- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Παράδειγμα:

Ο Βρείτε το ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$ για το οποίο ισχύει

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$- 1 \cdot \cos$

$$\left|H(z)\right|^2_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1+|c_k|^2 - 2c_k\cos(\omega - \angle c_k)}$$

$2|c_k| = 1 \Rightarrow c_k = \frac{1}{2}$

$1+|c_k|^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow |c_k|^2 = \frac{5}{4} - 1 \Rightarrow |c_k|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |c_k| = \frac{1}{2}$ | $c_k = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$

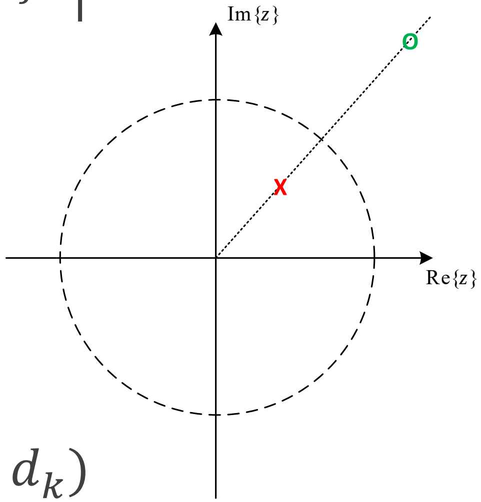
$\angle c_k = \frac{\pi}{4}$

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

αιτιατό

- **All-pass Συστήματα**

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right| = \prod_{k=1}^{N} \frac{\left|e^{-j\omega} - a_k^*\right|}{\left|1 - a_k e^{-j\omega}\right|} = 1$$



- Πόλοι-μηδενικά: $\left(a_k, \frac{1}{a_k^*}\right) = \left(r_k e^{j\theta_k}, \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k}\right)$
- Για πραγματική κρουστική απόκριση

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1} - b_k^*}{1 - b_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{(z^{-1} - d_k^*)(z^{-1} - d_k)}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

- Για σύστημα πρώτης τάξης, μπορεί να δειχθεί ότι η απόκριση φάσης είναι

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = -\omega - 2\tan^{-1} \frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

- **All-pass Συστήματα**
- Καθυστέρηση ομάδας

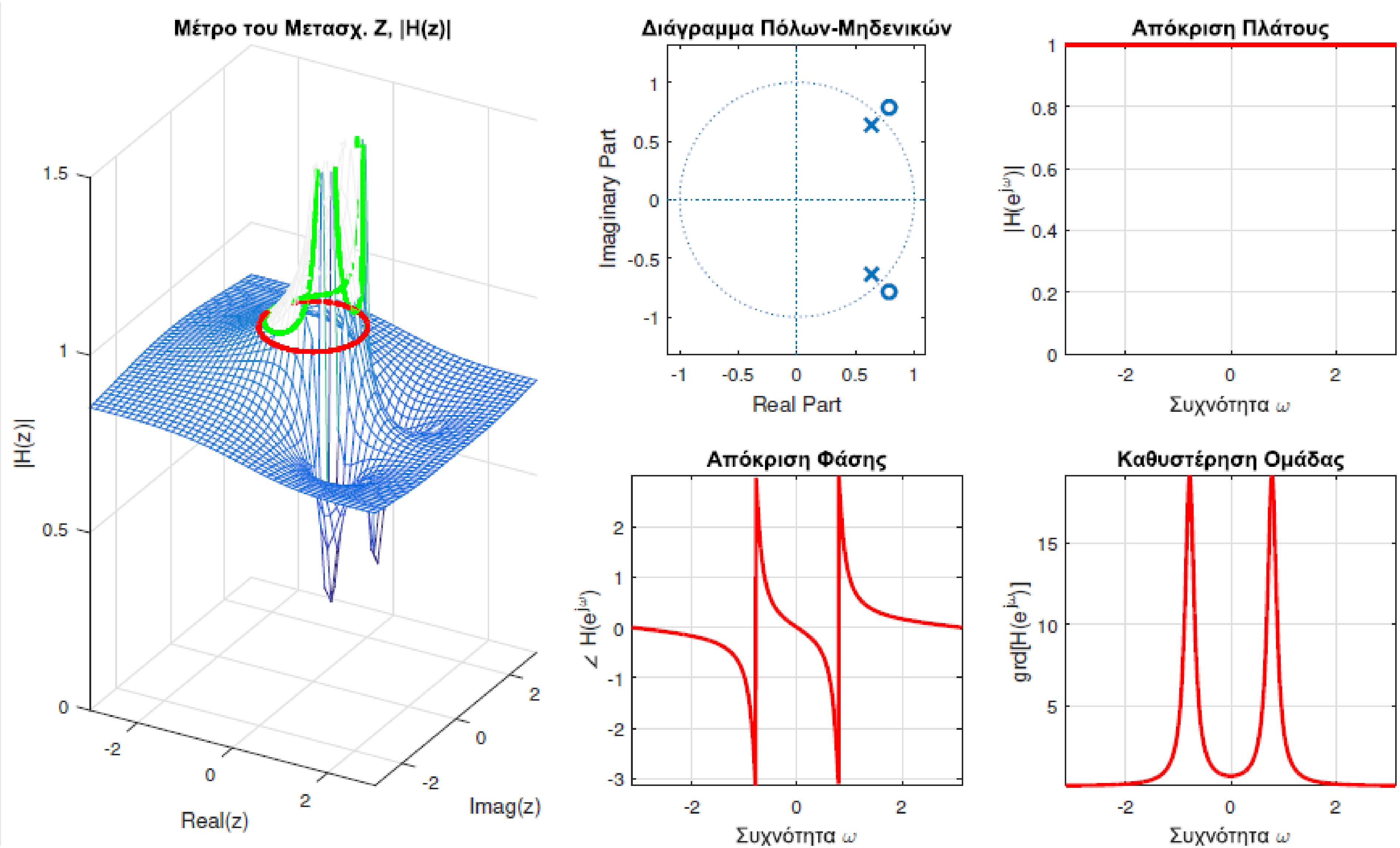
$$\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - \ 2r\cos(\omega - \theta)}$$

- Αν $H(z)$ ευσταθές και αιτιατό ($r < 1$) τότε $\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] > 0$

- Αν $\mathrm{grd}\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] > 0 \Rightarrow \angle H\left(e^{j\omega}\right) \leq 0, \quad 0 \leq \omega < \pi$
  - Απόκριση φάσης μη-θετική!

- **Αιτιατά** all-pass συστήματα έχουν **πάντα θετική καθυστέρηση ομάδας**!
- Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να καθυστερήσουν συνιστώσες στενής ζώνης της εισόδου τους χωρίς να επηρεάσουν το πλάτος τους!
- Που είχαμε δει κάτι παρόμοιο;
  - Στην πρώτη μας συζήτηση για την καθυστέρηση ομάδας!

- **All-pass Συστήματα**



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα **ελάχιστης φάσης**
  - Είναι αιτιατά και ευσταθή, κι έχουν ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα

- Ένα οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης με ένα all-pass σύστημα

- Με άλλα λόγια, από ένα δεδομένο σύστημα μπορούμε πάντα να εξάγουμε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης
  - Δηλ. ένα σύστημα με την ίδια απόκριση πλάτους, που να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου!
  - Για την απόκριση φάσης θα μιλήσουμε αργότερα… ☺

- Θα μείνουμε κυρίως στα ευσταθή και αιτιατά ΓΧΑ συστήματα…
  - … αν και το συμπέρασμα ισχύει για κάθε σύστημα με ρητή $H(z)$

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

- Από την παραπάνω σχέση άμεσα προκύπτει:

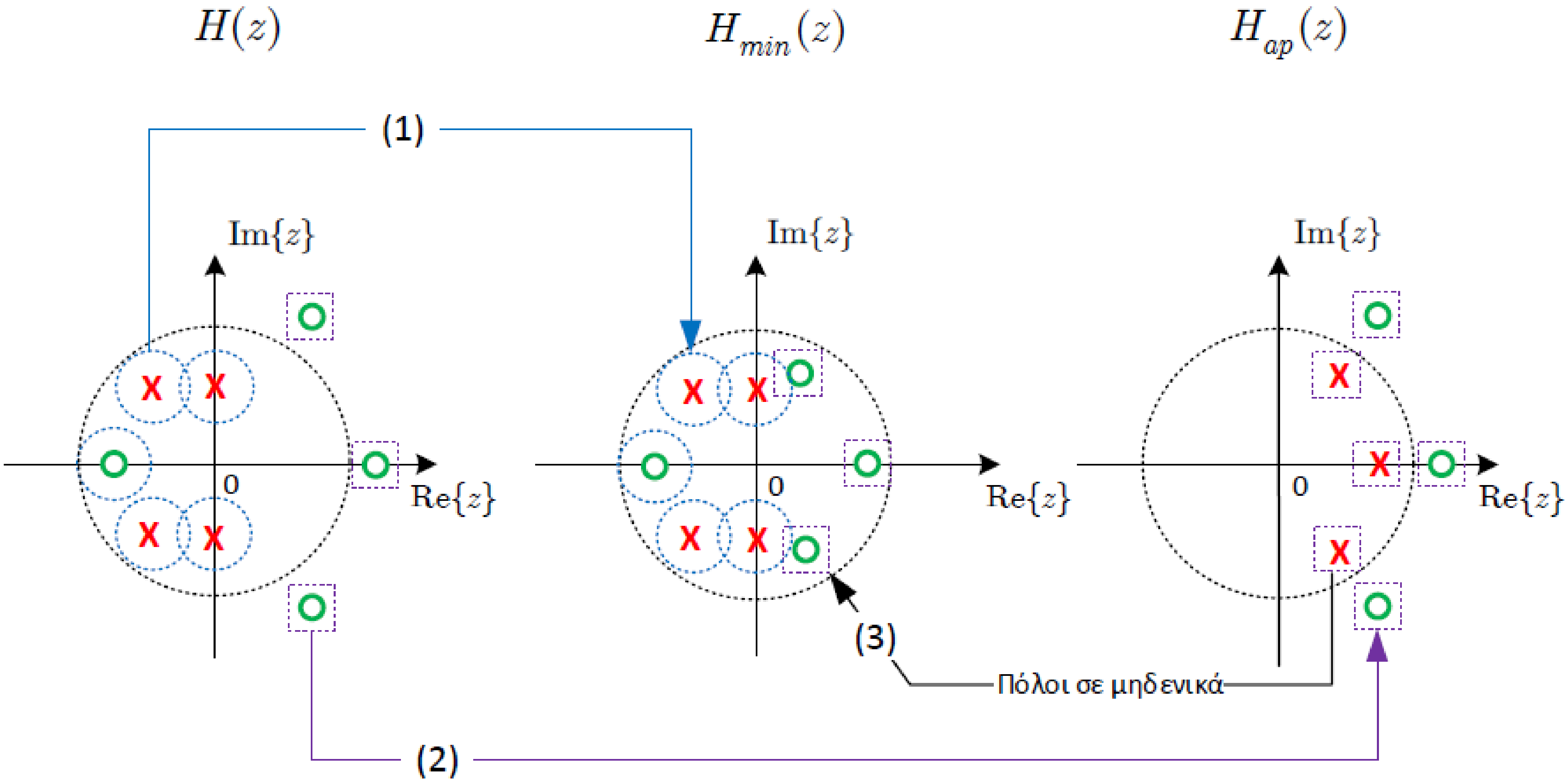
$$|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{ap}(e^{j\omega})$$

Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρισκονται εκτος του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει ειναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.
2. Το all-pass συστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτριζει το καταλληλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.
3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

• **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a z^{-1}}$$

- Παράδειγμα:

Ο Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

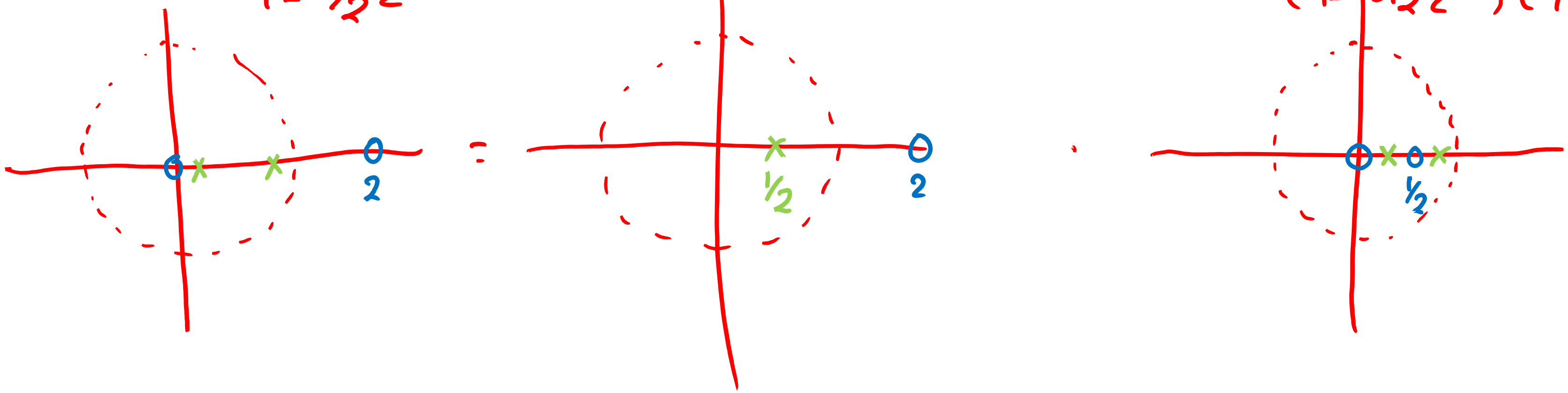
$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{-2\left(z^{-1} - \frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow$$

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \Rightarrow$$

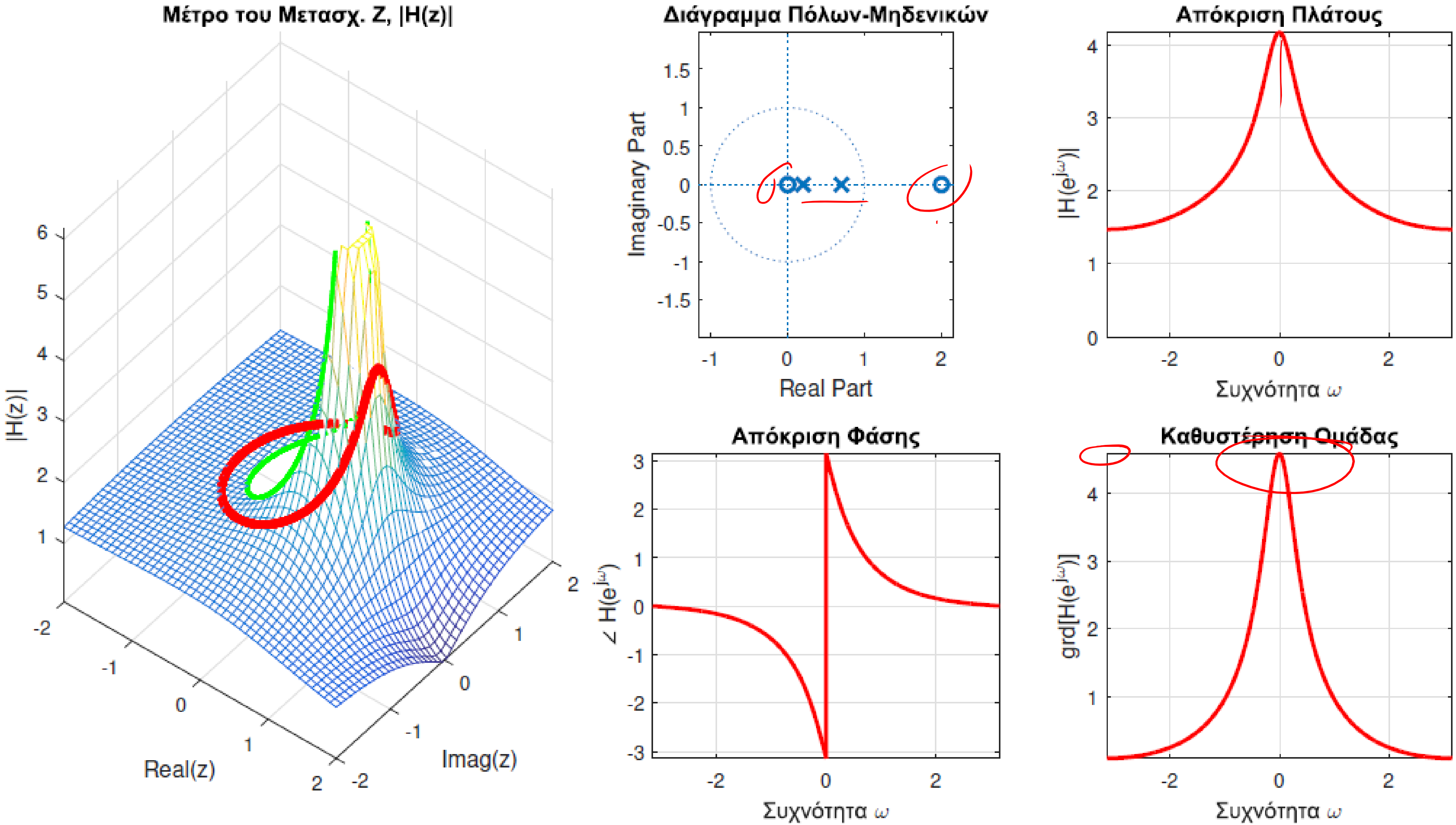
$$\Rightarrow H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - 1/2}{1 - 1/2\, z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H_{min}(z) = -2\,\frac{1 - 1/2\, z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

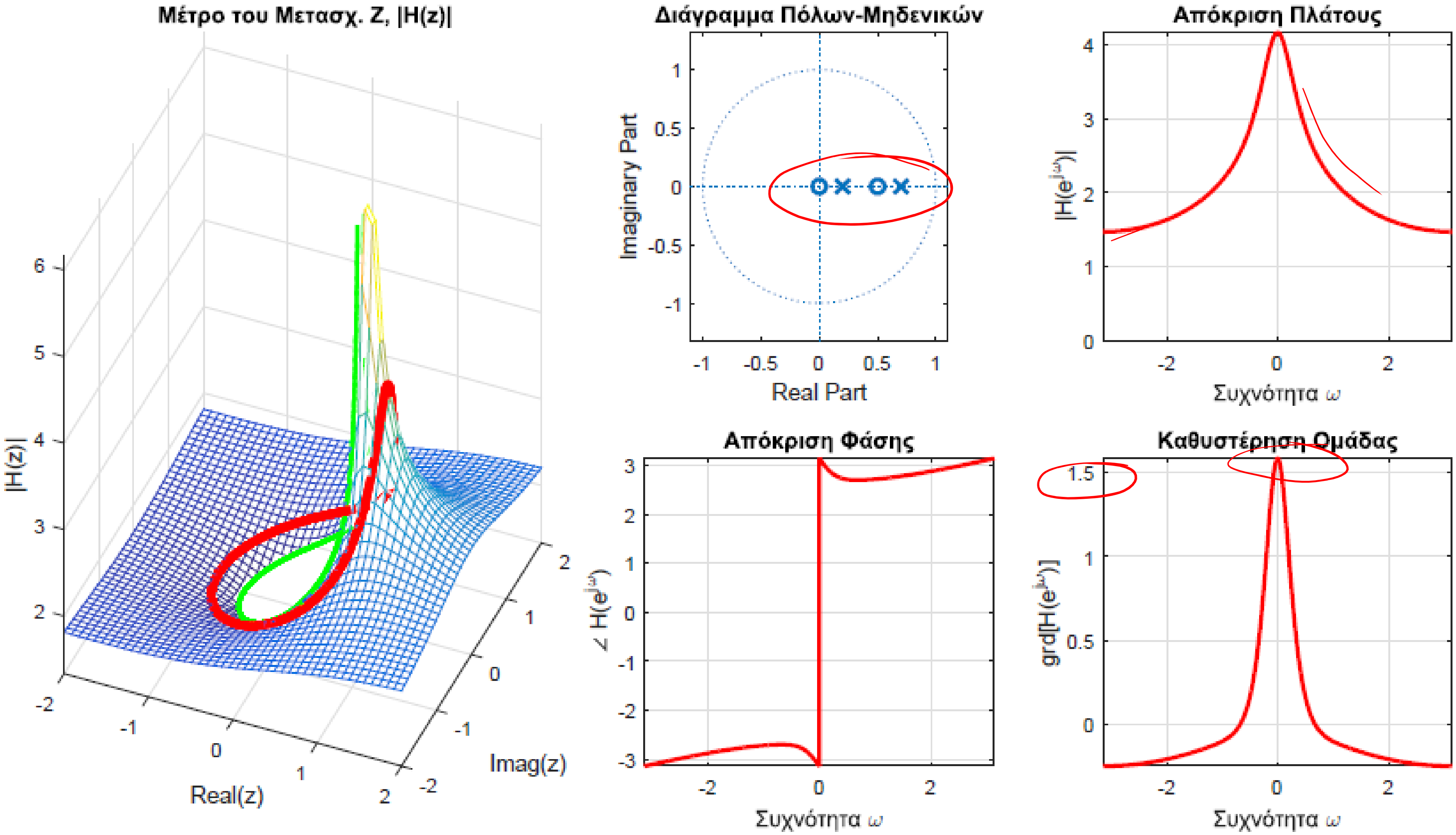


$H(z) = H_{ap}(z) \cdot H_{min}(z)$

- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:

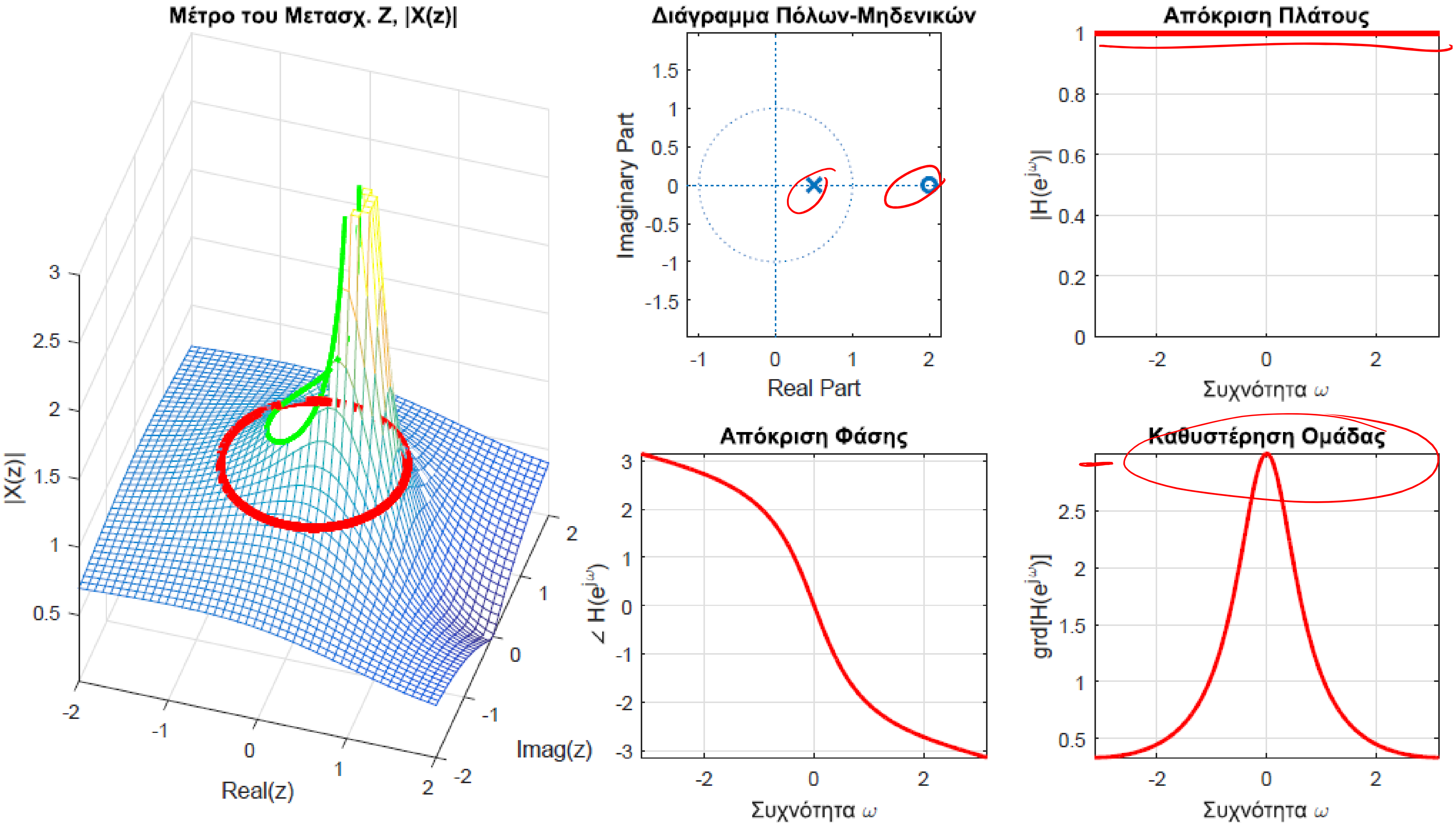


- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**
- Παράδειγμα:



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Παράδειγμα:



- **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

- Χρειάζεται απαραίτητα κάθε φορά όλη η αυτή (εύκολη μεν, χρονοβόρα δε) διαδικασία για την εύρεση ενός minimum phase συστήματος?

- Όχι! ☺

- Είδαμε νωρίτερα ότι ένας όρος $1 - az^{-1}$ με α **εκτός** μοναδιαίου κύκλου μπορεί να «καθρεπτιστεί» **εντός**, στη συζυγή αμοιβαία θέση, του μοναδιαίου κύκλου με χρήση του όρου $z^{-1} - a^*$

- Μια τέτοια κίνηση ΔΕΝ αλλάζει την απόκριση πλάτους (slide 9)!

- Οπότε για την εύρεση του minimum phase συστήματος αρκεί να αλλάξουμε τους όρους $1 - az^{-1}$ **εκτός** μοναδιαίου κύκλου με όρους $z^{-1} - a^*$ (αναγκαστικά **εντός** μοναδιαίου κύκλου) !!

• **Διάσπαση σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα**

$$\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$$

• Παράδειγμα:

Ο Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο σύστημα

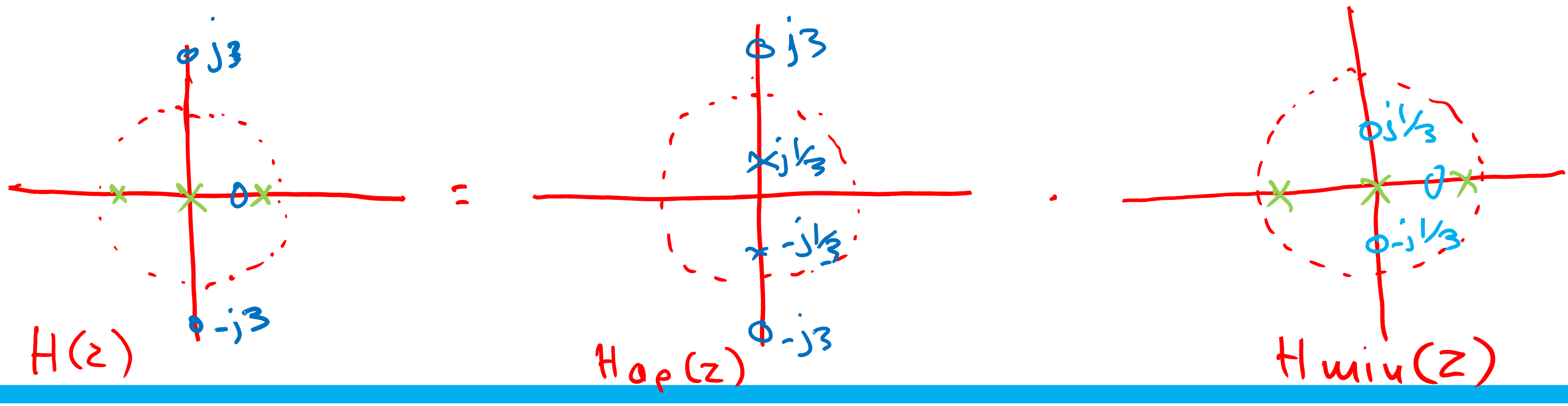
$$H(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1+9z^{-2})}{(1-0.81z^{-2})} = \frac{(1-0.8z^{-1})(1-j3z^{-1})(1+j3z^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}$$

$$H_{ap}(z) = \frac{(1-j3z^{-1})(1+j3z^{-1})}{(1-j\frac{1}{3}z^{-1})(1+j\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{(-j3)(z^{-1}+j\frac{1}{3})(j3)(z^{-1}-j\frac{1}{3})}{(1-j\frac{1}{3}z^{-1})(1+j\frac{1}{3}z^{-1})} = 9\,\frac{z^{-1}+j\frac{1}{3}}{1-j\frac{1}{3}z^{-1}}\;\frac{z^{-1}-j\frac{1}{3}}{1+j\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$H_{ap}(z) =$

$$\tilde{H}_{min}(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1-j\frac{1}{3}z^{-1})(1+j\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{min} = 9\cdot\tilde{H}_{min}(z)$$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ