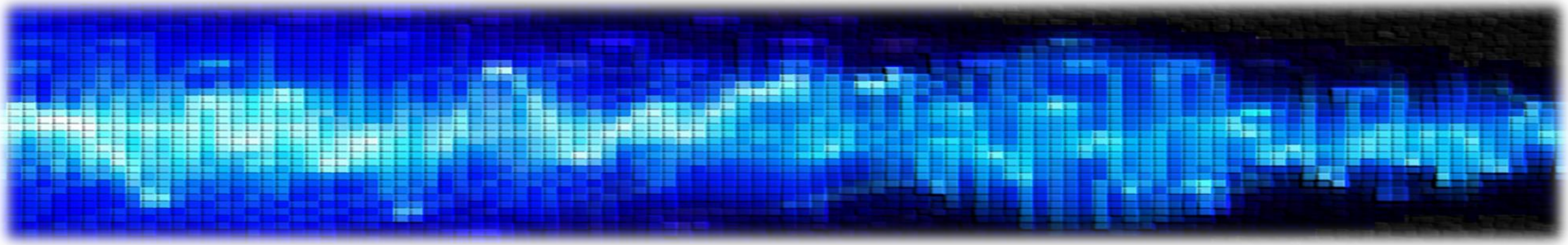
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η

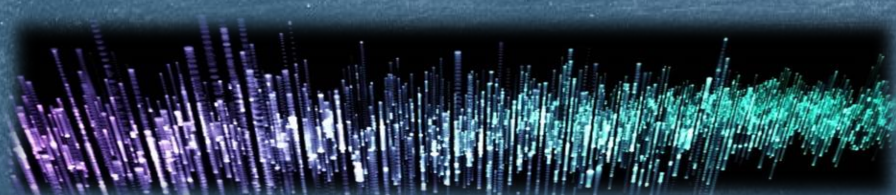


- Μετασχηματισμός Ζ
- Ιδιότητες & Ζεύγη

Τι περιέχει το ΗΥ370?

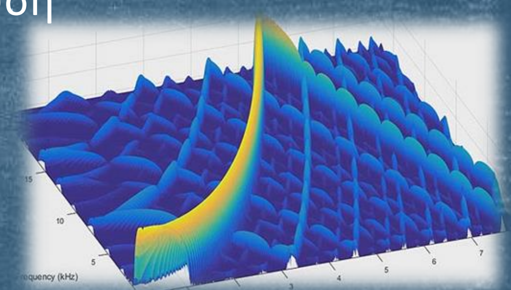
1^{o} Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- **Πεδίο Σύγκλισης**: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

- Ζεύγη:

Σήμα στο χρόνο	Μετασχηματισμός Z
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\delta[n]$	$1, \forall z$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 > 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert > 0$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 < 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert < \infty$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

  - Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

  - Εκτιμούμε το μετασχ. Ζ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

  - Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

  - Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
    - ΌΧΙ!
    - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ!

  - Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

Σχέση Μετασχ. Ζ και Μετασχ. Fourier

(α′) Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Ζ $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β′) Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη "φέτα" της επιφάνειας του μετασχ. Ζ στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

(γ′) Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά "φέτες" των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

  - Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

  - Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

  - Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$

  - Δείτε τι συμβαίνει…

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}}$$

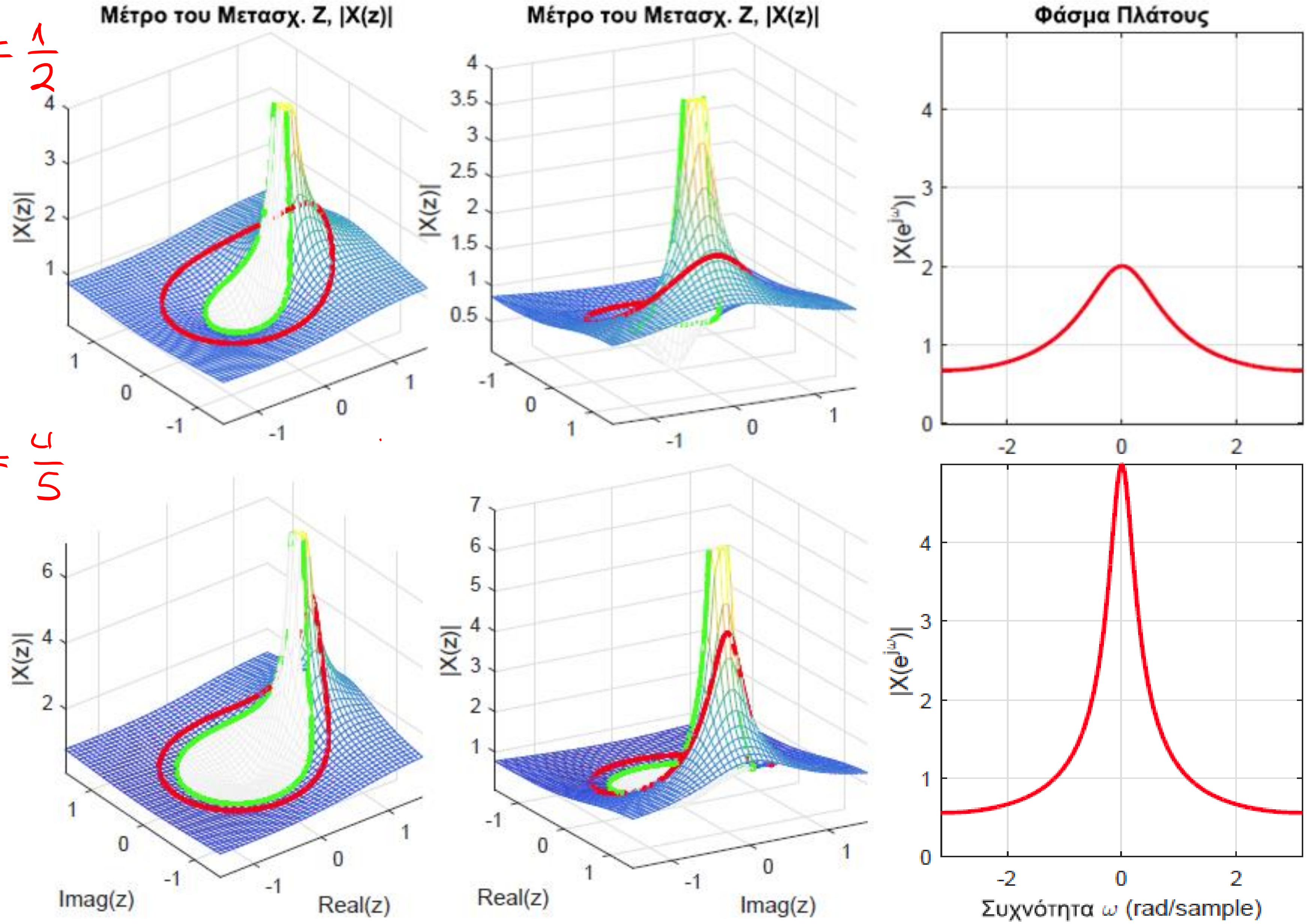
$$|X(z)| = \frac{1}{|1 - az^{-1}|} = \frac{1}{|1 - a(re^{j\omega})^{-1}|}$$

$$= \frac{1}{|1 - ar^{-1}e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|1 - \frac{a}{r}e^{-j\omega}|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{a}{r}\cos\omega)^2 + (\frac{a}{r})^2\sin^2\omega}}, \quad r > a$$

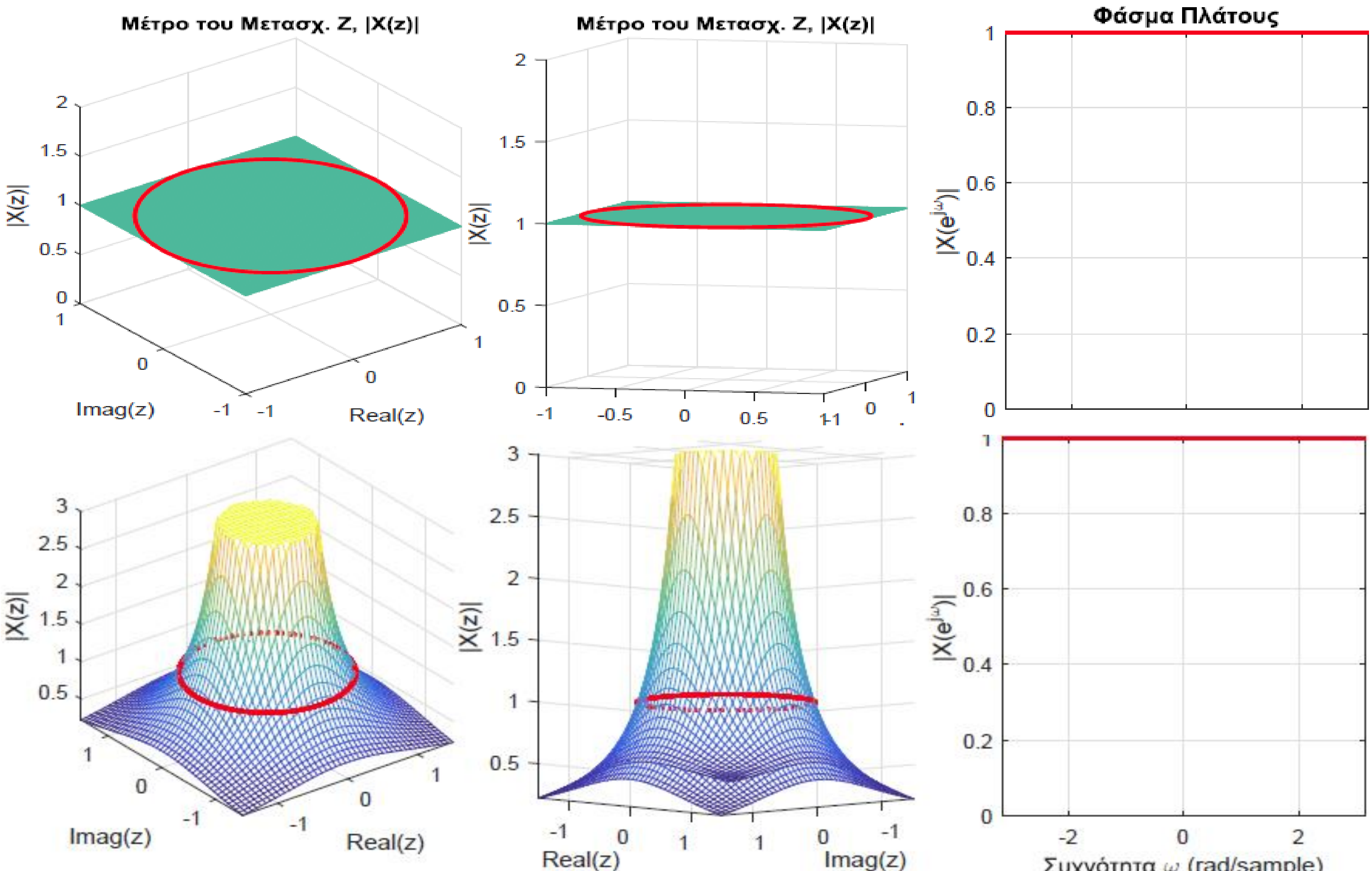
- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

$a = \frac{1}{2}$

$a = \frac{4}{5}$



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier** $z \to 1, \forall z$ $\quad z \to z^{-2}, |z| > 0$
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n]$, $x[n] = \delta[n-2]$?



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot z^{-n}$$

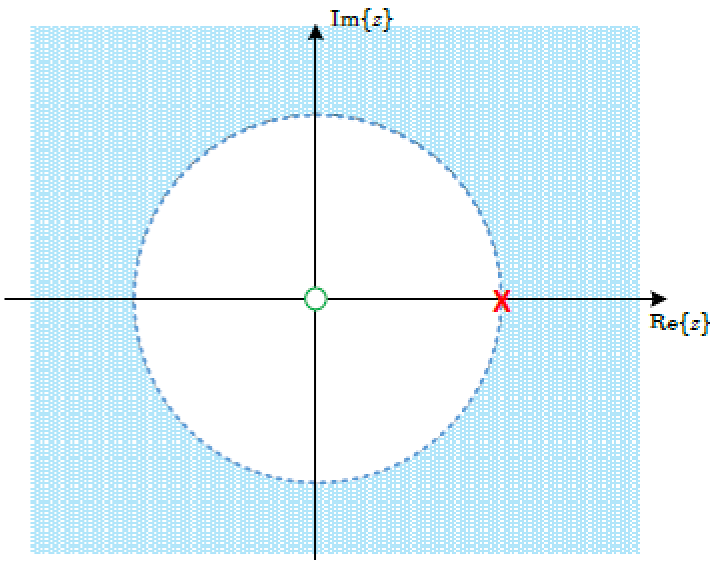
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^{n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z^{-1}| < 1$$

δηλ. $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \iff |z| > 1 \longleftarrow$ ROC : πεδίο σύγκλισης

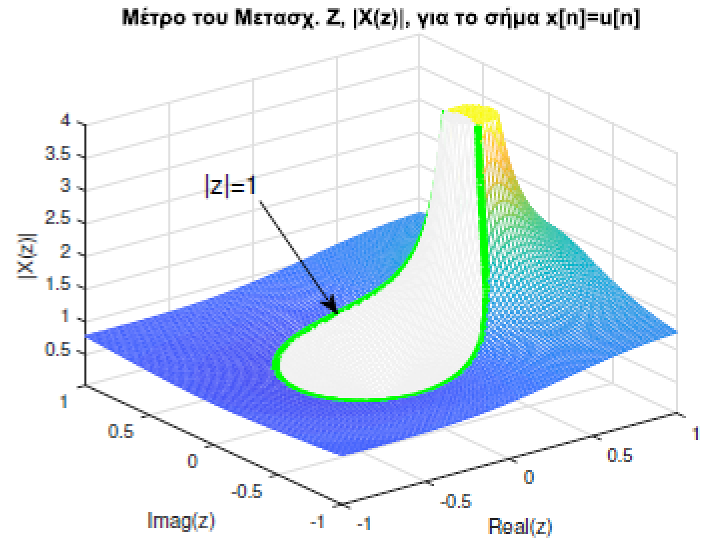
Άρα

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:



(α′) *Περιοχή σύγκλισης.*



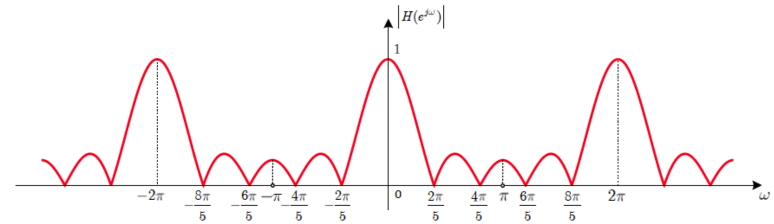
(β′) *Μέτρο μετασχ. Ζ σήματος* $x[n] = u[n]$.

Έχουμε $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}, \; |z|>1$.

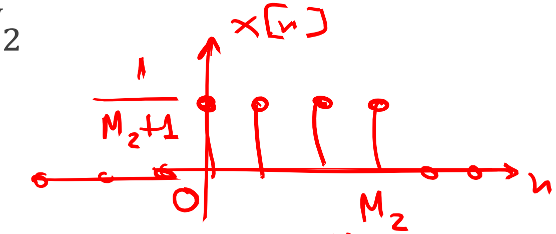
Πόλοι: $z-1=0 \Leftrightarrow z=1$, πόλος στη θέση $z=1$.

Μηδενικά: $z=0$, μηδενικό στη θέση $z=0$.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
  - Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα



$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Είναι $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} z^{-n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n}$

$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1 - z^{-(M_2+1)}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{z^{M_2+1} - 1}{z-1} \cdot \frac{z}{z^{M_2+1}}.$

- Πόλοι: $z - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = 1}$, $z^{M_2+1} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{M_2+1 \text{ πόλοι στο } z = 0}$
- Μηδενικά: $\boxed{z = 0}$, $z^{M_2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow z^{M_2+1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|z| e^{j\theta})^{M_2+1} = e^{j2\pi k}, \; k \in \mathbb{Z}$

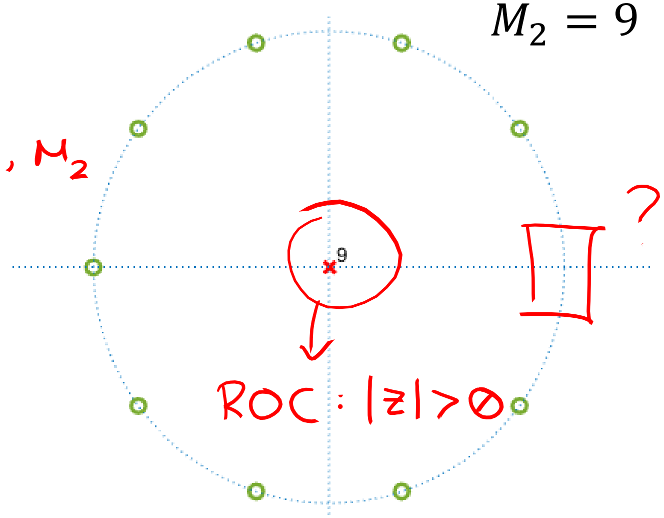
$\Leftrightarrow |z|^{M_2+1} e^{j(M_2+1)\theta} = e^{j2\pi k}$

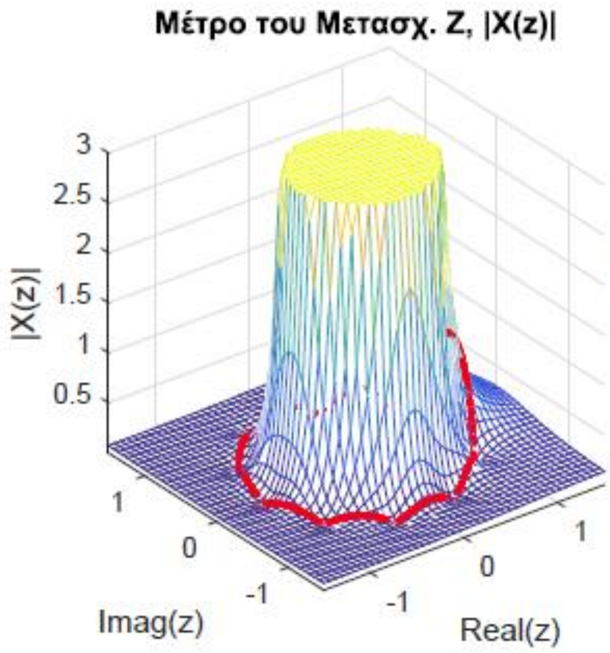
$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$$

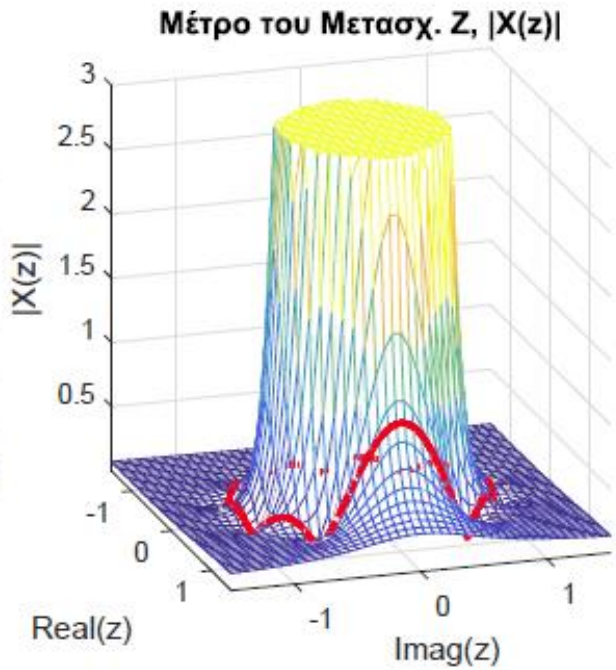
- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

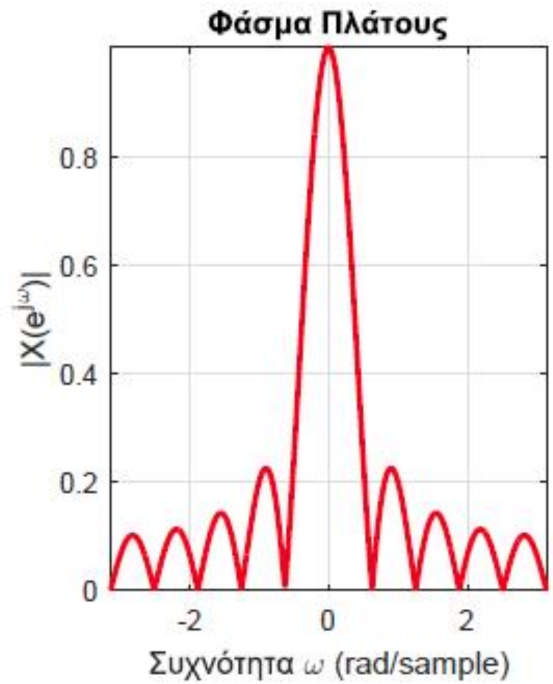
Άρα $\begin{cases} |z|^{M_2+1} = 1 \\ (M_2+1)\theta = 2\pi k \end{cases} = \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \dfrac{2\pi k}{M_2+1} \end{cases}, \quad k = 0, \dots, M_2$

Έχουμε M_2+1 μηδενικά πάνω στο μοναδιαίο κύκλο υπό γωνίες $\theta_k = \dfrac{2\pi k}{M_2+1}$, $k = 0, \dots, M_2$.









• Ιδιότητες Μετασχ. Z

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδιο Σύγκλισης
	$\mathbf{x[n]}$ $\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{X(z)}$ $\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\| > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0,\ n < 0$	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$	

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Ζ του σήματος

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}, \qquad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \qquad |z| > 1/2$$

$R_x \cap R_y = \{ |z| > \frac{1}{2} \}$

Είναι

$$W(z) = X(z) + Y(z) = \frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\cancel{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Πόλοι: $z = \frac{1}{3}$

$|z| > \frac{1}{3}$ ή $|z| < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Επειδή $|z| > \frac{1}{3} \supseteq R_x \cap R_y$, τότε το πεδίο σύγκλισης του $W(z)$ είναι το $|z| > \frac{1}{3}$!

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$. Υπολογίστε το Μετασχ. Ζ του.

Ξέρουμε ότι

$$a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

και

$$x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)z^{-n_0} \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{3}$$

Είναι

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2-2} u[n+2] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]$$

$$= 9\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]}_{y[n+2]} = 9\,y[n+2], \quad y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Άρα

$$X(z) = 9\,Y(z)\,z^2 = 9z^2 \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{3}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z** $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)\,,\ R_x$
  - Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα $x[n] \in \Re$ με ρητό μετασχ. Z που έχει
    - Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$
    - Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση $z = \sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

  Βρείτε μια μορφή για το $X(z)$

1

Αφού $x[n] \in \mathbb{R}$, $x^*[n] = x[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) = X(z)$. Έστω z_0 είναι μηδενικό του $X(z)$, δηλ. $X(z_0) = 0$, και λόγω 1, $X^*(z_0^*) = 0$.

Άρα και το z_0^* αποτελεί μηδενικό του $X(z)$! Όμοια και για τους πόλους του $X(z)$. Οπότε ΚΑΘΕ $x[n] \in \mathbb{R}$ έχει πόλους και μηδενικά σε συζυγή ζεύγη! Άρα:

πόλοι: $z_p = e^{-j\frac{\pi}{8}}$, $z_p^* = e^{j\frac{\pi}{8}}$, μηδενικά: $z_0 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$, $z_0^* = e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Άρα

$$X(z) = A\,\frac{(1 - z_0 z^{-1})(1 - z_0^* z^{-1})}{(1 - z_p z^{-1})(1 - z_p^* z^{-1})}\,,\quad R_x\,,\quad A \in \mathbb{R}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**
  - Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα $x[n] = (2)^n u[n]$, $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε τη συνέλιξή τους

$$x[n] * y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z), \quad R \supseteq R_x \cap R_y$$

$$x[n] = 2^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z|>2$$

$$y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{4}$$

Άρα

$$C(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})} =$$

$$= \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$, με A και B όπως παρακάτω:

$$A = C(z)(1-2z^{-1})\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{1-2z^{-1}}}{(\cancel{1-2z^{-1}})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}\Bigg|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{8}{9}$$

$$B = \ldots = \frac{1}{9}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Z**

Άρα

$$C(z) = \frac{8}{9}\,\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{9}\,\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

πόλος $z=2$

- $|z|>2$
- $|z|<2$

πόλος $z=-\frac{1}{4}$

- $|z|>\frac{1}{4}$
- $|z|<\frac{1}{4}$

$R_c \quad R_x \cap R_y$

$\parallel$

$\{|z|>2\} \cap$

$\{|z|>\frac{1}{4}\}$

Από πίνακες, έχουμε

$$c[n] = \frac{8}{9}\,2^n u[n] + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ