

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 21<sup>Η</sup>

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Έχουμε ήδη δει μια μέθοδο σχεδίασης ψηφιακών-από-αναλογικά φίλτρα

- Τη Μέθοδο Impulse Invariance

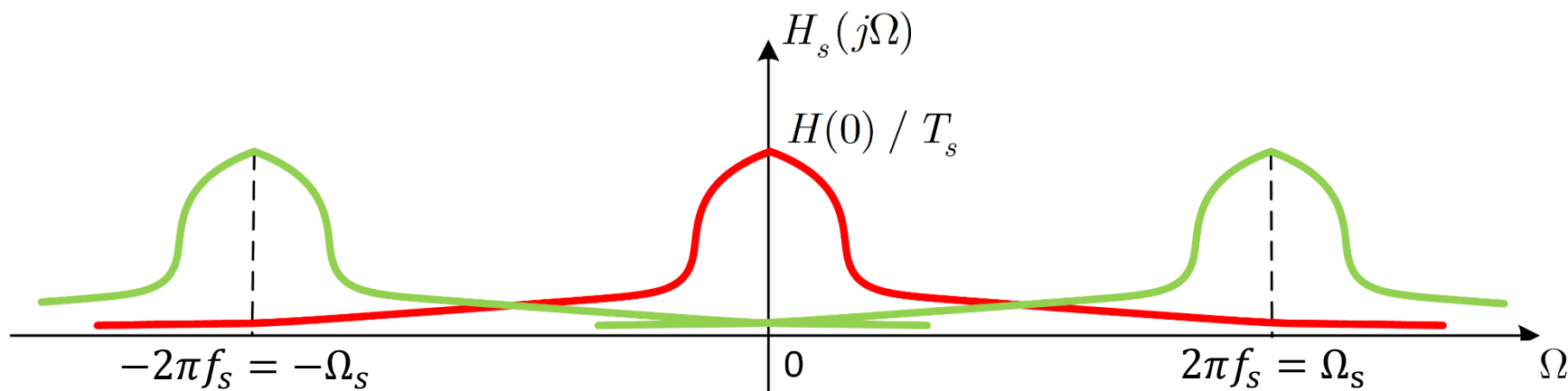
• Ποιο είναι το βασικό πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο?

• Ότι το αναλογικό φίλτρο **δεν** είναι band-limited

- Δεν «ζει» μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων γύρω από το μηδέν

• Άρα κατά τη δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης, θα υπάρχει πάντα το φαινόμενο του aliasing!

- Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος ανά  $k\Omega_s$  θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Η τεχνική που θα συζητήσουμε στη συνέχεια αποφεύγει το πρόβλημα του aliasing χρησιμοποιώντας έναν αλγεβρικό μετασχηματισμό μεταξύ των μεταβλητών  $s$  και  $z$

- Τι ακριβώς κάνει αυτός ο μετασχηματισμός?

- Προσπαθεί να «χωρέσει» τον άξονα  $-\infty \leq \Omega \leq +\infty$  στον άξονα  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  !

- Ως εκ τούτου, η αντιστοίχιση των μεταβλητών  $\Omega \rightarrow \omega$  **δεν** είναι γραμμική, όπως ήταν στην προηγούμενη μέθοδο του Impulse Invariance

- Άρα η τεχνική αυτή, που ονομάζεται **Bilinear Transformation**, είναι κατάλληλη όταν αυτή η «αναδίπλωση» (warping) του άξονα «αναλογικής» συχνότητας είναι αποδεκτή

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται ως

$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

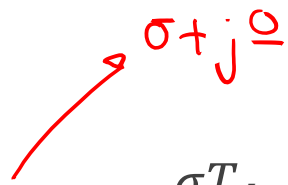
δηλ.

$$H(z) = H_c \left[ \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right]$$

- Κι εδώ έχουμε την παράμετρο  $T_d$ , όπως και στην προηγούμενη μέθοδο
- Κι εδώ όμως μπορούμε να δείξουμε ότι η παράμετρος αυτή δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση
  - Θα την κρατήσουμε μόνο για λίγο ακόμα...

- Λύνοντας ως προς  $z$ :

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right)s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$


 $\sigma + j\Omega$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right) s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right) s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma T_d}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sigma T_d}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)^2}}$$

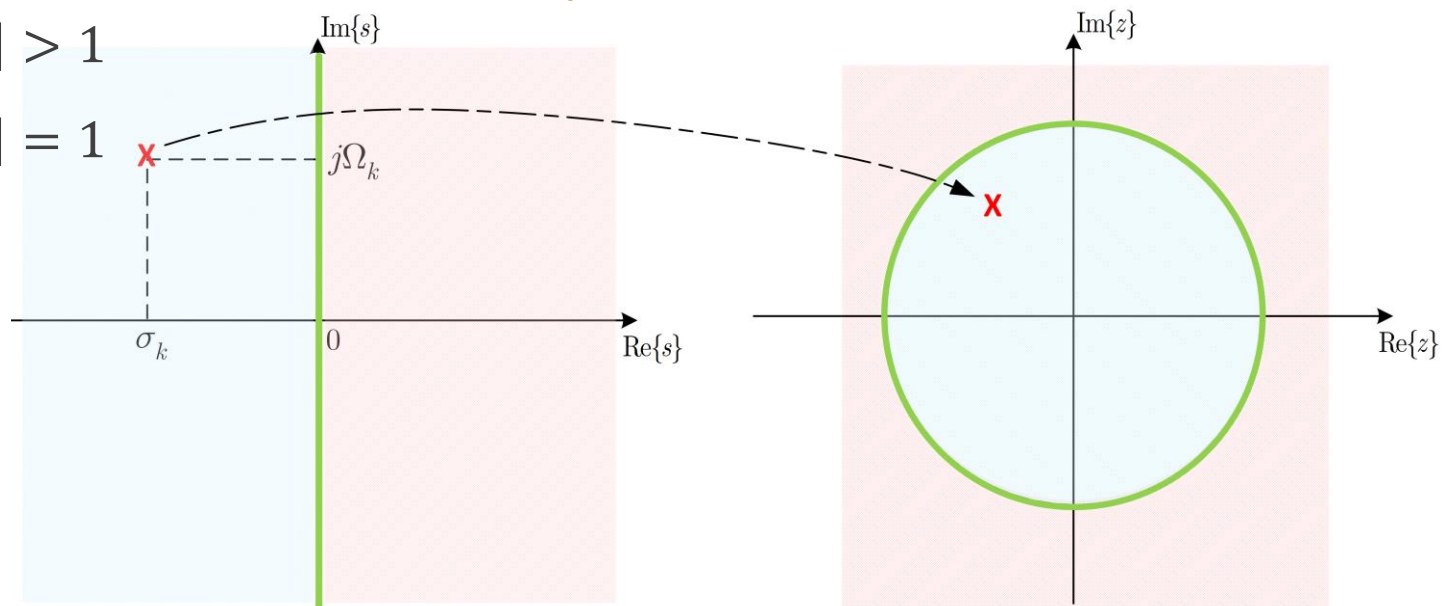
• Παρατηρήστε ότι:

Αν  $\sigma < 0$ , τότε  $|z| < 1$

Αν  $\sigma > 0$ , τότε  $|z| > 1$

Αν  $\sigma = 0$ , τότε  $|z| = 1$

Ίδια «ιδέα» με την αντιστοίχιση της προηγούμενης μεθόδου, Impulse Invariance (όχι σαν αλγεβρική αντιστοίχιση όμως)



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε πως μπορούμε να συσχετίσουμε τις μεταβλητές  $\Omega$ ,  $\omega$

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \Rightarrow \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2j}{T_d} \tan \left( \frac{\omega}{2} \right)$$

- Οπότε

$$\sigma = 0 \quad , \quad \Omega = \frac{2}{T_d} \tan \left( \frac{\omega}{2} \right)$$

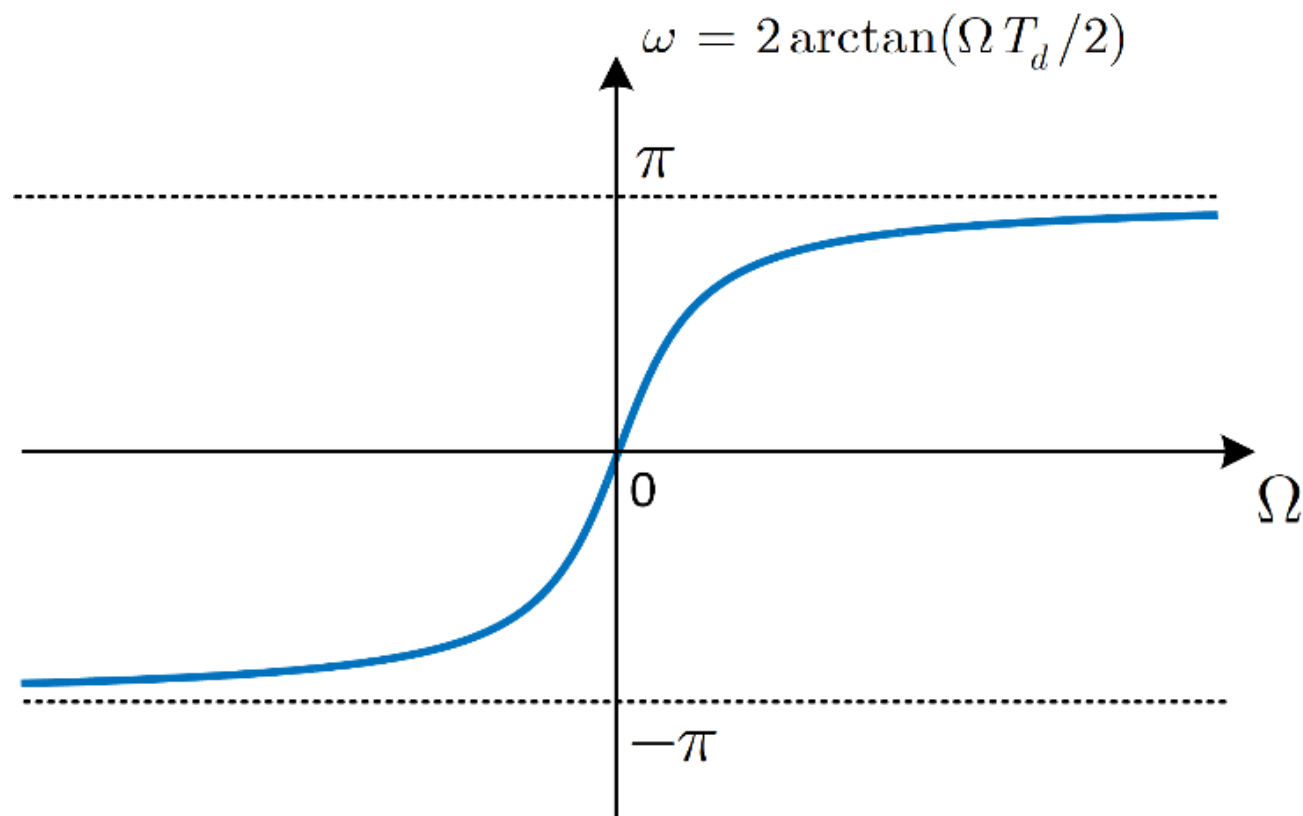
ή

$$\omega = 2 \arctan \left( \frac{\Omega T_d}{2} \right)$$

- Πώς μοιάζει αυτή η μη γραμμική αντιστοίχιση των δυο συχνοτήτων?
- Πώς αντιστοιχίζεται η «αναλογική» απόκριση πλάτους στην «ψηφιακή»?

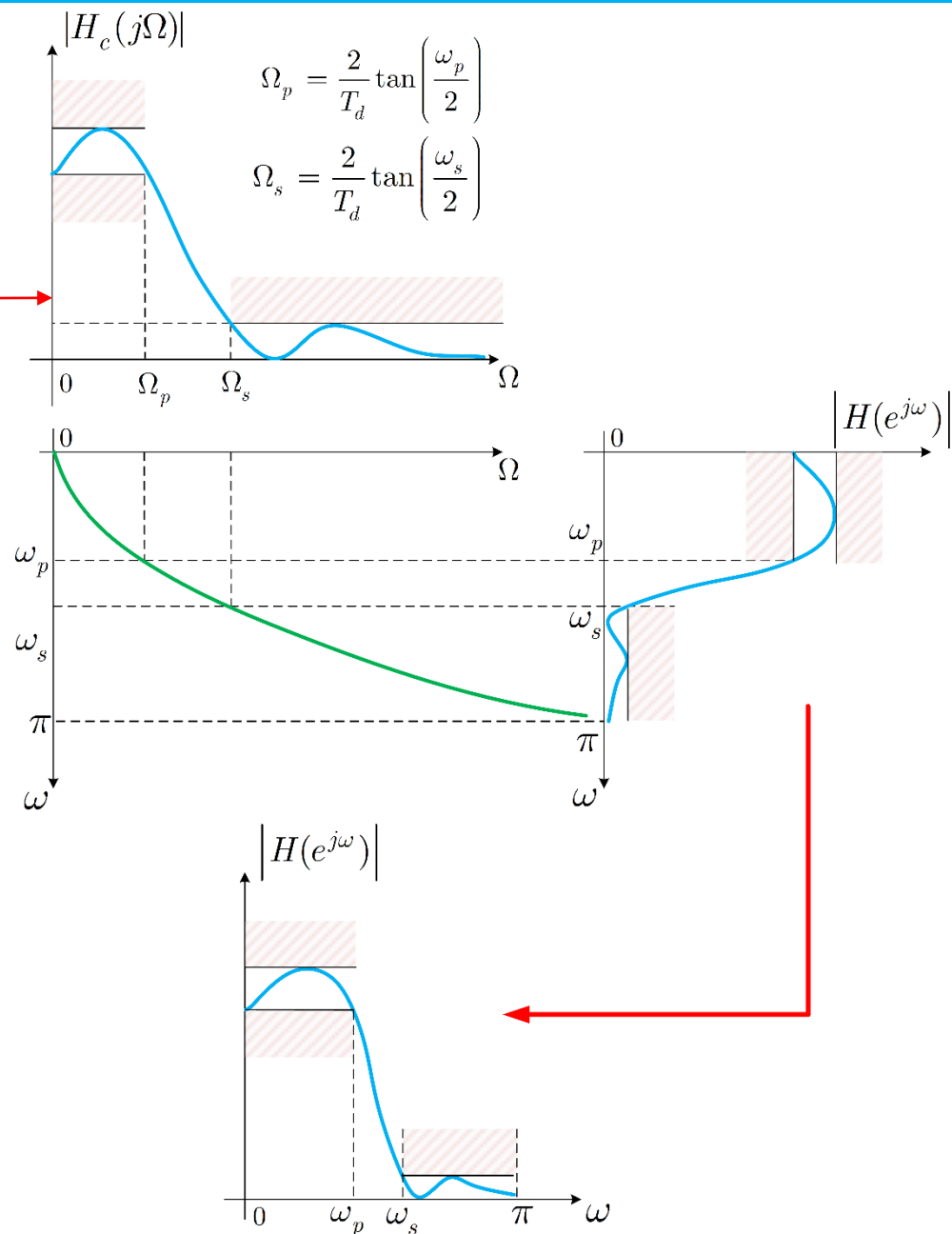
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



# • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

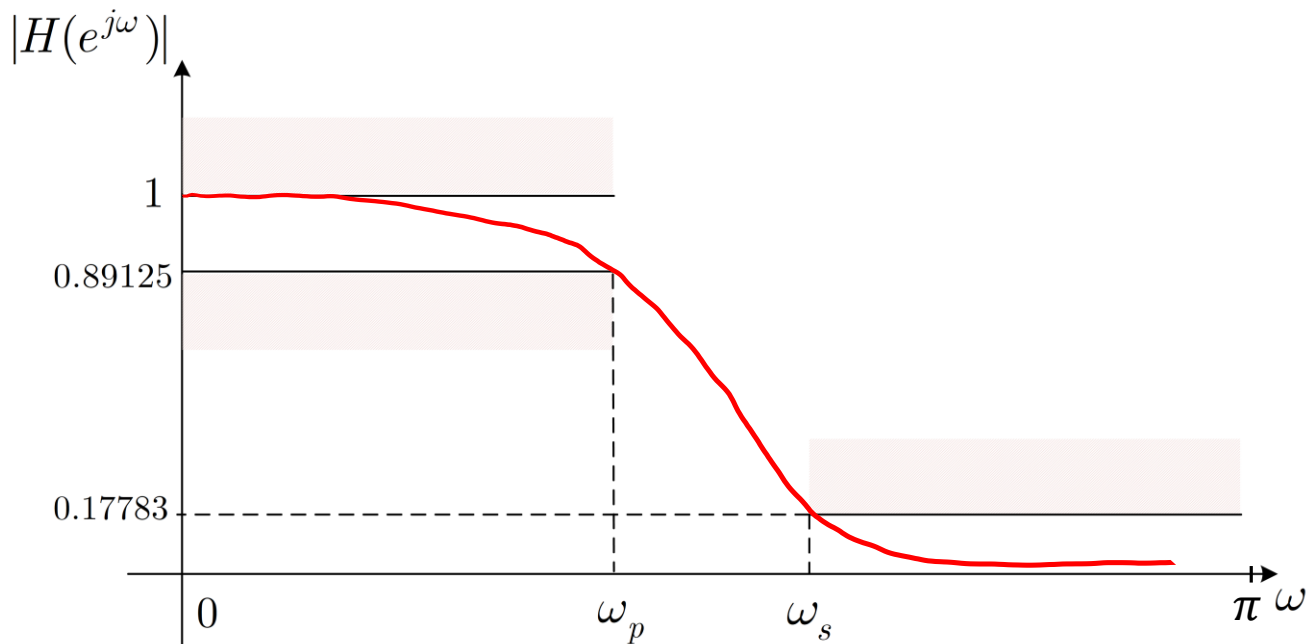
Προδιαγραφές  $\omega_p, \omega_s$  στο  
διακριτό χρόνο  
μετατρέπονται στο **συνεχή**  
χρόνο





- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε ένα παράδειγμα σχεδίασης (ίδιο με την προηγ. μέθοδο)



- Ας ζητήσουμε  $\omega_p = 0.2\pi$ ,  $\omega_s = 0.3\pi$  και ας θεωρήσουμε  $T_d = 1$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Μετασχηματίζουμε τις προδιαγραφές μας από  $\omega \rightarrow \Omega = 2 \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$ :

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 : 0 \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$0.17783 \geq |H(j\Omega)| : 2 \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

- Θέλουμε ξανά μια εξίσωση που να δέχεται τις προδιαγραφές μας!
  - Ας επιλέξουμε ξανά το φίλτρο Butterworth

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Εφαρμόζουμε προδιαγραφές:

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε  $N = 5.305 \rightarrow N = 6, \Omega_c = 0.766$

- Για να βρούμε ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα συνεχούς χρόνου, έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega) \Rightarrow |H(s)|^2 \Big|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

- Οι πόλοι του συστήματος

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.766}\right)^{12}} = \frac{(j0.766)^{12}}{s^{12} + (j0.766)^{12}}$$

δίνονται ως

$$s_k = 0.766e^{j\frac{\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, \dots, 11$$

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους οι οποίοι μας δίνουν ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα  $H(s)$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

• Επιλέγω τους πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο

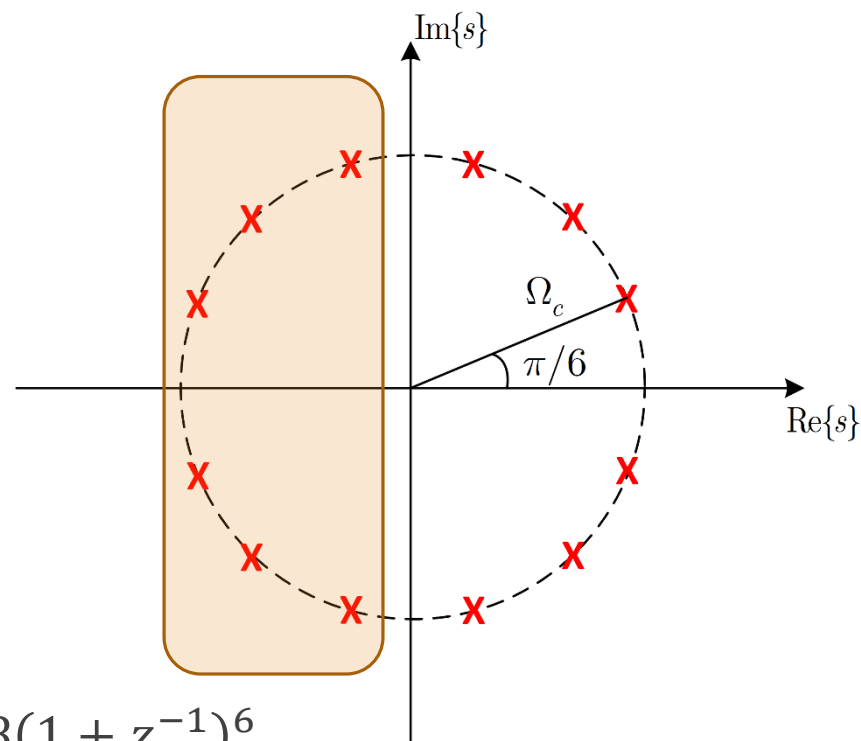
• Τότε το σύστημά μας θα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{0.766^6}{(s^2 + 0.39s + 0.58)(s^2 + 1.08s + 0.58)(s^2 + 1.48s + 0.58)}$$

• Ο Bilinear Transformation δίνει:

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow s = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

• Το σύστημά μας στο χώρο του μετασχ. Z θα είναι:



$$H(z) = \frac{0.000738(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.26z^{-1} + 0.72z^{-2})(1 - 1.01z^{-1} + 0.35z^{-2})(1 - 0.90z^{-1} + 0.21z^{-2})}$$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

• Υπάρχουν πολλές εξισώσεις (φίλτρα) στις οποίες μπορούμε να θέσουμε τις προδιαγραφές μας

• Chebyshev (I, II)

• Elliptic

• Butterworth

• Bessel

• Optimum "L"

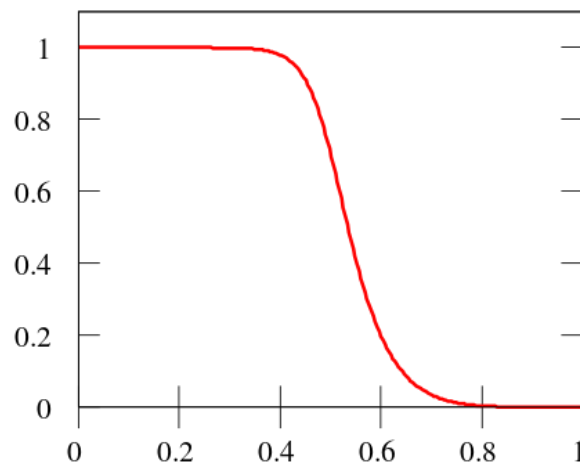
• Gaussian

• Hourglass

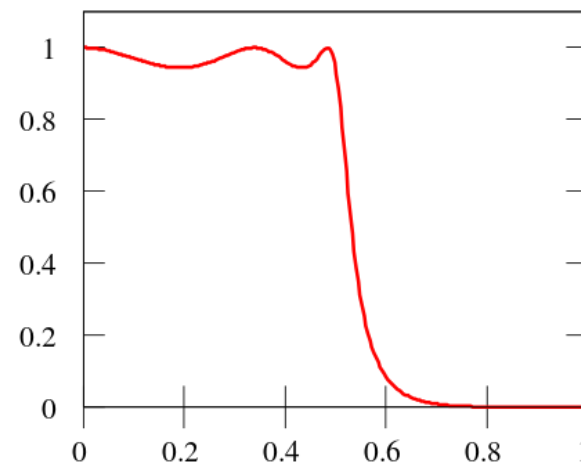
• Raised-cosine

• και πολλά άλλα! 😊

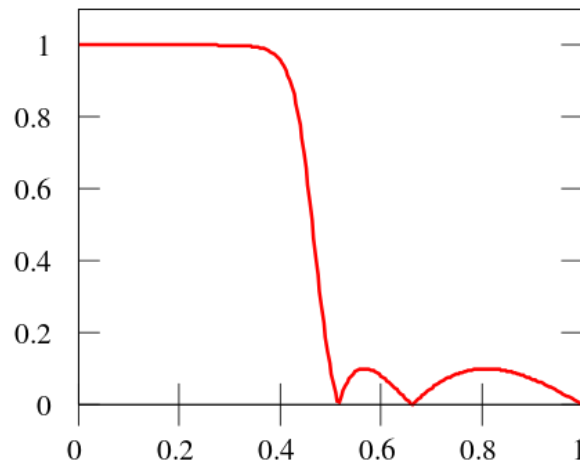
Butterworth



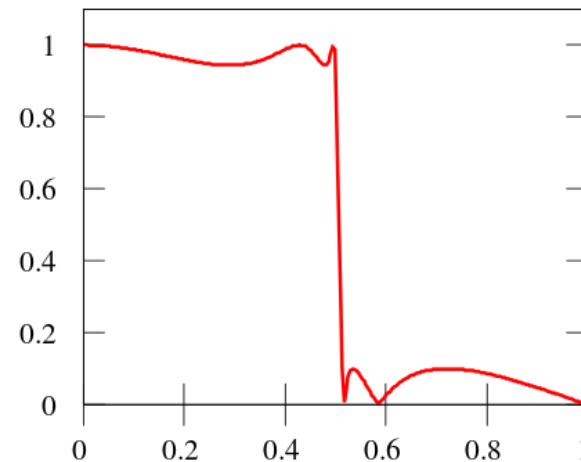
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



Elliptic



## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων - Σύνοψη

- Έχουμε δει ήδη δυο μεθόδους κατασκευής ψηφιακών φίλτρων IIR μέσω του πεδίου του συνεχούς χρόνου

- ... και του μετασχ. Laplace

## • Μέθοδος Impulse Invariance

- a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης  $h(t)$  συνεχούς χρόνου

- Γραμμική αντιστοιχία συχνότητας  $\Omega$  σε  $\omega$

- Η διαδικασία αυτή αντιστοιχίζει κάθε πόλο  $s_k$  στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο  $e^{s_k T_d}$  στο χώρο του μετασχ. Z

## • Μέθοδος Bilinear Transformation

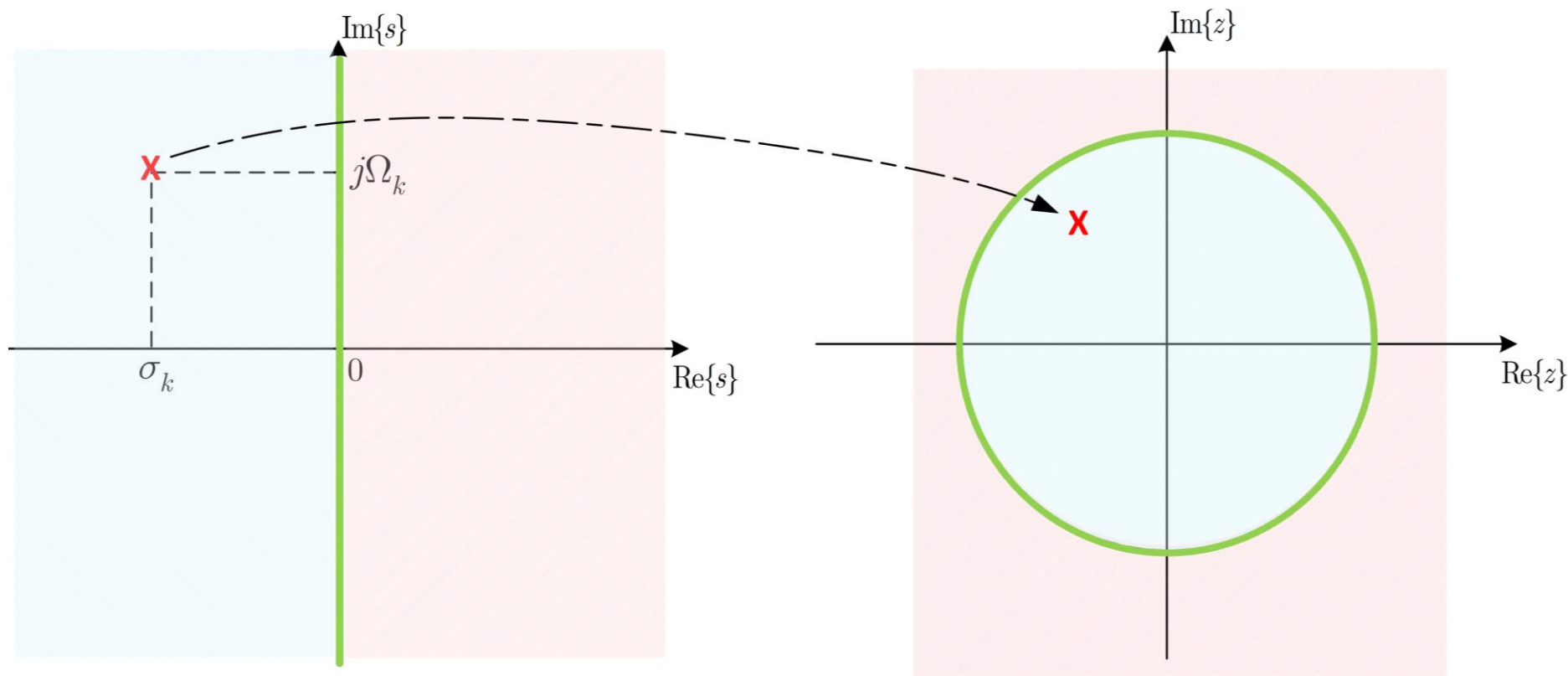
- a.k.a «συμπίεση» του άξονα  $0 \leq \Omega \leq +\infty$  στο  $0 \leq \omega \leq \pi$  !!

- Μη γραμμική αντιστοιχία της αναλογικής με την ψηφιακή συχνότητα

- Η διαδικασία αντιστοιχίζει κάθε πόλο  $s_k$  στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο  $\frac{1 + \frac{T_d s_k}{2}}{1 - \frac{T_d s_k}{2}}$  στο χώρο του μετασχ. Z

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Σύνοψη

- Και οι δυο μέθοδοι αντιστοιχίζουν πόλους από το μιγαδικό επίπεδο  $s$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$



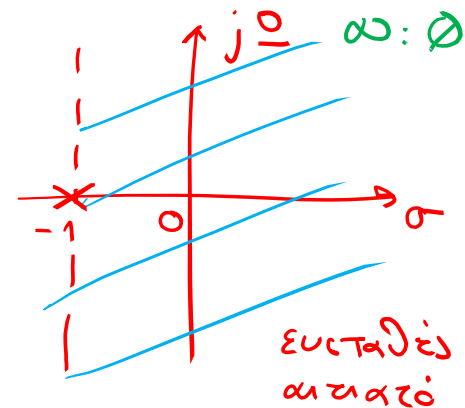
- Μήπως αντιστοιχίζονται με παρόμοιο τρόπο και τα μηδενικά?
- Γενικά, πως εφαρμόζονται οι μέθοδοι για ένα τυχαίο σύστημα στο χώρο του  $s$ ?

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

### • Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα

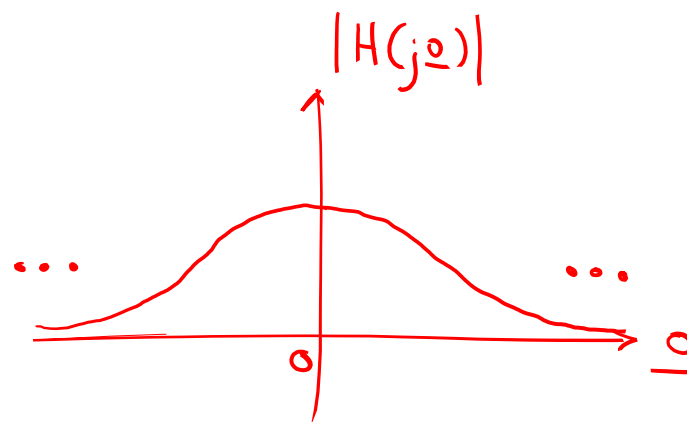
$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \mathcal{R}\{s\} > -1$$



Εφαρμόστε τις μεθόδους που μάθατε για να βρείτε το μετασχ. Z ενός φίλτρου διακριτού χρόνου που το υλοποιεί

Πόλοι:  $s+1 = 0 \Rightarrow \boxed{s = -1}$

Μηδενικά:  $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0 \Rightarrow \boxed{s = \infty}$





- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

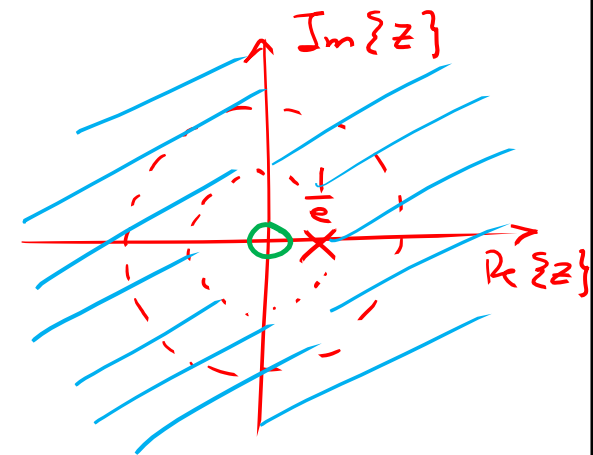
- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$

$\mathcal{L}^n$  Μέθοδος

Impulse Invariance

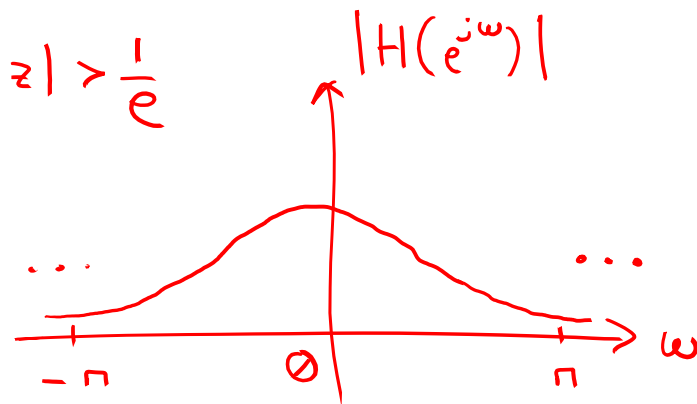
$$\frac{A_k}{s-s_k} \longrightarrow \frac{A_k}{1-e^{s_k}z^{-1}}$$



άρα  $H(z) = \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-1}}, |z| > \frac{1}{e}$

Πόλοι:  $z - e^{-1} = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{e}}$

Μηδενικά:  $\boxed{z = 0}$



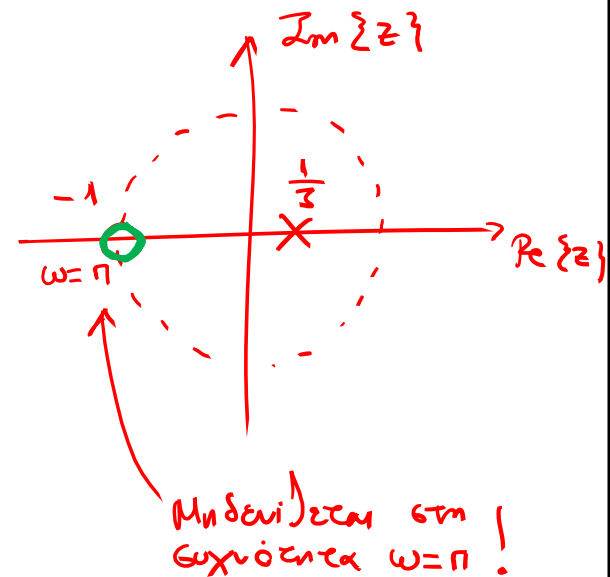
# • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

## • Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$

2<sup>η</sup> Μέθοδος:  
Bilinear Transf.

$$s \rightarrow 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

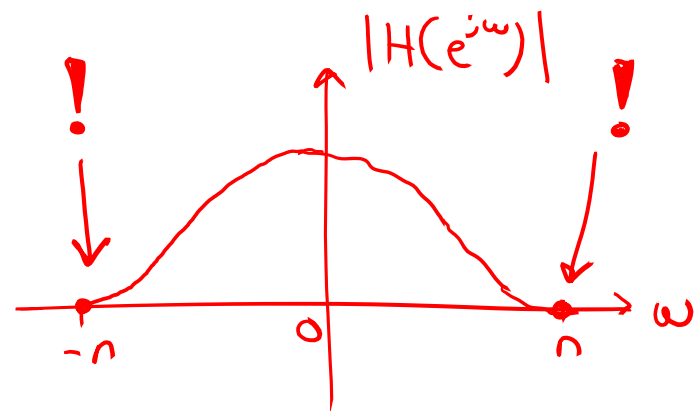


Άρα

$$H(z) = \frac{1}{2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}} = \frac{z+1}{3z-1}$$

Πόλοι:  $3z-1=0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{3}}$

Μηδενικά:  $z+1=0 \Rightarrow \boxed{z = -1}$



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

