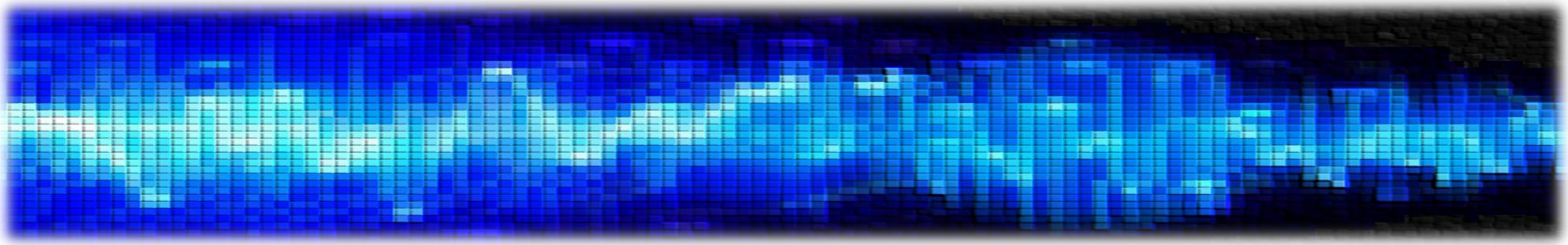
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

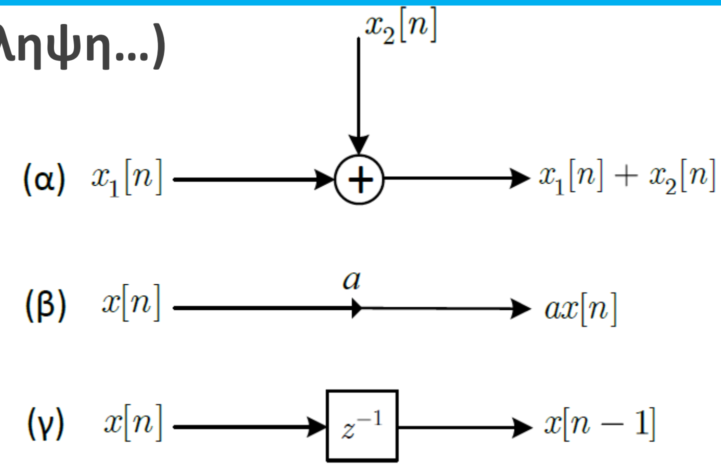
ΔΙΑΛΕΞΗ 19Η



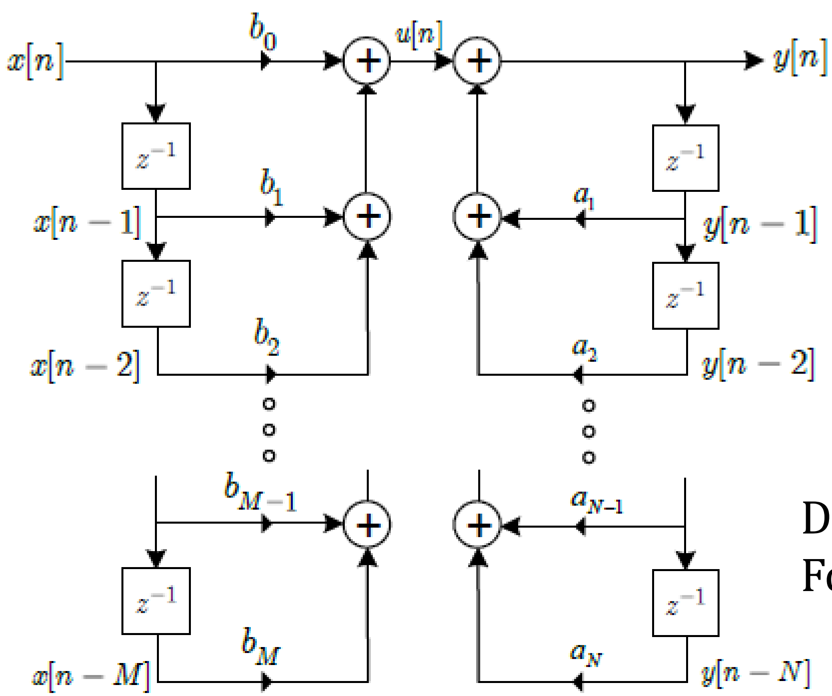
- Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

- **Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου (επανάληψη…)**

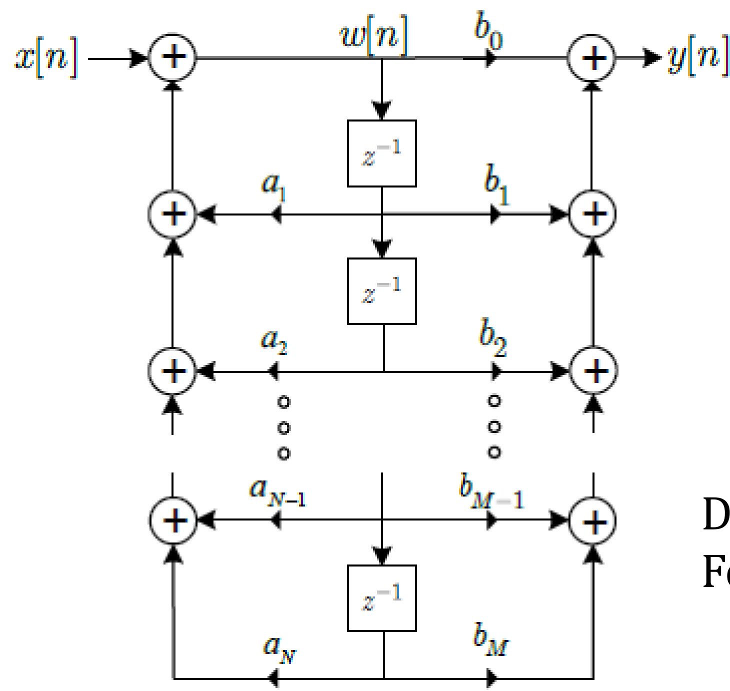
- Βασικοί δομικοί λίθοι:
  - ❑ Πρόσθεση
  - ❑ Πολλαπλασιασμός
  - ❑ Καθυστέρηση (αποθήκευση στη μνήμη)



$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



Direct Form I



Direct Form II

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου (επανάληψη…)**
- **Μορφή σε σειρά**

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-e_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2, \quad M = M_1 + 2M_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Παράλληλη Μορφή**

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2}\frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

με $N = N_1 + 2N_2$

- Εναλλακτικά

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s}\frac{e_{0k} + e_{1k}z^{-1}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

με $N_s = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Ως τώρα υλοποιούμε εξισώσεις διαφορών ή συναρτήσεις μεταφοράς με χρήση διάφορων δομών

- Είναι πολύ ενδιαφέρον και το αντίστροφο!
  - Δηλ. να αναλύουμε μια δεδομένη υλοποίηση και να βρίσκουμε την εξίσωση διαφορών ή τη συνάρτηση μεταφοράς που υλοποιεί

- Προς αυτό υπάρχουν μερικοί απλοί κανόνες που μας διευκολύνουν

I. Τοποθετούμε ενδιάμεσες μεταβλητές στην έξοδο κάθε αθροιστή (πλην αυτού που σχετίζεται με την έξοδο)

II. Γράφουμε τις εξισώσεις διαφορών στο πεδίο του χρόνου

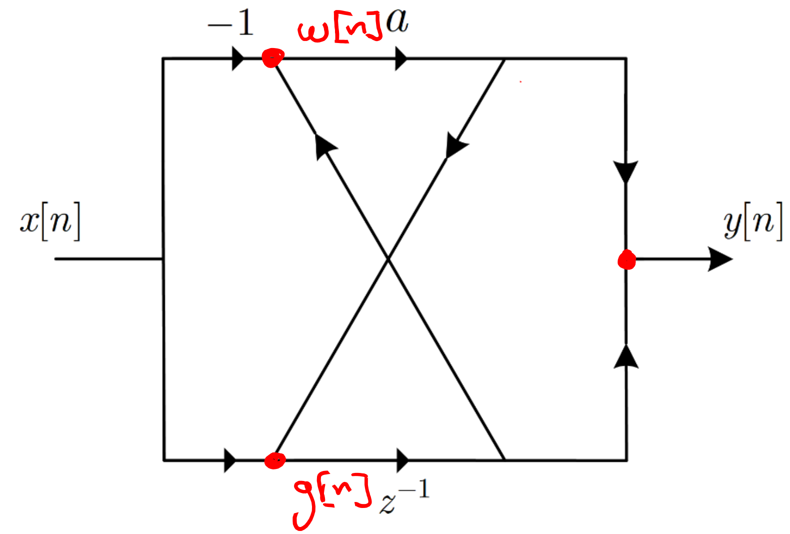
III. Μετατρέπουμε τις εξισώσεις στο χώρο του Ζ

IV. Λύνουμε ως προς $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από το διάγραμμα. Βρείτε το σύστημα $H(z)$ το οποίο υλοποιεί.



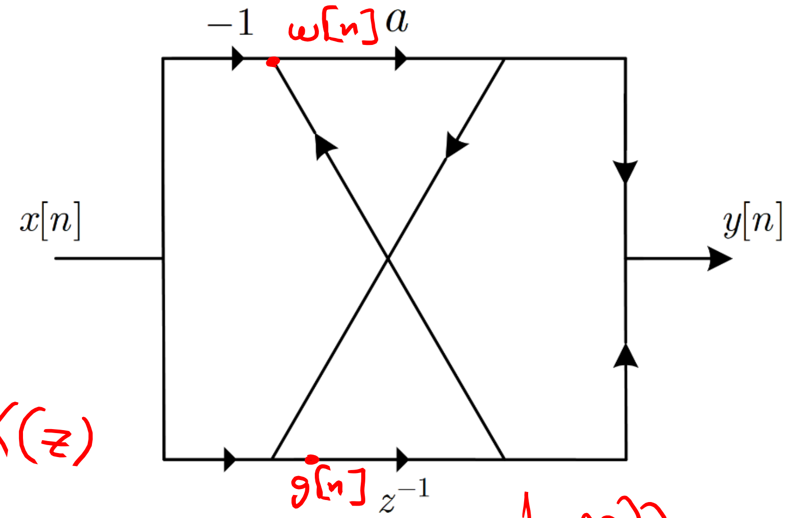
$$\left.\begin{aligned} w[n] &= -x[n] + g[n-1] \\ g[n] &= x[n] + a\,w[n] \\ y[n] &= a\,w[n] + g[n-1] \end{aligned}\right\} \xrightarrow{Z}$$

$$\xrightarrow{Z} \left.\begin{aligned} W(z) &= -X(z) + z^{-1}G(z) \quad (3) \\ G(z) &= X(z) + a\,W(z) \\ Y(z) &= a\,W(z) + z^{-1}G(z) \quad (1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} G(z) &= X(z) + a\left(-X(z) + z^{-1}G(z)\right) \\ &= X(z) - aX(z) + az^{-1}G(z) \end{aligned}$$

Δηλ. $G(z) - az^{-1}G(z) = (1-a)X(z) \Leftrightarrow G(z) = \dfrac{1-a}{1-az^{-1}}X(z) \quad (2)$

$(3) \overset{(2)}{\Longrightarrow} W(z) = -X(z) + z^{-1}\left(\dfrac{1-a}{1-az^{-1}}\right)X(z) = \left(\dfrac{z^{-1}-az^{-1}}{1-az^{-1}} - 1\right)X(z) \quad (4)$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**



- Παράδειγμα:

$$1 \overset{4}{\underset{2}{\Longrightarrow}} Y(z) = aW(z) + z^{-1}G(z)$$

$$= a\left(\frac{z^{-1} - az^{-1}}{1-az^{-1}} - 1\right)X(z) + z^{-1}\frac{1-a}{1-az^{-1}}X(z)$$

1 πολλ.
1 καθ.
3 αθρ.

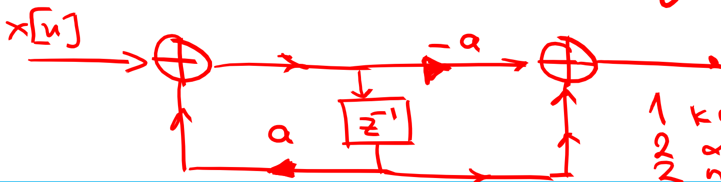
$$= \left[\left(\frac{az^{-1} - a^2z^{-1}}{1-az^{-1}} - \frac{a - a^2z^{-1}}{1-az^{-1}}\right) + \frac{z^{-1} - az^{-1}}{1-az^{-1}}\right]X(z)$$

$$= \frac{\cancel{az^{-1}} - \cancel{a^2z^{-1}} - a + \cancel{a^2z^{-1}} + z^{-1} - \cancel{az^{-1}}}{1-az^{-1}}X(z) = \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}X(z) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}}_{H(z)}X(z)$$

, άρα $H(z) = \dfrac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$ ← all pass system

DF-II :

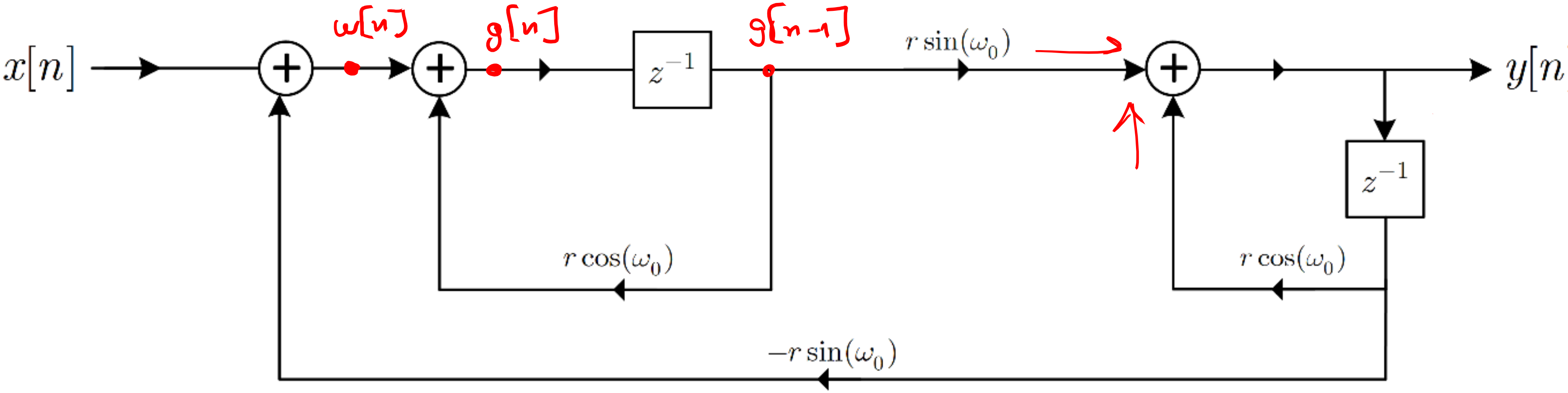


1 καθ.
2 αθρ.
2 πολλ.

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:

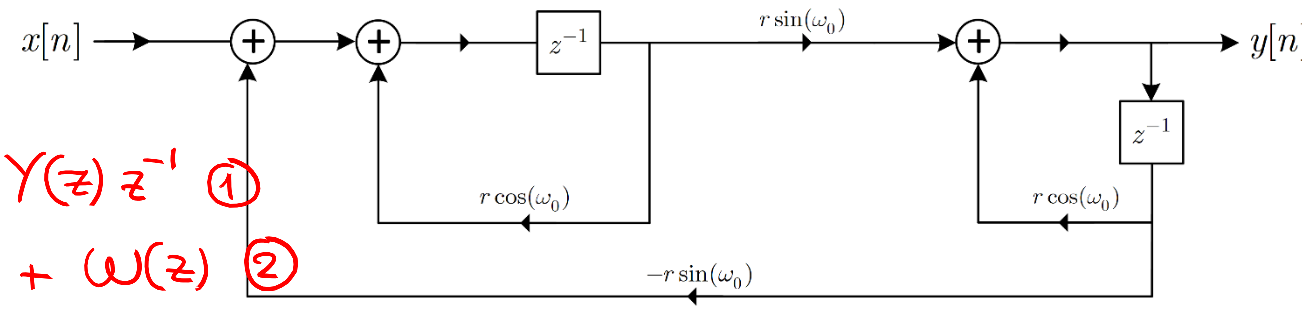
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από το διάγραμμα. Βρείτε το σύστημα $H(z)$ το οποίο υλοποιεί.



$$\left.\begin{aligned} w[n] &= x[n] + (-r\sin(\omega_0))\, y[n-1] \\ g[n] &= w[n] + r\cos(\omega_0)\, g[n-1] \\ y[n] &= g[n-1]\cdot r\sin(\omega_0) + y[n-1]\, r\cos(\omega_0) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\mathcal{Z}}$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα:



$$W(z) = X(z) - r\sin(\omega_0)\, Y(z)\, z^{-1} \quad (1)$$

$$G(z) = r\cos(\omega_0)\, G(z)\, z^{-1} + W(z) \quad (2)$$

$$Y(z) = r\cos(\omega_0)\, z^{-1} Y(z) + z^{-1} G(z)\, r\sin(\omega_0) \quad (3)$$

$$(2) \overset{(1)}{\Longrightarrow} G(z) - r\cos(\omega_0)\, z^{-1} G(z) = X(z) - r\sin(\omega_0)\, z^{-1}\, Y(z)$$

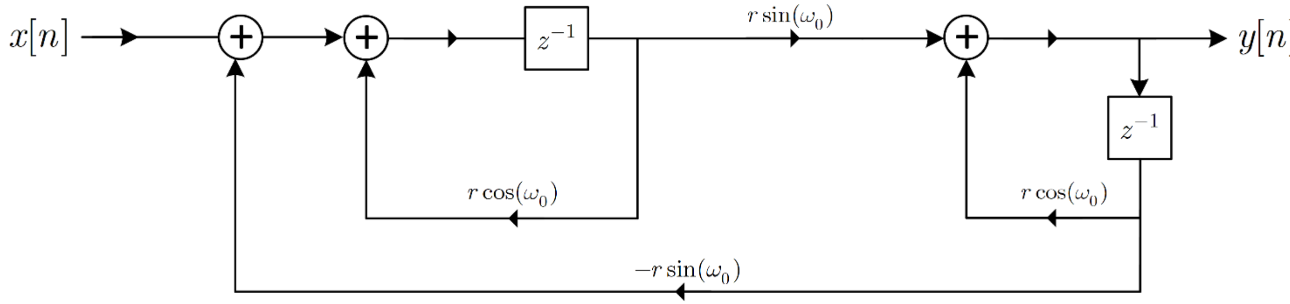
$$G(z) = \frac{X(z) - r\sin(\omega_0)\, z^{-1}\, Y(z)}{1 - r\cos(\omega_0)\, z^{-1}} \quad (4)$$

$$(3) \overset{(4)}{\Longrightarrow} Y(z) - r\cos(\omega_0)\, z^{-1} Y(z) = z^{-1}\, \frac{X(z) - r\sin(\omega_0)\, z^{-1}\, Y(z)}{1 - r\cos(\omega_0)\, z^{-1}}\, r\sin(\omega_0)$$

$$= \frac{r z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - r\cos(\omega_0)\, z^{-1}}\, X(z) - \frac{r^2 \sin^2(\omega_0)\, z^{-2}}{1 - r\cos(\omega_0)\, z^{-1}}\, Y(z) \iff$$

$$\iff Y(z) - r\cos(\omega_0)\, z^{-1}\, Y(z) + \frac{r^2 \sin^2(\omega_0)\, z^{-2}}{1 - r\cos(\omega_0)\, z^{-1}}\, Y(z) = \frac{r z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - r\cos(\omega_0)\, z^{-1}}\, X(z)$$

- **Υλοποίηση IIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:



Άρα :

$$\left(1-r\cos(\omega_0)z^{-1}\right)Y(z) + \frac{r^2\sin^2(\omega_0)z^{-2}}{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}Y(z) = \frac{rz^{-1}\sin(\omega_0)}{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}X(z) \iff$$

$$\frac{\left(1-r\cos(\omega_0)z^{-1}\right)^2 + r^2\sin^2(\omega_0)z^{-2}}{\cancel{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}}Y(z) = \frac{rz^{-1}\sin(\omega_0)}{\cancel{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}}X(z)$$

$$\left(1-2r\cos(\omega_0)z^{-1} + \underbrace{r^2\cos^2(\omega_0)z^{-2} + r^2\sin^2(\omega_0)z^{-2}}\right)Y(z) = rz^{-1}X(z)\sin(\omega_0)$$

$$\left(1-2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}\right)Y(z) = rz^{-1}X(z)\sin(\omega_0)$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{rz^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}}_{\longrightarrow H(z)}X(z)$$

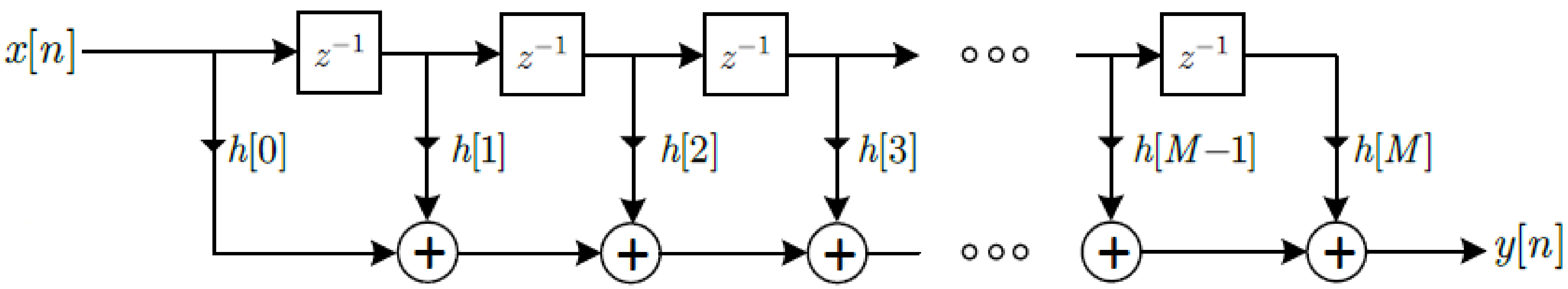
- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Για τα FIR συστήματα, καταλαβαίνετε ότι λόγω της απουσίας πόλων, τα Direct Form I και II που γνωρίσαμε «ενώνονται» σε μια μορφή, Direct Form

- Η γενική εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

- Η Direct Form υλοποίηση είναι η παρακάτω



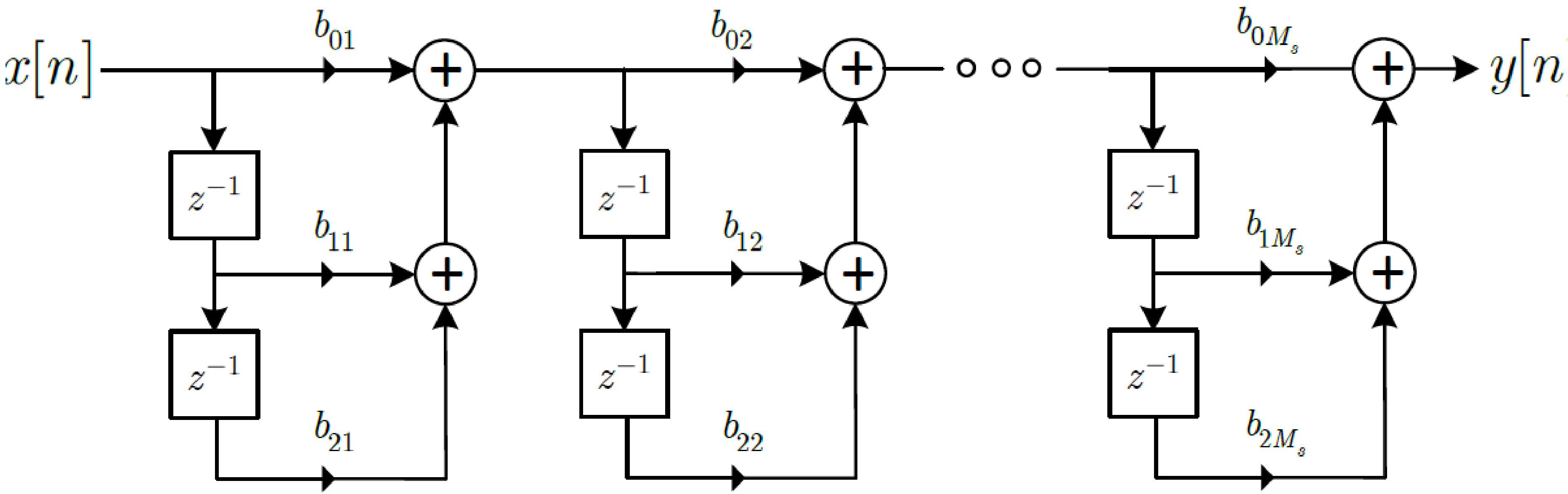
- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Μορφή σε Σειρά (cascade form)

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2})$$

με $M_s = \left\lfloor \frac{M+1}{2} \right\rfloor$

- Μια γενική υλοποίηση σε σειρά φαίνεται παρακάτω



- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης
- Για να σχεδιάσουμε αποδοτικές δομές για συστήματα γραμμικής φάσης πρέπει να εκμεταλλευτούμε τις συμμετρίες τους

$$h[M-n] = h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \quad \text{Τύπου I, II}$$

$$h[M-n] = -h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \quad \text{Τύπου III, IV}$$

- Οποιαδήποτε συμμετρία κι αν ισχύει, μπορούμε να μειώσουμε το πλήθος των **πολλαπλασιασμών** σχεδόν στο μισό!
- Ας δούμε πως μπορούμε να τα γράψουμε με κατάλληλο τρόπο

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης
- Έστω M άρτιος, οπότε ξεκινάμε με τα τύπου I και III
- Τύπου I:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] + x[n-(M-k)]) + h\left[\frac{M}{2}\right] x\left[n - \frac{M}{2}\right]$$

- Τύπου III:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

- Έστω M περιττός, οπότε μιλάμε για τύπου II, IV
- Τύπου II:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] + x[n-M+k])$$

- Τύπου IV:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης
- Έστω M άρτιος
- Τύπου Ι:

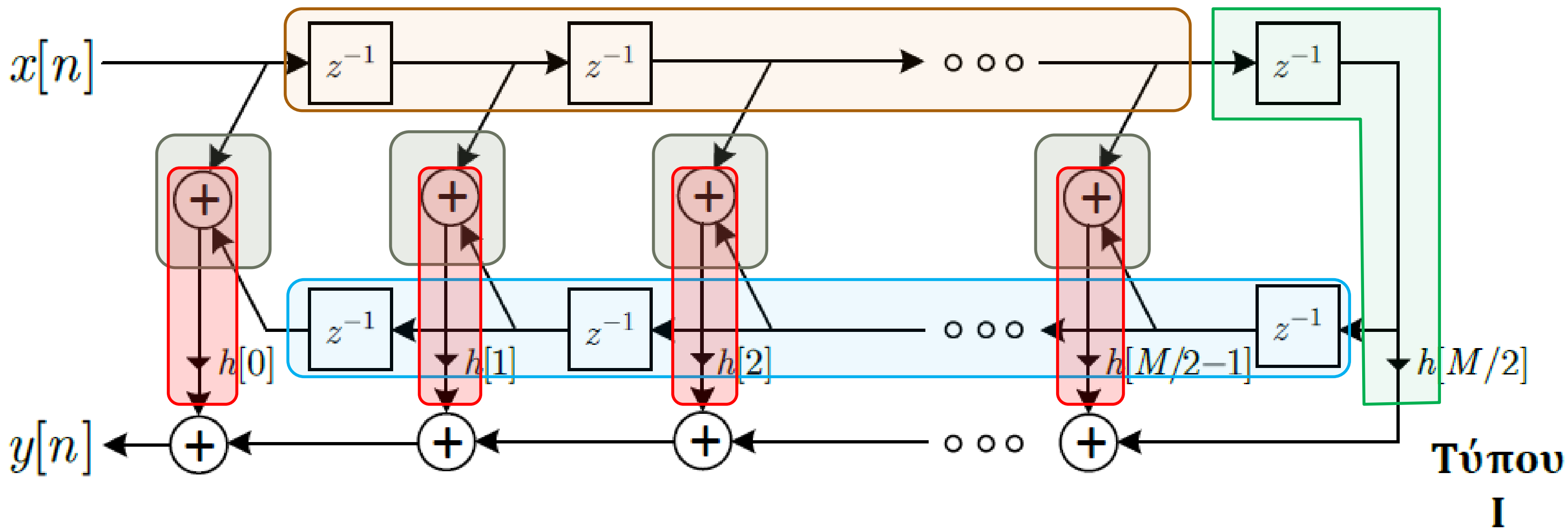
$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] + x[n-(M-k)]) + h\left[\frac{M}{2}\right] x\left[n - \frac{M}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} y[n] = {} & h[0](x[n] + x[n-M]) \\ & + h[1](x[n-1] + x[n-(M-1)]) \\ & + h[2](x[n-2] + x[n-(M-2)]) \\ & \qquad \dots \\ & + h\left[\frac{M}{2}-1\right]\left(x\left[n-\left(\frac{M}{2}-1\right)\right] + x\left[n-\left(\frac{M}{2}+1\right)\right]\right) \\ & + h\left[\frac{M}{2}\right] x\left[n-\frac{M}{2}\right] \end{aligned}$$

• Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] + x[n-(M-k)]) + h\left[\frac{M}{2}\right] x\left[n-\frac{M}{2}\right]$$



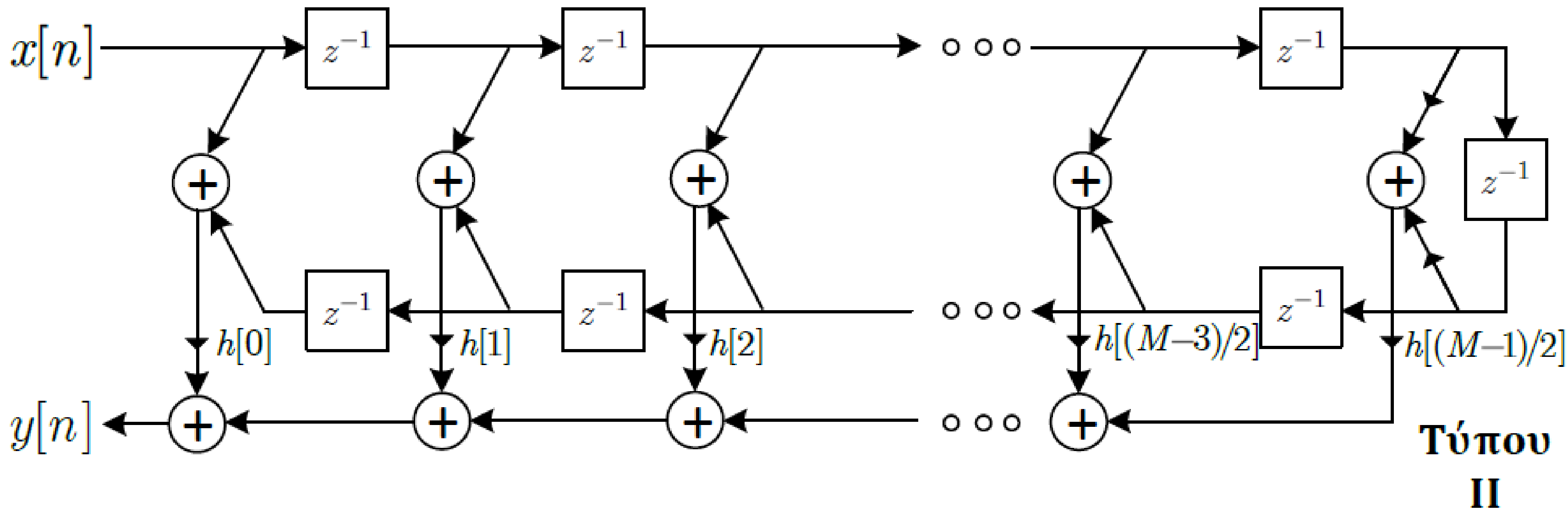
- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης
- Έστω M περιττός
- Τύπου II:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] + x[n-M+k])$$

$$y[n] = h[0](x[n] + x[n-M])$$
$$+ \quad h[1](x[n-1] + x[n-(M-1)])$$
$$+ \quad h[2](x[n-2] + x[n-(M-2)])$$
$$\dots$$
$$+ \quad h\left[\frac{M-1}{2}\right]\left(x\left[n-\frac{M-1}{2}\right] + x\left[n-\frac{M+1}{2}\right]\right)$$

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

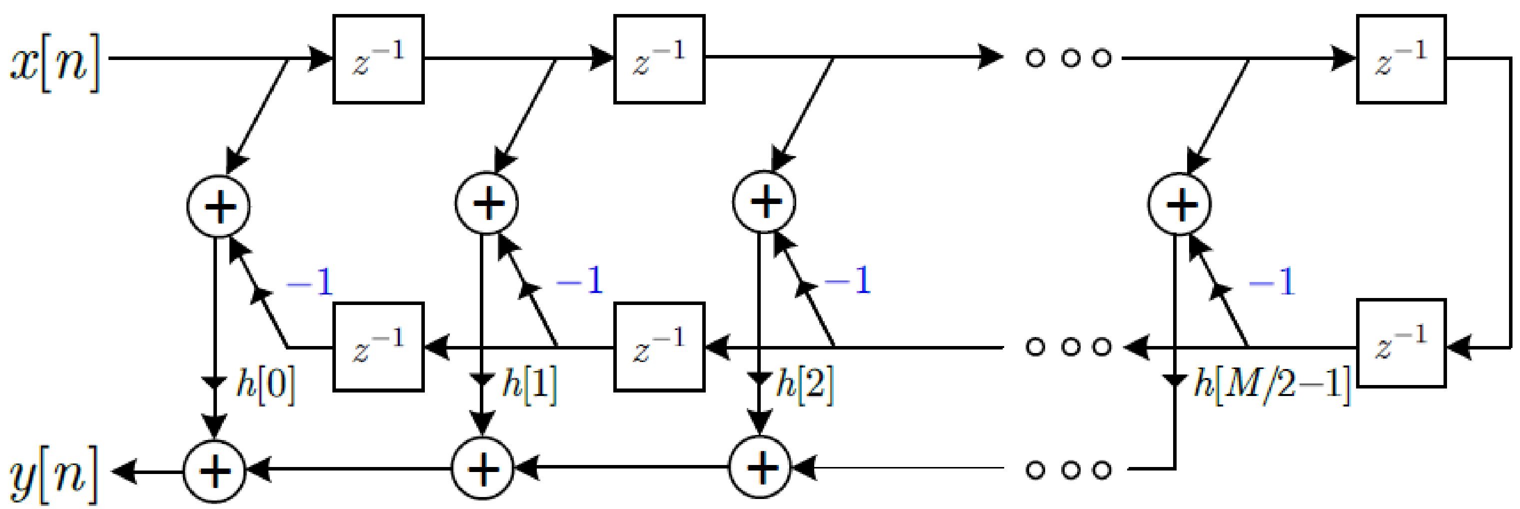
$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] + x[n-M+k])$$



- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

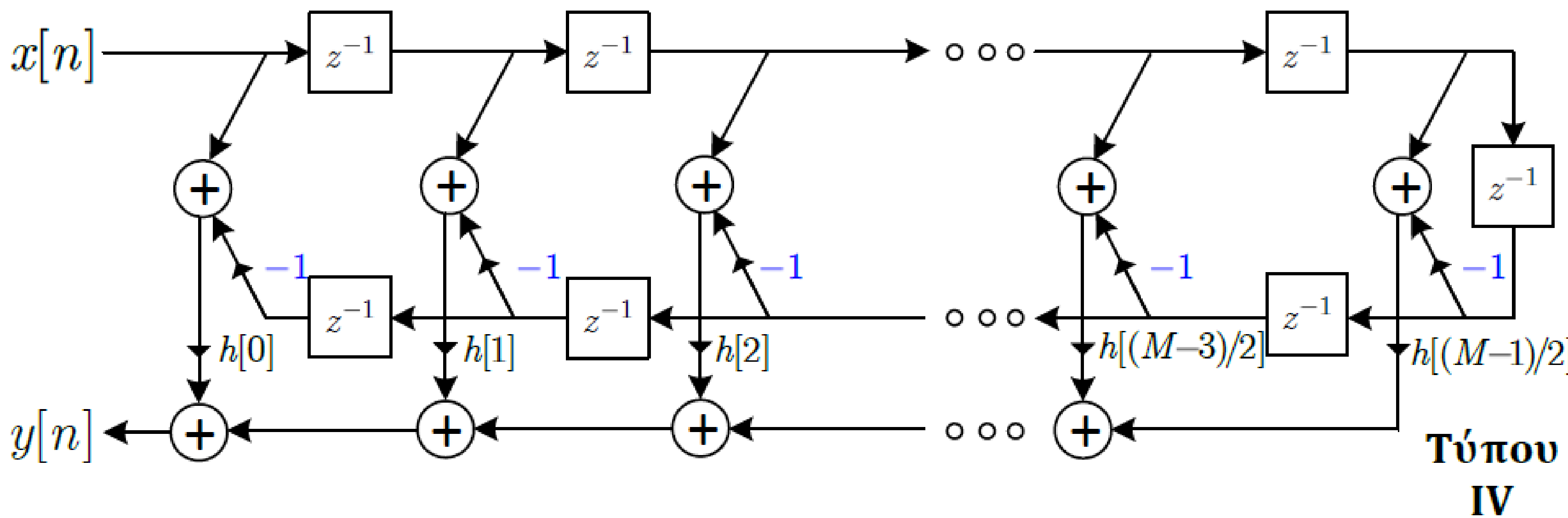


Τύπου III

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**

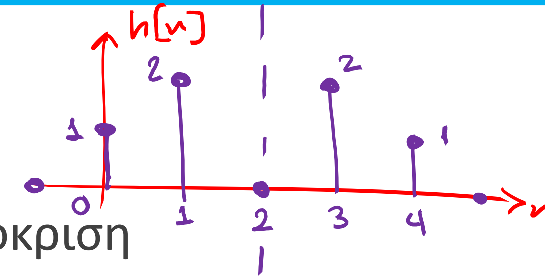
- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$



- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**
- Παράδειγμα:

$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 2x[n-3] + x[n-4]$

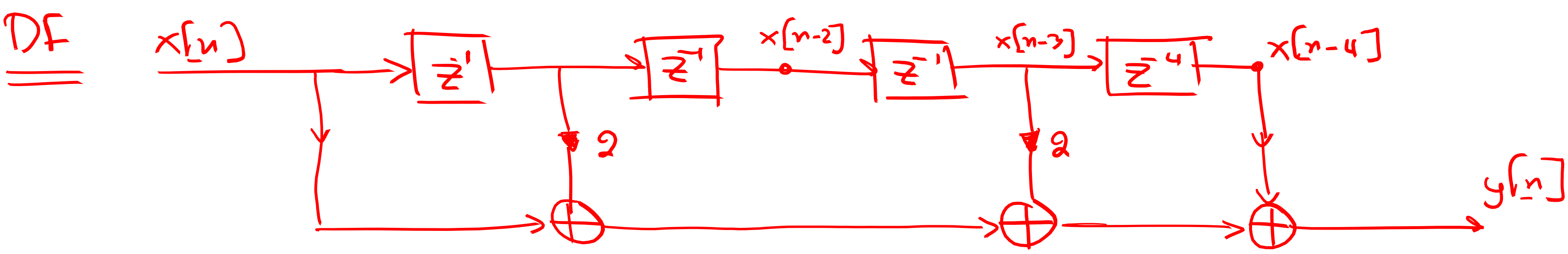


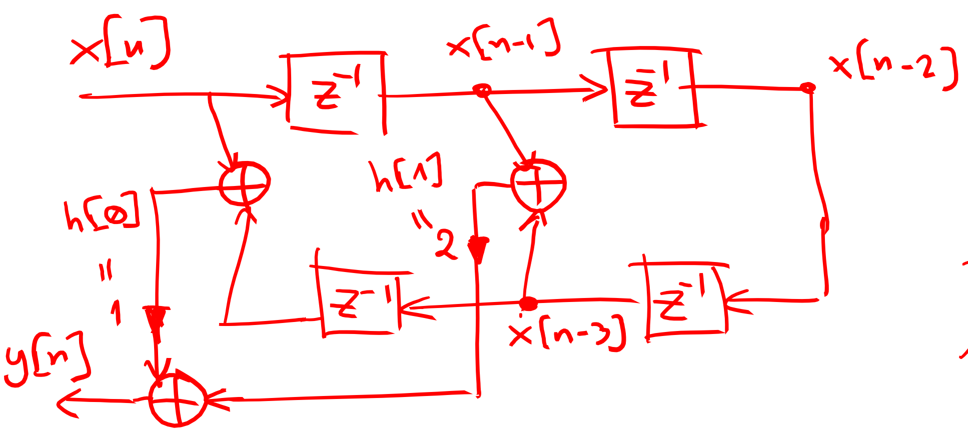
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

M = 4
Τύπου I

Συζητήστε και σχεδιάστε τη βέλτιστη υλοποίηση

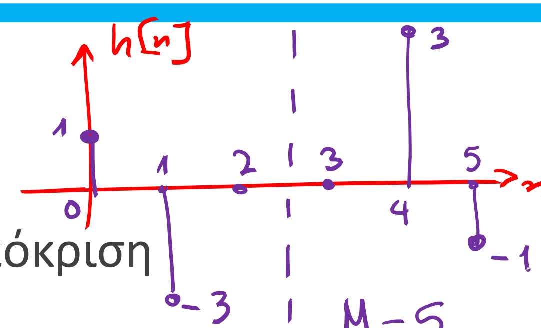




4 καθ.
3 αθρ.
1 πολλ.

4 καθ.
3 αθρ.
2 πολλ.

- **Υλοποίηση FIR συστημάτων διακριτού χρόνου**



$M=5$

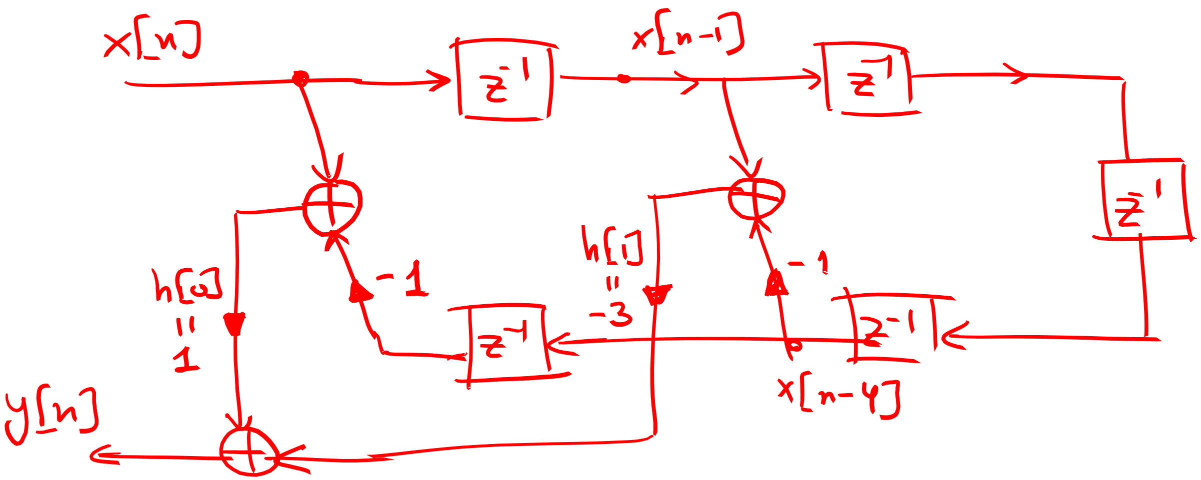
Τύπου IV

- Παράδειγμα: $y[n] = x[n] - 3x[n-1] + 3x[n-4] - x[n-5]$

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που δίνεται από την κρουστική απόκριση

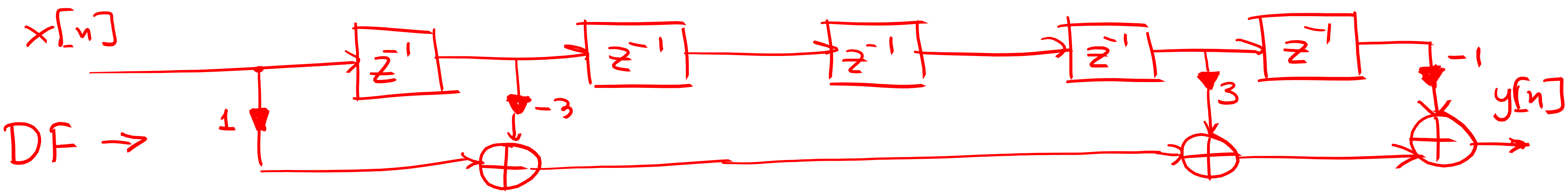
$$h[n] = \delta[n] - 3\delta[n-1] + 3\delta[n-4] - \delta[n-5]$$

Συζητήστε και σχεδιάστε τη βέλτιστη υλοποίηση



5 καθ.
3 αθρ.
1 πολλ.

5 καθ.
3 αθρ.
2 πολλ.



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ