0.5Ay[n]. \quad (28)$$

(α) Τι καθιστά αυτό το σύστημα μη γραμμικό;

(β) Με $y[-1] = 2$, να βρεθούν αναδρομικά τα $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$.

(γ) Θέστε $A = 2$, $A = 4$, $A = 9$ στα αποτελέσματα του (β) και επιβεβαιώστε ότι το σύστημα υπολογίζει τη τετραγωνική ρίζα του A .

(δ) Επαναλάβετε τα (β-γ) με $y[-1] = 1$ για να ελέγξετε αν η αρχική συνθήκη επηρεάζει τη λειτουργία του συστήματος.

Λύση:

(α) Το σύστημα είναι μη γραμμικό γιατί περιλαμβάνει γινόμενο εξόδων αλλά και τετραγωνικό όρο.

(β) Με $y[-1] = 2$ και για $n = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} y[0] &= \frac{A+4}{4} = 1 + \frac{A}{4}, \\ y[1] &= \frac{1}{2} \left(y[0] + \frac{A}{y[0]} \right), \\ y[2] &= \frac{1}{2} \left(y[1] + \frac{A}{y[1]} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

(γ) Αριθμητικός έλεγχος (σύγκλιση σε $\sqrt{A}$).

A	$y[0]$	$y[1]$	$y[2]$	$\sqrt{A}$
2	1.5	1.416 $\bar{6}$ ($= 17/12$)	1.414 215 7 ($= 577/408$)	1.414 213 56 ...
4	2	2	2	2
9	3.25 ($= 13/4$)	3.009615 ($= 313/104$)	3.000015	3

(30)

Βλέπουμε σύγκλιση προς $\sqrt{A}$ (απόλυτα ακριβές για $A = 4$ λόγω αρχικοποίησης $= 2$).

(δ) Με $y[-1] = 1$, η ίδια αναδρομή δίνει

$$y[0] = \frac{A+1}{2}, \quad y[1] = \frac{1}{2} \left(y[0] + \frac{A}{y[0]} \right), \quad y[2] = \frac{1}{2} \left(y[1] + \frac{A}{y[1]} \right). \quad (31)$$

Ενδεικτικά:

A	$y[0]$	$y[1]$	$y[2]$	$\sqrt{A}$
2	1.5	1.416 $\bar{6}$	1.414 2157	1.4142 ...
4	2.5	2.05	2.00061	2
9	5	3.4	3.02353	3

(32)

Η αρχική συνθήκη δεν αλλάζει το *όριο* (η μέθοδος εξακολουθεί να υπολογίζει $\sqrt{A}$ για $A > 0$), αλλά επηρεάζει την *ταχύτητα σύγκλισης*. Με αρχικοποίηση πιο κοντά στη $\sqrt{A}$ (π.χ. $y[-1] = 2$ όταν $A \approx 4$) η σύγκλιση είναι ταχύτερη.

Ασκηση 6.

Έχουμε δυο ΓΧΑ συστήματα σε σειρά. Το Σύστημα 1 είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο που ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = 0.5 y[n-1] + x[n], \quad (33)$$

και το Σύστημα 2 έχει κρουστική απόκριση

$$h[n] = \delta[n] - 0.5 \delta[n-1]. \quad (34)$$

(α') Βρείτε την έξοδο του συστήματος που προκύπτει από τη σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων στην είσοδο

$$x[n] = 2(0.5)^n u[n]$$

(β') Ποια είναι η έξοδος της ίδιας διάταξης για $x[n] = \delta[n]$;

(γ') Πώς σχετίζονται τα δύο συστήματα;

Λύση:

Για το πρώτο σύστημα

$$y_1[n] - 0.5 y_1[n-1] = x[n] \quad (35)$$

η κρουστική του απόκριση θα είναι

$$h[n] - 0.5 h[n-1] = \delta[n] \quad (36)$$

και για $n = 0$

$$h[0] - 0.5 h[-1] = 1 \iff h[0] = 1 \quad (37)$$

Λόγω της χαρακτηριστικής ρίζας της εξίσωσης διαφορών, που είναι η $\gamma = 0.5$, η μορφή της θα είναι

$$h[n] = c_1 (0.5)^n, \quad n \geq 0 \quad (38)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $h[0] = 1$, παίρνουμε

$$h[0] = c_1 \cdot 1 = 1 \iff c_1 = 1 \quad (39)$$

και άρα

$$h[n] = (0.5)^n u[n] \quad (40)$$

Για το σύστημα που ακολουθεί, ξέρουμε ότι

$$h_2[n] = \delta[n] - 0.5 \delta[n-1] \quad (41)$$

(α') Πρώτα η έξοδος του συστήματος 1:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= h_1[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (0.5)^k u[k] 2(0.5)^{n-k} u[n-k] \end{aligned} \quad (42)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$u[k] u[n-k] = 1, \quad 0 \leq k \leq n \quad (43)$$

οπότε

$$y_1[n] = \sum_{k=0}^n (0.5)^k 2(0.5)^{n-k} = 2 \sum_{k=0}^n (0.5)^n = 2(n+1)(0.5)^n u[n]. \quad (44)$$

Υστερα το σύστημα 2:

$$y[n] = h_2[n] * y_1[n] = (\delta[n] - 0.5 \delta[n-1]) * 2(n+1)(0.5)^n u[n] \quad (45)$$

$$= 2(n+1)(0.5)^n u[n] - 2 \cdot 0.5 \cdot n(0.5)^{n-1} u[n-1] \quad (46)$$

$$= (n+2)(0.5)^n u[n] \quad (47)$$

(β) Η είσοδος μας είναι $x[n] = \delta[n]$. Για το Σύστημα 1:

$$y_1[n] = h_1[n] = (0.5)^n u[n] \quad (48)$$

Για το Σύστημα 2:

$$y[n] = y_1[n] - 0.5 y_1[n-1] \quad (49)$$

$$= (0.5)^n u[n] - 0.5(0.5)^{n-1} u[n-1] \quad (50)$$

$$= (0.5)^n u[n] - (0.5)^n u[n-1] \quad (51)$$

Επομένως

$$y[n] = \delta[n] \quad (52)$$

(γ) Η συνολική κρουστική απόκριση της διάταξης είναι

$$h_1[n] * h_2[n] = \sum_k h_1[k] h_2[n-k] \quad (53)$$

$$= h_1[n] - 0.5 h_1[n-1] \quad (54)$$

$$= (0.5)^n u[n] - 0.5(0.5)^{n-1} u[n-1] \quad (55)$$

Όπως δείξαμε στο (β), αυτό ισούται με $\delta[n]$. Οπότε η σύνδεση σε σειρά ισοδυναμεί με *ταυτοτικό* σύστημα και τα δύο επιμέρους συστήματα είναι *αντίστροφα* μεταξύ τους, δηλ. ικανοποιούν τη σχέση

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] \quad (56)$$

Άσκηση 7.

Εξετάστε το σύστημα

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]. \quad (57)$$

(α) Ποια είναι η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος;

(β) Βρείτε την έξοδο του για είσοδο $x[n] = (0.5)^n u[n]$ με χρήση συνέλιξης.

Λύση:

(α) Για είσοδο $x[n] = \delta[n]$ έχουμε

$$h[n] - 0.5h[n-1] = \delta[n] \quad (58)$$

και όπως βρήκαμε σε προηγούμενη άσκηση

$$h[n] = (0.5)^n u[n] \quad (59)$$

(β) Για είσοδο $x[n] = (0.5)^n u[n]$, υπολογίζουμε τη συνέλιξη

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (0.5)^k u[k] (0.5)^{n-k} u[n-k] \end{aligned} \quad (60)$$

Όμως

$$u[k] u[n-k] = 1, \quad 0 \leq k \leq n \quad (61)$$

οπότε

$$y[n] = \sum_{k=0}^n (0.5)^k (0.5)^{n-k} = (0.5)^n \sum_{k=0}^n 1 = (0.5)^n (n+1) \quad (62)$$

για $n \geq 0$, δηλ.

$$y[n] = (n+1)(0.5)^n u[n] \quad (63)$$