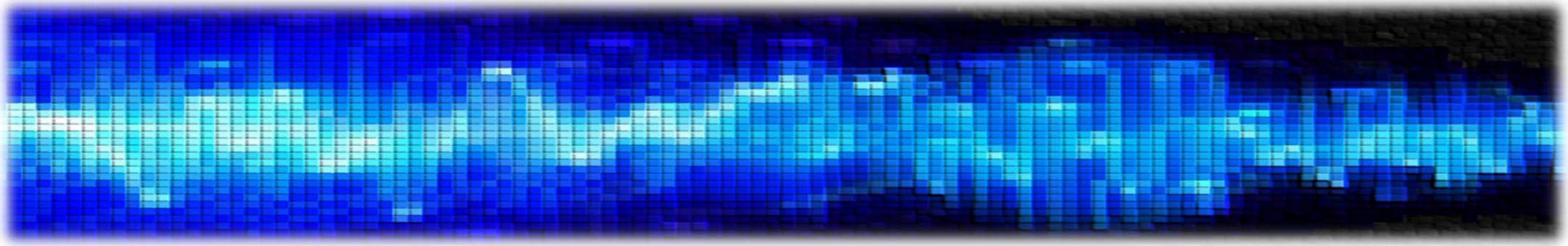
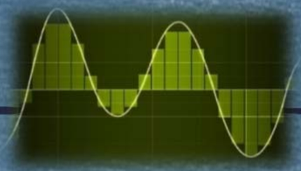
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η



- Συστήματα Ελάχιστης Φάσης
- Συστήματα All-Pass
- Διάσπαση σε ελάχιστης φάσης και all-pass

Τι περιέχει το ΗΥ370?

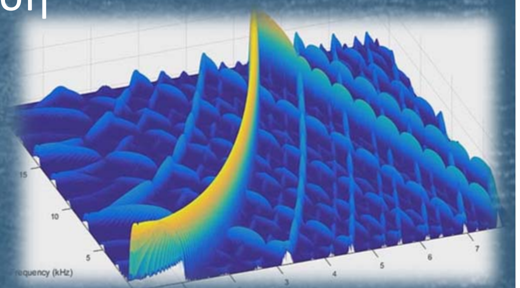


1ο Κομμάτι

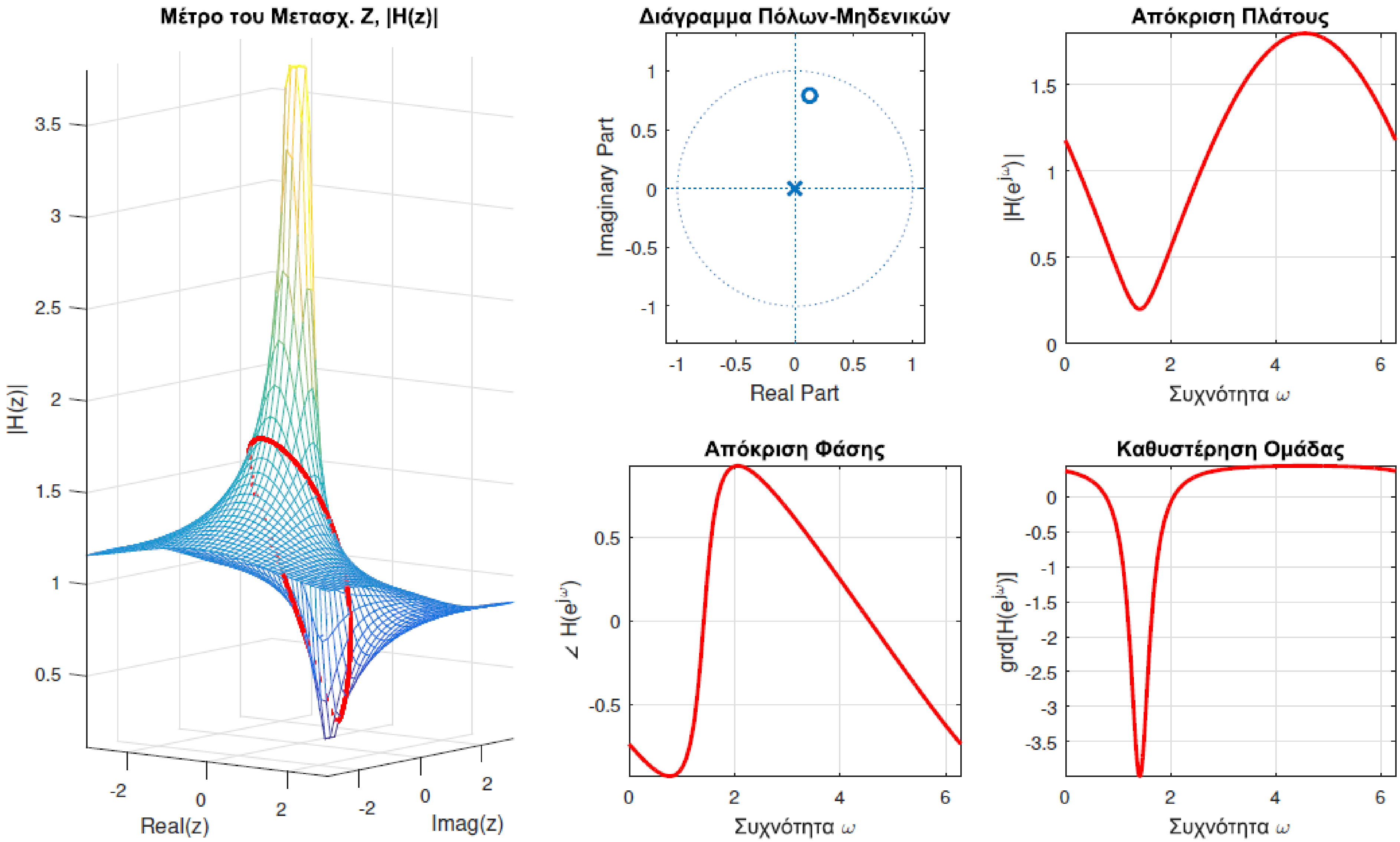
- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

2ο Κομμάτι

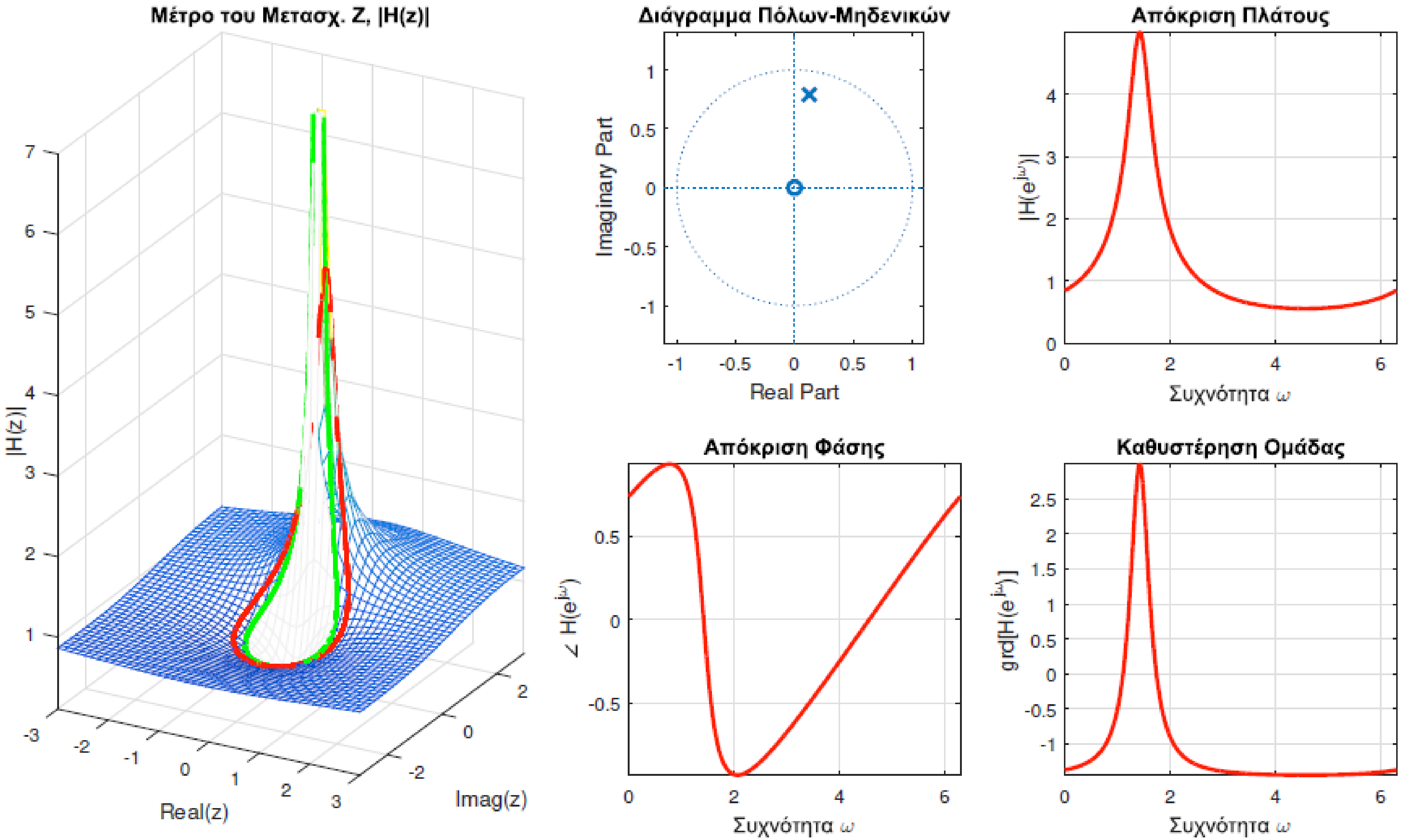
- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



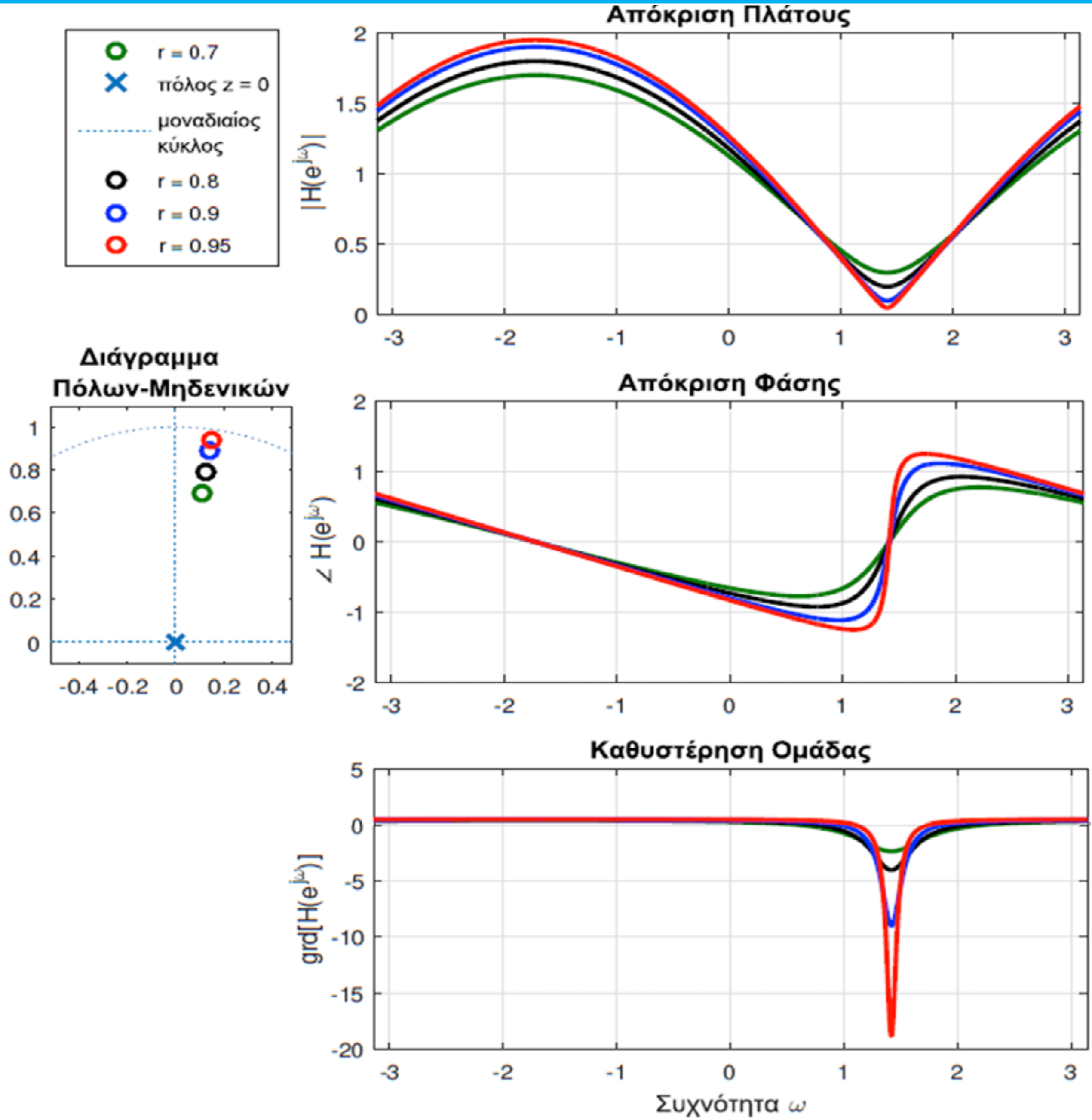
• Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)



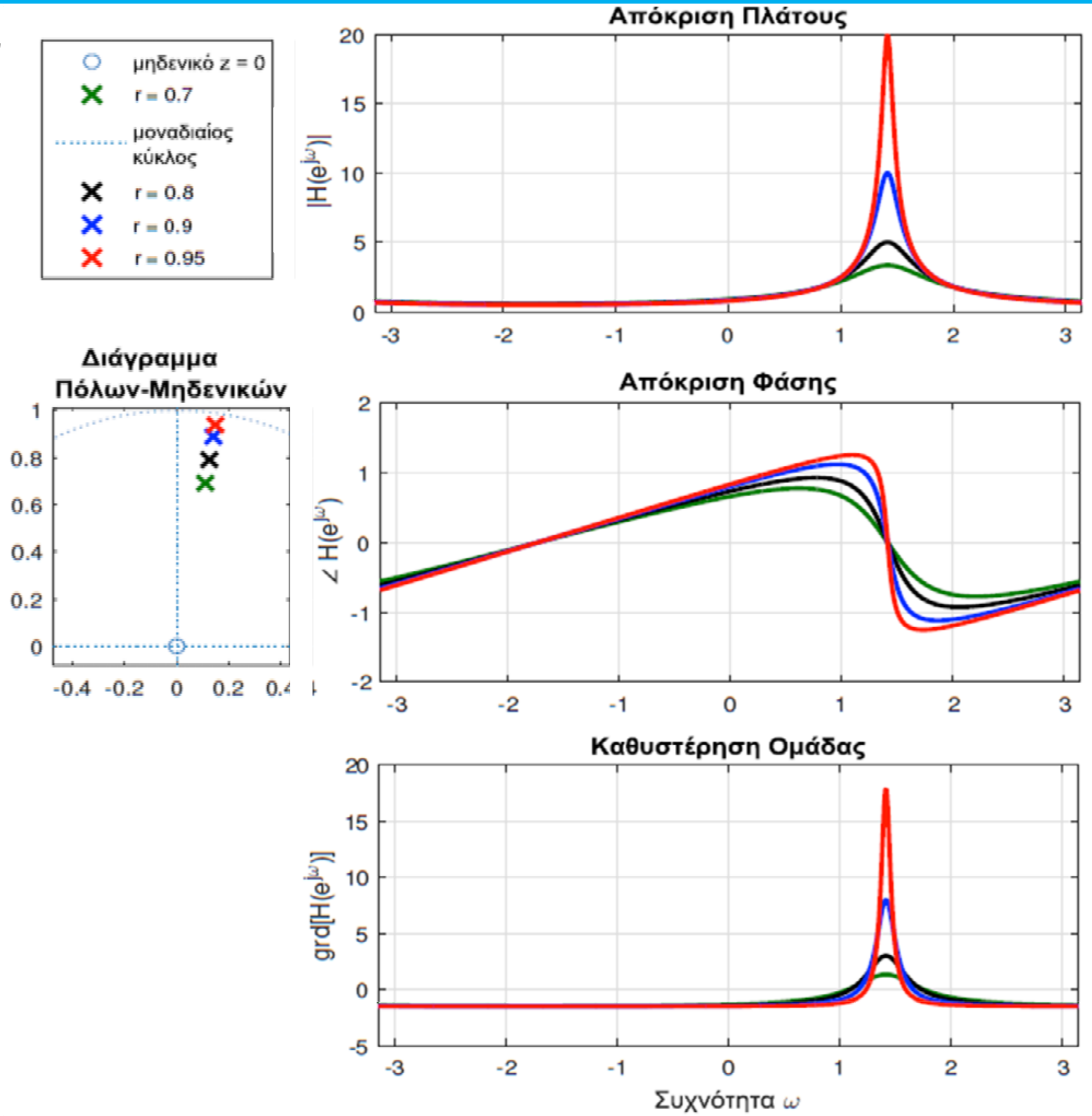
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων (επανάληψη…)**



- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- **Ερώτημα:** υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των αποκρίσεων πλάτους και φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται ως ρητή συνάρτηση μεταφοράς?

- **Εναλλακτική διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει την απόκριση φάσης από την απόκριση πλάτους? Αν ναι, πότε?

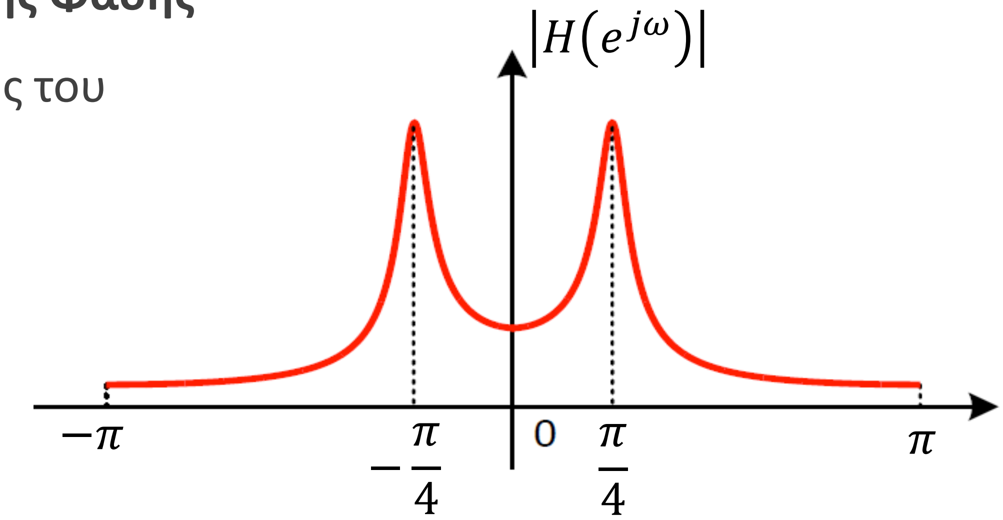
- **Πρακτικότερη διατύπωση:** μπορεί κανείς να υπολογίσει τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$?

- Η τελευταία διατύπωση προφανώς μας λέει ότι αν είναι εφικτός αυτός ο υπολογισμός, τότε μπορούμε από τη συνάρτηση μεταφοράς να βρούμε τα πάντα για ένα δεδομένο ΓΧΑ σύστημα

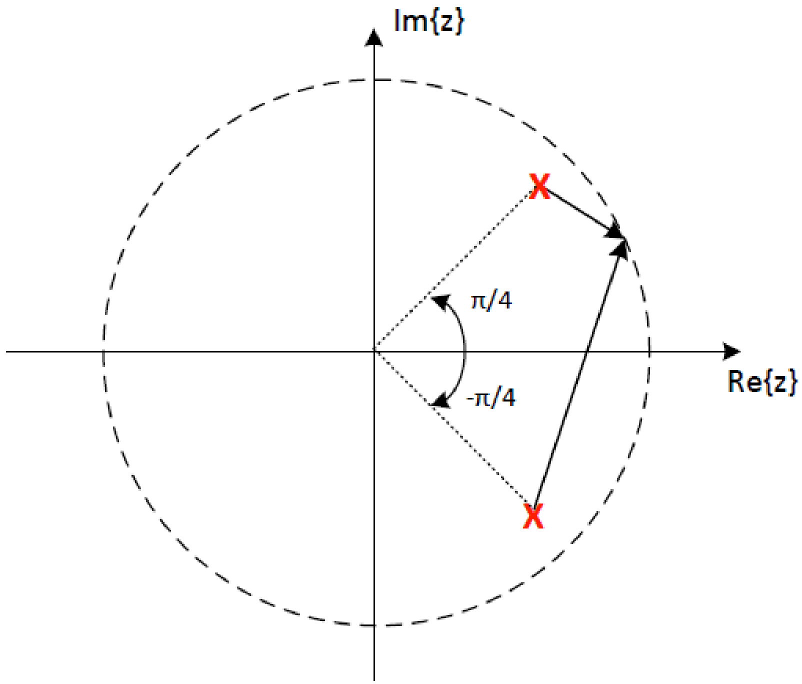
- **Το ερώτημα λοιπόν μπορεί να επαναδιατυπωθεί (για τελευταία φορά ☺) ως:** *Μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς* $H(z)$ *από την απόκριση πλάτους* $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$*?*

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- Έστω ότι μας δίνεται η απόκριση πλάτους του σχήματος



- Μπορούμε με κάποια ασφάλεια να υποθέσουμε ότι το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που «γεννά» αυτή την απόκριση πλάτους φαίνεται παρακάτω



- Μπορούμε να πούμε ότι

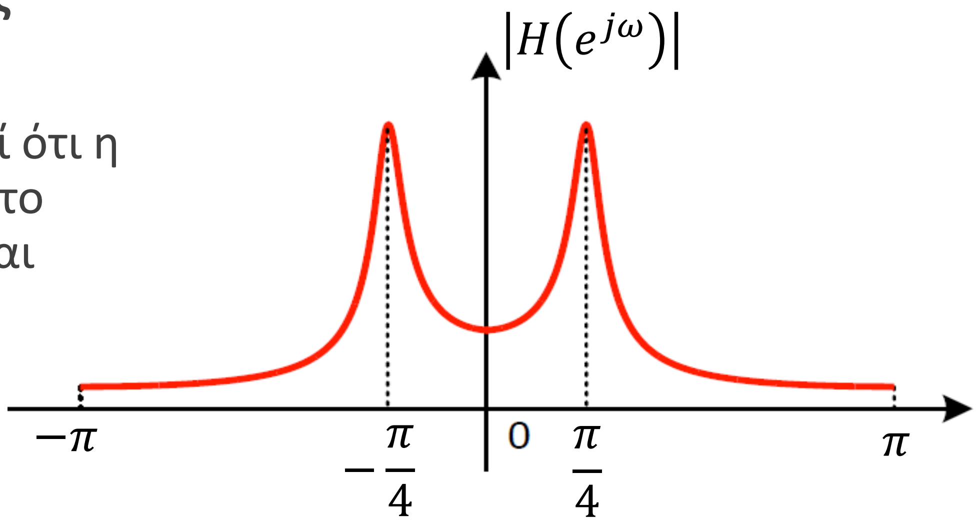
$$H_1(z) = \frac{A}{\left(1 - re^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - re^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

δηλ.

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \frac{|A|}{\left|e^{j\omega} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right|\left|e^{j\omega} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right|}$$

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- Όμως θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δεδομένη απόκριση πλάτους δίνεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών που φαίνεται παρακάτω

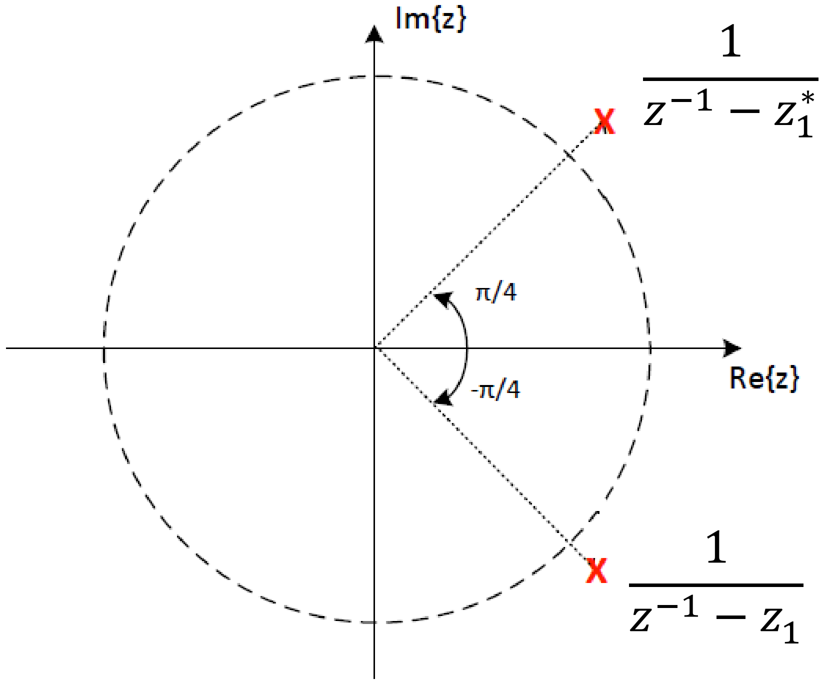


- Στην περίπτωσή μας έχουμε

$$H_2(z) = \frac{A}{\left(z^{-1} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z^{-1} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

δηλ.

$$\left|H_2\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{|A|}{\left|e^{-j\omega} - re^{-j\frac{\pi}{4}}\right|\left|e^{-j\omega} - re^{j\frac{\pi}{4}}\right|}$$



- Γιατί ισχύει ότι

$$\left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H_2\left(e^{j\omega}\right)\right| ?????$$

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

- Παρατηρήστε ότι όροι της μορφής $\frac{1}{1-z_1 z^{-1}}$ και $\frac{1}{z^{-1}-z_1^*}$ έχουν το ίδιο μέτρο για $z = e^{j\omega}$:

$$\frac{1}{|1-z_1 e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{-j\omega}(e^{j\omega}-z_1)|} = \frac{1}{|e^{j\omega}-z_1|} \quad \text{και} \quad \frac{1}{|e^{-j\omega}-z_1^*|}$$

  αφού οι όροι εντός του μέτρου είναι συζυγείς!

- Έτσι, πράγματι τα δυο συστήματα έχουν την ίδια απόκριση πλάτους!

- Αφού όμως $H_1(z) \neq H_2(z)$ προφανώς δε θα έχουν την ίδια απόκριση φάσης

- Το δεύτερο σύστημα έχει τους πόλους του στις **συζυγείς αμοιβαίες θέσεις** των πόλων του πρώτου συστήματος

- Οι πόλοι του πρώτου συστήματος βρίσκονται στις θέσεις (a, a^*) και του δεύτερου συστήματος στις θέσεις $\left(\frac{1}{a^*}, \frac{1}{a}\right)$
  - Το σύστημα εξακολουθεί να είναι πραγματικό και στις δυο περιπτώσεις

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Άρα υπάρχουν **<u>δυο</u>** συστήματα $H(z)$ με τη δεδομένη απόκριση πλάτους, τα οποία διαφέρουν ασφαλώς στην απόκριση φάσης, σωστά?
- Λάθος! ☺
- Μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμα συστήματα τα οποία θα έχουν τον έναν πόλο εντός και τον άλλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και τα οποία θα έχουν κι αυτά την ίδια απόκριση πλάτους!
  - …αν χαλαρώσουμε την απαίτηση να ανταποκρίνονται σε πραγματικά συστήματα ☺
- Είναι λοιπόν σαφές ότι η γνώση της απόκρισης πλάτους και του πλήθους των πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς δε μας εξασφαλίζει τη μονοσήμαντη γνώση της συνάρτησης μεταφοράς
  - …και κατά συνέπεια της απόκρισης φάσης

- Ας θέσουμε οπότε εκ νέου το ερώτημα: ***τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?***
- Χρειάζεται να περιορίσουμε τις επιλογές μας στις **θέσεις** των πόλων-μηδενικών!

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- ***Τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξάγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους και το πλήθος των πόλων-μηδενικών?***
- Η γνώση του πλήθους και των σχετικών **θέσεων** (εντός/εκτός μον. κύκλου, κλπ) των πόλων και των μηδενικών, καθώς και της απόκρισης πλάτους ορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση μεταφοράς
- Για ένα σύστημα ευσταθές και αιτιατό που να έχει και ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο, όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου : σύστημα **ελάχιστης φάσης**
- Κάτι τελευταίο…
- Το πλήθος πόλων-μηδενικών είναι απαραίτητη γνώση, μαζί με την απόκριση πλάτους;
- ***Ναι!*** Ο λόγος είναι ότι μπορεί κανείς να προσθέσει *άπειρους* πόλους και μηδενικά χωρίς να αλλοιώσει καθόλου την απόκριση πλάτους!!
    - Πώς? Πολλαπλασιάζοντας τα τέσσερα $H(z)$ που είδαμε με όρους της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

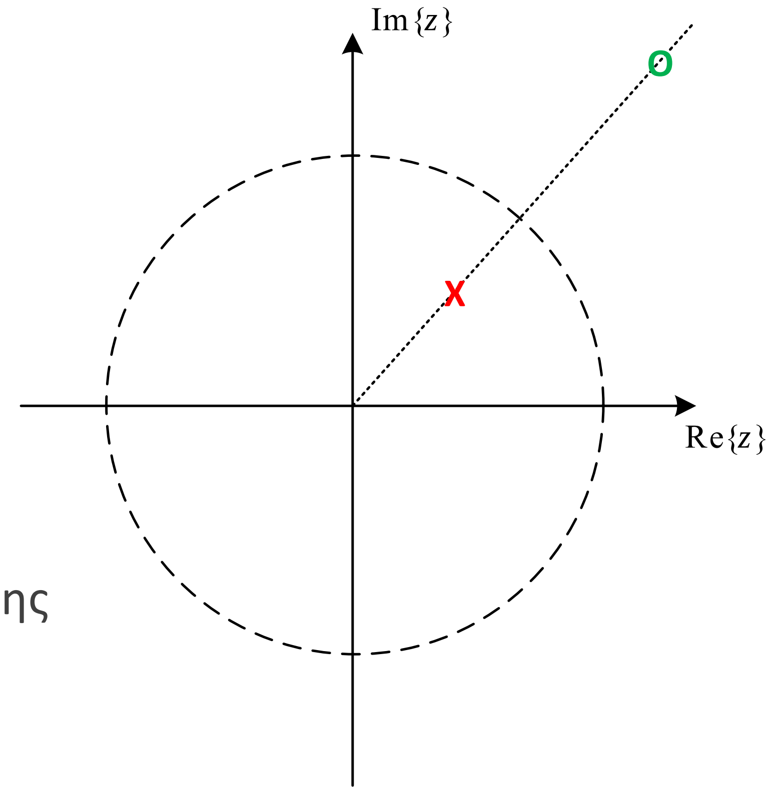
- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

- Τι συνεισφέρει ο παραπάνω όρος στην απόκριση πλάτους?

$$\left|\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}\right|\Bigg|_{z=e^{j\omega}} = \left|\frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{e^{-j\omega}(1 - a^* e^{j\omega})}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = 1$$

- (Μηδενικό, πόλος) = $\left(\frac{1}{a^*}, a\right)$
- Άπειρα τέτοια ζεύγη πόλων-μηδενικών δεν αλλοιώνουν την απόκριση πλάτους!
- Αλλοιώνουν ασφαλώς την απόκριση φάσης
- Τέτοια συστήματα ονομάζονται **all-pass συστήματα**
  - Θα τα μελετήσουμε στη συνέχεια



- Πολλές φορές μας δίνεται το τετράγωνο της απόκρισης σε συχνότητα $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$
- Μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες από αυτό?

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**
- Έχουμε $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = |H(z)|^2{}_{z=e^{j\omega}} = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$
- Άρα αν

$$H(z) = \frac{b_0\prod_{k=1}^{N}(1-b_k z^{-1})}{a_0\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})} \Longrightarrow H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1-b_k^* z\ )}{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k^* z\ )} \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^*$$

τότε

$$|H(z)|^2 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{N}(1-b_k z^{-1})(1-b_k^* z)}{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})\,(1-c_k^* z)}$$

$$|H(z)|^2\Big|_{z=e^{j\omega}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{N} 1+|b_k|^2 - 2|b_k|\cos(\omega - \angle b_k)}{\prod_{k=1}^{M} 1+|c_k|^2 - 2|c_k|\cos(\omega - \angle c_k)}$$

- Για κάθε πόλο $z = c_k$ του συστήματος $H(z)$, υπάρχει ένας ακόμη πόλος $z = \frac{1}{c_k^*}$ στο $|H(z)|^2$ και για κάθε μηδενικό $z = b_k$ του συστήματος $H(z)$ υπάρχει ένα ακόμη μηδενικό $z = \frac{1}{b_k^*}$ στο $|H(z)|^2$
- Το $|H(z)|^2$ διαθέτει συζυγή αμοιβαία ζεύγη πόλων-μηδενικών
- Το ένα στοιχείο του κάθε ζεύγους σχετίζεται με το $H(z)$ και το άλλο στοιχείο με το $H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$

- **Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης**

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - c_k z^{-1})} \Rightarrow H^*(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^* \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - b_k^* z^{-1^*})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - c_k^* z^{-1^*})} = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^* \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N} (1 - c_k^* z)}$$

Θέτω $z \longleftrightarrow \frac{1}{z^*} = z^{-1^*}$

Άρα $|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega})$

$$\underset{z=e^{j\omega}}{=} H(z) \cdot H^*(z)$$

$$= H(z) \cdot H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$