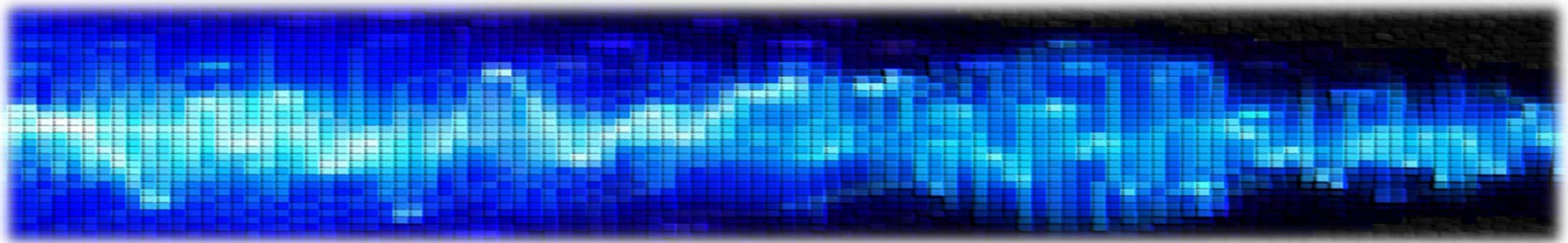

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

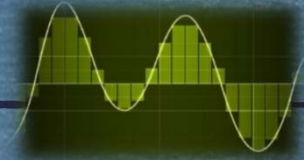
ΔΙΑΛΕΞΗ 14^Η



- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Z

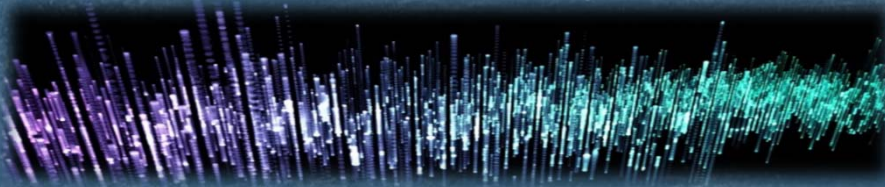


Τι περιέχει το ΗΥ370?



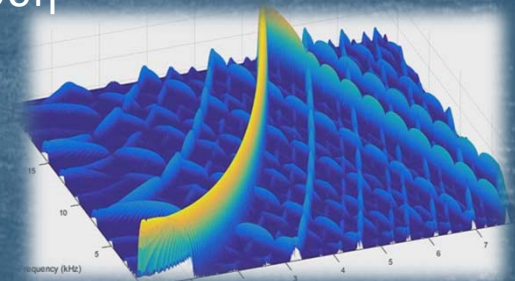
1^ο Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier



2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



- **FIR συστήματα (επανάληψη...)**
 - **Συμπεράσματα**
 - Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$
 - Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$
 - Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$
-

- **IIR συστήματα (επανάληψη...)**

- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι
 - Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$
 - Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$
 - Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
 - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών (επανάληψη...)

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^M b_l z^{-l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

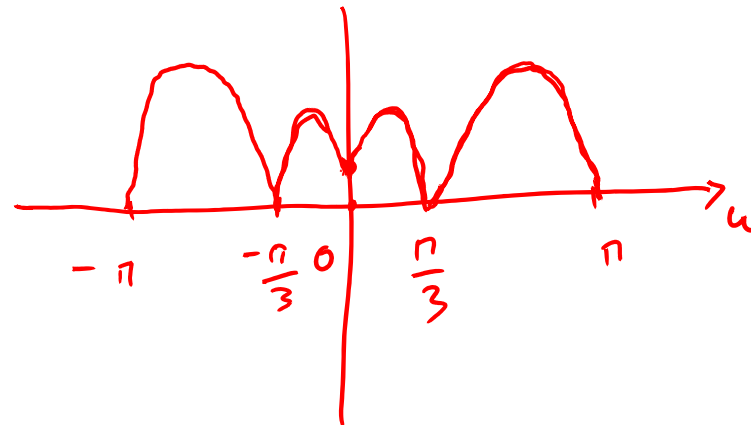
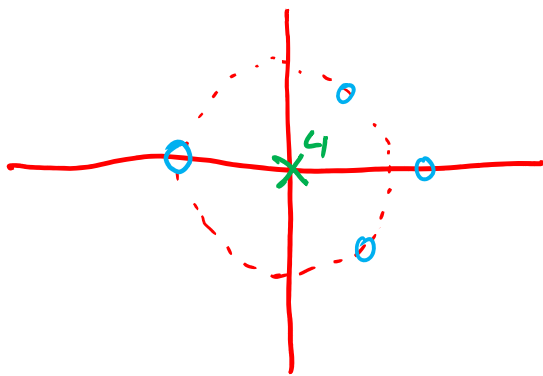
○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$$

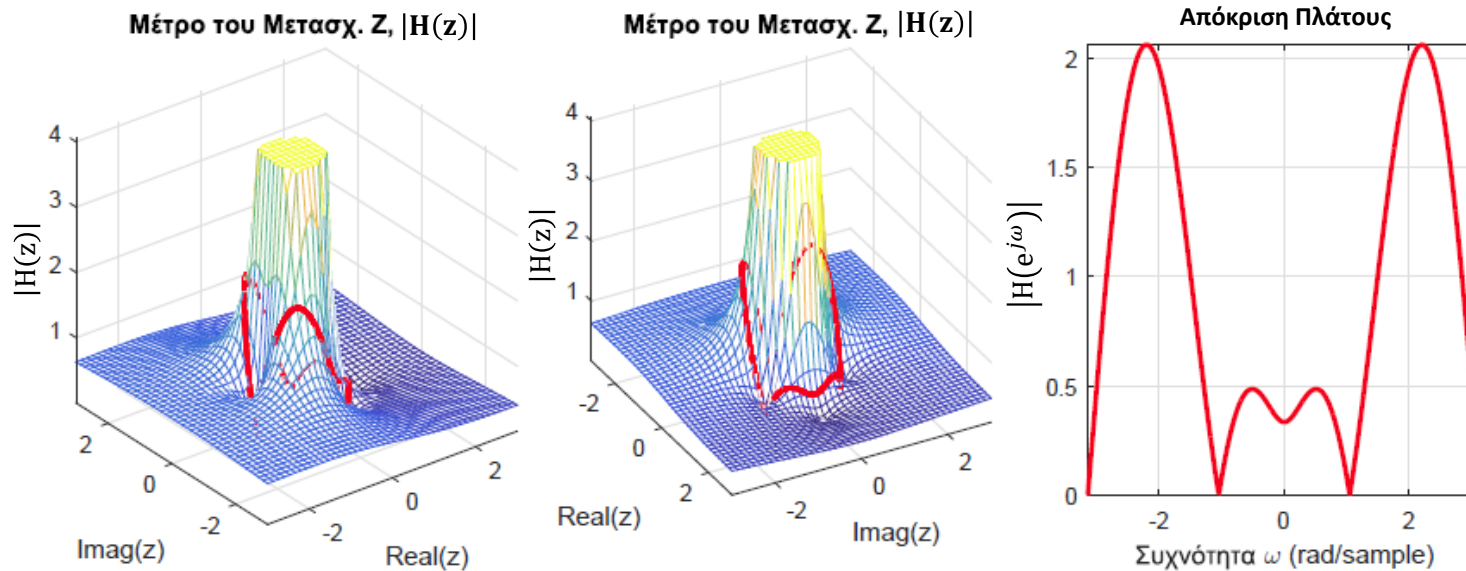
Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

$$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-3}X(z) - \frac{2}{3}z^{-4}X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \quad \begin{array}{l} \text{μηδ: } -1, 4/3, e^{j\pi/3}, e^{-j\pi/3} \\ \text{πόλοι: } 4 \rightarrow 0 \end{array}$$



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών
- Παράδειγμα:



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

Ο Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

$$Y(z) (1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z) (1 - 2z^{-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{z^{-1}(z-2)}{z^2(z^2+2z-3)} = \frac{z(z-2)}{z^2+2z-3}$$

μηδενικά: 0, 2
 πόλοι: -3, 1

Μη αιτιατό: ROC $1 < |z| < 3$

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 3z^{-1}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{5}{4} \frac{1}{1 + 3z^{-1}}$$

$$A = (1 - z^{-1})H(z) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = -\frac{1}{4}$$

$$B = (1 + 3z^{-1})H(z) \Big|_{z^{-1}=-3} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{matrix} |z| > 1 \\ |z| < 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} |z| > 3 \\ |z| < 3 \end{matrix}$$

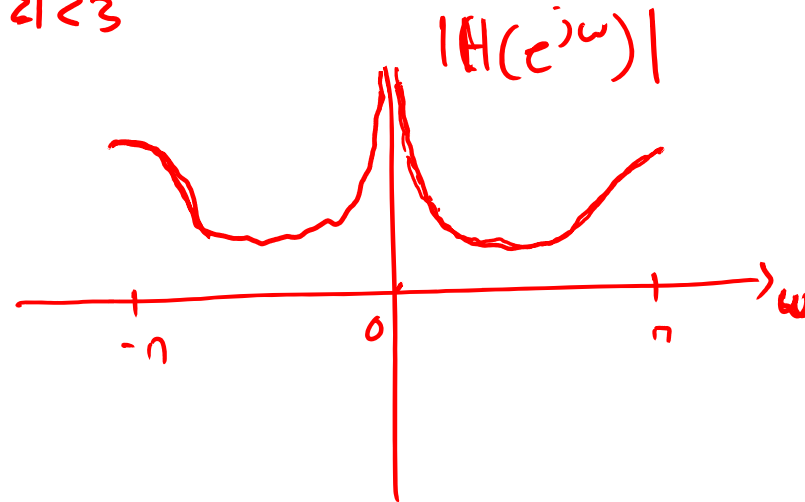
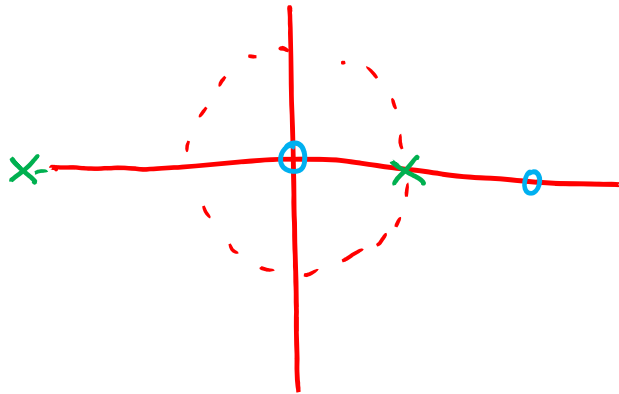
• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

$$\sim a^n u[n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

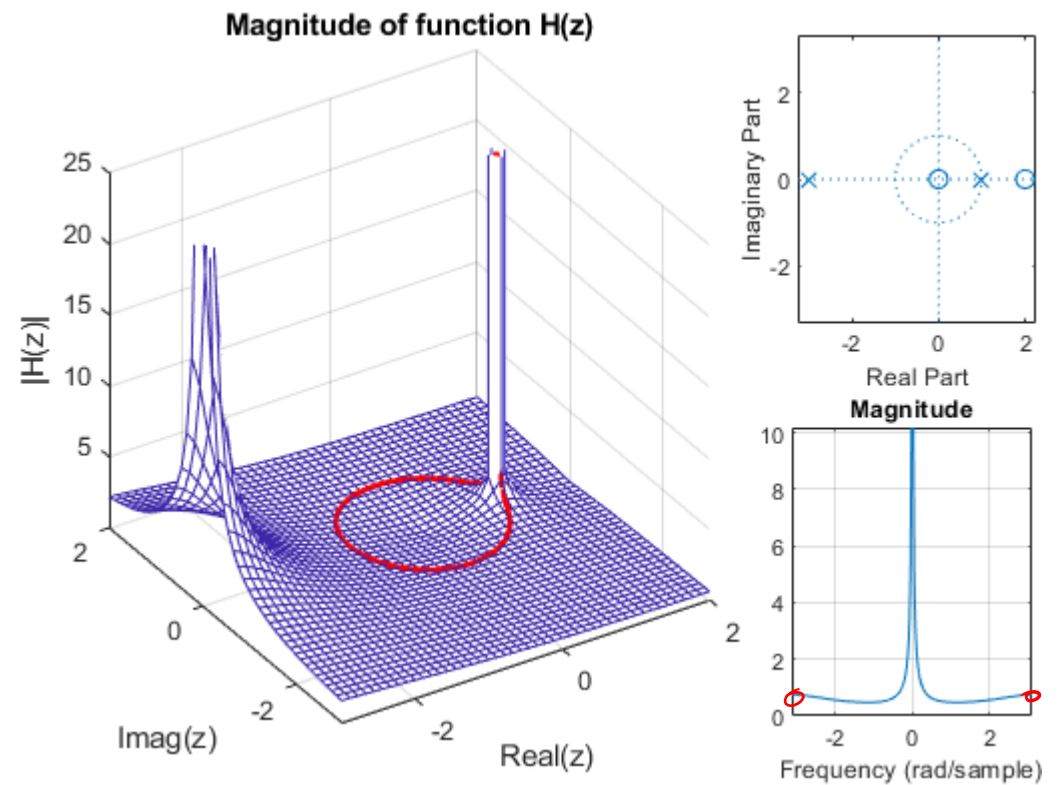
• Παράδειγμα:

$$H(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{5}{4} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad |z| > 1$$

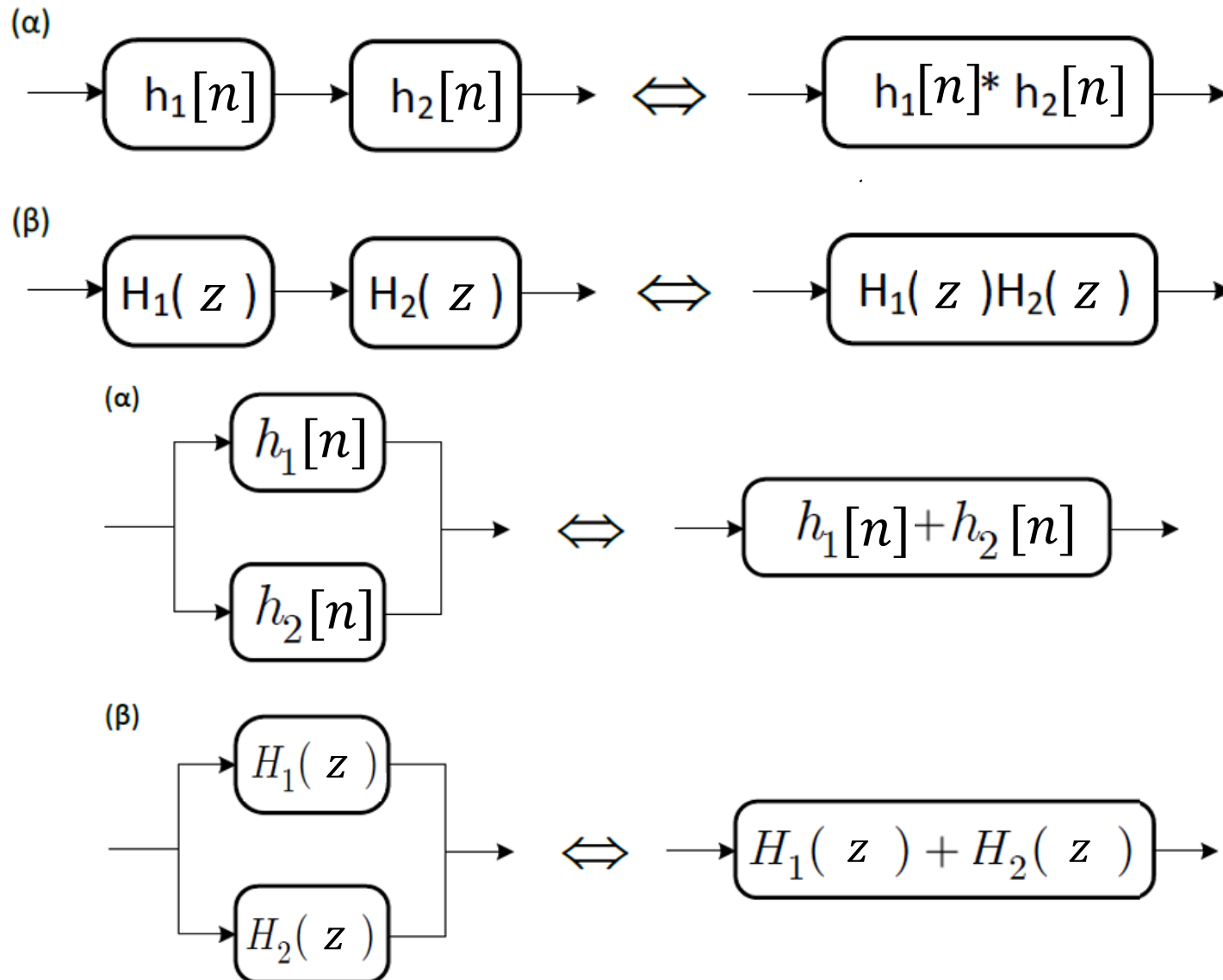
$$\Rightarrow h[n] = -\frac{1}{4} u[n] - \frac{5}{4} (-3)^n u[n-1] \quad |z| < 3$$



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών
 - Παράδειγμα:



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Διατάξεις Συστημάτων



- **Ευστάθεια στο χώρο του Z**

- Έχουμε δείξει ότι αν $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν $|\gamma_i| < 1, \forall i$, όπου γ_i οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές



- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του $h[n]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall \omega$



- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Z, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Περιοχές > σχέσεις:

1) $|z| < \frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2} < |z| < 2 \rightarrow$ ευσταθές $\rightarrow h[n] = -2^n u[n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

3) $|z| > 2 \rightarrow$ αιτιατό $\rightarrow h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} \Rightarrow y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2}x[n-1]$$

$$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| < a$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > a$$

μυδενικά: $0, \frac{4}{3}$

πόλοι: $2, -\frac{1}{2}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
- Παράδειγμα:

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
 - Παράδειγμα:

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$- a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

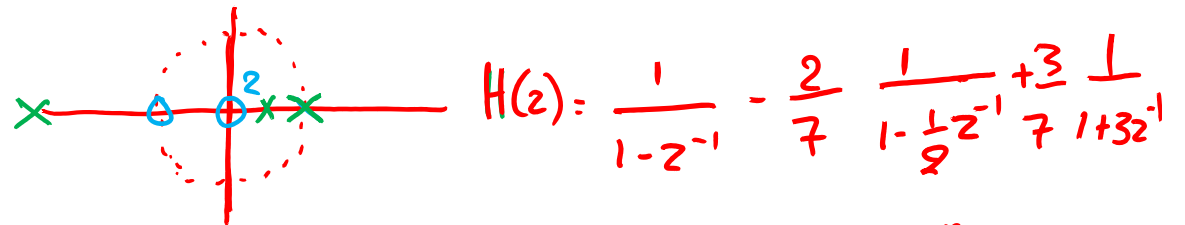
$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + 3z^{-1})}, R_H$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

Πόλοι: $1, \frac{1}{2}, -3$

Μηδ: $-1, 0, 0$



	Ευστ	Αιτ
1) $ z < 1/2$	x	x
2) $1/2 < z < 1$	x	x
3) $1 < z < 3$	x	x
4) $ z > 3$	x	✓

$h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$
 $h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$
 $h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1]$
 $h[n] = u[n] - \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n]$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Ευστάθεια**
- Παράδειγμα:

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

