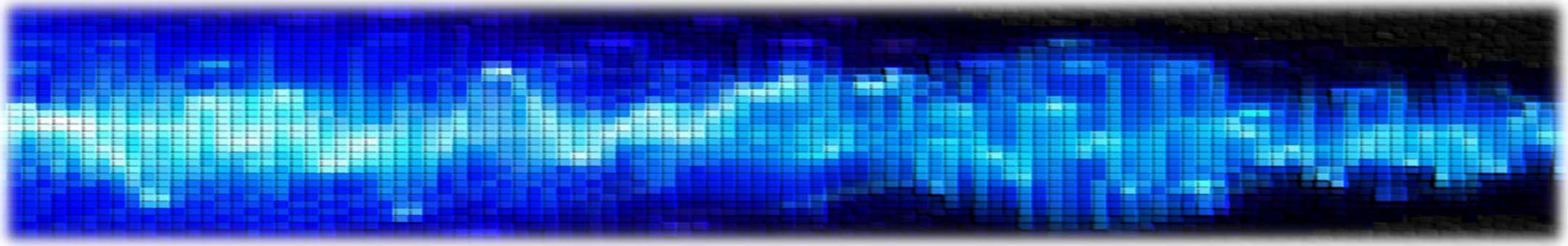
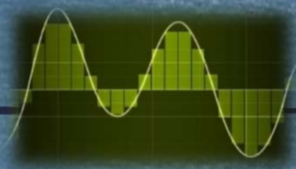
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η



- Συστήματα στο χώρο του Z

Τι περιέχει το HY370?

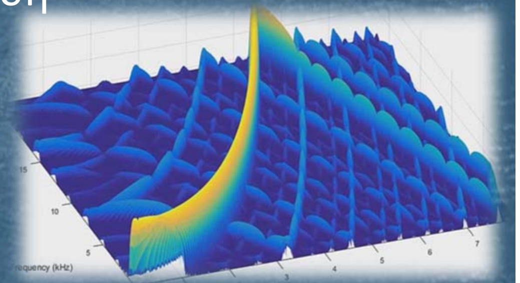


1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **Αντίστροφα Συστήματα**

- Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο
  - Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο $y[n] = x[n] * h[n]$, και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη
    - Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου

  - Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα $h_i[n]$ τέτοιο ώστε

$$y[n] * h_i[n] = x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n]$$

  δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο

  - Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$

  - Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του Ζ προκύπτει ότι

$$H_i(z)H(z) = 1, \qquad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$

  - Το σύστημα $h_i[n]$ ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του $h[n]$

  - Στο χώρο του Ζ, αν

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

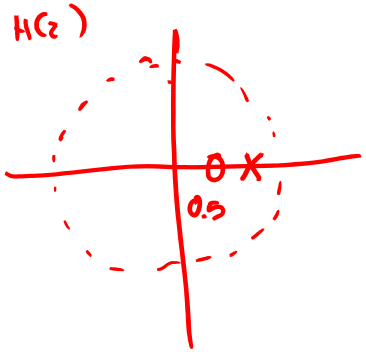
τότε

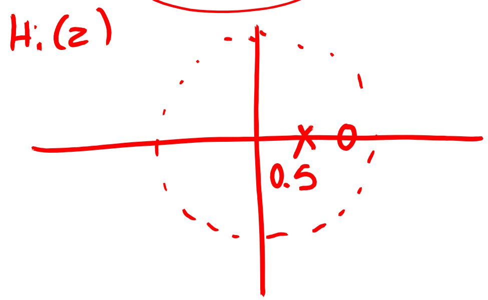
$$H_i(z) = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}$$

Οι πόλοι του συστήματος γίνονται μηδενικά του αντιστρόφου και τα μηδενικά του συστήματος γίνονται πόλοι του αντιστρόφου

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:

O Έστω $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, |z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$





$$H_i(z): \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} - \frac{0.8}{1-0.5z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

$|z| < 0.5$

$|z| > 0.5$ $\cap |z| > 0.8 \neq \emptyset$

$\Rightarrow h_i[n] = 0.5^n u[n] - 0.8\ 0.5^n u[n] * \delta[n-1] \Rightarrow$

$\Rightarrow h_i[n] = 0.5^n u[n] - 0.8\ 0.5^{n-1} u[n-1]$

	Ευστάθεια	Αιτιατό
$H(z)$	✓	✓
$H_i(z)$	✓	✓

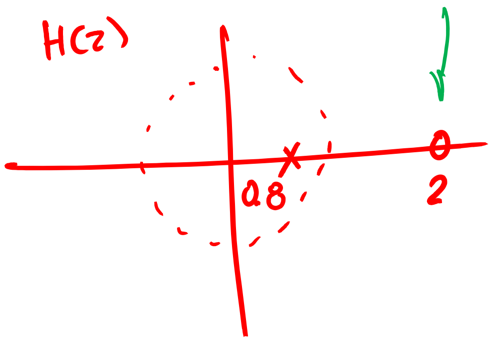
- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:

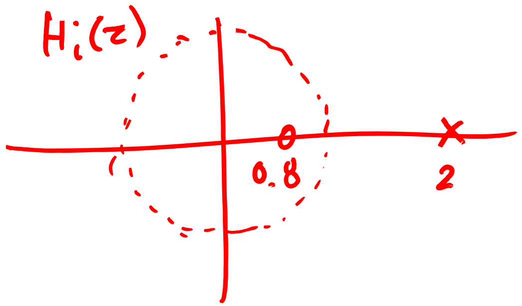
Ο Έστω $H(z) = \frac{0.5-z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, |z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$ $|z|<a$

$0.5 - z^{-1} = 0 \Rightarrow z^{-1} = 0.5 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 2$ μηδ.

0.8 πόλ.





$$H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{\frac{1}{2}-z^{-1}} = \frac{2-1.6z^{-1}}{1-2z^{-1}} = \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{1.6}{1-2z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

$|z|<2$

$|z|>2$

$|z|<2$: $h_i[n] = 2(-1)2^n u[-n-1] + 1.6\, 2^n u[-n-1] * \delta[n-1] =$

$h_i[n] = -2^{n+1} u[-n-1] + 1.6\, 2^{n-1} u[-n]$ Ευσταθές ✓ | αιτιατό: ✗

$|z|>2$: $h_i[n] = 2 \cdot 2^n u[n] - 1.6\, 2^n u[n] * \delta[n-1] = 2^{n+1} u[n] - 1.6\, 2^{n-1} u[n-1]$

ευσταθές: ✗ | αιτιατό ✓

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα
  - Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό
  - Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$
    - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του **<u>εντός</u>** του μοναδιαίου κύκλου, αφού το πεδίο σύγκλισης του είναι $\{|z| > \max|c_k|\}$ και $|c_k| < 1, \forall k$
    - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε
  - Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα $H(z)$ έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?
  - Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
    - **Άρα <u>όλα</u> τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται ΚΑΙ ΑΥΤΑ εντός του μοναδιαίου κύκλου**
  - Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης – Minimum Phase**
    - θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα…

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ. Ζ ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (== «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Ζ «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
  - Πώς?
    - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «διαισθητική»
- θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε *ακριβώς* πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Ας γράψουμε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και την καθυστέρηση ομάδας μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, όταν αυτή υπολογίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

❑ Απόκριση Πλάτους

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |\mathrm{A}| \frac{\prod_{k=1}^{M}\left|1 - b_k e^{-j\omega}\right|}{\prod_{l=1}^{N}\left|1 - a_k e^{-j\omega}\right|}$$

❑ Απόκριση Φάσης

$$\begin{aligned}\angle H\left(e^{j\omega}\right) &= \angle A + \angle \prod_{k=1}^{M} (1 - b_k e^{-j\omega}) - \angle \prod_{k=1}^{M} \left(1 - a_k e^{-j\omega}\right) \\ &= \angle A + \sum_{k=1}^{M} \angle(1 - b_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^{M} \angle(1 - a_k e^{-j\omega})\end{aligned}$$

❑ Καθυστέρηση Ομάδας

$$\tau_g\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=1}^{M} \frac{d}{d\omega} \angle(1 - a_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^{M} \frac{d}{d\omega} \angle(1 - b_k e^{-j\omega})$$

- Κοινό στοιχείο: όροι της μορφής $\left(1 - c_k e^{-j\omega}\right)$!!

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Ας θεωρήσουμε τον όρο $1 - ce^{-j\omega}$, με $c \in \mathbb{C}$
- Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις
  - Το c είναι πόλος
  - Το c είναι μηδενικό
- Θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις επάνω στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης
- Ξεκινώντας από τη θεώρηση του $c = re^{j\theta}$ ως **μηδενικό**:

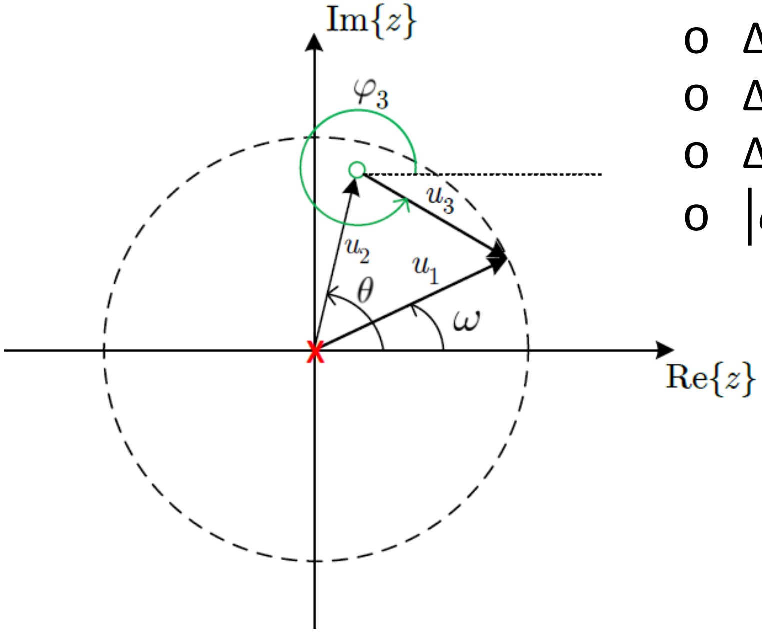
$$H(z) = 1 - cz^{-1} = 1 - re^{j\theta}z^{-1}$$

- Οπότε:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right| = \left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|$$

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = \left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|$$



- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από O ως το μηδενικό
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από μηδενικό ως το μοναδ. κύκλο
- $\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right| = |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{u}_3|$

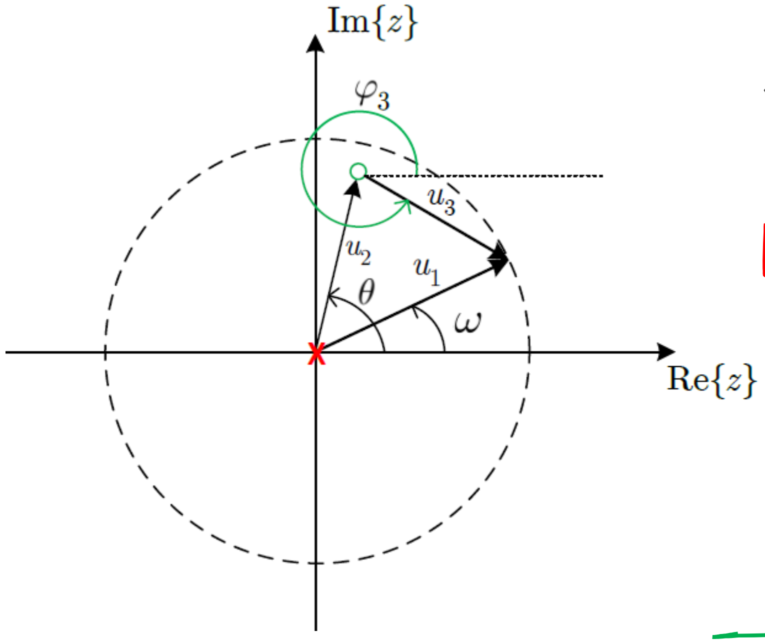
Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται MONO από το μήκος του $\vec{u}_3$!!

- Για την απόκριση φάσης

$$\angle\left(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right) = \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) - \angle e^{j\omega} = \phi_3 - \omega$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται MONO από τη διαφορά $\phi_3 - \omega$!!

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = |\vec{u}_3|$$

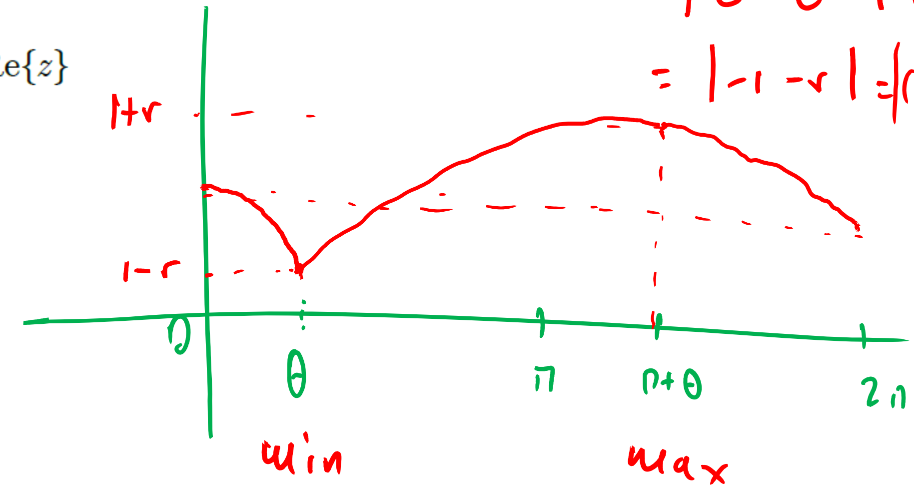
$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \phi_3 - \omega$$

$c = r \cdot e^{j\theta}$

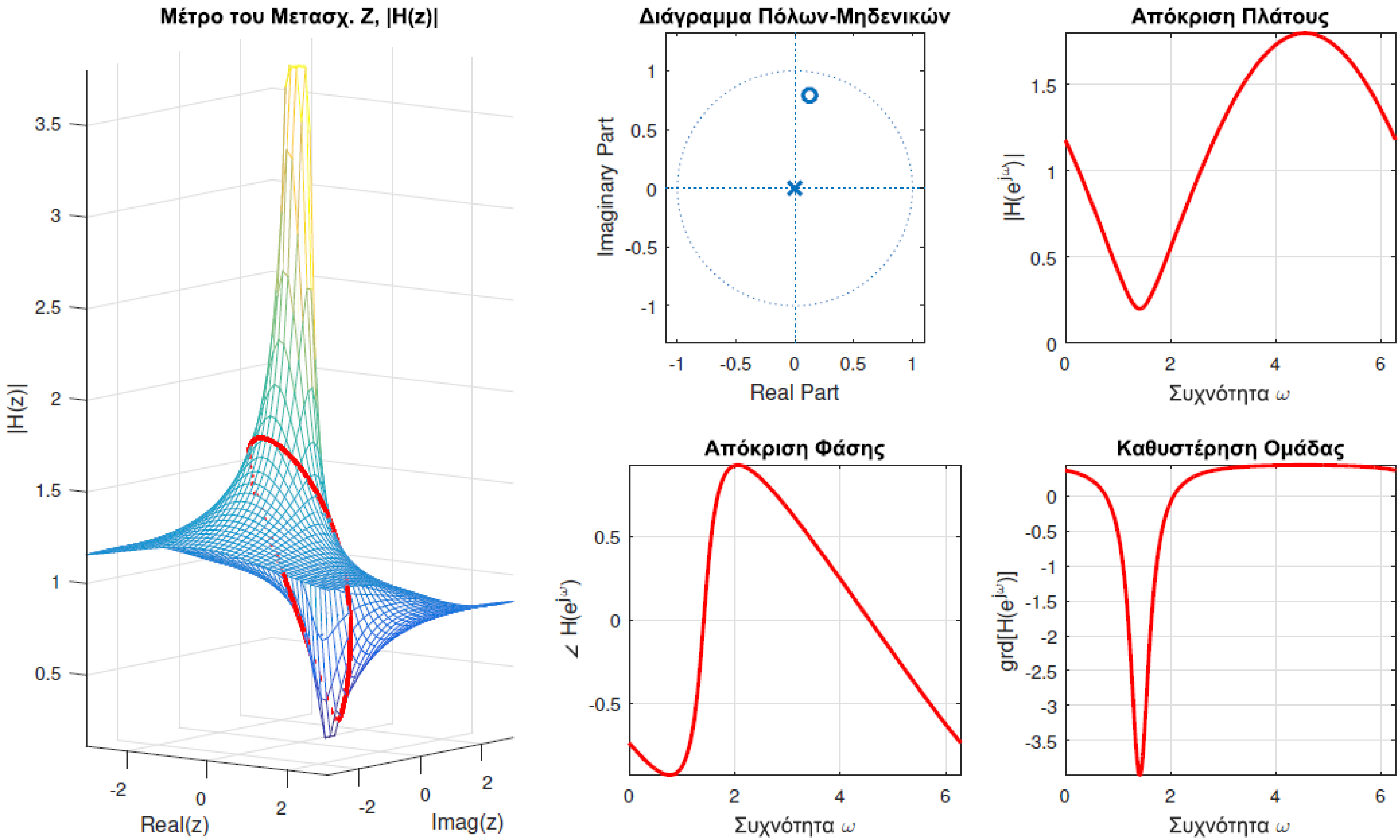
$\omega = \theta : \left| e^{j\theta} - r e^{j\theta} \right| = \left| e^{j\theta} \right| \left| 1 - r \right| =$
$= |1-r|$

$\omega = \pi + \theta : \left| e^{j\omega} - r e^{j\theta} \right| =$
$= \left| e^{j\pi} \cdot e^{j\theta} - r e^{j\theta} \right| = \left| e^{j\theta} \right| \left| e^{j\pi} - r \right|$
$= |-1-r| = |(-1)|\,|1+r| = |1+r|$

$|H(e^{j\omega})|$

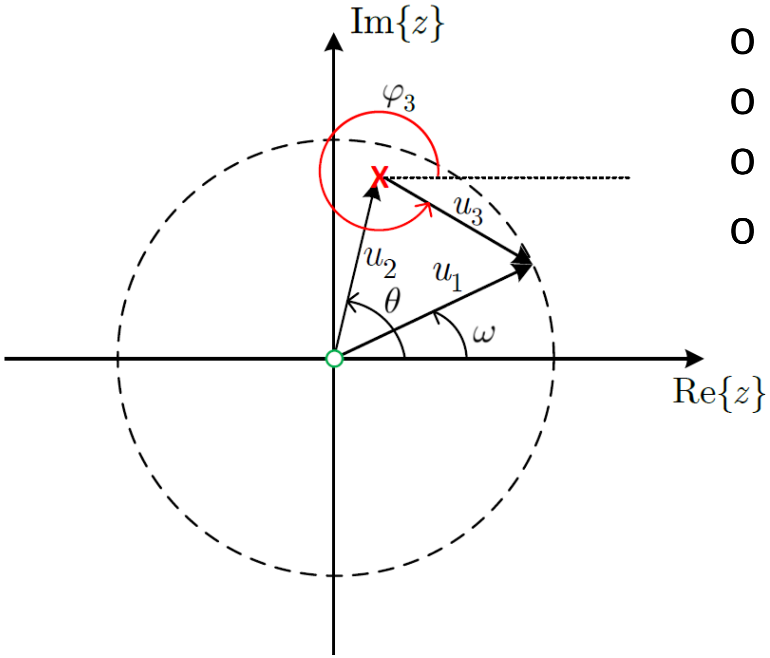


- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{\left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|} = \frac{1}{\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|}$$



- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από O ως τη θέση του $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από $re^{j\theta}$ ως το μοναδ. κύκλο
- $\frac{1}{\left|e^{j\omega}-re^{j\theta}\right|} = \frac{1}{\left|\vec{u}_1-\vec{u}_2\right|} = \frac{1}{\left|\vec{u}_3\right|}$

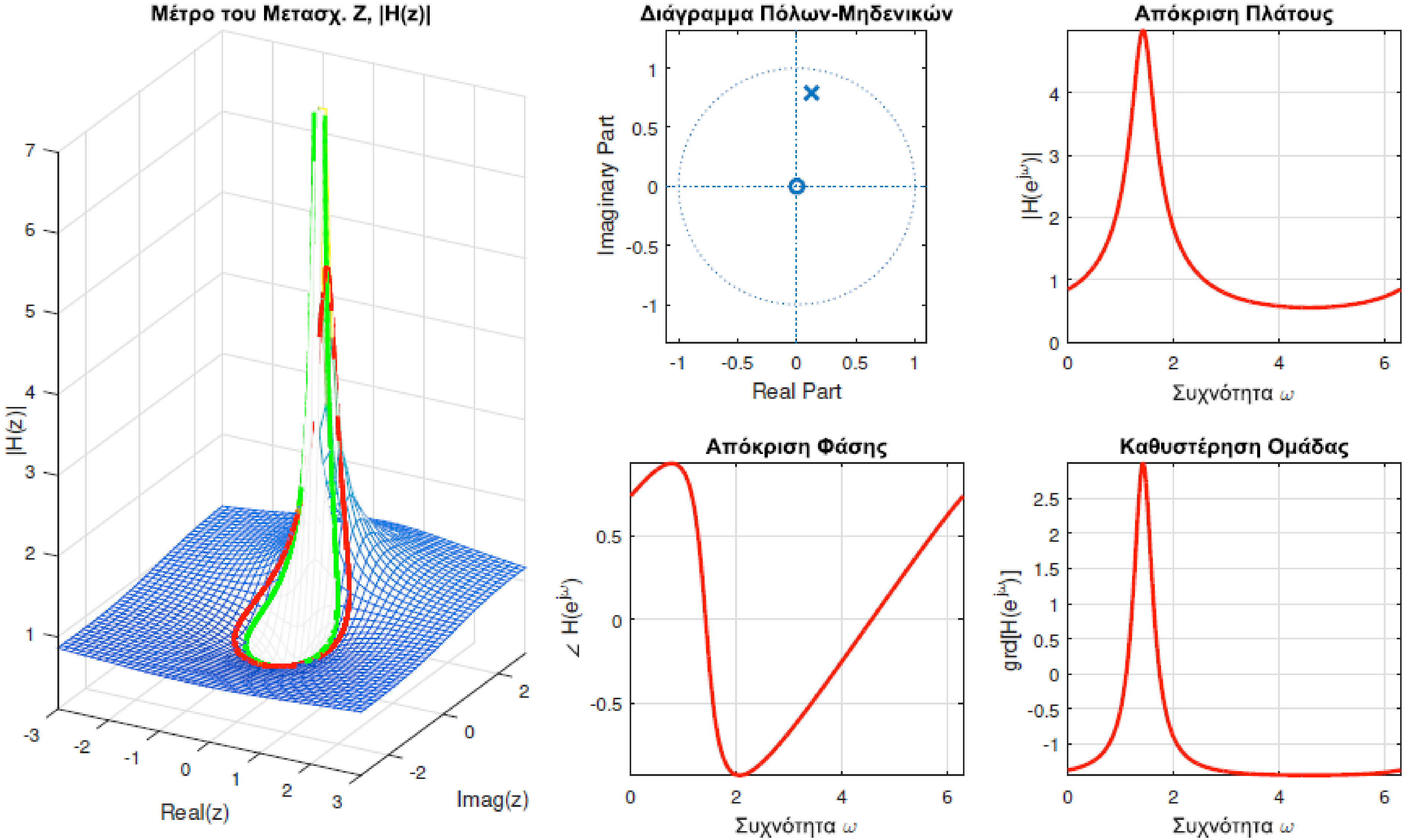
Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το (αντίστροφο) μήκος του $\vec{u}_3$!!

- Για την απόκριση φάσης

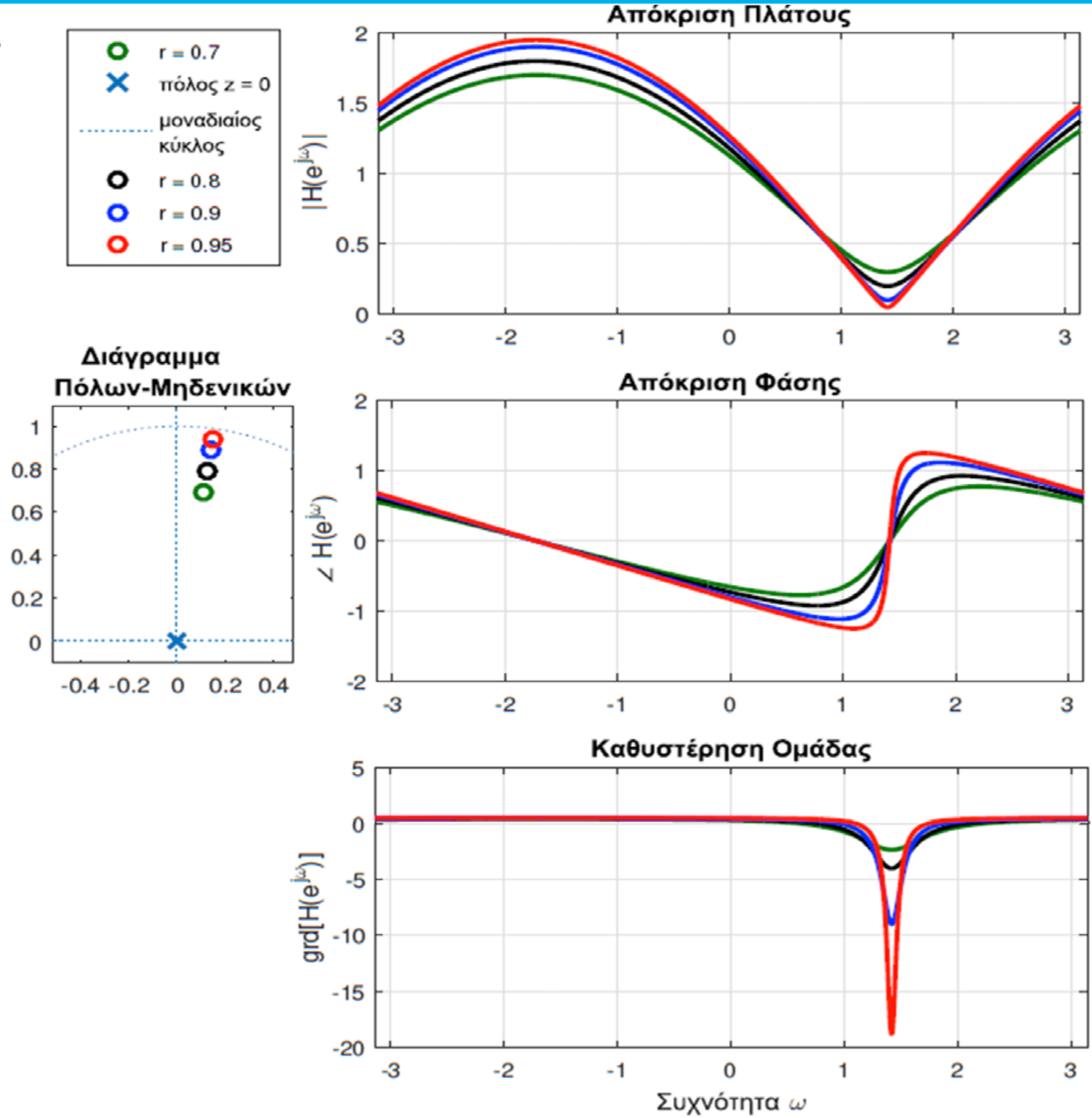
$$\angle\frac{1}{\left(1-re^{j\theta}e^{j\omega}\right)} = \angle e^{j\omega} - \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) = \omega - \phi_3$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\omega - \phi_3$!!

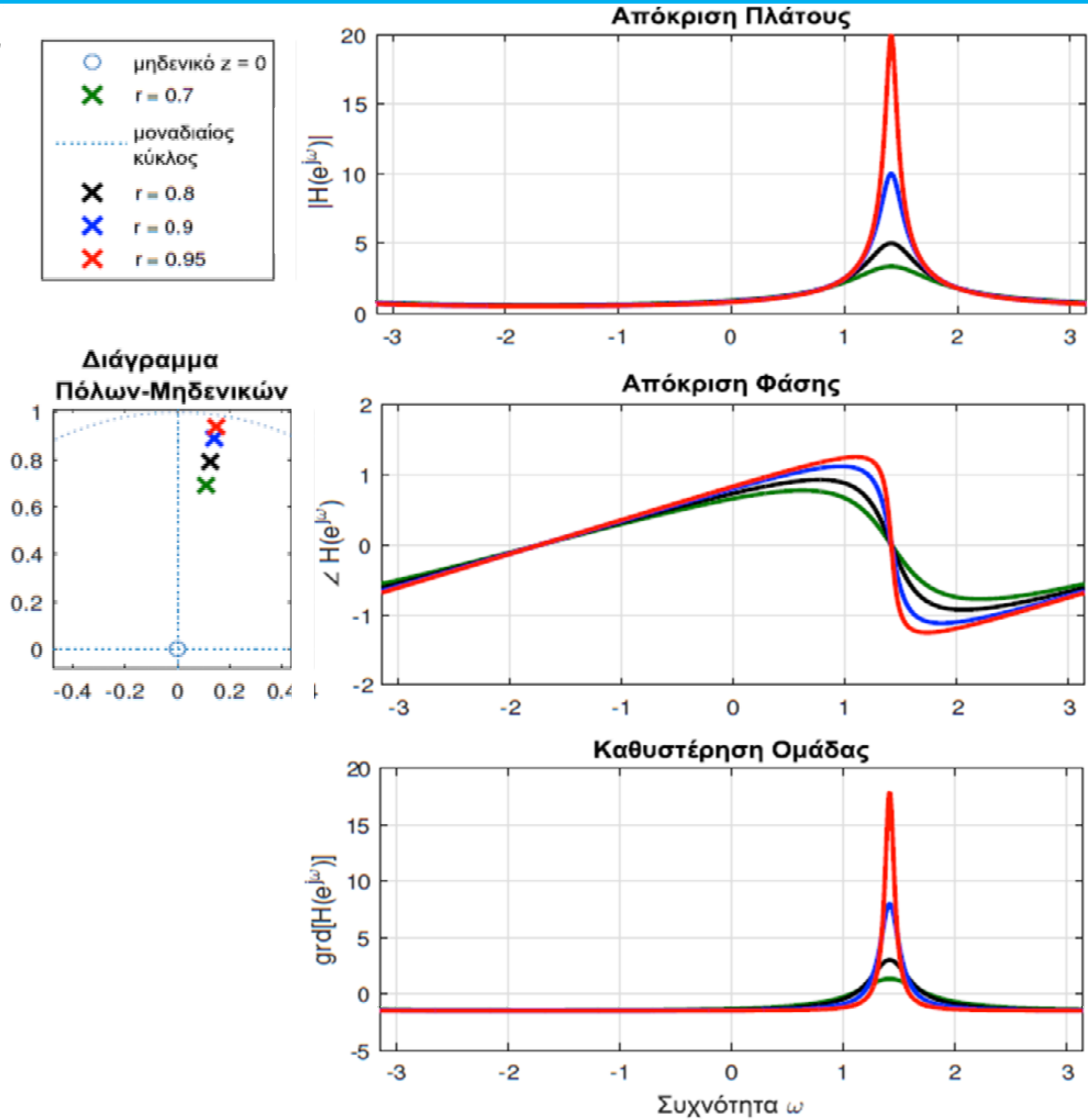
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



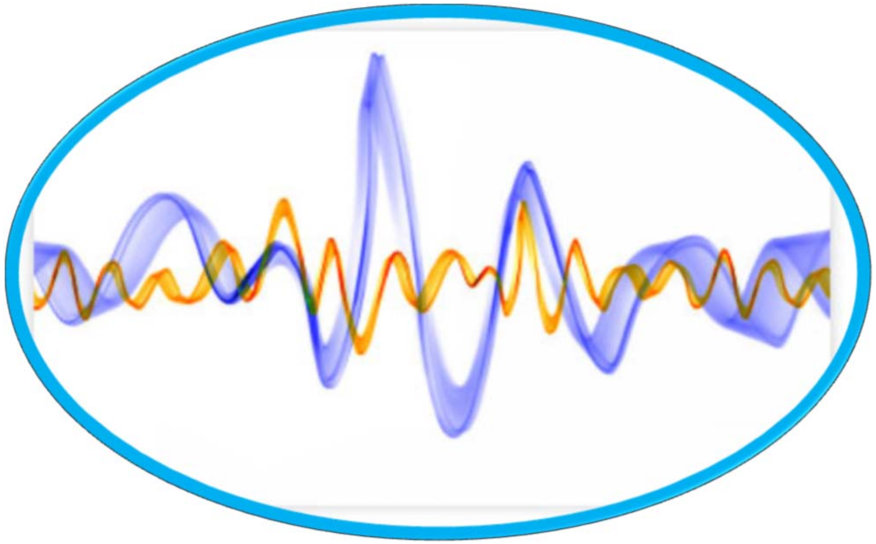
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



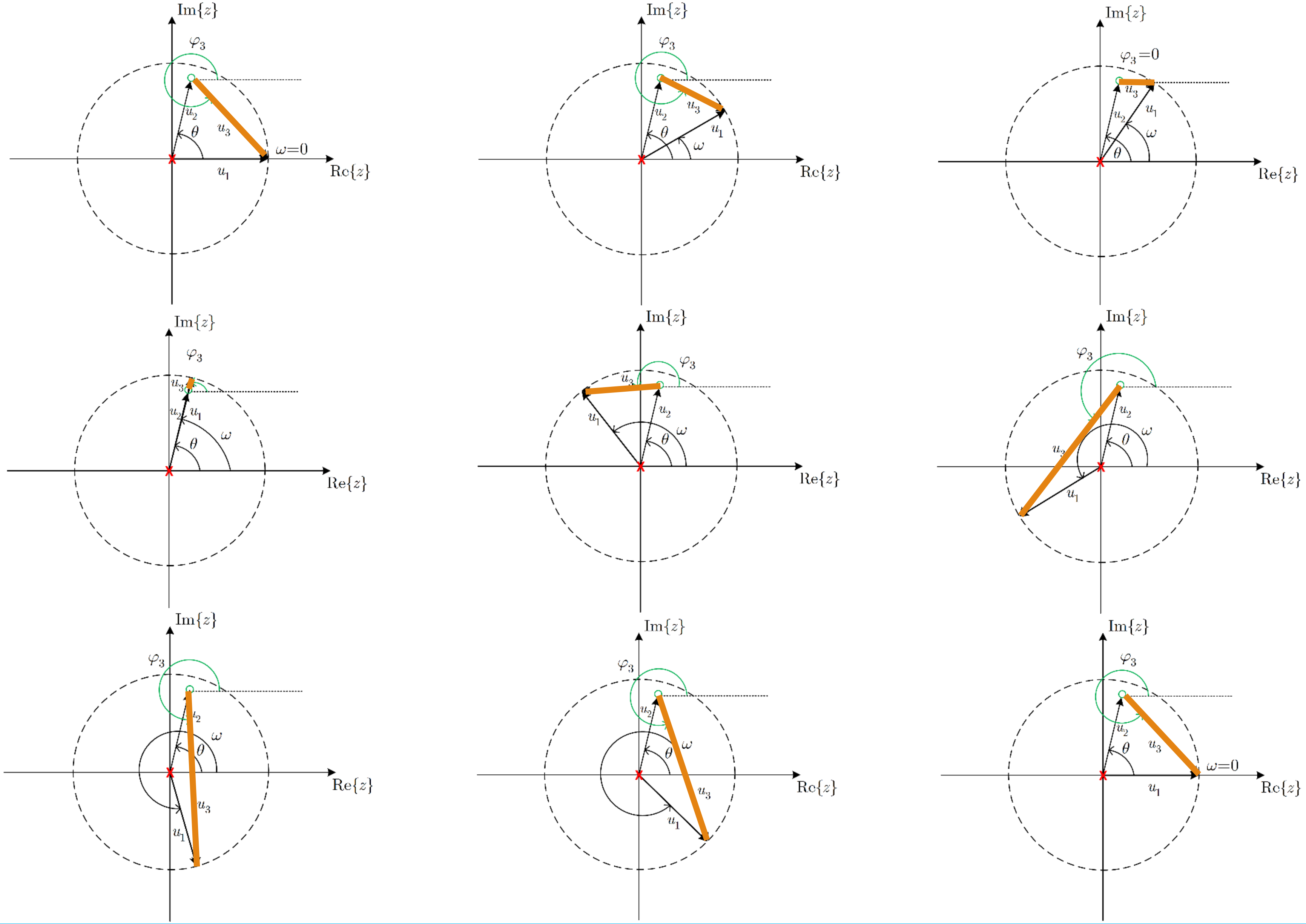
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



• **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**